

Das Kepler - Problem im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie

Als ersten Test der Allgemeinen Relativitätstheorie wollen wir die Bewegung eines Testteilchens in einem Schwarzschild-Feld untersuchen. In den folgenden Studien werden wir von der Schwarzschild-Metrik ausgehen. Das Schwarzschildsche Längenelement lautet

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - \frac{2m}{r}} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (628)$$

mit

$$m = \frac{\kappa M}{c^2}. \quad (629)$$

Als ersten Test wollen wir die Planetenbahn des Merkur berechnen. Insbesondere gilt unser Hauptinteresse der beobachteten Perihelverschiebung. Das Perihel einer Planetenbahn ist durch den Abstand nächster Annäherung von der Sonne definiert. Nach dem klassischen $1/r^2$ -Gesetz der Gravitation ist die Planetenbahn geschlossen und das Perihel befindet sich immer am selben Punkt im Raum. Die gemessene Perihelverschiebung des Merkur beträgt $43''$ (43 Bogensekunden) pro Jahrhundert. Dieser Wert liegt um mehrere Größenordnungen über der heutigen Meßgenauigkeit.

Wir wollen nun das relativistische Analogon zum klassischen Kepler-Problem betrachten. Schon im Rahmen der klassischen Mechanik tritt eine Perihelverschiebung auf. Diese wird bewirkt durch die gravitative Wechselwirkung mit den anderen vorhandenen Planeten sowie durch mögliche Abweichungen von einer sphärischen Geometrie. Beispielsweise kann ein durch die Rotation der Sonne bewirktes Quadrupolmoment der Sonne die sphärische Symmetrie strören. Bereits Newton hatte herausgefunden, daß eine Modifikation des Kraftgesetzes zu $1/r^{2+\delta}$ nicht mehr zu geschlossenen Planetenbahnen führt.

Um die Bewegungsgleichungen für den Merkur aufzustellen, werden wir wieder vom Variationsprinzip ausgehen.

$$\delta \int ds = 0. \quad (630)$$

Äquivalent dazu gilt

$$\delta \int \left\{ \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 [\dot{\theta}^2 + \sin^2\theta \dot{\varphi}^2] \right\} ds = 0. \quad (631)$$

Die drei Euler-Lagrange Gleichungen für die Koordinaten θ , φ , t lauten

$$\frac{d}{ds} (r^2 \dot{\theta}) = r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2, \quad (632)$$

$$\frac{d}{ds} (r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}) = 0, \quad (633)$$

$$\frac{d}{ds} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} \right] = 0. \quad (634)$$

Die entsprechende Gleichung für die Koordinate r haben wir nicht abgeleitet. Hier ist es bequemer die Metrik durch ds^2 zu dividieren. Damit folgt

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 \dot{t}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - r^2 (\dot{\theta}^2 + \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2). \quad (635)$$

Mit diesen vier Differentialgleichungen werden wir die Planetenbewegung beschreiben. In der klassischen Mechanik haben wir gelernt, daß die Planetenbewegung in einer Ebene liegt. Dies gilt auch im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie, was wir nun zeigen wollen. Als Anfangsbedingung wählen wir durch Wahl der Achsen $\theta = \pi/2$. Ebenso wählen wir $\dot{\theta} = 0$ für einen anfänglichen Wert von s . Aus Gleichung (632) folgt damit

$$r^2 \dot{\theta} = 0 \quad (636)$$

und somit

$$\dot{\theta} = 0 \quad (637)$$

für alle Werte von s . Damit haben wir auch das Resultat vorliegen, $\theta = \pi/2$ für alle Werte von s . Gleichung (632) ist eine Differentialgleichung erster Ordnung, deren Lösung durch die Anfangsbedingung eindeutig fixiert ist. $\theta = \pi/2$ ist eine offensichtliche Lösung. Wir setzen $\theta = \pi/2$ in Gleichung (633) ein und integrieren

$$r^2 \dot{\varphi} = h = \text{const}. \quad (638)$$

Dies ist der Flächensatz, der auch im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie Gültigkeit hat.

Die Gleichung für die Zeitkoordinate t kann auch sofort integriert werden

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = l = \text{const}. \quad (639)$$

Wir setzen diese drei Resultate in die Gleichung (635) ein.

$$1 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 l^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{h^2}{r^2}. \quad (640)$$

Dies ist eine Differentialgleichung zur Bestimmung von $r(s)$. Wir führen nun eine Transformation durch, indem wir r als Funktion von φ anstatt als Funktion von s betrachten.

Wir führen die folgende Bezeichnung ein

$$r' \equiv \frac{dr}{d\varphi} = \frac{\dot{r}}{\dot{\varphi}}. \quad (641)$$

Wir verwenden $r^2 \dot{\varphi} = h$ und erhalten

$$\dot{r} = \dot{\varphi} r' = \frac{h}{r^2} r'. \quad (642)$$

Damit wird aus Gleichung (640)

$$1 - \frac{2m}{r} = c^2 l^2 - \frac{h^2}{r^4} r'^2 - \frac{h^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r}\right). \quad (643)$$

Die Substitution

$$r = \frac{1}{u} \quad (644)$$

mit

$$r' = -\frac{u'}{u^2} \quad (645)$$

führt auf eine Differentialgleichung für $u(\varphi)$

$$1 - 2mu = c^2 l^2 - h^2 u'^2 - h^2 u^2 (1 - 2mu). \quad (646)$$

Dies reduziert sich auf

$$u'^2 = \frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2} - u^2 + 2mu^3. \quad (647)$$

Wir integrieren und erhalten

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^u du \left(\frac{c^2 l^2 - 1}{h^2} + \frac{2mu}{h^2} - u^2 + 2mu^3 \right)^{-1/2}. \quad (648)$$

Dies ist eine exakte Lösung des Problems. Wir haben damit φ als Funktion von r bestimmt. Um die Rechnungen etwas transparenter zu machen, werden wir einige Transformationen durchführen. Zum Beispiel wollen wir gerne die klassische Ellipse wiederentdecken.

Zunächst verwandeln wir die Differentialgleichung (647) in eine Differentialgleichung zweiter Ordnung durch Differentiation nach φ . Wir erhalten

$$2 u' u'' = \frac{2m}{h^2} u' - 2 u u' + 6 m u^2 u' . \quad (649)$$

Eine der möglichen Lösungen bekommen wir, wenn wir den gemeinsamen Faktor u' gleich null setzen. Aus $u' = 0$ folgt $u = \text{const}$ und damit $r = \text{const}$. Die Kreisbewegung ist also eine Lösung wie in der gewöhnlichen klassischen Mechanik.

Eine andere mögliche Lösung folgt nach Division durch u'

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + 3 m u^2 . \quad (650)$$

Wir vergleichen dieses Resultat mit dem analogen Ausdruck aus der Newtonschen Mechanik. Dort galt

$$u'' + u = \frac{1}{H^2} \frac{f'(r)}{u^2} \quad (651)$$

mit

$$H = r^2 \frac{d\varphi}{dt} = \text{const} . \quad (652)$$

Wir haben dieses Resultat zitiert, ohne es erneut abzuleiten. Eine ausführliche Diskussion des Kepler-Problems im Rahmen der Newtonschen Mechanik findet man in allen guten Lehrbüchern zur klassischen Mechanik, so zum Beispiel in *H. Goldstein, Klassische Mechanik, (Akademische Verlagsgesellschaft, Wiesbaden, 1978)*. Für den Spezialfall des Newtonschen Potentials

$$f(r) = -\frac{\kappa M}{r} \quad (653)$$

ergibt sich

$$u'' + u = \frac{\kappa M}{H^2} . \quad (654)$$

H ist das Doppelte der konstanten Flächengeschwindigkeit. Der analoge Term zur rechten Seite in (654) in der relativistischen Gleichung lautet m/h^2 . Explizit folgt

$$\frac{m}{h^2} = \frac{\kappa M}{c^2 r^4 \left(\frac{d\varphi}{ds}\right)^2} = \frac{\kappa M}{c^2 r^4 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2} . \quad (655)$$

Wir führen nun eine Näherungsbetrachtung durch. Wir wissen bereits, daß für langsam bewegte Körper gilt

$$\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 \simeq \frac{1}{c^2} . \quad (656)$$

Im Kapitel “Gravitation als metrisches Problem” hatten wir abgeleitet: $(ds/dt)^2 \simeq c^2(1 + \epsilon \gamma_{00})$. Wir setzen dies in (655) ein

$$\frac{m}{h^2} \simeq \frac{\kappa M}{r^4 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2} = \frac{\kappa M}{H^2}. \quad (657)$$

Wir sehen also, die relativistische Gleichung unterscheidet sich von der klassischen Gleichung durch den zusätzlichen quadratischen Term $3mu^2$. Außerdem tritt ein leicht verschiedener konstanter Term m/h^2 auf. Wir müssen nun sicherstellen, daß der Term $3mu^2$ klein ist gegenüber dem führenden Term. Das Verhältnis der beiden Terme auf der rechten Seite von (650) ist $3u^2 h^2$. Mit

$$h^2 = r^4 \dot{\varphi}^2 = u^{-4} \dot{\varphi}^2 \quad (658)$$

folgt

$$3r^2 \dot{\varphi}^2 \simeq 3[r(d\varphi/dt)]^2 \frac{1}{c^2}. \quad (659)$$

Setzen wir die entsprechenden Daten für die Merkur-Bahn ein, so ergibt sich unmittelbar als Zahlenwert für dieses Verhältnis: 7.7×10^{-8} .

Die Interpretation der Gleichung (650) ist damit klar. Diese Gleichung entspricht der klassischen Gleichung für ein Potential

$$f(r) = -\frac{\kappa M}{r} - \frac{\gamma}{r^3} \quad (660)$$

mit

$$\gamma = m H^2 = \kappa M h^2. \quad (661)$$

Man beachte jedoch, daß für verschiedene Werte von H die angezeigte Modifikation des Newtonschen Gesetzes verschieden ist. Wir bringen das Potentialgesetz in die Form

$$f(r) = -\frac{\kappa M}{r} \left(1 + \frac{h^2}{r^2}\right). \quad (662)$$

Ferner können wir schreiben

$$u^2 h^2 = \frac{1}{r^2} h^2 \simeq \frac{1}{r^2} r^4 \left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2 \frac{1}{c^2} = r^2 \omega^2 \frac{1}{c^2} = \frac{v_l^2}{c^2}. \quad (663)$$

Hierbei bezeichnet v_l die Umlaufgeschwindigkeit. Somit haben wir

$$f(r) \simeq -\frac{\kappa M}{r} \left[1 + \frac{v_l^2}{c^2}\right]. \quad (664)$$

Da die Planetenbahn ungefähr kreisförmig ist, können wir annehmen

$$v_l = \frac{2\pi r}{T}. \quad (665)$$

T entspricht dem Planetenjahr. Aus dem 3. Keplerschen Gesetz folgt $r^3/T^2 = \text{const}$ und damit $r(v_l/c)^2 = C$. Damit gilt für $f(r)$

$$f(r) \simeq -\frac{\kappa M}{r} \left[1 + \frac{C}{r}\right]. \quad (666)$$

In diesem Ausdruck ist die Winkelgeschwindigkeit eliminiert.

Wir haben bereits gesehen, daß $3m u^2$ ein kleiner Term ist. Also werden wir ein störungstheoretisches Vorgehen anstreben. Wir definieren

$$A = \frac{m}{h^2} \simeq \frac{\kappa M}{H^2} \quad (667)$$

sowie die kleine dimensionslose Größe

$$\epsilon = 3m A \simeq \frac{3\kappa^2 M^2}{c^2 H^2}. \quad (668)$$

Die relativistische Bewegungsgleichung nimmt dann die Form an

$$u'' + u = A + \frac{\epsilon u^2}{A}. \quad (669)$$

Um diese Gleichung zu lösen, machen wir den folgenden Ansatz für die Lösung

$$u(\varphi) = u_0(\varphi) + \epsilon v(\varphi) + O(\epsilon^2). \quad (670)$$

Wir versuchen nun $u_0(\varphi)$ und $v(\varphi)$ zu finden. Einsetzen des Ansatzes (670) in die Differentialgleichung (669) liefert

$$u_0'' + \epsilon v'' + u_0 + \epsilon v = A + \frac{\epsilon u_0^2}{A} + O(\epsilon^2). \quad (671)$$

Wir setzen zunächst die Terme nullter Ordnung gleich

$$u_0'' + u_0 = A. \quad (672)$$

Dies entspricht genau der Gleichung aus der Newtonschen Mechanik. Die Lösung lautet einfach

$$u_0 = A + B \cos(\varphi + \delta), \quad (673)$$

wobei B und δ beliebige Konstanten sind. Durch geeignete Wahl der Achsen können wir δ zu null setzen und wir bekommen die Gleichung einer gewöhnlichen Ellipse

$$u_0 = A + B \cos \varphi . \quad (674)$$

Ebenso gehen wir vor bezüglich der Terme in erster Ordnung in ϵ .

$$v'' + v = \frac{u_0^2}{A} = A + 2 B \cos \varphi + \frac{B^2}{A} \cos^2 \varphi . \quad (675)$$

Nun gilt

$$\cos(2\varphi) = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi = 2 \cos^2 \varphi - 1 . \quad (676)$$

Damit erhalten wir

$$v'' + v = \left(A + \frac{B^2}{2A} \right) + 2 B \cos \varphi + \frac{B^2}{2A} \cos(2\varphi) . \quad (677)$$

Um die allgemeine Lösung zu ermitteln, benötigen wir nur noch eine spezielle Lösung dieser inhomogenen Gleichung. Als Lösungsansatz für diese lineare Differentialgleichung wählen wir nun

$$v = v_a + v_b + v_c , \quad (678)$$

wobei v_a , v_b und v_c Lösungen der folgenden Gleichungen sind:

$$v_a'' + v_a = A + \frac{B^2}{2A} , \quad (679)$$

$$v_b'' + v_b = 2 B \cos \varphi , \quad (680)$$

$$v_c'' + v_c = \frac{B^2}{2A} \cos(2\varphi) . \quad (681)$$

Als Lösungen finden wir leicht

$$\begin{aligned} v_a &= A + \frac{B^2}{2A} , \\ v_b &= B \varphi \sin \varphi , \\ v_c &= -\frac{B^2}{6A} \cos(2\varphi) . \end{aligned} \quad (682)$$

Die Superposition dieser Lösungen ergibt die Gesamtlösung. Wir verbinden diese Lösungen mit der Lösung zur Gleichung nullter Ordnung. Es folgt

$$\begin{aligned} u = u_0 + \epsilon v &= \left(A + \epsilon A + \frac{\epsilon B^2}{2A} \right) + \left(B \cos \varphi - \frac{\epsilon B^2}{6A} \cos(2\varphi) \right) \\ &\quad + \epsilon B \varphi \sin \varphi . \end{aligned} \quad (683)$$

Mit dieser Lösung können wir sofort die Perihelverschiebung berechnen. Nur der letzte Term ist nicht periodisch. Wir bemerken, daß in erster Ordnung in ϵ gilt

$$\cos(\varphi - \epsilon\varphi) = \cos\varphi \cos(\epsilon\varphi) + \sin\varphi \sin(\epsilon\varphi) \simeq \cos\varphi + \epsilon\varphi \sin\varphi. \quad (684)$$

Damit kann die Gesamtlösung geschrieben werden als

$$u = A + B \cos(\varphi - \epsilon\varphi) + \epsilon \left(A + \frac{B^2}{2A} - \frac{B^2}{6A} \cos(2\varphi) \right). \quad (685)$$

Der letzte Term erzeugt nur eine periodische Variation im Radius des Orbits. Nun bedeutet Perihel ein Minimum von r oder äquivalent ein Maximum von $u = 1/r$. Das Maximum ist gegeben, wenn gilt

$$\varphi(1 - \epsilon) = 2\pi n \quad (686)$$

oder näherungsweise

$$\varphi = 2\pi n(1 + \epsilon). \quad (687)$$

Damit bekommen wir für die Perihelverschiebung

$$\delta\varphi = 2\pi\epsilon = 2\pi \frac{3\kappa^2 M^2}{c^2 H^2} \quad (688)$$

pro Umlauf. Im Erdjahrhundert ergibt dies genau die eingangs genannten 43''.

In der Tabelle fassen wir die beobachteten Verschiebungen des Perihels einiger Planeten zusammen und vergleichen mit den theoretischen Resultaten aus der Allgemeinen Relativitätstheorie.

Planet	a (10^6 km)	ϵ	$\Delta\varphi_E$	N	$\Delta\varphi_{Th}$	$\Delta\varphi_{Exp}$
Merkur	57.91	0.2056	0.1038	415	43.03	43.11 ± 0.45
Venus	108.21	0.0068	0.058	149	8.6	8.4 ± 4.8
Erde	149.60	0.0167	0.038	100	3.8	5.0 ± 1.2
Icarus	161.0	0.827	0.115	89	10.3	9.8 ± 0.8

Tabelle: a gibt die große Halbachse der Planetenbahn an. ϵ ist die Bahnexzentrizität, $\Delta\varphi_E$ ist die Perihelverschiebung pro Umlauf, N ist die Zahl der Umläufe pro Erdjahrhundert, $\Delta\varphi_{Th}$ ist die theoretische Perihelverschiebung pro Erdjahrhundert und $\Delta\varphi_{Exp}$ ist die gemessene Perihelverschiebung pro Erdjahrhundert.

Licht im Gravitationsfeld

In diesem Kapitel wollen wir die Ablenkung eines Lichtstrahls im Gravitationsfeld eines Himmelskörpers berechnen. Dabei werden wir von einer rein klassischen Betrachtungsweise des Lichtes ausgehen. Der Wellencharakter des Lichtes sowie jegliche Quanteneffekte werden vollständig vernachlässigt. Wir starten mit zwei entscheidenden Annahmen bei unserer klassischen Diskussion des Verhalten von Licht im Gravitationsfeld: (1) Wie für ein Teilchen mit Masse nehmen wir an, daß die Trajektorie eines Lichtstrahls durch eine geodätische Linie in der vierdimensionalen Raumzeit beschreibbar ist. (2) Im Rahmen der speziellen Relativitätstheorie liegt ein Lichtstrahl im auf dem Lichtkegel, d. h. es gilt stets

$$ds^2 = 0 . \quad (689)$$

Wir nehmen nun zunächst explizit an, daß dieser Sachverhalt auch im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie seine Gültigkeit behält. Also auch in Riemannschen Räumen werden wir von von der Annahme ausgehen, daß Licht durch Null-Geodäten beschrieben werden kann. Ausgehend von diesen Annahmen werden wir die Lichtablenkung im Gravitationsfeld ermitteln. Der Vergleich zwischen theoretischen und experimentellen Resultaten liefert eine Rechtfertigung dieser Annahmen.

Bei der Diskussion von Null-Geodäten müssen wir jedoch bedenken, daß wir hier den Kurvenparameter s , den wir bislang in unseren Rechnungen benutzt haben, nicht mehr verwenden können. Der Grund liegt offensichtlich darin, daß auf einer Null-Geodäten stets $s = 0$ gilt und daß eine Differentiation nach ds keinen Sinn ergibt. Wir müssen statt dessen zurückgehen zum ursprünglichen Konzept der Parallelverschiebung in Riemannschen Räumen.

Die Geodätengleichung ausgedrückt durch einen allgemeinen Kurvenparameter q lautet

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{dx^i}{dq} \right) + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{dq} \frac{dx^k}{dq} = 0 . \quad (690)$$

Diese Gleichung folgt aus der Parallelverschiebung des Tangentenvektors dx^i/dq . Bei der Parallelverschiebung bleibt die Länge des Vektors erhalten. Dies gilt insbesondere auch für einen Nullvektor. Die Differentialgleichung (690) kann aus dem folgenden Variationsproblem abgeleitet werden.

$$\delta \int g_{ij} \frac{dx^i}{dq} \frac{dx^j}{dq} dq = 0 . \quad (691)$$

Unter Verwendung der Schwarzschild-Metrik finden wir für die Variablen φ und t die gleichen Bewegungsgleichungen wie zuvor für ein Teilchen mit Masse. Diese Bewegungsgleichungen hatten wir bei der Diskussion der Perihelverschiebung der Merkur-Bahn bereits abgeleitet. Es gilt

$$r^2 \dot{\varphi} = \tilde{h} = \text{const} , \quad (692)$$

$$\left(1 - \frac{2m}{r}\right) \dot{t} = \tilde{l} = \text{const} . \quad (693)$$

Die Punkte über der Variablen kennzeichnen die Differentiation bezüglich q ,

$$\dot{r} = \frac{dr}{dq} . \quad (694)$$

Wie bei der Diskussion der Planetenbewegung soll auch hier gelten

$$\theta = \frac{1}{2} \pi . \quad (695)$$

Als Folge von $ds = 0$ folgt nun aber als vierte Bewegungsgleichung

$$0 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} c^2 \tilde{l}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 - \frac{\tilde{h}^2}{r^2} . \quad (696)$$

In den weiteren Berechnungen gehen wir genauso vor wie bei der Berechnung der Perihelverschiebung, insbesondere substituieren wir

$$u(\varphi) = \frac{1}{r(\varphi)} . \quad (697)$$

Aus Gleichung (696) folgt

$$0 = c^2 \tilde{l}^2 - \dot{r}^2 - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\tilde{h}^2}{r^2} . \quad (698)$$

Weiterhin haben wir

$$\dot{r} = \frac{dr}{dq} = \frac{dr}{du} \frac{du}{dq} = \frac{dr}{du} \frac{du}{d\varphi} \frac{d\varphi}{dq} = -\frac{1}{u^2} u' \tilde{h} u^2 = -\tilde{h} u' . \quad (699)$$

Dabei haben wir $\dot{\varphi} = \tilde{h}/r^2$ ausgenutzt. Aus (698) ergibt sich

$$0 = c^2 \tilde{l}^2 - \tilde{h}^2 u'^2 - (1 - 2mu) \tilde{h}^2 u^2 . \quad (700)$$

Die Ableitung nach φ liefert

$$0 = -\tilde{h}^2 2 u' u'' - 2 \tilde{h}^2 u u' + 6 m \tilde{h}^2 u^2 u' \quad (701)$$

oder

$$u' \left(u'' + u - 3 m u^2 \right) = 0 . \quad (702)$$

Eine Lösung absurder Art dieser Gleichung ist $u = \text{const}$. Dies würde implizieren, daß Licht in einem festen Abstand r_0 um die Sonne kreist. Aufgrund von Drehimpulsargumenten kann diese merkwürdige Lösung jedoch verworfen werden. Es verbleibt

$$u'' + u = 3 m u^2 . \quad (703)$$

Alternativ können wir diese Gleichung auch aus der Bewegungsgleichung eines massiven Teilchens im Schwarzschild-Feld ableiten. Hierbei gilt

$$u'' + u = \frac{m}{h^2} + 3 m u^2 . \quad (704)$$

Explizites Einsetzen der Konstanten m und h führt auf

$$u'' + u = \frac{\kappa M}{c^2 r^4} \left(\frac{ds}{d\varphi} \right)^2 + 3 \frac{\kappa M u^2}{c^2} . \quad (705)$$

Wir spezialisieren unsere Betrachtungen auf einen Lichtstrahl und bekommen daraus mit der Bedingung $ds = 0$ die Gleichung (703).

Wieder können wir zeigen, daß der Term $3mu^2$ verglichen mit u sehr klein ist. Das Verhältnis der beiden Terme lautet $3mu$. Mit der Definition des Schwarzschild-Radiuses $r_s = 2m$ können wir dieses Verhältnis ausdrücken durch

$$3mu = \frac{3}{2} \frac{r_s}{r} . \quad (706)$$

Dieses Verhältnis entspricht also im wesentlichen dem Schwarzschild-Radius der Sonne von einigen Kilometern verglichen mit dem tatsächlichen Radius von $R_\odot = 7 \cdot 10^5$ km.

Im folgenden betrachten wir $3mu^2$ als Störungsterm und führen die kleine Größe ein

$$\epsilon = 3 m . \quad (707)$$

Dies ergibt

$$u'' + u = \epsilon u^2 . \quad (708)$$

Als Lösungsansatz wählen wir

$$u = u_0 + \epsilon v . \quad (709)$$

Diesen Ansatz setzen wir in die Differentialgleichung ein und erhalten unter Beibehaltung der linearen Terme in ϵ

$$u_0'' + u_0 + \epsilon v'' + \epsilon v = \epsilon u_0^2. \quad (710)$$

Wir setzen die Terme in nullter Ordnung in ϵ gleich

$$u_0'' + u_0 = 0. \quad (711)$$

Die allgemeine Lösung lautet

$$u_0 = A \cos(\varphi + \delta). \quad (712)$$

Durch die Möglichkeit die Richtung der Achsen unseres Koordinatensystems frei im Raum wählen zu können, bestimmen wir wieder $\delta = 0$. Damit bekommen wir

$$u_0 = A \cos \varphi \quad (713)$$

oder

$$r \cos \varphi = \frac{1}{A}. \quad (714)$$

Diese Lösung repräsentiert eine Gerade parallel zur y -Achse, was wir aus dem Zusammenhang $r \cos \varphi = x = \text{const}$ zwischen kartesischen und Kugelkoordinaten leicht ersehen können. Wie erwartet ist in erster Ordnung der Lichtstrahl eine Gerade. Die Konstante $1/A$ ist der Abstand nächster Annäherung des Lichtstrahls von dem Himmelskörper. Wir bezeichnen diese Konstante mit r_0 .

Wir betrachten nun die Terme linear in ϵ

$$v'' + v = u_0^2 = \frac{1}{r_0^2} \cos^2 \varphi = \frac{1}{2 r_0^2} \{1 + \cos(2\varphi)\}. \quad (715)$$

Als Lösungsansatz wählen wir

$$v = \alpha + \beta \cos(2\varphi), \quad (716)$$

wobei α und β zunächst unbekannte Koeffizienten sind. Einsetzen des Lösungsansatzes in die Differentialgleichung ergibt

$$v'' + v = \alpha - 3\beta \cos(2\varphi). \quad (717)$$

Der Koeffizientenvergleich mit (715) zeigt, daß gilt

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{2 r_0^2}, \\ \beta &= -\frac{1}{6 r_0^2}. \end{aligned} \quad (718)$$

Damit folgt

$$v = \frac{1}{2r_0^2} - \frac{1}{6r_0^2} \cos(2\varphi) = \frac{2}{3r_0^2} - \frac{1}{3r_0^2} \cos^2\varphi \quad (719)$$

und insgesamt

$$u = \frac{1}{r_0} \cos\varphi - \frac{\epsilon}{3r_0^2} \cos^2\varphi + \frac{2\epsilon}{3r_0^2}. \quad (720)$$

Die Störterme werden eine geringe Ablenkung im Gravitationsfeld bewirken. Wir wollen die totale Lichtablenkung berechnen. Für die Asymptoten gilt $r = \infty$ und somit $u = 0$. Einsetzen liefert

$$\frac{\epsilon}{3r_0^2} \cos^2\varphi - \frac{1}{r_0} \cos\varphi - \frac{2\epsilon}{3r_0^2} = 0 \quad (721)$$

oder einfacher

$$\cos^2\varphi - \frac{3r_0}{\epsilon} \cos\varphi - 2 = 0. \quad (722)$$

Dies ist eine quadratische Gleichung für $\cos\varphi$. Die Lösung ist

$$\cos\varphi = \frac{3r_0}{2\epsilon} \pm \left(\frac{9r_0^2}{4\epsilon^2} + 2 \right)^{1/2} = \frac{3r_0}{2\epsilon} \left[1 \pm \left(1 + \frac{8\epsilon^2}{9r_0^2} \right)^{1/2} \right]. \quad (723)$$

Damit $\cos\varphi$ stets kleiner als 1 ist, gilt als physikalische Lösung das Minuszeichen vor der Wurzel. Wir entwickeln in erster Ordnung in ϵ

$$\cos\varphi = -\frac{2\epsilon}{3r_0} = -\frac{2m}{r_0}. \quad (724)$$

Aus diesem Resultat wird klar, daß φ in der Nähe von $\pi/2$ liegt, da m/r_0 sehr klein ist. Als Ansatz wählen wir daher

$$\varphi = \frac{\pi}{2} + \delta. \quad (725)$$

Wir nutzen die trigonometrische Relation

$$\cos(\alpha + \beta) = \cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta \quad (726)$$

aus und bekommen damit sofort

$$\sin\delta = \frac{2m}{r_0} \quad (727)$$

und weiter

$$\delta \simeq \frac{2m}{r_0}. \quad (728)$$

Damit folgt für die totale Lichtablenkung als Winkel zwischen den Asymptoten

$$\Delta = 2\delta = \frac{4\kappa M}{c^2 r_0} . \quad (729)$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich für unsere Sonne numerisch eine Lichtablenkung von

$$\Delta = 1.75'' , \quad (730)$$

die bei Sonnenfinsternissen auch beobachtet worden ist. Für r_0 haben wir den Sonnenradius eingesetzt. Der zur Zeit genaueste experimentelle Wert für die Lichtablenkung im Gravitationsfeld der Sonne beträgt $1.76'' \pm 0.02''$. Dieser Wert ist also in exzellenter Übereinstimmung mit dem theoretischen Resultat. In Newtonscher Näherung beträgt die Lichtablenkung genau die Hälfte des in (729) angegebenen Ergebnisses.

Die Null-Geodäten und das Fermatsche Prinzip

Wir leiten nun einen interessanten Zusammenhang ab zwischen dem Prinzip, daß sich Licht entlang von Null-Geodäten in der vierdimensionalen Raum-Zeit ausbreitet und einem altbekannten Theorem der klassischen Optik. Wir gehen von einem Linienelement vom Schwarzschild-Typ aus

$$ds^2 = A^2 c^2 dt^2 + g_{ik} dx^i dx^k \quad (731)$$

mit $i, k = 1, 2, 3$. A^2 und g_{ik} sollen nur von den räumlichen Koordinaten x^i abhängen, d.h., die Metrik ist zeitunabhängig. Der Weg eines Lichtstrahls ist dann charakterisiert durch die beiden folgenden Bedingungen für eine Null-Geodäte.

$$\delta \int \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i, t) dq = 0, \quad (732)$$

$$\mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i, t) = A^2 c^2 \left(\frac{dt}{dq} \right)^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{dq} \frac{dx^k}{dq} = 0 \quad (733)$$

mit $\dot{x}^i = dx^i/dq$.

Wir wollen nun das Integral

$$\mathcal{J} = \int \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i, t) dq \quad (734)$$

für die klassische Trajektorie des Lichtes vergleichen mit dem selben Integral für eine beliebige Trajektorie, die in der Nähe der Null-Geodäten liegt und die die selben Endpunkte P_1 und P_2 im dreidimensionalen Raum hat. Dabei soll stets als Bedingung an die Lichtgeschwindigkeit gelten $\mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i, t) = 0$. Es gibt viele nichtstationäre Kurven dieser Art. Diese Trajektorien können starten zu verschiedenen Zeitpunkten t_1 bei P_1 und können auch enden zu verschiedenen Zeitpunkten t_2 bei P_2 .

Auf der einen Seite ist es evident, daß das Integral den Wert null ergibt, da entsprechend der Voraussetzung bereits der Integrand verschwindet. Auf der anderen Seite können wir durchaus rein formal die Änderung des Integrals in der Nähe der Geodäten berechnen, denn \mathcal{J} bezieht sich auf konkurrierende Trajektorien mit der Einschränkung von gemeinsamen Endpunkten. So finden wir formal

$$\delta \int \mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i, t) dq = \int \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} \delta x^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \delta \dot{x}^i + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \delta t \right] dq. \quad (735)$$

Eine partielle Integration liefert

$$\delta \int \mathcal{L} dq = \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \delta t \right]_{t_1, P_1}^{t_2, P_2} + \int \left\{ \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} - \frac{d}{dq} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) \right] \delta x^i - \frac{d}{dq} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) \delta t \right\} dq \quad (736)$$

Aufgrund der Annahme verschwindet δx^i an den Endpunkten. Wir beobachten, daß der Integrand auf der rechten Seite aufgrund der Euler-Lagrange-Gleichungen, die die Null-Geodäten charakterisieren, verschwindet.

Wir betrachten nun speziell den letzten Term in (736)

$$\frac{d}{dq} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0 . \quad (737)$$

Daraus folgt durch Integration

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = l = \text{const} . \quad (738)$$

Dies ist die Euler-Lagrange-Gleichung für $t(q)$, da gilt $\partial \mathcal{L} / \partial t \equiv 0$. Damit folgt

$$\delta \int \mathcal{L} dq = l [\delta t]_{t_1}^{t_2} = l \delta T , \quad (739)$$

wobei δT die Variation der Zeitdauer für die verschiedenen Wege von P_1 nach P_2 ist. Wir vergleichen nun die beiden Möglichkeiten $\delta \mathcal{J}$ zu berechnen und erhalten als Resultat: Der wirkliche Weg des Lichtes zwischen zwei gegebenen Endpunkten im dreidimensionalen Raum macht die Reisezeit des Lichtes zu einem stationären Wert gegenüber allen erlaubten Wegen. Dies ist genau das Fermatsche Prinzip oder das Prinzip der geringsten Zeit aus der klassischen Optik.

Die Schwarzschild-Lösung in isotropen Koordinaten

Wir hatten die Metrik außerhalb eines Sternes der Masse M als Lösung der Einsteinschen Gleichung abgeleitet. Das Schwarzschild-Linienelement ist gegeben durch

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (dx^0)^2 - \frac{dr^2}{1 - 2m/r} - r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (740)$$

mit $m = \kappa M/c^2$. Der Schwarzschild-Radius ist $r_S = 2m$. Bei der Ableitung des Linienelementes waren wir von einer zeitunabhängigen Metrik und von einer sphärischen Symmetrie des Problems ausgegangen. Charakteristisch für das Schwarzschild-Resultat ist der singuläre Zusammenhang zwischen ds und den gewählten Koordinaten bei $r = 2m$.

Wir wollen nun eine Koordinatentransformation durchführen. Eine Motivation dafür ist, daß singuläre Punkte einer Metrik nach einer Koordinatentransformation verschwinden können. Eine weitere Motivation besteht darin, daß Kosmologen lokal gerne in einem Euklidischen System rechnen, d.h., wir wollen das Linienelement in der Form darstellen

$$ds^2 = A(r) (dx^0)^2 - B(r) d\sigma^2 \quad (741)$$

mit

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (742)$$

oder

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (743)$$

Das Robertson-Walker Linienelement, das wir später noch ableiten werden, ist beispielsweise von diesem Typ. Die Koordinaten, die das Linienelement in diese Form bringen, nennen wir *isotrope* Koordinaten. Wie wir aus der kartesischen Darstellung (742) erkennen, ist keine der räumlichen Koordinaten ausgezeichnet. Um das Schwarzschild-Linienelement in isotrope Koordinaten zu transformieren, werden wir die Winkelanteile beibehalten, aber r durch $\rho(r)$ ersetzen, so daß gilt

$$\begin{aligned} ds^2 &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \lambda^2(\rho) \left[d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \right] \\ &= \left(1 - \frac{2m}{r}\right) c^2 dt^2 - \lambda^2(\rho) d\sigma^2. \end{aligned} \quad (744)$$

Wir müssen nun also $r(\rho)$ und $\lambda(\rho)$ bestimmen. Vergleichen wir die Winkelanteile der Linienelemente, so folgt sofort

$$r^2 = \lambda^2 \rho^2 . \quad (745)$$

Der Vergleich der radialen Anteile führt auf

$$\frac{dr^2}{1 - 2m/r} = \lambda^2 d\rho^2 . \quad (746)$$

Aus diesen beiden Gleichungen folgt durch Elimination von λ

$$\frac{\pm dr}{\sqrt{r^2 - 2mr}} = \frac{d\rho}{\rho} . \quad (747)$$

Wir integrieren und finden

$$\pm \log[(r^2 - 2mr)^{1/2} + (r - m)] = \log \rho + \text{const} . \quad (748)$$

Zur Prüfung des Resultates differenzieren wir die linke Seite.

$$\begin{aligned} \frac{\frac{1}{2}(r^2 - 2mr)^{-1/2}(2r - 2m) + 1}{(r^2 - 2mr)^{1/2} + (r - m)} &= \\ \frac{[(r - m) + (r^2 - 2mr)^{1/2}](r^2 - 2mr)^{-1/2}}{(r^2 - 2mr)^{1/2} + (r - m)} &= \frac{1}{(r^2 - 2mr)^{1/2}} . \end{aligned} \quad (749)$$

Zur Bestimmung des Vorzeichens und der Konstanten in (748) betrachten wir große $r \gg 2m$. Damit ergibt sich

$$\pm \log(2r) = \log \rho + \text{const} . \quad (750)$$

Wir möchten erreichen, daß für große r die Variablen ρ und r gleich werden. Dies bedeutet, wir müssen das positive Vorzeichen wählen sowie

$$\text{const} = \log 2 \quad (751)$$

setzen. Damit haben wir

$$[r^2 - 2mr]^{1/2} + (r - m) = 2\rho . \quad (752)$$

Um diese algebraische Gleichung zu lösen, stellen wir zunächst fest, daß gilt

$$[(r - m) + \sqrt{r^2 - 2mr}][r - m - \sqrt{r^2 - 2mr}] = m^2 . \quad (753)$$

Diesen Ausdruck dividieren wir jeweils durch die rechte und linke Seite von Gleichung (752) und erhalten

$$(r - m) - \sqrt{r^2 - 2mr} = \frac{m^2}{2\rho}. \quad (754)$$

Hierzu addieren wir die Gleichung (752) und bekommen

$$r - m = \rho + \frac{m^2}{4\rho}. \quad (755)$$

Dies führt auf

$$r = \rho + \frac{m^2}{4\rho} + m = \rho \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2. \quad (756)$$

Aus $r^2 = \lambda^2 \rho^2$ folgt

$$\lambda = \frac{r}{\rho} = \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^2. \quad (757)$$

Damit können wir den Vorfaktor im Schwarzschild'schen Linienelement schreiben als

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{2m}{r}\right) &= 1 - \frac{2m}{\rho(1 + m/(2\rho))^2} = \frac{\rho(1 + m/(2\rho))^2 - 2m}{\rho(1 + m/(2\rho))^2} \\ &= \frac{\rho + m + m^2/(4\rho) - 2m}{\rho(1 + m/(2\rho))^2} = \frac{[1 - m/(2\rho)]^2}{[1 + m/(2\rho)]^2}. \end{aligned} \quad (758)$$

Somit lautet schließlich das Linienelement in isotropen Koordinaten

$$ds^2 = \frac{[1 - m/(2\rho)]^2}{[1 + m/(2\rho)]^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2\rho}\right)^4 d\sigma^2. \quad (759)$$

Für $m = 0$ ergibt sich wieder exakt die Lorentz-Form. Diese Metrik hat *keine* Polstelle mehr.

Bemerkungen zur Konstanz der Lichtgeschwindigkeit

In isotropen Koordinaten lautet das Quadrat des Schwarzschild-Längenelementes

$$ds^2 = \frac{[1 - m/(2r)]^2}{[1 + m/(2r)]^2} c^2 dt^2 - \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^4 d\sigma^2 \quad (760)$$

mit

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 . \quad (761)$$

Hierbei haben wir wieder ρ in r umbenannt. Mit der Bedingung

$$\mathcal{L}(x^i, \dot{x}^i, t) = A^2 c^2 \left(\frac{dt}{dq}\right)^2 + g_{ik} \frac{dx^i}{dq} \frac{dx^k}{dq} = 0 \quad (762)$$

und $\dot{x}^i = dx^i/dq$ folgt für das Quadrat der Lichtgeschwindigkeit

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 = c^2 \left(1 - \frac{m}{2r}\right)^2 \left(1 + \frac{m}{2r}\right)^{-6} . \quad (763)$$

v ist hierbei die Lichtgeschwindigkeit in diesem gewählten Koordinatensystem. Die eigentlich wichtige Aussage ist, daß Licht sich entlang von Null-Geodäten bewegt. In dem gewählten Koordinatensystem ist die Koordinatengeschwindigkeit des Lichtes an allen gegebenen Punkten in allen Richtungen gleich. Aber die Geschwindigkeit hängt vom radialen Abstand

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (764)$$

vom Gravitationszentrum ab. v ist aber unabgänglich von den Winkeln.

Der Lichtstrahl im (x, y, z) -Raum ist charakterisiert durch das Fermatsche Prinzip

$$\delta \int_{P_1}^{P_2} dt = \delta \int_{P_1}^{P_2} \frac{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}{v} = 0 . \quad (765)$$

Näherungsweise erhalten wir durch Taylor-Entwicklung

$$\frac{c}{v} \simeq 1 + \frac{2m}{r} . \quad (766)$$

Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl} &= g_{im} R_{jkl}^m \\
 &= g_{im} \left(\Gamma_{jk|l}^m - \Gamma_{jl|k}^m + \Gamma_{rl}^m \Gamma_{jk}^r - \Gamma_{rk}^m \Gamma_{jl}^r \right) \\
 &= g_{im} (g^{mr} [jk, r])_{|l} - g_{im} (g^{mr} [jl, r])_{|k} + g_{im} \left(\Gamma_{rl}^m \Gamma_{jk}^r - \Gamma_{rk}^m \Gamma_{jl}^r \right) \quad (767)
 \end{aligned}$$

Bisher haben wir nur den Krümmungstensor durch die Christoffel - Symbole ausgedrückt. Wir betrachten nun den ersten Summanden:

$$\begin{aligned}
 g_{im} (g^{mr} [jk, r])_{|l} &= [jk, i]_{|l} + [jk, r] g_{im} g^{mr}{}_{|l} \\
 &= [jk, i]_{|l} + [jk, r] \left((g_{im} g^{rm})_{|l} - g^{mr} g_{im|l} \right) \quad (768)
 \end{aligned}$$

Der erste Ausdruck in der Klammer verschwindet wegen $g_{im} g^{rm} = \delta_i^r$. $g_{im|l}$ läßt sich aber durch Christoffel- Symbole ausdrücken:

$$\begin{aligned}
 g_{im|l} &= \frac{1}{2} (g_{lm|i} + g_{im|l} - g_{li|m}) + \frac{1}{2} (g_{li|m} + g_{im|l} - g_{lm|i}) \\
 &= \frac{1}{2} g_{rm} g^{rp} (g_{lp|i} + g_{ip|l} - g_{li|p}) + \frac{1}{2} g_{ri} g^{rp} (g_{lp|m} + g_{mp|l} - g_{lm|p}) \\
 &= g_{rm} \Gamma_{li}^r + g_{ri} \Gamma_{lm}^r \quad (769)
 \end{aligned}$$

Damit ist:

$$g_{im} (g^{mr} [jk, r])_{|l} = [jk, i]_{|l} - \Gamma_{jk}^m (g_{rm} \Gamma_{li}^r + g_{ri} \Gamma_{lm}^r) \quad (770)$$

Setzen wir diese Ausdrücke in (767) ein, so erhalten wir:

$$\begin{aligned}
 R_{ijkl} &= [jk, i]_{|l} - g_{rm} \Gamma_{li}^r \Gamma_{jk}^m - g_{ri} \Gamma_{lm}^r \Gamma_{jk}^m \\
 &\quad - ([jl, i]_{|k} - g_{rm} \Gamma_{ki}^r \Gamma_{jl}^m - g_{ri} \Gamma_{km}^r \Gamma_{jl}^m) + g_{ir} \Gamma_{ml}^r \Gamma_{jk}^m - g_{ir} \Gamma_{mk}^r \Gamma_{jl}^m \\
 &= \frac{1}{2} (g_{ki|j|l} + g_{ji|k|l} - g_{jk|i|l}) - \frac{1}{2} (g_{li|j|k} + g_{ji|l|k} - g_{jl|i|k}) \\
 &\quad + g_{rm} \left(\Gamma_{ki}^r \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{li}^r \Gamma_{jk}^m \right) \\
 &= \frac{1}{2} (g_{ki|j|l} + g_{jl|i|k} - g_{jk|i|l} - g_{li|j|k}) \\
 &\quad + g_{rm} \left(\Gamma_{ki}^r \Gamma_{jl}^m - \Gamma_{li}^r \Gamma_{jk}^m \right) \quad (771)
 \end{aligned}$$

Dabei wurde einmal m in r umbenannt. Aus diesem Ausdruck lassen sich sofort die Symmetrieeigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors ablesen:

$$\begin{aligned}
 R_{klij} &= \frac{1}{2} \left(g_{ik|l|j} + g_{lj|k|i} - g_{li|k|j} - g_{jk|l|i} \right) \\
 &\quad + g_{rm} \left(\Gamma_{ik}^r \Gamma_{lj}^m - \Gamma_{jk}^r \Gamma_{li}^m \right) \\
 &= R_{ijkl}
 \end{aligned} \tag{772}$$

$$\begin{aligned}
 R_{jikl} &= \frac{1}{2} \left(g_{jk|i|l} + g_{il|j|k} - g_{ik|j|l} - g_{lj|i|k} \right) \\
 &\quad + g_{rm} \left(\Gamma_{jk}^r \Gamma_{li}^m - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{lj}^m \right) \\
 &= -R_{ijkl}
 \end{aligned} \tag{773}$$

Dabei wurde die Vertauschbarkeit der Ableitungen und die Symmetrie von g_{ij} ausgenutzt.

Symmetrien und Erhaltungssätze

Der Lagrange Formalismus erlaubt es in der Feldtheorie, systematisch die Konstanten der Bewegung abzuleiten und zu identifizieren. Wir wollen nun ausgehend von ganz allgemeinen Annahmen zeigen, daß jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation, die die Lagrangedichte eines Systems invariant läßt, eine Konstante der Bewegung und ein Erhaltungssatz zugeordnet ist. Dieser Zusammenhang fundamentaler Natur zwischen Symmetrien eines Systems und den entsprechenden Erhaltungssätze ist durch das Theorem von Noether gegeben.

Ein physikalisches System sei durch die unabhängigen Variablen $x_k (k = 1, 2, \dots, n)$ und die abhängigen Variablen $\varphi_a (a = 1, 2, \dots, m)$ beschrieben. Die abhängigen Variablen (Felder) werden als Zustandsfunktionen des Systems bezeichnet.

Wir machen nun die Annahme, daß es eine Transformation gibt unter der das Wirkungsfunktional eines Systems invariant bleibt. Dazu betrachten wir folgende infinitesimale Symmetrietransformation:

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \delta x_\mu \\ \varphi'_a(x') &= \varphi_a(x) + \delta\varphi_a(x) \end{aligned} \quad (774)$$

Die Variation der unabhängigen Variablen δx_μ kann zum Beispiel eine Translation oder eine Drehung sein und soll an dieser Stelle nicht näher spezifiziert werden, so daß der obige Ansatz ganz allgemein ist.

Die Invarianz der Wirkung J unter der Transformation (774) bedeutet:

$$\delta J = \int d^4x' \mathcal{L}'(x') - \int d^4x \mathcal{L}(x) = 0 . \quad (775)$$

Bevor wir diesen Ausdruck näher untersuchen, ist es nützlich die lokale Variation der Zustandsfunktion $\bar{\delta}\varphi_a$ an der Stelle x einzuführen

$$\bar{\delta}\varphi_a(x) = \varphi'_a(x) - \varphi_a(x) . \quad (776)$$

Unter Benutzung von Gl. (774) erhält man folgenden Zusammenhang zwischen der lokalen ($\bar{\delta}$) und der globalen Variation (δ):

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\varphi_a(x) &= \varphi'_a(x) - [\varphi'_a(x') - \delta\varphi_a(x)] \\ &= \delta\varphi_a(x) - [\varphi'_a(x') - \varphi'_a(x)] \end{aligned}$$

$$= \delta\varphi_a(x) - \delta x_\mu \cdot \frac{\partial\varphi_a(x)}{\partial x_\mu} . \quad (777)$$

Dieses Ergebnis gilt bis zur 1. Ordnung in den Variationen δ . In der vorletzten Zeile wurde die Taylorentwicklung von $\varphi'_a(x')$ um $x'_\mu = x_\mu$ eingesetzt. Das obige Resultat kann als Operatorgleichung interpretiert werden, d.h.

$$\bar{\delta} = \delta - \delta x_\mu \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu} , \quad (778)$$

wobei die Einsteinsche Summenkonvention gelten soll. Als Nächstes betrachten wir die Viererableitung der globalen Variation δ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_\mu} [\delta\varphi_a(x)] &= \frac{\partial}{\partial x_\mu} [\varphi'_a(x') - \varphi_a(x)] \\ &= \left[\frac{\partial\varphi'_a(x')}{\partial x'_\mu} - \frac{\partial\varphi_a(x)}{\partial x_\mu} \right] + \left[\frac{\partial\varphi'_a(x')}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\varphi'_a(x')}{\partial x'_\mu} \right] \\ &= \delta \left[\frac{\partial\varphi_a(x)}{\partial x_\mu} \right] + \left[\frac{\partial\varphi'_a(x')}{\partial x'_\nu} \cdot \frac{\partial x'_\nu}{\partial x_\mu} - \frac{\partial\varphi'_a(x')}{\partial x'_\mu} \right] \\ &= \delta \left[\frac{\partial\varphi_a(x)}{\partial x_\mu} \right] + \frac{\partial\varphi'_a(x')}{\partial x'_\nu} \cdot \frac{\partial}{\partial x_\mu} (\delta x_\nu) + 0(\delta^2). \end{aligned} \quad (779)$$

Man beachte, daß die globale Variation δ mit der Ableitung ∂_μ nicht vertauscht.

Wir untersuchen nun die Konsequenzen der Invarianz des Funktionals aus Gl. (775).

Es gilt

$$0 = \delta J = \int d^4x' \delta\mathcal{L} + \int d^4x' \mathcal{L} - \int d^4x \mathcal{L} , \quad (780)$$

wobei die Lagrangedichte sich gemäß Gl. (774) transformiert, d.h. $\mathcal{L}'(x') = \mathcal{L}(x) + \delta\mathcal{L}(x)$. Entsprechend erhält man folgenden Ausdruck für das transformierte Volumenelement aus Gl. (780):

$$d^4x' = \text{Det} \left(\frac{\partial x'_\mu}{\partial x_\nu} \right) \cdot d^4x , \quad (781)$$

wobei der erste Faktor auf der rechten Seite dieser Gleichung die Jacobi Determinante der Transformation ist. Eine kurze Rechnung ergibt unter Benutzung von Gl. (774)

$$d^4x' = \left[1 + \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\delta x^\mu) + 0(\delta^2 x) \right] \cdot d^4x . \quad (782)$$

Wir setzen nun dieses Ergebnis in Gl. (780) ein und erhalten

$$\begin{aligned}\delta J &= \int d^4x \delta \mathcal{L} + \int d^4x \left[\mathcal{L} + \mathcal{L} \cdot \frac{\partial}{\partial x^\mu} (\delta x_\mu) \right] - \int d^4x \delta \mathcal{L} \\ &= \int d^4x \left[\bar{\delta} \mathcal{L} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} \cdot (\delta x_\mu) \right] + \int d^4x \mathcal{L} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \cdot (\delta x_\mu) , \quad (783)\end{aligned}$$

wobei wir im 1. Integral aus der 1. Zeile die Relation (778) eingesetzt haben. Wir bemerken, daß die Zusammenfassung der letzten zwei Terme genau der Viererdivergenz eines Vierervektors entspricht, d.h. $\partial(\mathcal{L} \cdot \delta x^\mu)/\partial x^\mu$.

Im nächsten Schritt schreiben wir den 1. Term als

$$\begin{aligned}\bar{\delta} \mathcal{L}(\varphi_a, \partial_\mu \varphi_a) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} \cdot \bar{\delta} \varphi_a(x) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \cdot \bar{\delta}(\partial_\mu \varphi_a) \\ &= \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_a} - \partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi_a)} \right] \bar{\delta} \varphi_a + \left[\partial^\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi_a)} \right] \bar{\delta} \varphi_a + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi_a)} \partial^\mu (\bar{\delta} \varphi_a).\end{aligned} \quad (784)$$

Bei der Umformung des letzten Terms wurde die Tatsache ausgenutzt, daß $\bar{\delta}$ mit der Ableitung ∂_μ vertauscht, da die lokale Variation gemäß der Definition (776) lediglich auf die abhängigen aber nicht auf die unabhängigen Variablen wirkt, d.h. $\bar{\delta}(\partial_\mu \varphi) = \partial_\mu(\bar{\delta} \varphi)$. Während der 1. Term in der eckigen Klammer der obigen Gleichung genau der Euler Lagrange Gleichung entspricht und somit identisch Null ist, bilden die letzten beiden Terme erneut die Viererdivergenz eines Lorenz Vektors. Es folgt

$$\bar{\delta} \mathcal{L} = \partial^\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi_a)} \cdot \bar{\delta} \varphi_a \right] . \quad (785)$$

Einsetzen dieses Ergebnisses in Gl. (783) ergibt:

$$0 = \delta J = \int d^4x \partial^\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi_a)} \cdot \bar{\delta} \varphi_a + \mathcal{L} \cdot \delta x^\mu \right\} , \quad (786)$$

oder nach Einsetzen der Relation (776)

$$\partial^\mu \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi_a)} \cdot \delta \varphi_a - \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial^\mu \varphi_a)} \partial_\nu \varphi_a - g_{\mu\nu} \mathcal{L} \right] \cdot \delta x^\nu \right\} = 0 . \quad (787)$$

Das ist das berühmte Noethersche Theorem, welches besagt, daß jeder kontinuierlichen Symmetrietransformation bei der das Wirkungsfunktional eines Systems invariant bleibt ein erhaltener Strom zugeordnet ist.

Offensichtlich stellt Gl. (787) eine Kontinuitätsgleichung dar. Der Ausdruck in der Klammer entspricht einem Viererstrom, den wir f_μ nennen wollen. Wir integrieren diese Gleichung nach den räumlichen Variablen und erhalten sofort die zugehörige erhaltene Ladung Q :

$$\begin{aligned} 0 &= \int dV \partial^\mu f_\mu(x) = \int d^3x \partial^0 f_0(x) - \int d^3x \vec{\nabla} \cdot \vec{f}(x) \\ &= \partial_t \int d^3x f_0(x) - \oint_O d\vec{F} \cdot \vec{f}(x) = \partial_t \int d^3x f_0(x) , \end{aligned} \quad (788)$$

$$Q = \int d^3x f_0(x) = \text{const} . \quad (789)$$

Das Oberflächenintegral, welches durch die Anwendung des Gaußsche Satzes resultiert, verschwindet durch die Wahl einer geeigneten Integrationsoberfläche und der physikalischen Randbedingung, daß die Felder lokalisiert sind. Wir betonen noch, daß die an dieser Stelle benutzten Bezeichnungen “Strom” und “Ladung” im weiteren Sinne zu verstehen sind. Die eingeführte Größe f_μ kann sehr wohl eine Energie oder einen Impuls repräsentieren, d.h. eine beliebige physikalische Größe, die in einem System erhalten ist.

Als illustratives Beispiel dieser Theorie, wollen wir den Energie-Impuls Tensor der klassischen Elektrodynamik diskutieren. Als Spezialfall der Symmetrietransformation aus Gl. (774) betrachten wir eine reine Translation. Damit lauten die Transformationsgleichungen

$$\begin{aligned} x'_\mu &= x_\mu + \alpha_\mu \\ \varphi'_a(x') &= \varphi_a(x) \end{aligned} \quad (790)$$

Für beliebige Raum-Zeit Verschiebungen α_μ besagt das Theorem von Noether, daß ein Tensor, den wir $T_{\mu\nu}$ nennen, existiert mit

$$\partial^\mu T_{\mu\nu} = 0 , \quad (791)$$

$$T_{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial^\mu \varphi_a)} \cdot \partial_\nu \varphi_a - g_{\mu\nu} \mathcal{L} , \quad (792)$$

der gemäß Gl. (787) die Kontinuitätsgleichung (791) erfüllt. Nach der räumlichen Integration von Gl. (791) erhalten wir in Analogie zu den Gleichungen (788), (789) als

korrespondierende Erhaltungsgröße den Viererimpuls p_ν :

$$p_\nu = \int d^3x T_{0\nu} = \text{const.} \quad (793)$$

Die nullte Komponente dieser Gleichung drückt genau die Energieerhaltung aus

$$p_0 = \int d^3x T_{00} = \int d^3x \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_t \varphi_a)} \cdot \partial_t \varphi_a - \mathcal{L} \right\} = \int d^3x \mathcal{H}, \quad (794)$$

wobei \mathcal{H} die Hamiltondichte und $\partial \mathcal{L} / \partial(\partial_t \varphi_a) = \pi_a$ den kanonisch konjugierten Impuls repräsentieren. Daraus schließen wir, daß Invarianz des Wirkungsfunktionals bei reinen Translationen zur Energie-Impuls Erhaltung führt.

Die Lagrangedichte der klassischen Elektrodynamik lautet

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{16\pi} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (795)$$

mit den antisymmetrischen Feldstärketensor $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$, bzw.

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & -E_x & -E_y & -E_z \\ E_x & 0 & -B_z & B_y \\ E_y & B_z & 0 & -B_x \\ E_z & -B_y & B_x & 0 \end{pmatrix}. \quad (796)$$

Die Feldgleichung, welche die Zustandsfunktion A_μ erfüllt, ist die Maxwell-Gleichung:

$$\square A_\mu = \frac{4\pi}{c} j_\mu, \quad \text{mit } \partial^\mu A_\mu = 0. \quad (797)$$

Der Zusammenhang zwischen dem Viererpotential $A_\mu = (\Phi, \vec{A})$ und den Feldstärken \vec{E} , \vec{B} ist durch

$$\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \vec{\nabla} \Phi \quad (798)$$

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A},$$

gegeben. Die Lagrangedichte aus Gl. (795), ausgedrückt durch die Feldstärken, lautet

$$\mathcal{L} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 - \vec{B}^2). \quad (799)$$

Die allgemeine Formel (792) ergibt folgenden Ausdruck für den Energie-Impuls Tensor $T_{\mu\nu}$:

$$T^{\alpha\beta} = -\frac{1}{4\pi} g^{\alpha\mu} F_{\mu\lambda} \partial^\mu A^\lambda - g^{\alpha\beta} \mathcal{L} , \quad (800)$$

dessen Komponenten die folgende Struktur haben:

$$T^{00} = \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (\Phi \vec{E}) , \quad (801)$$

$$T^{0i} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_{(i)} + \frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \cdot (A_i \vec{E}) , \quad (802)$$

$$T^{i0} = \frac{1}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B})_{(i)} + \frac{1}{4\pi} [(\vec{\nabla} \times \Phi \vec{B})_{(i)} - \partial_t (\Phi E_i)] , \quad (803)$$

mit $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 0$ und $\partial_t \vec{E} = \vec{\nabla} \times \vec{B}$. Räumliche Integration der Gleichungen (801) und (802) ergibt die folgenden Erhaltungsgrößen des elektromagnetischen Feldes:

$$\int d^3x T^{00} = \frac{1}{8\pi} \int d^3x (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) \quad \mapsto \quad \text{Energie} \quad (804)$$

$$\int d^3x T^{0i} = \frac{1}{4\pi} \int d^3x (\vec{E} \times \vec{B})_{(i)} \quad \sim \quad c \cdot \text{Impuls} . \quad (805)$$

Ferner bemerken wir, daß die Kontinuitätsgleichung (791) die kovariante Verallgemeinerung des Poynting Theorems darstellt:

$$\partial_t \frac{1}{8\pi} (\vec{E}^2 + \vec{B}^2) + \vec{\nabla} \cdot \left[\frac{c}{4\pi} (\vec{E} \times \vec{B}) \right] = -\vec{j} \cdot \vec{E} , \quad (806)$$

wobei die einzelnen Terme dieser Gleichung der Energiedichte, Energiefluß (Poynting-Vektor $\vec{S} = c/(4\pi) (\vec{E} \times \vec{B})$) bzw. der Arbeit, die von den Feldern an den Quellen verrichtet wird, entsprechen.

Wir fassen nun die Eigenschaften des Energie-Impuls Tensors $T_{\mu\nu}$ noch einmal zusammen:

- (i) $T_{\mu\nu} = 0$, in Abwesenheit von Feldern.
- (ii) $T_{\mu\nu}$ ist ein Tensor 2. Stufe, d.h. von Rang 2.
- (iii) $T_{\mu\nu}$ ist divergenzfrei, d.h. $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$.
- (iv) $T_{\mu\nu}$ ist symmetrisch, d.h. $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$.

Alle diese Eigenschaften mit Ausnahme von (iii) bleiben unverändert in gekrümmten Räumen. Die Verallgemeinerung von (iii) auf gekrümmte Räume lautet nach der Ersetzung der Ableitung ∂_μ mit der kovarianten Ableitung D_μ

$$\partial_\alpha T^{\alpha\beta} + \Gamma_{\mu\beta}^\beta T^{\mu\alpha} + \Gamma_{\mu\alpha}^\alpha T^{\beta\mu} = 0, \quad (807)$$

wobei die $\Gamma_{\mu\alpha}^\alpha$ Christoffel-Symbole repräsentieren. Die Benutzung der kovarianten Ableitung D_μ ist eine Konsequenz der Forderung von lokaler Eichinvarianz, die an physikalischen Theorien allgemein gestellt wird. Damit wird die Unabhängigkeit der Theorie von der lokalen Wahl der Koordinaten erreicht.

Fragmente zur Kosmologie

Bevor wir uns ausgehend von der Allgemeinen Relativitätstheorie mit konkreten kosmologischen Modellen befassen, wollen wir in diesem Kapitel in mehr oder weniger fragmentarischer Form bereits etabliertes Wissen sowie auch gegenwärtige Spekulationen über die Evolution des Universums zusammentragen. Dies bedingt, daß wir an dieser Stelle auf explizite Rechnungen und Beweise verzichten wollen. Wesentliche Erkenntnisse sind dem Buch

I. D. Novikov, Evolution of the Universe, (Cambridge University Press, Cambridge, 1983)

entnommen. Die globale Entwicklung des gesamten Universums soll diskutiert werden. Ziel der Kosmologie ist es, mathematische und physikalische Modelle zu konstruieren, die die generellen Eigenschaften der Struktur und der Entwicklung des Universums beschreiben. Hauptforschungsgebiete in der gegenwärtigen Kosmologie sind die frühe Entstehungsphase des Universums und als bislang nur unbefriedigend erklärtes Phänomen die Bildung von Galaxien.

Das Universum als Ganzes ist eine Ansammlung von Galaxienhaufen. Die einzelnen Galaxienhaufen unterscheiden sich dabei stark in ihrer Größe und in der Zahl der einzelnen Sterne. Die typische Längenskala ist Megaparsec. Ein Parsec entspricht dem Abstand, aus dem der Abstand Erde - Sonne unter einem Winkel von einer Bogensekunde erscheint. Ein Parsec beträgt 3.26 Lichtjahre. Der Abstand einzelner Galaxienhaufen beträgt typisch 30 Megaparsec (Mpc). Es gibt aber auch Haufen von Galaxienhaufen, sogenannte Superhaufen. Aufgrund astrophysikalischer Beobachtungen ist das Universum im großen Rahmen isotrop mit einer Genauigkeit von $10^{-3} - 10^{-4}$. Das Universum ist also eine inhomogene Struktur in kleinen Gebieten, aber homogen im Großen mit einer typischen Längenskala von 1000 Mpc.

Es ist nun ein allgemeines Resultat der Newtonschen sowie der Einsteinschen Theorie: Eine hohle, sphärisch symmetrische Schale von Materie erzeugt kein Gravitationsfeld in ihrem Innern. Aus dieser Erkenntnis heraus wurde schon frühzeitig die Behauptung abgeleitet: Das Universum kann nicht stationär sein, da Gravitation in ihm wirkt. In der Tat scheint auch die globale Struktur des Universums stark zeitabhängig zu sein.

Die mittlere Materiedichte des Universums beträgt etwa

$$\rho \simeq 3 \cdot 10^{-31} \text{ g/cm}^3 . \quad (808)$$

Diese Zahl ist jedoch aufgrund der Unkenntnis der Ruhemasse der Neutrinos und des möglichen Vorhandenseins von Dunkelwolken mit einer großen Unsicherheit behaftet. Die mittlere Materiedichte kann durchaus auch zwei Größenordnungen größer sein.

Es gibt Supergalaxien mit Massen, die 10^{13} Sonnenmassen entsprechen. Unsere Galaxis, die Milchstraße, hat etwa 10^{11} Sonnenmassen. Der Virgo-Haufen ist beispielsweise ein Haufen von etwa 10^4 Galaxien. Es existieren auch Superhaufen, d.h. Haufen von Haufen. In Dimensionen größer als 100 - 200 Mpc ist jedoch das Universum homogen.

Um die Bewegung von Galaxien in Haufen von Galaxien richtig beschreiben zu können, scheint es notwendig zu sein, eine versteckte Masse in diesen Galaxienhaufen zu postulieren. Die versteckte Masse könnte durchaus ein bis zwei Größenordnungen größer sein als die sichtbare Masse der Galaxien.

Basis für das Studium kosmologischer Probleme ist die Allgemeine Relativitätstheorie von A. Einstein. Zu den Grundlagen der Einsteinschen Gravitationstheorie gehört der empirische Sachverhalt: Träge und schwere Masse stimmen überein mit einer Genauigkeit besser als $1:10^{12}$. Die moderne Kosmologie ist auch verknüpft mit den Arbeiten von A. A. Friedmann aus den Jahren 1922 - 24. Er konstruierte Modelle, die die Bewegung von Materie im gesamten Universum aufgrund der Gravitationswirkung beschreiben. Friedmann zeigte, daß das Universum nicht in Ruhe sein kann, es ist kein stationäres Gebilde. Das Universum muß entweder kontrahieren oder expandieren. Die Dichte muß also entweder abnehmen oder zunehmen. Die Einsteinschen Gleichungen angewandt auf das gesamte Universum erlauben keine stationären Lösungen. Allein schon die Entwicklung der einzelnen Sterne, der Verbrauch ihrer Energie, das Auftreten von Prozessen wie den der Radioaktivität ist unvereinbar mit der Stationarität. Beim Studium von Friedmann - Universen verwendet man als natürliches Koordinatensystem das mitbewegte Koordinatensystem der Galaxien.

Im Jahr 1929 entdeckte Hubble durch die Messung der Rotverschiebung die Expansion des Universums. Die Geschwindigkeit entfernter Galaxien kann mit Hilfe des Dopplereffektes bestimmt werden. Die Messung der Spektrallinien zeigt eine Rotverschiebung auf. Die Fluchtgeschwindigkeit v der Galaxien ist umso größer, je weiter sie voneinander entfernt sind. Es gilt der einfache Zusammenhang

$$v = H R , \quad (809)$$

wobei H die Hubble-Konstante bezeichnet. Ihr numerischer Wert beträgt

$$H \simeq 75 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} = [13 \cdot 10^9 \text{ Jahre}]^{-1} . \quad (810)$$

Es ist jedoch keineswegs so, daß sich alle Galaxien nur vor der Erde auf der Flucht befinden, sondern daß jeder Beobachter in jeder Galaxie das gleiche Phänomen beobachten würde. Auf niedrigere Dimensionen übertragen, ähnelt der Prozeß dem Abstand von Punkten, die auf einem Luftballon, der aufgeblasen wird, aufgemalt sind. Als empirischen Sachverhalt halten wir fest: Das Universum expandiert. Für die entferntesten Galaxien erreicht die Expansionsgeschwindigkeit die Lichtgeschwindigkeit. Aufgrund der Gravitationswechselwirkung wird die Expansion des Universums gebremst. Diese Abbremsung der Expansion kann schon mit Hilfe der Newtonschen Gesetze berechnet werden.

Aus dem Inversen der Hubble-Konstanten kann das Alter T des Universums abgeschätzt werden.

$$T = \frac{1}{H} \simeq \frac{1}{75} \text{ km}^{-1} \text{ s Mpc} = 13 \cdot 10^9 \text{ Jahre} . \quad (811)$$

Diese Zahl ist jedoch mit einer Unsicherheit von etwa 7 Milliarden Jahre behaftet.

Daraus ergeben sich natürlich sofort die Fragen: In was expandiert das Universum? Warum expandiert das Universum? Was hat den Galaxien die Expansionsgeschwindigkeit gegeben? Was war "vor" der Entstehung des Universums? Mit diesen Fragen verlassen wir den Bereich gängiger Physik. Weder die Newtonsche noch die Einsteinsche Theorie können diese Fragen beantworten. Es bleiben offene Fragen nach dem Ursprung der Welt, nach dem Auslöser. Was war "vor" der Singularität? Wie lautete die Zustandsgleichung der Materie am Anfang?

Eine weitere wesentliche Frage, die letztlich auch unsere Weltanschauung prägen kann, lautet: Wie sieht die Zukunft der Expansion unseres Universums aus? Entfernen sich jeweils zwei Galaxien stets weiter voneinander weg? Oder dreht sich die Expansion durch die Gravitationswechselwirkung in eine Kontraktion um? Dieses Problem ist eng verwandt mit dem Raketenproblem aus der klassischen Mechanik. Eine Rakete kann sich dem Gravitationsfeld der Erde entziehen, wenn ihre Anfangsgeschwindigkeit größer als die Fluchtgeschwindigkeit ist. Übertragen auf die Expansion des Universums existiert ein kritischer Wert ρ_{krit} der Materiedichte. Der numerische Wert beträgt etwa

$$\rho_{\text{krit}} = 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} . \quad (812)$$

Daher hängt die genaue Bestimmung der mittleren Materiedichte im Universum eng zusammen mit dem weiteren Schicksal des Universums. Ist die beobachtete mittlere Materiedichte kleiner als der kritische Wert so expandiert das Universum stets weiter. Auf-

grund der gegenwärtigen empirischen Daten entspricht dieser Sachverhalt den tatsächlichen Gegebenheiten. Der Zusammenhang zwischen der kritischen Dichte ρ_{krit} und der Hubble-Konstanten lautet

$$H^2 = \frac{8\pi}{3} \kappa \rho_{\text{krit}} . \quad (813)$$

Die Krümmung des Raumes ist negativ für $\rho < \rho_{\text{krit}}$, sie ist positiv für $\rho > \rho_{\text{krit}}$. Wenn die räumliche Krümmung des Universums negativ ist, erstreckt sich der Raum ins Unendliche und enthält unendliche viele Himmelskörper oder Galaxien. Dieses Universum nennt man offen. Ist hingegen die räumliche Krümmung positiv, so ist der dreidimensionale Raum geschlossen und endlich. Das geschlossene Universum ist jedoch unbegrenzt. In einem geschlossenen Universum würde ein Flug immer geradeaus zum Ausgangspunkt zurückführen. In diesem Sinn ist das Universum geschlossen.

Als Analogie können wir eine zweidimensionale Kugelfläche betrachten. Der Ursprung des Koordinatensystems sei der Nordpol. Die Länge des Äquators und die Flächen auf der Kugel wachsen zuerst an, sie erreichen dann ein Maximum und werden schließlich wieder null. Das geschlossene Universum enthält eine endliche Zahl von Galaxien.

Es gibt das Problem der versteckten Masse im Universum. In diesem Zusammenhang ist auch die nichtverschwindende Ruhemasse des Neutrinos von Bedeutung. Sie hätte die kosmologische Konsequenz eines eventuell wieder kontrahierenden Universums. Nach der gegenwärtigen Meinung gilt jedoch $\rho \sim 0.1 \rho_{\text{krit}}$.

Eine weitere wichtige Frage in diesem Zusammenhang lautet: Gravitiert das Vakuum? Haben die virtuellen Teilchen im Vakuum eine Gravitationswechselwirkung? Kann diese Wechselwirkung verantwortlich sein für das kosmologische Glied in den Einstein-Gleichungen, für den Λ -Term? Die "Vakuumflüssigkeit" erfüllt uniform den gesamten Raum. Der Vakuum-Druck müßte mit in die Gravitationsgleichungen einbezogen werden. Nach Zeldovich erzeugen die Vakuumeffekte eine repulsive Wechselwirkung. Die Theorie der Vakuumgravitationswechselwirkung ist jedoch erst im Anfangsstadium. Das kosmologische Glied ist vermutlich sehr klein. Abschätzungen ergeben

$$\Lambda = 3 \cdot 10^{-57} \text{ cm}^{-2} . \quad (814)$$

Damit wäre diese Repulsion auf der Erde etwa 10^{23} mal kleiner als die gravitative Anziehung und somit kaum meßbar.

Anfang der 60er Jahre wurden Quasare entdeckt. Ihre Luminosität ist etwa 10 - 30 mal größer als die von Galaxien. Die größten maximal gemessenen Entfernungen liegen bei etwa 10^{10} pc.

Quasare emittieren etwa 100 mal mehr Licht als Galaxien. Der Hauptanteil kommt aus dem Kern dieser exotischen Objekte. Quasare sind vermutlich Kerne von Galaxien in einem extremen Stadium von Aktivität. Quasare sind auch Quellen von extrem starker Radiostrahlung.

Eine der zentralen Fragen der heutigen Forschung beschäftigt sich mit der Entwicklung des Universums in der Nähe der Ursprungssingularität. Verschiedene Modelle können hierbei durchaus verschiedene chemische Zusammensetzungen des heutigen Universums bewirken. Als wesentliche Annahme im Friedmann-Modell geht die Homogenität und Isotropie der Materie auch im Bereich der Singularität ein. Im Bereich des Ursprungs selber müssen natürlich auch Quanteneffekte miteinbezogen werden. Das Friedmann-Modell kann verfolgt werden bis die Dichte des Universums die Kernmateriedichte von $\rho \sim 10^{14}$ g/cm³ erreicht. Phasenübergänge der Materie spielen eine wichtige Rolle in der Anfangsphase des Universums, zum Beispiel der Übergang von der Quark-Gluon Phase in die Kernmateriephase oder hadronische Phase.

Wichtige Variablen zur Beschreibung der Anfangsphase des Universums sind die Entropie S sowie die Leptonenzahl L . L ist im wesentlichen die Differenz der Neutrinos und Antineutrinos pro Baryon plus die Differenz der Zahl der Elektronen und Positronen pro Baryon des Universums. Diese beiden Zahlen bestimmen im wesentlichen die chemische Zusammensetzung des Universums. Das ursprünglich heiße Universum kühlt sich durch die Expansion langsam ab.

Die entdeckte 3° K Hintergrundstrahlung erlaubte eine Unterscheidung zwischen Modellen eines kalten und heißen Universums in der Anfangsphase. Die Hintergrundstrahlung wurde von Gamov vorhergesagt. Die Entdeckung dieser Strahlung erfolgte durch A.A. Penzias und R.W. Wilson von den Bell Laboratories. Die Hintergrundstrahlung entspricht einer Planck-Verteilung um eine Temperatur von 2.9° K. Die Hintergrundstrahlung ist isotrop besser als 10^{-4} . Die totale Energiedichte der Hintergrundstrahlung ist um einen Faktor 30 mal größer als die Energiedichte aller anderen Strahlung. Die Anzahl der Photonen pro cm³ durch die Hintergrundstrahlung beträgt etwa 500. Jeder m³ des Universum enthält etwa 1 Atom, aber etwa 10^9 Photonen. Die Energie der Hintergrundstrahlung ist etwa um einen Faktor 10^3 mal kleiner als die middle-

re Massendichte des Universums. Eine Hintergrundstrahlung bestehend aus Neutrinos sollte auch existieren, diese wurde jedoch bis jetzt noch nicht nachgewiesen. Vergleicht man die Zahl der Neutrinos pro cm^3 mit der entsprechenden Zahl von Protonen, so bekommt man etwa 10^9 . Hätte das Neutrino eine Ruhemasse, so würde die Gravitation und die Masse des Universums dominiert durch Neutrinos. Dies wäre eine spekulative Erklärung der vermuteten Dunkelmaterie. Wir würden demnach also in einem Neutrino-Universum leben.

Ein ladungssymmetrisches Universum (Materie und Antimaterie kommt in gleicher Häufigkeit vor) würde sich auch in der Hintergrundstrahlung zeigen. Die daraus resultierende Modifikation wurde jedoch nicht nachgewiesen. Offensichtlich leben wir in einem ladungsunsymmetrischen Universum.

Die Bildung der Elementarteilchen erfolgte in der ersten Sekunde des Universums. In den ersten 5 Minuten wurde der Kernbrennstoff der Sonnen erzeugt. Jedoch wurden nur die leichtesten Elemente in der Anfangsphase erzeugt, keinesfalls aber die schweren Elemente. Die schweren Elemente werden im Sonneninnern und bei der Explosion von Supernovae erzeugt. Das He/p-Verhältnis ist signifikant für die ersten 5 Minuten. In dem Zeitraum $10 \text{ s} < t < 100 \text{ s}$ passierte die Elektron - Positron Annihilation. In den ersten 10^6 Jahren wurde Wasserstoff neutralisiert. Das Ausflocken der Materie in galaktische Objekte erfolgte erst später. Vermutlich führten Gravitationsinstabilitäten zum Ausflocken und zu einer Kondensation. Die mittlere Dichte der Materie in Galaxien beträgt etwa $\rho \sim 10^{-24} \text{ g/cm}^3$. Die Gesetze der Gasdynamik beschreiben die Kondensation der Materie. Die Gravitation bewirkt die Konzentration der Materie. Der Gasdruck verhindert den Gravitationskollaps. Die Theorie der Galaxienbildung ist bisher keineswegs abgeschlossen, es ist ein äußerst aktuelles Forschungsgebiet. Das Resultat hängt stark von den Anfangsbedingungen ab, die aber nur ungenügend bekannt sind.

Aufgrund der Rechnungen von S. Hawking können sogar schwarze Löcher zerstrahlen. Ein schwarzes Loch emittiert Teilchen und Antiteilchen aus dem Vakuum mit einer nichtverschwindenden Rate. Dies führt zu einem stetigen Massenverlust des schwarzen Loches. Wird keine Masse zugeführt, so führt diese stetige Abstrahlung schließlich zum Tod des schwarzen Loches. Jedoch beträgt die Zerfallszeit eines schwarzen Loches typischerweise 10^{66} Jahre.

Einführende Betrachtungen zur Robertson - Walker Metrik

Bevor wir mit konkreten Lösungen der Einsteinschen Gleichungen für kosmologische Probleme starten, wollen wir einleitend einige allgemeine Annahmen erläutern. Wir starten mit den folgenden Hypothesen:

1.) Die Materieverteilung des Universums ist homogen, so wie es auch der Beobachtung in großen Abständen entspricht.

2.) Die Geometrie des Raumes sei bestimmt durch die Materieverteilung. Aufgrund der ersten Annahme folgt, daß auch die Geometrie homogen ist.

Mach's Originalhypothese (*Die Trägheit eines einzelnen Körpers ist durch die Gegenwart aller anderen Körper im Universum bestimmt.*) wird durch diese Annahmen nicht direkt berührt.

Ferner machen wir die drei folgenden einschränkenden Annahmen:

1.) Die Eigenzeit eines mitbewegten Koordinatensystems kann als globale Zeitkoordinate dienen.

2.) Der dreidimensionale Raum, der zu konstanten Werten dieser Zeitkoordinaten gehört, ist lokal isotrop.

3.) Zwei beliebige Punkte des dreidimensionalen Raumes zu einer festen Zeit sind äquivalent.

Wir wollen zunächst Punkt 1.) etwas ausführlicher diskutieren. Es stellt sich die Frage: Was zeichnet diese eine Zeitkoordinate aus und führt zu einer Preisgabe einer vollständig kovarianten Behandlung kosmologischer Probleme. Die Wahl dieses mitbewegten Koordinatensystems (Gaußsches Koordinatensystem) bedeutet, daß zu einem gegebenen Zeitpunkt die Materie im Universum im Mittel in Ruhe ist. Es ist das geodätische Koordinatensystem.

Wir betrachten beispielsweise eine endliche Region des Raumes, gefüllt mit einer dichten Wolke freifallender Teilchen. Wir nehmen an, jedes Teilchen trage eine kleine Uhr und trägt einen festen Satz räumlicher Koordinaten x^i , die wir bei $t = 0$ der Uhr festlegen. Die Raum-Zeit-Koordinaten (\vec{x}, t) eines Ereignisses seien dann so definiert, daß wir \vec{x} als die räumliche Koordinate des Teilchens nehmen und t von der Uhr des Teilchens ablesen. Das gewählte Koordinatennetz wird also durch die Wolke der Teilchen mitgeschleppt, während die Zeit durch Uhren festgelegt wird, die fest in diesem Netz verankert wird. Dieses Koordinatensystem ist nützlich für den gesamten Raumbereich,

der durch die Teilchen besetzt wird und für die Zeitbereiche, in denen sich die Teilchentrajektorien nicht kreuzen.

Durch die Wahl dieses Koordinatensystems nimmt die Metrik eine besonders einfache Struktur an. Wir betrachten nun eine dreidimensionale Hyperfläche S , die in einem vierdimensionalen Raum mit hyperbolischer Metrik $(+1, -1, -1, -1)$ eingebettet ist. Wir nehmen an, daß jeder Vektor n^i , der normal zu S ist, die Bedingung erfüllt

$$n^0 n_0 + (n^1 n_1 + n^2 n_2 + n^3 n_3) > 0, \quad (815)$$

d.h., er ist zeitartig. Daraus folgt, die Fläche ist im Raum orientiert, sie ist raumartig.

Wir führen in der Fläche S drei Koordinaten ein, x^{*1}, x^{*2}, x^{*3} , die jeden Punkt P^* innerhalb S charakterisieren. Durch jeden Punkt P^* der dreidimensionalen Fläche S betrachten wir die Geodäten, die orthogonal zu S bei P^* sind. Wir führen das räumliche Koordinatensystem mit. Wir definieren jetzt unser Koordinatensystem folgendermaßen: x^0 sei die Bogenlänge entlang der Geodäten zwischen P^* und P , $x^1 = x^{*1}$, $x^2 = x^{*2}$, $x^3 = x^{*3}$. Entlang einer solchen Geodäten haben wir also $(dx^0)^2 = ds^2$ entsprechend der Definition und somit $g_{00} = 1$. Dies entspricht der Wahl des mitbewegten Koordinatensystems.

Die Wahl dieses Gaußschen Koordinatensystems erlaubt uns neben $g_{00} = 1$ weitere Einschränkungen der Metrik. Jeder Vektor in S mit der Struktur $(0, a, b, c)$ muß entsprechend der Konstruktion orthogonal sein zu einem Vektor $(1, 0, 0, 0)$ tangential zur x^0 -Linie am selben Punkt. Man kann nun zeigen, daß die Metrik die Bedingung erfüllen muß

$$g_{01} = g_{02} = g_{03} = 0 \quad (816)$$

auf der Hyperfläche S . Dies folgt aus einfachen differentialgeometrischen Überlegungen. In einem metrischen Raum sind die g_{ik} -Koeffizienten lokal als das Skalar-Produkt der Einheitstangentenvektoren entlang der Koordinatenlinien zu verstehen. $g_{ij} = e_i \cdot e_j$. Diese Einheitstangentenvektoren bilden lokal auch einen tangentialen Euklidischen Raum. Aufgrund der Wahl des Koordinatensystems ist offensichtlich $g_{0i} = 0$ innerhalb S . Damit hat das Quadrat des Längenelementes innerhalb von S die Form $(dx^0)^2 + g_{ik} dx^i dx^k$. Wir wollen nun zeigen, daß diese Struktur auch außerhalb von S gilt. Wir betrachten dazu die Gleichung der Geodäten

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \Gamma_{\mu\nu}^\alpha \frac{dx^\mu}{ds} \frac{dx^\nu}{ds} = 0. \quad (817)$$

Entlang der Geodäten variiert nur x^0 , und es gilt $ds = dx^0$. Daraus folgt für $\alpha = i = 1, 2, 3$ und $dx^0 = ds$ und $dx^0/ds = 1$, daß gelten muß

$$\Gamma_{00}^i = 0 \quad (818)$$

und somit

$$[00, i] = 0 \quad (819)$$

und weiter

$$2 \frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} - \frac{\partial g_{00}}{\partial x^i} = 0 . \quad (820)$$

Nun gilt für jede Geodäte aufgrund von $ds = dx^0$ das Ergebnis $g_{00} = 1$. Daraus folgt

$$\frac{\partial g_{0i}}{\partial x^0} = 0 \quad (821)$$

entlang der x^0 -Linie. Daraus folgt weiter, daß die Elemente g_{01}, g_{02}, g_{03} des metrischen Tensors, die null sind auf S , auch null bleiben in dem gesamten Bereich, der durch die Geodäten überdeckt wird. Die Metrik im vierdimensionalen Raum in Gaußschen Koordinaten nimmt allgemein die Struktur an

$$ds^2 = (dx^0)^2 + g_{ij}(x^0, x^1, x^2, x^3) dx^i dx^j \quad \text{mit } i, j = 1, 2, 3 . \quad (822)$$

Aus der zweiten Annahme der lokalen Isotropie folgt, daß die Raumkoordinaten in der sphärisch symmetrischen Kombination auftreten müssen.

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 \quad (823)$$

oder äquivalent

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2 . \quad (824)$$

Damit ist das Linienelement in Gaußschen Koordinaten insgesamt ausdrückbar durch

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{G(x^0, r)} d\sigma^2 , \quad (825)$$

wobei G nicht von θ und φ abhängt. Die exponentielle Schreibweise garantiert das Beibehalten der Signatur, somit verschwindet auch $(\det g_{ik})$ niemals.

Das dritte Postulat schließlich garantiert, daß zwei Beobachter an verschiedenen Raumpunkten dieselbe Physik feststellen. Der einzige Unterschied zwischen den beiden Beobachtern kann daher nur in der Meßskala liegen. Diese Skala wird bestimmt durch das Verhältnis

$$\frac{\exp[G(x^0, r_1)]}{\exp[G(x^0, r_2)]} . \quad (826)$$

Dieses Verhältnis ist unabhängig von x^0 . Daher muß gelten

$$G(x^0, r_1) = G(x^0, r_2) + F(r_1, r_2). \quad (827)$$

Wir wählen nun einen festen Wert von r_2 . Daraus folgt

$$G(x^0, r_1) = g(x^0) + f(r_1) \quad (828)$$

und

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)+f(r)} d\sigma^2. \quad (829)$$

Diese Form basiert ausschließlich auf Symmetrieargumenten.

Die Robertson - Walker Metrik

Wir machen nun weiterführende Untersuchungen zum Friedmann - Modell des Universums. Unter der Annahme eines homogenen und isotropen Universums wollen wir in diesem Kapitel die Einstein - Gleichung lösen und die Metrik ermitteln. Ähnlich wie beim Vorgehen zur Bestimmung der Schwarzschild - Metrik werden wir auch in diesem Fall zunächst die nichtverschwindenden Christoffel - Symbole berechnen. Wieder werden wir von dem Sachverhalt ausgehen, daß alle diese Christoffel - Symbole in der Geodätengleichung enthalten sind. Daher werden wir zuerst aus dem Variationsprinzip die Euler - Lagrange - Gleichungen ableiten und durch Vergleich mit der allgemeinen Struktur der Geodätengleichung die Christoffel - Symbole festlegen.

Mit

$$\mathcal{L} = (\dot{x}^0)^2 - e^G \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) \quad (830)$$

und

$$G(x^0, r) = g(x^0) + f(r) \quad (831)$$

gilt

$$\delta \int \mathcal{L} ds = 0. \quad (832)$$

Wir benutzen also wieder die Koordinaten x^0 , r , θ , φ . Daraus leiten wir nun die Euler - Lagrange - Gleichungen für die einzelnen Variablen ab. Die Euler - Lagrange - Gleichungen für die Variablen x^i lauten generell

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^i} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^i} = 0. \quad (833)$$

Bezüglich der Zeitkoordinate x^0 gilt offensichtlich

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^0} = 2 \dot{x}^0 \quad (834)$$

und

$$\frac{d}{ds} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^0} \right) = 2 \ddot{x}^0. \quad (835)$$

Weiter folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^0} = -g' e^G \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right). \quad (836)$$

Wir fassen (835) und (836) entsprechend (833) zusammen und bekommen so

$$\ddot{x}^0 + \frac{1}{2} g' e^G \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) = 0 . \quad (837)$$

Hierbei definieren wir abkürzend

$$\begin{aligned} g'(x^0) &= \frac{d}{dx^0} g(x^0) , \\ f'(r) &= \frac{d}{dr} f(r) . \end{aligned} \quad (838)$$

Bezüglich der Variablen r folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} = -2 e^G \dot{r} \quad (839)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{r}} &= -2 e^G \ddot{r} - 2 \dot{r} \frac{d}{ds} e^G = -2 e^G \ddot{r} - 2 \dot{r} e^G \frac{d}{ds} \left(g(x^0) + f(r) \right) \\ &= -2 e^G \ddot{r} - 2 \dot{r} e^G \left(g'(x^0) \dot{x}^0 + f'(r) \dot{r} \right) . \end{aligned} \quad (840)$$

Weiter gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial r} = -e^G f'(r) \left(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) - e^G \left(2 r \dot{\theta}^2 + 2 r \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) \quad (841)$$

Wir fassen die Terme (840) und (841) zusammen, dividieren durch $(-2 e^G)$ und erhalten

$$\ddot{r} + \frac{1}{2} f' \dot{r}^2 + g' \dot{x}^0 \dot{r} - \left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r} \right) \left(r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2 \right) = 0 . \quad (842)$$

Bezüglich der Variablen θ folgt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} = -2 e^G r^2 \dot{\theta} \quad (843)$$

und weiter

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} &= -2 r^2 e^G \frac{dG}{ds} \dot{\theta} - 4 e^G r \dot{r} \dot{\theta} - 2 e^G r^2 \ddot{\theta} \\ &= -2 r^2 e^G \dot{\theta} (g' \dot{x}^0 + f' \dot{r}) - 2 e^G r^2 \ddot{\theta} - 4 r \dot{r} e^G \dot{\theta} . \end{aligned} \quad (844)$$

Außerdem gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = -2 r^2 e^G \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 . \quad (845)$$

Zusammenfassen von (844) und (845) sowie Division durch $(-2 e^G r^2)$ führt auf

$$\ddot{\theta} + 2\left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r}\right) \dot{r} \dot{\theta} + g' \dot{x}^0 \dot{\theta} - \sin \theta \cos \theta \dot{\varphi}^2 = 0 . \quad (846)$$

Schließlich betrachten wir noch die Euler - Lagrange - Gleichung für die Variable φ .

Es gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = -2 e^G r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \quad (847)$$

und somit

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} &= -2 r^2 e^G \sin^2 \theta \dot{\varphi} (g' \dot{x}^0 + f' \dot{r}) - 4 e^G \sin^2 \theta \dot{\varphi} r \dot{r} \\ &\quad - 4 e^G r^2 \sin \theta \cos \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} - 2 r^2 e^G \sin^2 \theta \ddot{\varphi} . \end{aligned} \quad (848)$$

Außerdem gilt

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 0 . \quad (849)$$

Wir dividieren (848) durch $(-2 e^G r^2 \sin^2 \theta)$ und erhalten damit

$$\ddot{\varphi} + 2\left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r}\right) \dot{r} \dot{\varphi} + g' \dot{x}^0 \dot{\varphi} + 2 \cot \theta \dot{\theta} \dot{\varphi} = 0 . \quad (850)$$

Wir können nun die nichtverschwindenden Christoffel-Symbole direkt ablesen. Zur Erinnerung geben wir noch einmal die Geodätengleichung an. Sie lautet

$$\ddot{x}^i + \Gamma_{jk}^i \dot{x}^j \dot{x}^k = 0 \quad (851)$$

mit

$$\dot{x}^j \equiv \frac{dx^j}{ds} . \quad (852)$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^0 &= \frac{1}{2} g' e^G , \\ \Gamma_{22}^0 &= \frac{1}{2} g' e^G r^2 , \\ \Gamma_{33}^0 &= \frac{1}{2} g' e^G r^2 \sin^2 \theta , \\ \Gamma_{01}^1 &= \frac{1}{2} g' , \\ \Gamma_{11}^1 &= \frac{1}{2} f' , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Gamma_{22}^1 &= -r^2 \left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r} \right), \\
\Gamma_{33}^1 &= -r^2 \left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta, \\
\Gamma_{02}^2 &= \frac{1}{2} g', \\
\Gamma_{12}^2 &= \frac{1}{2} f' + \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta, \\
\Gamma_{03}^3 &= \frac{1}{2} g', \\
\Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{2} f' + \frac{1}{r}, \\
\Gamma_{23}^3 &= \cot \theta.
\end{aligned} \tag{853}$$

Es ist ferner

$$g = \det(g_{ik}) = -e^{3g} e^{3f} r^4 \sin^2 \theta \tag{854}$$

und somit

$$\sqrt{-g} = e^{3g/2} e^{3f/2} r^2 \sin \theta. \tag{855}$$

Damit folgt weiter

$$\log \sqrt{-g} = \frac{3}{2} g(x^0) + \frac{3}{2} f(r) + 2 \log r + \log |\sin \theta|. \tag{856}$$

Ferner ist leicht einzusehen, daß gilt

$$\Gamma_{00|i}^i = 0, \tag{857}$$

denn es galt bereits $\Gamma_{00}^i = 0$. Weiterhin haben wir

$$\begin{aligned}
\Gamma_{11|i}^i &= \frac{1}{2} e^G (g'' + g'^2) + \frac{1}{2} f'', \\
\Gamma_{22|i}^i &= \left[\frac{1}{2} e^G (g'' + g'^2) - \left(\frac{1}{2} f'' + \frac{1}{r} f' + \frac{1}{r^2} \right) \right] r^2, \\
\Gamma_{33|i}^i &= \left[\frac{1}{2} e^G (g'' + g'^2) - \left(\frac{1}{2} f'' + \frac{1}{r} f' \right) \right] r^2 \sin^2 \theta - \cos^2 \theta.
\end{aligned} \tag{858}$$

Wir benötigen ferner die folgenden Größen

$$\begin{aligned}
\Gamma_{0j}^i \Gamma_{0i}^j &= \frac{3}{4} g'^2, \\
\Gamma_{1j}^i \Gamma_{1i}^j &= \frac{1}{2} g'^2 e^G + \frac{1}{4} f'^2 + 2 \left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r} \right)^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} g'^2 e^G + \frac{3}{4} f'^2 + \frac{2}{r^2} + 2 \frac{f'}{r}, \\
\Gamma_{2j}^i \Gamma_{2i}^j &= \frac{1}{2} g'^2 e^G r^2 - 2 r^2 \left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r} \right) + \cot^2 \theta \\
&= \left[\frac{1}{2} e^G g'^2 - \frac{1}{2} f'^2 - \frac{2}{r} f' - \frac{2}{r^2} + \frac{1}{r^2} \cot^2 \theta \right] r^2, \\
\Gamma_{3j}^i \Gamma_{3i}^j &= \frac{1}{2} g'^2 e^G r^2 \sin^2 \theta - 2 r^2 \left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r} \right)^2 \sin^2 \theta - 2 \sin \theta \cos \theta \cot \theta \\
&= \left[\frac{1}{2} e^G g'^2 - \frac{1}{2} f'^2 - \frac{2}{r} f' - \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cot^2 \theta \right] r^2 \sin^2 \theta. \tag{859}
\end{aligned}$$

Damit haben wir Ausdrücke ermittelt, um die Feldgleichungen mit den noch unbekannt-ten Funktionen $g(x^0)$ und $f(r)$ aufzustellen. Wir verwenden

$$\Gamma_{ji}^i = \left(\log \sqrt{-g} \right)_{|j} \tag{860}$$

und schreiben

$$\begin{aligned}
R_{ij} &= \Gamma_{ik|j}^k - \Gamma_{ij|l}^l + \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{lk}^k \Gamma_{ij}^l \\
&= \left(\log \sqrt{-g} \right)_{|i|j} - \Gamma_{ij|l}^l + \Gamma_{lj}^k \Gamma_{ik}^l - \Gamma_{ij}^l \left(\log \sqrt{-g} \right)_{|l} \tag{861}
\end{aligned}$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned}
R_{00} &= \frac{3}{2} g'' + \frac{3}{4} g'^2, \\
R_{11} &= \frac{3}{2} f'' - \frac{2}{r^2} - \frac{1}{2} e^G (g'' + g'^2) - \frac{1}{2} f'' + \frac{1}{2} e^G g'^2 + \frac{3}{4} f'^2 \\
&\quad + \frac{2}{r} f' + \frac{2}{r^2} - \frac{f'}{r} - \frac{1}{2} g' e^G \frac{3}{2} g' - \frac{1}{2} f' \frac{3}{2} f' \\
&= f'' + \frac{1}{r} f' - e^G \left(\frac{1}{2} g'' + \frac{3}{4} g'^2 \right). \tag{862}
\end{aligned}$$

Ebenso erhalten wir

$$\begin{aligned}
R_{22} &= -1 - \cot^2 \theta - \left[\frac{1}{2} e^G (g'' + g'^2) - \left(\frac{1}{2} f'' + \frac{1}{r} f' + \frac{1}{r^2} \right) \right] r^2 \\
&\quad + \left[\frac{1}{2} e^G g'^2 - \frac{1}{2} f'^2 - \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r} f' + \frac{1}{r^2} \cot^2 \theta \right] r^2 \\
&\quad - \frac{1}{2} g' e^G r^2 \frac{3}{2} g' + r^2 \left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r} \right) \left(\frac{3}{2} f' + \frac{2}{r} \right) \\
&= r^2 \left[\frac{1}{2} f'' + \frac{1}{4} f'^2 + \frac{3}{2} \frac{f'}{r} - e^G \left(\frac{1}{2} g'' + \frac{3}{4} g'^2 \right) \right]. \tag{863}
\end{aligned}$$

Dabei haben wir ausgenutzt, daß gilt

$$\left(\log \sqrt{-g} \right)_{|2|2} = \left(\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \right)_{|2} = -1 - \frac{\cos^2 \theta}{\sin^2 \theta} = -1 - \cot^2 \theta. \tag{864}$$

Gleichermaßen ergibt sich

$$\begin{aligned}
R_{33} &= - \left[\frac{1}{2} e^G (g'' + g'^2) - \left(\frac{1}{2} f'' + \frac{1}{r} f' \right) \right] r^2 \sin^2 \theta + \cos^2 \theta \\
&+ \left[\frac{1}{2} e^G g'^2 - \frac{1}{2} f'^2 - \frac{2}{r} f' - \frac{2}{r^2} - \frac{2}{r^2} \cot^2 \theta \right] r^2 \sin^2 \theta \\
&- \frac{1}{2} g' e^G r^2 \sin^2 \theta \frac{3}{2} g' + r^2 \left(\frac{1}{2} f' + \frac{1}{r} \right) \sin^2 \theta \left(\frac{3}{2} f' + \frac{2}{r} \right) \\
&+ \sin \theta \cos \theta \frac{\cos \theta}{\sin \theta} \\
&= r^2 \sin^2 \theta \left[\frac{1}{2} f'' + \frac{1}{4} f'^2 + \frac{3}{2} \frac{f'}{r} - e^G \left(\frac{1}{2} g'' + \frac{3}{4} g'^2 \right) \right]. \quad (865)
\end{aligned}$$

Wieder wollen wir es dem fleißigen Leser überlassen zu prüfen, daß gilt $R_{ij} = 0$ für $i \neq j$.

Um R^i_j ermitteln zu können, müssen wir mit Hilfe des metrischen Tensors g^{ij} einen Index anheben. Zu diesem Zweck müssen wir erst g^{ij} bestimmen. Aus

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -e^G r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -e^G r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix} \quad (866)$$

folgt sofort

$$g^{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-G} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{e^{-G}}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{e^{-G}}{r^2 \sin^2 \theta} \end{pmatrix} \quad (867)$$

Damit erhalten wir die Komponenten des gemischten Tensors R^i_j

$$\begin{aligned}
R^0_0 &= \frac{3}{2} g'' + \frac{3}{4} g'^2, \\
R^1_1 &= \left(\frac{1}{2} g'' + \frac{3}{4} g'^2 \right) - e^{-G} \left(f'' + \frac{1}{r} f' \right), \\
R^2_2 &= R^3_3 = \left(\frac{1}{2} g'' + \frac{3}{4} g'^2 \right) - e^{-G} \left(\frac{1}{2} f'' + \frac{1}{4} f'^2 + \frac{3}{2} \frac{1}{r} f' \right). \quad (868)
\end{aligned}$$

Kontraktion ergibt den Skalar R

$$R = 3 \left(g'' + g'^2 \right) - 2 e^{-G} \left(f'' + \frac{1}{4} f'^2 + \frac{2}{r} f' \right). \quad (869)$$

Damit haben wir alle Größen berechnet, um die Einstein - Gleichung in expliziter Form aufstellen zu können.

Die Einstein - Gleichung lautet

$$R^i_j - \frac{1}{2} R g^i_j + \Lambda g^i_j = -\frac{8\pi\kappa}{c^2} T^i_j . \quad (870)$$

Wir erhalten somit

$$\begin{aligned} -\frac{8\pi\kappa}{c^2} T^0_0 &= \left[e^{-G} \left(f'' + \frac{f'^2}{4} + \frac{2f'}{r} \right) - \frac{3}{4} g'^2 \right] + \Lambda , \\ -\frac{8\pi\kappa}{c^2} T^1_1 &= \left[e^{-G} \left(\frac{f'^2}{4} + \frac{f'}{r} \right) - g'' - \frac{3}{4} g'^2 \right] + \Lambda , \\ -\frac{8\pi\kappa}{c^2} T^2_2 &= -\frac{8\pi\kappa}{c^2} T^3_3 = \left[e^{-G} \left(\frac{f''}{2} + \frac{f'}{2r} \right) - g'' - \frac{3}{4} g'^2 \right] + \Lambda , \\ -\frac{8\pi\kappa}{c^2} T^i_j &= 0 \quad \text{für } i \neq j . \end{aligned} \quad (871)$$

Wir wollen nun die Bedingungen der lokalen Isotropie und die Konsequenzen auf den Energie - Impuls Tensor T^i_j diskutieren. Wir verwenden ein Koordinatensystem, so daß der räumliche Teil des Quadrates des Längenelementes proportional ist zu

$$d\sigma^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 . \quad (872)$$

Wir führen eine orthogonale Transformation (Rotation) der Koordinaten durch. Hierbei sollen sich die Raumkomponenten T^m_n des Energie - Impuls Tensors nicht ändern. Es war ja angenommen worden, T^m_n sei invariant bei orthogonalen Transformationen. Daher müssen alle Eigenwerte der Matrix T^m_n invariant bleiben bei orthogonalen Transformationen und es muß gelten

$$T^m_n = A \delta^m_n , \quad (873)$$

wobei A ein Skalar ist, der nur von x^0 und r abhängt. Da $\delta^m_n = g^m_n$ haben wir mit (873) eine Tensorgleichung vorliegen, die für jedes Koordinatensystem im dreidimensionalen Raum gilt. Speziell gilt dies auch für Polarkoordinaten r, θ, φ . Damit gilt in jedem Koordinatensystem

$$T^1_1 = T^2_2 = T^3_3 . \quad (874)$$

Wir setzen dies in die Differentialgleichungen (871) ein. Es folgt bezüglich der unbekanntenen Funktion f

$$f'' - \frac{f'^2}{2} - \frac{f'}{r} = 0 . \quad (875)$$

Wir führen die erste Integration durch. Es ist

$$f' = a r e^{f/2} . \quad (876)$$

a ist eine Integrationskonstante. Wir beweisen dies durch Einsetzen in die Differentialgleichung (875). Zunächst gilt offensichtlich

$$f'' = a e^{f/2} + \frac{1}{2} a r e^{f/2} f' . \quad (877)$$

Damit folgt

$$f'' - \frac{f'^2}{2} - \frac{f'}{r} = a e^{f/2} + \frac{1}{2} a r e^{f/2} f' - \frac{1}{2} a^2 r^2 e^f - a e^{f/2} = 0 \quad (878)$$

und weiter

$$\frac{1}{2} a r e^{f/2} a r e^{f/2} - \frac{1}{2} a^2 r^2 e^f = 0 , \quad (879)$$

was zu beweisen war. Wir behaupten nun, daß eine weitere Integration zu der allgemeinen Lösung führt

$$e^f = \frac{b^2}{\left(1 - \frac{a b}{4} r^2\right)^2} , \quad (880)$$

das heißt,

$$f = \ln \left\{ \frac{b^2}{\left(1 - \frac{a b}{4} r^2\right)^2} \right\} . \quad (881)$$

Wieder ist b eine Integrationskonstante. Zum Beweis bestimmen wir f' .

$$\begin{aligned} f' &= \frac{d}{dr} \left\{ \ln b^2 - \ln \left(1 - \frac{a b}{4} r^2\right)^2 \right\} = -2 \frac{d}{dr} \ln \left(1 - \frac{a b}{4} r^2\right) \\ &= \frac{a b r}{1 - \frac{a b}{4} r^2} . \end{aligned} \quad (882)$$

Auf der anderen Seite gilt aber

$$a r e^{f/2} = \frac{a b r}{1 - \frac{a b}{4} r^2} . \quad (883)$$

Damit ist auch dieser Beweis abgeschlossen.

Schreiben wir das Quadrat des Längenelementes aus, so können wir die Konstante b^2 in der noch unbestimmten Funktion $e^{g(x^0)}$ absorbieren. Wir definieren eine neu Konstante durch

$$|a b| = \frac{1}{r_0^2} . \quad (884)$$

Damit erhalten wir die von Robertson und Walker im Jahr 1935 abgeleitete Metrik. Das entsprechende Quadrat des Längenelementes lautet

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x_0)} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}\right)^2} d\sigma^2, \quad (885)$$

wobei gilt $k = 0, +1, -1$, entsprechend den drei Möglichkeiten $ab = 0, ab < 0, ab > 0$. Diese Werte beschreiben jeweils einen Euklidischen, einen sphärischen oder einen pseudo - sphärischen Raum, was wir noch erläutern werden.

Aufgrund der abgeleiteten Differentialgleichungen gilt (siehe zum Beispiel die Differentialgleichung für T_1^1)

$$G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = e^{-f} \left(\frac{1}{4} f'^2 + \frac{1}{r} f' \right) e^{-g} - g'' - \frac{3}{4} g'^2. \quad (886)$$

Auf der anderen Seite gilt aufgrund der expliziten Form von e^f

$$\begin{aligned} A &= e^{-f} \left(\frac{1}{4} f'^2 + \frac{1}{r} f' \right) \\ &= \frac{\left(1 - \frac{ab}{4} r^2\right)^2}{b^2} \left(\frac{1}{4} \frac{a^2 b^2 r^2}{\left(1 - \frac{ab}{4} r^2\right)^2} + \frac{ab}{1 - \frac{ab}{4} r^2} \right), \end{aligned} \quad (887)$$

wobei wir für f' den Ausdruck (882) eingesetzt haben. Ausrechnen ergibt

$$A = \frac{1}{4} a^2 r^2 + \frac{a}{b} \left(1 - \frac{ab}{4} r^2\right) = \frac{a}{b} = \text{const}. \quad (888)$$

Damit finden wir, daß der räumliche Teil von G^i_j nicht nur isotrop ist, sondern sogar konstant ist im ganzen Raum für einen gegebenen Zeitpunkt x^0 . Wir bekommen

$$G^1_1 = G^2_2 = G^3_3 = e^{-g} \frac{a}{b} - g'' - \frac{3}{4} g'^2. \quad (889)$$

Weitere Betrachtungen zur Robertson - Walker Metrik

Nachdem die Grundstruktur der Robertson - Walker Metrik abgeleitet ist, wollen wir einige Schlußfolgerungen ziehen. Um die Dynamik eines Teilchens in der Robertson - Walker Metrik zu bestimmen, müssen wir die Geodätengleichung betrachten

$$\frac{d^2 x^i}{ds^2} + \Gamma_{jk}^i \frac{dx^j}{ds} \frac{dx^k}{ds} = 0 . \quad (890)$$

Wir betrachten nun die Geodäten zu festen Raumkoordinaten. Wir haben ein mitbewegtes Koordinatensystem gewählt, in dem die Materie im Mittel in Ruhe ist. Es ist wichtig zu verifizieren, daß alle Kurven $x^1 = \text{const}$, $x^2 = \text{const}$, $x^3 = \text{const}$ auch tatsächlich die Geodätengleichung befriedigt. Dazu müssen wir nur zeigen, daß die Christoffel - Symbole

$$\Gamma_{00}^i = \frac{g^{ik}}{2} (g_{0k|0} + g_{k0|0} - g_{00|k}) \quad (891)$$

verschwinden. Dies folgt aber sofort aus der Struktur des Längenelementes. Daraus folgt in der Tat, daß die Robertson - Walker Metrik mit einer Darstellung der Welt verknüpft ist, in der eine homogene Verteilung von Materie verankert ist mit einem mitbewegten Koordinatensystem.

Wir führen nun eine Modifikation des Längenelementes durch. Mit der dimensionslosen Koordinate

$$u = \frac{r}{r_0} \quad (892)$$

folgt

$$d\chi^2 = \frac{1}{r_0^2} d\sigma^2 = du^2 + u^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) . \quad (893)$$

Ebenso definieren wir neu

$$R^2(t) = r_0^2 e^{g(x^0)} \quad (894)$$

mit $t = x^0/c$. Daraus folgt

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{du^2 + u^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{\left\{1 + \frac{k}{4} u^2\right\}^2} \right] . \quad (895)$$

Jeder Punkt ist nun gekennzeichnet durch die mitbewegten Koordinaten u , θ , φ , die festliegen als Funktion der Zeit. Aber das physikalische Abstandsintervall

$$R(t) \frac{d\chi}{1 + \frac{k}{4} u^2}$$

ist zeitabhängig. Jedoch ist das Verhältnis dieses Abstandes zu $R(t)$, das wir später den Radius des Universums nennen, zeitunabhängig.

Zum besseren Verständnis machen wir jetzt einige differentialgeometrische Studien. In kartesischen Koordinaten gilt im vierdimensionalen Euklidischen Raum

$$ds^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 . \quad (896)$$

Eine Hyperkugel wird beschrieben durch

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2 = \text{const} . \quad (897)$$

Daraus folgt sofort

$$x^0 dx^0 + x^1 dx^1 + x^2 dx^2 + x^3 dx^3 = 0 . \quad (898)$$

Hiermit können wir dx^0 in ds^2 eliminieren und wir haben

$$ds^2 = \sum_{i=1}^3 (dx^i)^2 + \frac{\left[d \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \right]^2}{4(x^0)^2} . \quad (899)$$

Mit den üblichen Kugelkoordinaten ρ , θ , φ , definiert durch

$$\begin{aligned} x^1 &= \rho \cos \varphi \sin \theta , \\ x^2 &= \rho \sin \varphi \sin \theta , \\ x^3 &= \rho \cos \theta , \end{aligned} \quad (900)$$

folgt

$$R^2 = \rho^2 + (x^0)^2 \quad (901)$$

und

$$\left(d \sum_{i=1}^3 (x^i)^2 \right)^2 = (d\rho^2)^2 = (2\rho d\rho)^2 = 4\rho^2 d\rho^2 . \quad (902)$$

Damit wird das Quadrat des Längenelementes

$$ds^2 = d\rho^2 + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + \frac{\rho^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2} . \quad (903)$$

Nun ist

$$\begin{aligned} d\rho^2 + \frac{\rho^2 d\rho^2}{R^2 - \rho^2} &= \left(1 + \frac{\rho^2}{R^2 - \rho^2} \right) d\rho^2 = \left(\frac{R^2 - \rho^2 + \rho^2}{R^2 - \rho^2} \right) d\rho^2 \\ &= \left(\frac{R^2}{R^2 - \rho^2} \right) d\rho^2 = \frac{1}{1 - \frac{\rho^2}{R^2}} d\rho^2 . \end{aligned} \quad (904)$$

Somit haben wir schließlich

$$ds^2 = \frac{d\rho^2}{1 - \rho^2/R^2} + \rho^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (905)$$

Jetzt substituieren wir

$$\rho = \frac{\sqrt{k} u R}{1 + \frac{k}{4} u^2}. \quad (906)$$

Wir behaupten, daß gilt

$$ds^2 = k R^2 \left\{ \frac{du^2 + u^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{\left[1 + \frac{k}{4} u^2\right]^2} \right\}. \quad (907)$$

Der Faktor vor $(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)$ ergibt sich einfach durch Quadrieren von ρ , was auf ρ^2 führt. Somit bleibt noch zu zeigen, daß gilt

$$\frac{d\rho^2}{1 - \rho^2/R^2} = \frac{k R^2 du^2}{\left[1 + \frac{k}{4} u^2\right]^2}. \quad (908)$$

Aufgrund der Substitution (906) gilt offensichtlich

$$\frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4} u^2\right)^2} = \frac{\rho^2}{k u^2 R^2}. \quad (909)$$

Damit folgt

$$\frac{d\rho^2}{1 - \rho^2/R^2} = \frac{\rho^2}{k u^2 R^2} k R^2 du^2 = \frac{\rho^2}{u^2} du^2. \quad (910)$$

Weiter ergibt sich daraus

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 = \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2}\right) \frac{\rho^2}{u^2}. \quad (911)$$

Jetzt rechnen wir explizit nach

$$\begin{aligned} \frac{d\rho}{du} &= \frac{\sqrt{k} R}{1 + \frac{k}{4} u^2} + \frac{\sqrt{k} u R}{\left(1 + \frac{k}{4} u^2\right)^2} \cdot \left(-2 \frac{k}{4} u\right) \\ &= \frac{\sqrt{k} R}{1 + \frac{k}{4} u^2} - \frac{\frac{1}{2} \sqrt{k} k u^2 R}{\left(1 + \frac{k}{4} u^2\right)^2}. \end{aligned} \quad (912)$$

Wir erhalten

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 = \frac{k R^2}{\left(1 + \frac{k}{4} u^2\right)^2} + \frac{\frac{1}{4} k^3 u^4 R^2}{\left(1 + \frac{k}{4} u^2\right)^4} - \frac{k^2 u^2 R^2}{\left(1 + \frac{k}{4} u^2\right)^3}. \quad (913)$$

Nach (911) gilt ausgeschrieben

$$\left(\frac{d\rho}{du}\right)^2 = \frac{k R^2}{\left(1 + \frac{k}{4} u^2\right)^2} - \frac{k^2 u^2 R^2}{\left(1 + \frac{k}{4} u^2\right)^4}. \quad (914)$$

Damit folgt durch Vergleich von (913) und (914)

$$\frac{1}{4} k^3 u^4 R^2 - k^2 u^2 R^2 - \frac{1}{4} k^3 u^4 R^2 = -k^2 u^2 R^2, \quad (915)$$

was die Beweisführung abschließt. Wir bekommen also in der Tat

$$ds^2 = k R^2 \left\{ \frac{du^2 + u^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{\left[1 + \frac{k}{4} u^2\right]^2} \right\}. \quad (916)$$

Aufgrund der Art und Weise wie dieses Linienelement erzielt wurde, nennen wir es das Linienelement einer dreidimensionalen Hyperkugel mit dem Radius R , die in einem Euklidischen vierdimensionalen Raum eingebettet ist. In der Robertson - Walker Metrik beschreibt der Fall $k = 1$ daher eine dreidimensionale Hyperkugel, die isotrop und homogen ist und deren konstante skalare Krümmung R gegeben ist durch

$$\frac{1}{R^2} = \frac{k}{R^2(t)}. \quad (917)$$

Für $k = 0$ verschwindet die Krümmung und die Hyperkugel reduziert sich auf den gewöhnlichen Euklidischen Raum. Wegen des verwendeten Euklidischen Raumes bei der Betrachtung der Hyperkugel diene diese Untersuchung dem mehr intuitiven Verständnis der Robertson - Walker Metrik.

Die Expansion des Universums und die Rotverschiebung

Wir wollen nun zeigen, daß wir mit Hilfe der Robertson - Walker - Metrik die Rotverschiebung des Lichtes erklären können, das von entfernten Objekten emittiert wird. Wir betrachten ein strahlendes Objekt, das beispielsweise ein galaktischer Nebel N_e sein kann. Ferner nehmen wir an, daß dieses Licht in einem Nebel N_o beobachtet wird, der den Ursprung eines mitbewegten Koordinatensystems darstellt. Der Nebel N_e sei charakterisiert durch die Abstandsmarkierung u oder äquivalnet durch eine andere zeitunabhängige Koordinatenmarkierung l , die bestimmt wird durch

$$dl = \frac{d\chi}{1 + \frac{k}{4}u^2} = \frac{[du^2 + u^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)]^{1/2}}{1 + \frac{k}{4}u^2}. \quad (918)$$

Ausgedrückt durch die universelle Zeitkoordinate t , die in der Robertson - Walker - Metrik verwendet wird, wird das Licht zum Zeitpunkt t_e in N_e emittiert und zum Zeitpunkt t_o in N_o beobachtet. Natürlich gilt aufgrund der Kausalitätsforderung $t_o > t_e$. Wie bereits bei der Diskussion "Licht im Gravitationsfeld" gehen wir von der Tatsache aus, daß sich Licht auf Null - Geodäten bewegt. Es gilt also für das Licht $ds^2 = 0$. Nun ist also

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) dl^2 = 0 \quad (919)$$

und weiter

$$\frac{c dt}{R(t)} = dl \quad (920)$$

oder

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{c dt}{R(t)} = l. \quad (921)$$

Dies verbindet die Raummarkierung l mit der Zeitdifferenz $t_o - t_e$.

Als nächstes betrachten wir Licht, das in N_e zu einem versetzten Zeitpunkt $t_e + \Delta t_e$ emittiert wird. Dieses Licht wird in N_o zum Zeitpunkt $t_o + \Delta t_o$ empfangen, wobei Δt_o durch die Relation

$$\int_{t_e + \Delta t_e}^{t_o + \Delta t_o} \frac{c dt}{R(t)} = l \quad (922)$$

bestimmt wird. l ist ja eine feste Abstandsmarkierung im mitbewegten Koordinatensystem. Es sei nun Δt_e die Periode eines physikalischen Vorgangs, der in N_e stattfindet. Dieser periodische Vorgang wird in N_o die scheinbare Periode Δt_o haben. Der periodische Vorgang soll so ablaufen, daß für das Inkrement der Abstandsmarkierung l gilt: $dl = 0$. Aus dem Vergleich von (921) und (922) folgt sofort

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_e+\Delta t_e}^{t_o+\Delta t_o} \frac{dt}{R(t)}. \quad (923)$$

Wir spalten den Integrationsbereich auf und bekommen

$$\int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} \frac{dt}{R(t)} + \int_{t_e+\Delta t_e}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_e+\Delta t_e}^{t_o} \frac{dt}{R(t)} + \int_{t_o}^{t_o+\Delta t_o} \frac{dt}{R(t)}. \quad (924)$$

Dies führt auf

$$\int_{t_e}^{t_e+\Delta t_e} \frac{dt}{R(t)} = \int_{t_o}^{t_o+\Delta t_o} \frac{dt}{R(t)}. \quad (925)$$

Δt sei sehr klein, verglichen mit der Änderung von $R(t)$. Damit erhalten wir näherungsweise

$$\frac{\Delta t_o}{R(t_o)} - \frac{\Delta t_e}{R(t_e)} = 0. \quad (926)$$

Im folgenden bezeichnen wir $R(t_o) = R_o$ und $R(t_e) = R_e$. Die Zeitdifferenzen drücken wir durch Frequenzen aus

$$\frac{\nu_e}{\nu_o} = \frac{R_o}{R_e}. \quad (927)$$

Mit Hilfe von $c = \lambda \nu$ können wir dies auf eine Relation bezüglich der Wellenlängen umschreiben

$$\frac{\lambda_o}{\lambda_e} = \frac{R_o}{R_e}. \quad (928)$$

Damit folgt als relative Verschiebung der Wellenlänge im Vergleich zur Wellenlänge bei der Emission

$$z = \frac{\Delta \lambda}{\lambda} = \frac{\lambda_o - \lambda_e}{\lambda_e} = \frac{R_o}{R_e} - 1. \quad (929)$$

Als empirischen Sachverhalt stellt man nun fest, daß das Licht, das in entfernten Galaxien emittiert wird, hier rotverschoben erscheint. Daraus schließen wir, daß $R(t)$ anwachsen muß und daß sich somit auch das Universum ausdehnt.

Bereits im Jahr 1936 hat Hubble das Gesetz der Rotverschiebung entdeckt.

$$\frac{\Delta\lambda}{\lambda} \simeq \frac{L}{cT}, \quad (930)$$

wobei L den Abstand entfernter Galaxien von uns angibt. Für die Größe T fand Hubble den Wert $T = 0.56 \cdot 10^{17}$ s, was jedoch verglichen mit dem heute gültigen Wert sehr ungenau ist.

$R(t)/c$ hat die Dimension einer Zeit. Wir betrachten im folgenden Zeitintervalle, die klein verglichen mit dieser Zeit sind. Wir führen eine Potenzreihenentwicklung in der Größe $c(t_o - t_e)/R_o$ durch. Es gilt

$$\begin{aligned} \frac{1}{R(t)} &= \frac{1}{R_o} + (t - t_o) \left(-\frac{1}{R_o^2} \right) R'_{|t=t_o} + \frac{(t - t_o)^2}{2} \left[\frac{1}{R(t)} \right]''_{t=t_o} + \dots \\ &= \frac{1}{R_o} - \frac{R'_o}{R_o c} \frac{(t - t_o)c}{R_o} + \frac{1}{c^2} \left[\frac{(R'_o)^2}{R_o} - \frac{R''_o}{2} \right] \left[\frac{(t - t_o)c}{R_o} \right]^2 + \dots \quad (931) \end{aligned}$$

Als nächstes entwickeln wir

$$\int_{t_e}^{t_o} \frac{c dt}{R(t)} = l \quad (932)$$

und

$$z = \frac{R_o}{R_e} - 1 \quad (933)$$

in Potenzen von

$$h = \frac{c(t_o - t_e)}{R_o}. \quad (934)$$

Durch Integration der Taylor - Entwicklung von $1/R(t)$ folgt

$$l = h + \frac{1}{2} \frac{R'_o}{c} h^2 + \dots \quad (935)$$

Weiter ergibt sich

$$z = \frac{R_o}{R_e} - 1 = \frac{R'_o}{c} h + \frac{R_o}{c^2} \left[\frac{(R'_o)^2}{R_o} - \frac{R''_o}{2} \right] h^2. \quad (936)$$

Aus den beiden letzten Gleichungen können wir h eliminieren, d.h., h wird durch l ausgedrückt. Es folgt

$$cz = R'_o l + \frac{1}{2c} (R_o'^2 - R_o'' R_o) l^2. \quad (937)$$

Es war

$$l^2 = h^2 + \frac{R'_o}{c} h^3 + \frac{1}{4} \frac{R'^2_o}{c^2} h^4 \quad (938)$$

und

$$R'_o l = R'_o h + \frac{1}{2} \frac{R'^2_o}{c} h^2 . \quad (939)$$

Einsetzen dieser beiden Ausdrücke in (937) führt näherungsweise auf (936). Mit (937) haben wir einen Ausdruck abgeleitet, der die Rotverschiebung mit der Abstandsmarkierung verbindet. Beide Größen sind Observable für die Astronomen.

In Gleichung (937) betrachten wir nur die Terme niedrigster Ordnung. Das *physikalische* Abstandsintervall, daß von den Astronomen gemessen wird, lautet

$$L \simeq R_o l \simeq R_o h = c(t_o - t_e) . \quad (940)$$

Damit folgt

$$cz \simeq \frac{R'_o}{R_o} (R_o l) \simeq \frac{R'_o}{R_o} L . \quad (941)$$

Mit

$$T = \frac{R_o}{R'_o} \quad (942)$$

ist das genau das Hubblesche Gesetz. Zusammenfassend können wir feststellen, daß die Robertson - Walker - Metrik die Rotverschiebung erklärt.

Standardmodell des Universums

In den nachfolgenden Untersuchungen zum Standardmodell des Universums werden wir zunächst das kosmologische Glied vernachlässigen, d.h., wir nehmen an, daß gilt $\Lambda = 0$. Ferner beschränken wir uns auf die einfachste Annahme bezüglich des Energie - Impuls Tensors T^i_j . Wir setzen

$$T^0_0 = \rho \quad (943)$$

und $T^m_n = 0$ für alle $m, n \neq 0$.

Wir hatten bereits die folgenden Beziehungen abgeleitet

$$\begin{aligned} ds^2 &= (dx^0)^2 - e^{G(x^0, r)} d\sigma^2 \\ &= (dx^0)^2 - e^{g(x^0)+f(r)} d\sigma^2 \end{aligned} \quad (944)$$

mit

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\varphi^2. \quad (945)$$

Es war ferner

$$ds^2 = (dx^0)^2 - e^{g(x^0)} \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}\right)^2} d\sigma^2, \quad (946)$$

d.h.,

$$e^{f(r)} = \frac{1}{\left(1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}\right)^2}. \quad (947)$$

r_0 ist eine Integrationskonstante.

Mit $u = r/r_0$ und

$$d\chi^2 = \frac{1}{r_0^2} d\sigma^2 = du^2 + u^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) \quad (948)$$

sowie

$$R^2(t) = r_0^2 e^{g(x_0)} \quad (949)$$

folgte

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R^2(t) \left[\frac{du^2 + u^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)}{\left\{1 + \frac{k}{4} u^2\right\}^2} \right]. \quad (950)$$

Es gilt $k = -1, 0$ oder $+1$. Aufgrund der Einstein - Gleichung haben wir

$$G^0_0 = -\frac{8\pi\kappa}{c^2} T^0_0 . \quad (951)$$

Setzen wir nun ein, was wir bereits über G^0_0 und T^0_0 wissen, so ergibt sich

$$e^{-G} \left(f'' + \frac{f'^2}{4} + \frac{2f'}{r} \right) - \frac{3}{4} g'^2 = -\frac{8\pi\kappa}{c^2} \rho . \quad (952)$$

Ferner hatten wir bereits ermittelt

$$e^{-G} = \frac{r_0^2 \left(1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2} \right)^2}{R^2(t)} \quad (953)$$

sowie

$$f'' = \frac{1}{2} f'^2 + \frac{1}{r} f' . \quad (954)$$

Damit folgt aus (952) sofort

$$G^0_0 = e^{-G} \left(\frac{3}{4} f'^2 + \frac{3}{r} f' \right) - \frac{3}{4} g'^2 . \quad (955)$$

Als Lösung für $f(r)$ hatten wir gefunden

$$f(r) = -2 \ln \left\{ 1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2} \right\} . \quad (956)$$

Es folgt

$$f'(r) = -\frac{2}{1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}} \cdot \frac{2kr}{4r_0^2} \quad (957)$$

und weiter

$$\frac{3}{4} f'^2 + \frac{3}{r} f' = \frac{3}{4} \frac{k^2 r^2 / r_0^4}{\left(1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2} \right)^2} - \frac{3k/r_0^2}{1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}} . \quad (958)$$

Mit (953) erhalten wir

$$\begin{aligned} e^{-G} \left(\frac{3}{4} f'^2 + \frac{3}{r} f' \right) &= \frac{3}{4} \frac{k^2 r^2 / r_0^4}{R^2(t)} - \frac{3k \left\{ 1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2} \right\}}{R^2(t)} \\ &= -\frac{3k}{R^2(t)} . \end{aligned} \quad (959)$$

Aus (949) resultiert

$$g(x^0) = \ln \left(\frac{R(t)}{r_0} \right)^2 = 2 \ln \frac{R(t)}{r_0} \quad (960)$$

und somit

$$g'(x^0) = \frac{2 R'(t)/r_0}{c R(t)/r_0} = \frac{2 R'(t)}{c R(t)}. \quad (961)$$

Es ergibt sich

$$\frac{3}{4} g'^2 = \frac{3 R'^2(t)}{c^2 R^2(t)}. \quad (962)$$

Schließlich haben wir

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2} \rho = G^0_0 = \frac{3k}{R^2(t)} + \frac{3}{c^2} \frac{R'^2(t)}{R^2(t)}. \quad (963)$$

Es folgt mit $T^m_m = 0$ (keine Summation) für $m \neq 0$

$$0 = G^m_m = e^{-f} \left(\frac{1}{4} f'^2 + \frac{1}{r} f' \right) e^{-g} - g'' - \frac{3}{4} g'^2. \quad (964)$$

Auch dieser Zusammenhang war bereits abgeleitet worden. Aus (961) bekommen wir

$$g'' = \frac{2}{c^2} \frac{R''(t)}{R(t)} - \frac{2}{c^2} \frac{R'^2(t)}{R^2(t)}. \quad (965)$$

Mit (947), (957), (962) und (965) ergibt sich aus (964)

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{r_0^2}{R^2(t)} \left(1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2} \right)^2 \left\{ \frac{1}{4} \frac{k^2 r^2 / r_0^4}{\left[1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2} \right]^2} - \frac{k / r_0^2}{1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2}} \right\} \\ &\quad - \frac{2}{c^2} \frac{R''}{R} + \frac{2}{c^2} \frac{R'^2}{R^2} - \frac{3}{c^2} \frac{R'^2}{R^2} \\ &= \frac{1}{R^2(t)} \left\{ \frac{1}{4} k^2 r^2 / r_0^2 - k \left(1 + \frac{k}{4} \frac{r^2}{r_0^2} \right) \right\} - \frac{2}{c^2} \frac{R''}{R} - \frac{R'^2}{c^2 R^2}. \end{aligned} \quad (966)$$

Zusammengefaßt bekommen wir

$$0 = - \left[\frac{k}{R^2(t)} + \frac{R'^2}{c^2 R^2} + \frac{2}{c^2} \frac{R''(t)}{R(t)} \right]. \quad (967)$$

Schließlich multiplizieren wir (967) mit 3 und addieren das Resultat zu (963). Es ergibt sich

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2} \rho = - \frac{3 R''(t)}{c^2 R(t)}. \quad (968)$$

Diese Gleichung sowie (963) werden der Ausgangspunkt weiterer Untersuchungen sein.

Die nichtstatischen Modelle des Universums sind gekennzeichnet durch die Zeitabhängigkeit von R . Als Lösung der Einstein - Gleichung ist im Prinzip jedes $R(t)$ erlaubt, sofern die Rotverschiebung als physikalische Konsequenz resultiert und sofern als physikalischer Parameter die Dichte ρ positiv bleibt. Aus der beobachteten Rotverschiebung haben wir bereits geschlossen, daß $R(t)$ anwachsen muß.

Aufgrund von Gleichung (968) erkennen wir ferner, daß gilt $R''(t) < 0$. Daraus folgt, daß sich die Expansion des Universums verlangsamt. Wir multiplizieren (967) mit $c^2 R^2(t)$ und bekommen

$$2 R R'' + R'^2 + k c^2 = 0 . \quad (969)$$

Diese Gleichung ist äquivalent zu

$$(R R'^2)' + k c^2 R' = 0 , \quad (970)$$

was wir durch ausdifferenzieren

$$R'^3 + 2 R R' R'' + k c^2 R' = 0 \quad (971)$$

leicht nachprüfen können. Die Integration liefert.

$$R'^2 = \frac{D_0 - k R}{R} c^2 . \quad (972)$$

D_0 ist eine Integrationskonstante. Wir setzen dies in (969) ein. Es folgt

$$\begin{aligned} 2 R R'' + \frac{c^2}{R} (D_0 - k R) + k c^2 &= \\ 2 R R'' + \frac{D_0 c^2}{R} &= 0 . \end{aligned} \quad (973)$$

Dies ergibt

$$R'' = -\frac{D_0}{2 R^2} c^2 . \quad (974)$$

Hieraus schließen wir, daß D_0 positiv sein muß.

Wir setzen nun (974) in (968) ein. Dies führt auf

$$\frac{4\pi\kappa}{c^2} \rho = \frac{3}{2} \frac{D_0}{R^2} \frac{1}{R} \quad (975)$$

und damit

$$D_0 = \left(\frac{4\pi}{3} R^3 \rho \right) \frac{2\kappa}{c^2}. \quad (976)$$

Der Ausdruck in Klammer entspricht gerade der Gesamtmasse M des Universums. Somit haben wir die Massenerhaltung des Universums während seiner Entwicklung nachgewiesen. Es ist damit

$$D_0 = \frac{2 M \kappa}{c^2}. \quad (977)$$

Dieser Wert entspricht aber gerade dem Schwarzschild - Radius des Universums.

Wir betrachten nun die Fälle $k = +1, 0$ und -1 . Für $k = +1$ setzen wir an

$$R = D_0 \sin^2 \tau(t). \quad (978)$$

Dies führt sofort auf

$$R = \frac{D_0}{2} \{1 - \cos(2\tau)\}. \quad (979)$$

Setzen wir zusätzlich

$$c t = \frac{D_0}{2} [2\tau - \sin(2\tau)], \quad (980)$$

so löst dies die Differentialgleichung

$$R'^2 = \frac{D_0 c^2}{R} - k c^2. \quad (981)$$

Wir wollen dies ausführlich nachprüfen. Es ist

$$\left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 = \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2. \quad (982)$$

Somit muß gelten

$$\left(\frac{dR}{dt} \right)^2 = \left(\frac{dR}{d\tau} \right)^2 / \left(\frac{dt}{d\tau} \right)^2 = \frac{D_0 c^2}{R} - k c^2 \quad (983)$$

für $k = 1$. Einsetzen von (979) liefert

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{dt} \right)^2 &= \frac{2c^2}{1 - \cos(2\tau)} - k c^2 = \frac{2c^2 - c^2 + c^2 \cos(2\tau)}{1 - \cos(2\tau)} \\ &= \frac{c^2 \{1 + \cos(2\tau)\}}{1 - \cos(2\tau)}. \end{aligned} \quad (984)$$

Auf der anderen Seite gilt

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{D_0}{2c} [2 - 2 \cos(2\tau)] = \frac{D_0}{c} [1 - \cos(2\tau)] . \quad (985)$$

Damit haben wir

$$\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{D_0^2}{c^2} [1 - \cos(2\tau)]^2 . \quad (986)$$

Ebenso erhalten wir

$$\frac{dR}{d\tau} = D_0 \sin(2\tau) \quad (987)$$

und damit

$$\left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 = D_0^2 \sin^2(2\tau) = D_0^2 [1 - \cos^2(2\tau)] . \quad (988)$$

Damit können wir den Beweis abschließen

$$\begin{aligned} \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 / \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 &= \frac{c^2 \{1 - \cos^2(2\tau)\}}{\{1 - \cos(2\tau)\}^2} = \frac{c^2 \{1 - \cos(2\tau)\} \{1 + \cos(2\tau)\}}{\{1 - \cos(2\tau)\}^2} \\ &= \frac{c^2 \{1 + \cos(2\tau)\}}{\{1 - \cos(2\tau)\}} . \end{aligned} \quad (989)$$

Wir haben die Parameterdarstellung einer Zykloide abgeleitet. Wir können also feststellen, daß $R(t)$ durch eine Zykloide repräsentiert wird. Die Zykloide geht durch 0 bei $t = \tau = 0$. Dies ist zunächst als unphysikalisch zu betrachten, da wir im Energie - Impuls Tensor die Druckterme vernachlässigt haben. Im Bereich des Ursprungs muß der Einfluß des Druckes auf die Dynamik der Materie noch studiert werden. Der Radius $R(t)$ expandiert, erreicht ein Maximum mit dem Wert D_0 zum Zeitpunkt $t = D_0 \pi/2c$ und kontrahiert dann wieder.

Wir studieren nun den Fall $k = 0$. In diesem Fall gilt

$$R'^2 = \frac{D_0}{R} c^2 . \quad (990)$$

Daraus folgt

$$R' \sqrt{R} = \sqrt{D_0} c . \quad (991)$$

Separation der Variablen führt auf

$$\sqrt{R} dR = \sqrt{D_0} c dt . \quad (992)$$

Wir integrieren und bekommen

$$R^{3/2} - R_0^{3/2} = \frac{3}{2} \sqrt{D_0} c (t - t_0). \quad (993)$$

R_0 und t_0 sind Integrationskonstanten. Damit verschwindet der Radius ($R = 0$) zu einem Zeitpunkt

$$t_1 = t_0 - \frac{2 R_0^{3/2}}{3 c \sqrt{D_0}}. \quad (994)$$

Indem wir den Zeitursprung auf t_1 verschieben, erhalten wir eine einfachere Form

$$R = A t^{2/3} \quad (995)$$

mit

$$A = \left(\frac{3}{2} c\right)^{2/3} D_0^{1/3}. \quad (996)$$

Diese Lösung beschreibt also ein Universum, das sich stetig in der Expansion befindet und das plötzlich bei $t = 0$ beginnt. Es ist ein explodierendes Modell des Universums.

Wir verwenden die Hubble - Konstante in der niedrigsten Ordnung $T = R/R'$. Damit bekommen wir aus

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2} \rho = \frac{3}{R^2 c^2} R'^2 + \frac{3k}{R^2} \quad (997)$$

für $k = 0$

$$8\pi\kappa \rho = \frac{3}{T^2}. \quad (998)$$

Dies verbindet die Hubble - Konstante mit der Massendichte ρ . Mit

$$T = (4.1 \pm 2) \cdot 10^{17} \text{ s} \quad (999)$$

erhält man als gegenwärtige Massendichte des Universums

$$\rho = (1.1 \pm 0.5) \cdot 10^{-29} \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}, \quad (1000)$$

was mit den beobachteten Daten durchaus verträglich ist. Die Lösung der Einstein - Gleichung für $\Lambda = k = 0$ war das erste nichtstatische Resultat, das bereits im Jahr 1922 von Friedmann abgeleitet wurde. Mit minimalen Annahmen hat man ein physikalisch akzeptables Ergebnis erhalten.

Schließlich diskutieren wir noch den Fall $k = -1$, der das gängige Weltmodell widerspiegelt. Aus

$$R'^2 = \frac{D_0 - kR}{R} c^2 \quad (1001)$$

wird

$$\frac{R'^2}{c^2} = \frac{D_0}{R} + 1. \quad (1002)$$

Diese Differentialgleichung wird gelöst durch die Parameterdarstellung

$$\begin{aligned} ct &= \frac{D_0}{2} [\sinh(2\tau) - 2\tau], \\ R &= \frac{D_0}{2} [\cosh(2\tau) - 1]. \end{aligned} \quad (1003)$$

Wir verifizieren diese Lösung. Wir gehen aus von

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dR}{d\tau}\right)^2 / \left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 = \frac{D_0 c^2}{R} + c^2. \quad (1004)$$

Es gilt

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{D_0}{c} [\cosh(2\tau) - 1] = \frac{2R}{c} \quad (1005)$$

und

$$\frac{dR}{d\tau} = D_0 \sinh(2\tau). \quad (1006)$$

Damit folgt

$$\left(\frac{dR}{dt}\right)^2 = \frac{D_0^2 \sinh^2(2\tau) c^2}{4R^2} = \frac{D_0 c^2 + Rc^2}{R} \quad (1007)$$

und weiter

$$\frac{D_0^2 \sinh^2(2\tau) c^2}{4R} = D_0 c^2 + Rc^2. \quad (1008)$$

Damit bekommen wir

$$D_0^2 \sinh^2(2\tau) = 4R D_0 + 4R^2. \quad (1009)$$

Wir setzen R ein und erhalten

$$D_0^2 \sinh^2(2\tau) = 2D_0[\cosh(2\tau) - 1] + D_0^2[\cosh^2(2\tau) + 1 - 2 \cosh(2\tau)] \quad (1010)$$

Dies ergibt schließlich die Identität

$$D_0^2 \sinh^2(2\tau) = D_0^2 \cosh^2(2\tau) - D_0^2 . \quad (1011)$$

Entsprechend dieser Lösung wächst $R(t)$ monoton von null bis unendlich an. Das Modell erlaubt ein Anwachsen bis über den Schwarzschild - Radius des Universums hinaus. Die Geburt des Universums ist explosiv, da gilt $R' = \infty$ bei $R = 0$. Natürlich ist das wieder eine illegale Extrapolation, da die Druckterme vernachlässigt wurden. Mit Hilfe der Gleichung

$$\frac{8\pi\kappa}{c^2} \rho = \frac{3}{R^2 c^2} R'^2 + \frac{3k}{R^2} \quad (1012)$$

und der Hubble - Konstante $1/T = R'/R$ könnte man im Prinzip zwischen den drei verschiedenen Fällen unterscheiden. Aus den experimentellen Daten folgt die Größe

$$\rho - \frac{3}{T^2 8\pi\kappa} = \left(\frac{3c^2}{8\pi\kappa R^2} \right) k . \quad (1013)$$

Somit ließe sich das Vorzeichen von k bestimmen, d.h., man könnte feststellen, ob das Universum sphärisch, Euklidisch oder pseudo-Euklidisch ist. Jedoch reicht hierzu die gegenwärtige Meßgenauigkeit bezüglich ρ noch nicht aus. Zusammenfassend können wir aber feststellen, daß für den Fall $\Lambda = 0$ die Explosionsmodelle keineswegs unverträglich mit den empirischen Daten sind.

Aufgabe: Symmetrien des Riemannschen Krümmungstensors

Zeigen Sie, daß der Riemannsche Krümmungstensor

$$R^\mu_{\nu\rho\sigma} = \Gamma^\mu_{\sigma\nu|\rho} - \Gamma^\mu_{\rho\nu|\sigma} + \Gamma^\mu_{\rho\alpha} \Gamma^\alpha_{\sigma\nu} - \Gamma^\mu_{\sigma\alpha} \Gamma^\alpha_{\rho\nu}$$

die folgenden Symmetrien besitzt:

1. Antisymmetrie im letzten Indexpaar
2. Antisymmetrie im ersten Indexpaar
3. Zyklische Symmetrie
4. Symmetrie unter Vertauschung des ersten Indexpaares mit dem zweiten

Lösung

1. Die Antisymmetrie im letzten Indexpaar ist trivial. Sie folgt direkt aus der Definition des Riemannschen Krümmungstensors.

2. Antisymmetrie im ersten Indexpaar.

Die kovariante Ableitung des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ verschwindet identisch. Damit verschwindet auch die zweite kovariante Ableitung des metrischen Tensors

$$g_{\mu\nu||\rho||\sigma} \equiv 0 \quad . \quad (1014)$$

Ebenso gilt

$$g_{\mu\nu||\sigma||\rho} \equiv 0 \quad . \quad (1015)$$

Die Differenz der letzten beiden Ausdrücke läßt sich nach Definition durch Riemann-Tensoren ausdrücken

$$0 = g_{\mu\nu||\rho||\sigma} - g_{\mu\nu||\sigma||\rho} = g_{\alpha\nu} R^\alpha_{\mu\rho\sigma} + g_{\mu\alpha} R^\alpha_{\nu\rho\sigma} \quad , \quad (1016)$$

woraus die Behauptung folgt:

$$R_{\nu\mu\rho\sigma} - R_{\mu\nu\rho\sigma} = 0 \quad . \quad (1017)$$

3. Zyklische Symmetrie

Wir betrachten zunächst die zweite kovariante Ableitung eines Skalars ϕ . Es gilt

$$\phi_{||\rho||\sigma} - \phi_{||\sigma||\rho} = 0 \quad . \quad (1018)$$

Dann gilt auch für die dritte kovariante Ableitung

$$\phi_{||\rho||\sigma||\tau} - \phi_{||\sigma||\rho||\tau} = 0 \quad . \quad (1019)$$

Dies ist die erste der beiden Relationen, die wir später benötigen werden.

Als nächstes betrachten wir die zweite kovariante Ableitung eines kovarianten Vektors a_ρ . Nach Definition des Riemannschen Krümmungstensors erhält man

$$a_{\rho||\sigma||\tau} - a_{\rho||\tau||\sigma} = a_\alpha R_{\rho\sigma\tau}^\alpha \quad . \quad (1020)$$

Wir wählen den Vektor $a_\rho = \phi_{||\rho}$. Damit erhalten wir die zweite Relation

$$\phi_{||\rho||\sigma||\tau} - \phi_{||\rho||\tau||\sigma} = \phi_{||\alpha} R_{\rho\sigma\tau}^\alpha \quad . \quad (1021)$$

Wir permutieren in der letzten Relation (1021) die Indizes ρ, σ, τ und addieren alle daraus entstehenden Relationen auf

$$\sum_P \text{sign}(P) \phi_{||\alpha} R_{P(\rho\sigma\tau)}^\alpha = \sum_P \text{sign}(P) \left(\phi_{P(||\rho||\sigma||\tau)} - \phi_{P(||\rho||\tau||\sigma)} \right) \quad . \quad (1022)$$

P soll hierbei die Permutationen kennzeichnen. $\text{sign}(P)$ ist $+1$, falls P eine gerade Permutation der Indizes ρ, σ, τ darstellt, und -1 falls P eine ungerade Permutation ist.

Nun beachten wir, daß $\phi_{P'(|\tau||\rho||\sigma)} = \phi_{PP'(|\rho||\sigma||\tau)}$ für eine gerade Permutation P' . Damit ist $\phi_{P'(|\tau||\rho||\sigma)}$ ebenfalls in der Summe auf der rechten Seite von Gleichung (1022) enthalten. Damit schreiben wir weiter

$$\sum_P \text{sign}(P) \phi_{||\alpha} R_{P(\rho\sigma\tau)}^\alpha = \sum_P \text{sign}(P) \left(\phi_{P(|\tau||\rho||\sigma)} - \phi_{P(|\rho||\tau||\sigma)} \right) \quad . \quad (1023)$$

Wegen (1019) verschwindet der Ausdruck in der letzten Zeile identisch. Es folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \sum_P \text{sign}(P) \phi_{||\alpha} R_{P(\rho\sigma\tau)}^\alpha \\ &= \phi_{||\alpha} \left(R_{\rho\sigma\tau}^\alpha + R_{\sigma\tau\rho}^\alpha + R_{\tau\rho\sigma}^\alpha - R_{\rho\tau\sigma}^\alpha - R_{\sigma\rho\tau}^\alpha - R_{\tau\sigma\rho}^\alpha \right) \end{aligned} \quad (1024)$$

Verwenden wir die Antisymmetrie des Krümmungstensors bezüglich Vertauschung im letzten Indexpaar, so ergibt sich

$$0 = \phi_{||\alpha} \left(R_{\rho\sigma\tau}^\alpha + R_{\sigma\tau\rho}^\alpha + R_{\tau\rho\sigma}^\alpha \right) \quad , \quad (1025)$$

und, da ϕ und damit $\phi_{||\alpha}$ beliebig vorgegeben worden sind,

$$0 = R_{\rho\sigma\tau}^\alpha + R_{\sigma\tau\rho}^\alpha + R_{\tau\rho\sigma}^\alpha \quad (1026)$$

für jedes α .

4. Symmetrie unter Vertauschung des ersten Indexpaares mit dem zweiten

Dazu führen wir in der letzten Gleichung (1026) zyklische Permutationen der Indizes $\alpha\rho\sigma\tau$ durch und addieren die vier entstehenden Relationen auf

$$\begin{aligned} 0 = & +R_{\alpha\rho\sigma\tau} + R_{\alpha\sigma\tau\rho} + R_{\alpha\tau\rho\sigma} \\ & +R_{\rho\sigma\tau\alpha} + R_{\rho\tau\alpha\sigma} + R_{\rho\alpha\sigma\tau} \\ & +R_{\sigma\tau\alpha\rho} + R_{\sigma\alpha\rho\tau} + R_{\sigma\rho\tau\alpha} \\ & +R_{\tau\alpha\rho\sigma} + R_{\tau\rho\sigma\alpha} + R_{\tau\sigma\alpha\rho} \quad . \end{aligned} \quad (1027)$$

Bis auf vier Terme hebt sich alles weg. Es verbleibt die Gleichung

$$R_{\alpha\sigma\tau\rho} + R_{\rho\tau\alpha\sigma} + R_{\sigma\alpha\rho\tau} + R_{\tau\rho\sigma\alpha} = 0 \quad , \quad (1028)$$

und nach Verwendung der Antisymmetrie-Relationen im ersten und letzten Indexpaar

$$2(R_{\alpha\sigma\tau\rho} - R_{\tau\rho\alpha\sigma}) = 0 \quad . \quad (1029)$$

Daraus folgt die Symmetrie unter Vertauschung des letzten mit dem ersten Indexpaar.

Aufgabe: Kovariante Ableitung und Antisymmetrisierung

Zeigen Sie, daß unter Antisymmetrisierung der Indizes die kovariante Ableitung eines kovarianten Tensors dritter Stufe gleich der gewöhnlichen Ableitung ist, d. h. daß gilt

$$\{A_{ikl|m}\} = \{A_{ikl|m}\} \quad (1030)$$

Lösung: Die kovariante Ableitung eines Tensors dritter Stufe A_{ikl} ist definiert durch

$$A_{ikl|m} = A_{ikl|m} - \Gamma_{im}^j A_{jkl} - \Gamma_{km}^j A_{ijl} - \Gamma_{lm}^j A_{ikj} \quad (1031)$$

$A_{ikl|m}$ ist ein Tensor vierter Stufe, dessen Antisymmetrisierung gegeben ist durch

$$\begin{aligned} \{A_{ikl|m}\} = \frac{1}{4!} & \left(A_{ikl|m} + A_{ilm|k} + A_{imk|l} - A_{iml|k} - A_{ilk|m} - A_{ikm|l} \right. \\ & - A_{klm|i} - A_{kmi|l} - A_{kil|m} + A_{kim|l} + A_{kml|i} + A_{kli|m} \\ & + A_{lmi|k} + A_{lik|m} + A_{lkm|i} - A_{lki|m} - A_{lim|k} - A_{lmk|i} \\ & \left. - A_{mik|l} - A_{mkl|i} - A_{mli|k} + A_{mlk|i} + A_{mki|l} + A_{mli|k} \right) \quad (1032) \end{aligned}$$

Wir behaupten nun

$$\{A_{ikl|m}\} - \{A_{ikl|m}\} = 0 \quad (1033)$$

Damit müssen wir uns also nur mit der Antisymmetrisierung der Terme befassen, die die Christoffel-Symbole beinhalten. Für diese Terme soll gelten

$$\{\Gamma_{im}^j A_{jkl}\} + \{\Gamma_{km}^j A_{ijl}\} + \{\Gamma_{lm}^j A_{ikj}\} = 0 \quad (1034)$$

Wir betrachten zunächst den ersten Term der letzten Gleichung. Ausgeschrieben lautet er

$$\begin{aligned} \{\Gamma_{im}^j A_{jkl}\} &= \Gamma_{im}^j A_{jkl} - \Gamma_{mi}^j A_{jkl} + \text{Terme gleicher Gestalt} \\ &= (\Gamma_{im}^j - \Gamma_{mi}^j) A_{jkl} + \text{Terme gleicher Gestalt} \quad (1035) \end{aligned}$$

Nun sind aber die Christoffel-Symbole symmetrisch unter Vertauschung der unteren Indizes

$$\Gamma_{im}^j = \Gamma_{mi}^j \quad (1036)$$

Damit folgt

$$\{\Gamma_{im}^j A_{jkl}\} = 0 \quad (1037)$$

und daraus

$$\{A_{ikl|m}\} = \{A_{ikl|m}\} \quad (1038)$$

Ergänzungen zum relativistischen Energie-Impuls Tensor

In unserer ursprünglichen Diskussion des Energie-Impuls Tensors waren wir von einer idealen Flüssigkeit ausgegangen, d.h. es galt $p = 0$. In der inkohärenten, nichtwechselwirkenden Materie hatten wir irreversible Vorgänge vernachlässigt. Es galt

$$T^{ij} = \rho(x) u^i(x) u^j(x) \quad (1039)$$

mit $u^i = dx^i/ds$. Ferner hatten wir bereits die Relationen $T^{00} = \gamma^2 \rho$, $T^{0m} = \rho v^m/c$ und $T^{mn} = \rho v^m v^n/c^2$ mit $m, n = 1, 2, 3$ diskutiert. Aus dem Verschwinden der Divergenz des Energie - Impuls Tensors resultierten die Bewegungsgleichungen. Aus

$$T^{0i}_{|i} = \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \right] \quad (1040)$$

folgte

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} = 0 \quad (1041)$$

und somit die Kontinuitätsgleichung der klassischen Hydrodynamik. Aus

$$T^{mi}_{|i} = \frac{\rho}{c^2} \left[\frac{\partial v^m}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^m \right] \quad (1042)$$

ergab sich

$$\frac{\partial v^m}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^m = 0. \quad (1043)$$

Dies ist die Eulersche Ableitung, die den kräftefreien hydrodynamischen Fluß beschreibt.

Wir wollen jetzt innere Kräfte, die mit dem Druck verknüpft sind, in Rechnung stellen. Speziell betrachten wir eine ideale Flüssigkeit, die charakterisiert ist durch die Eigendichte $\rho(x)$, die Vierergeschwindigkeit des Flusses $u^i(x)$ und durch ein skalares Druckfeld $p(x)$. Den Materieanteil des Energie-Impuls Tensors bezeichnen wir mit $M^{ij} = \rho u^i(x) u^j(x)$. Wir wollen zeigen, daß durch Einbeziehung des Druckes in T^{ij} nach Divergenzbildung die richtigen Bewegungsgleichungen der klassischen Hydrodynamik resultieren.

Wir betrachten zunächst den klassischen Limes kleiner Geschwindigkeiten und kleiner Drucke, so daß wir Terme der Ordnung v^2/c^2 und $p(v/c)$ vernachlässigen können.

Der Druck soll ferner nur den Materiefluß beeinflussen, nicht aber die Elastizitätseigenschaften der Materie. Viskositätseffekte werden vollständig ausgeschlossen. Mit diesen Annahmen können wir wieder für die Kontinuitätsgleichung schreiben

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) = 0. \quad (1044)$$

Die Kraftgleichung ändert sich nun zu

$$\rho \left(\frac{\partial v^m}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^m \right) = f^m = -\frac{\partial p}{\partial x^m} = \rho \frac{Dv^m}{Dt}. \quad (1045)$$

Die Beutung dieser Gleichung ist evident. Durch den Druckgradienten $-\partial p/\partial x^m$ wird ein Volumenelement beschleunigt und ein Beobachter in der Flüssigkeit erfährt die Beschleunigung Dv^m/Dt . Dies entspricht also gerade dem zweiten Newtonschen Gesetz. Sollten äußere Kräfte wirken, müßte man den Term mit f^m modifizieren. Diese Gleichung ist noch nicht relativistisch invariant. Wir müssen noch eine Tensorgestalt der Gleichung (1045) ableiten, die die Bedingung der relativistischen Kovarianz befriedigt.

Die Kontinuitätsgleichung ergibt sich aus der Forderung

$$M^{0i}{}_{|i} = \frac{1}{c} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot (\rho \vec{v}) \right) = 0. \quad (1046)$$

Die Bewegungsgleichung muß jetzt aber ausgedrückt werden durch

$$M^{mi}{}_{|i} = \frac{\rho}{c^2} \frac{Dv^m}{Dt} = \frac{\rho}{c^2} \left(\frac{\partial v^m}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla} v^m \right) = -\frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x^m} \neq 0. \quad (1047)$$

Bei Anwesenheit eines inneren Druckes ist M^{ij} also nicht divergenzfrei. Um dieses Problem zu lösen betrachten wir eine 3×3 Matrix S^{mn} mit der Eigenschaft

$$S^{mn}{}_{|n} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial p}{\partial x^m}. \quad (1048)$$

Diese Matrix ist bekannt als der dreidimensionale Drucktensor, seine Divergenz stellt eine Kraft dar. Ein Drucktensor, der die Forderung (1048) erfüllt, ist gegeben durch

$$S^{mn} = \frac{p}{c^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1049)$$

Mit Hilfe des Drucktensors können wir die Bewegungsgleichung insgesamt schreiben als

$$M^{mi}{}_{|i} + S^{mn}{}_{|n} = 0. \quad (1050)$$

Wir erweitern S^{mn} zu einer 4×4 Matrix

$$S^{ij} = \frac{p}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1051)$$

Damit folgt

$$(M^{ij} + S^{ij})_{|j} = T^{ij}_{|j} = 0, \quad (1052)$$

wobei T^{ij} explizit ausgeschrieben lautet

$$T^{ij} = \rho \begin{pmatrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ v_x/c & 0 & 0 & 0 \\ v_y/c & 0 & 0 & 0 \\ v_z/c & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \frac{p}{c^2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (1053)$$

Dies gilt im Rahmen unserer klassischen Näherung.

T^{ij} ist noch kein Tensor, denn die Relation zwischen \vec{v} , p und T^{ij} ist nicht kovariant. Wir wollen also verallgemeinern. Für M^{ij} kennen wir das Resultat schon. Wir suchen noch eine geeignete Form für S^{ij} . Es gibt nur zwei symmetrische Tensoren vom Rang 2, die mit der Flüssigkeit verknüpft werden können, nämlich g^{ij} und $u^i u^j$. Wir machen als Ansatz

$$S^{ij} = \frac{p}{c^2} [\alpha u^i u^j + \beta g^{ij}], \quad (1054)$$

wobei α und β noch unbekannte Koeffizienten sind, die wir zu bestimmen haben. Für kleine Geschwindigkeiten und Drucke müssen wir das klassische Resultat erhalten. Die entsprechende Reduktion liefert

$$S^{ij} = \frac{p}{c^2} \left[\alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \right]. \quad (1055)$$

Durch Koeffizientenvergleich erhalten wir $\alpha = 1$ und $\beta = -1$. Damit haben wir

$$S^{ij} = \frac{p}{c^2} (u^i u^j - g^{ij}) \quad (1056)$$

und insgesamt für den vollständigen Energie - Impuls Tensor

$$T^{ij} = \rho u^i u^j + \frac{p}{c^2} (u^i u^j - g^{ij}). \quad (1057)$$

Sterne, Weiße Zwerge und Neutronensterne

In diesem Abschnitt wollen wir einige einfache Eigenschaften von Sternen und anderen Objekten, die durch die Gravitation zusammengehalten werden, besprechen. Es sollen hier nur sphärisch symmetrische und nichtrotierende Objekte betrachtet werden.

Eine gravitativ gebundene Gaskugel, die sich im Gleichgewicht befindet, muß für jedes Volumenelement die nach innen gerichtete Gravitationskraft durch eine nach außen gerichtete Kraft kompensieren. Hier kommen der gaskinetische Druck und der durch die vorhandene elektromagnetische Strahlung ausgeübte Strahlungsdruck in Frage. Bei normalen Sternen im Gleichgewicht überwiegt der gaskinetische Druck und wir wollen den Strahlungsdruck vernachlässigen.

Nach der Newtonschen Theorie beträgt die Gravitationskraft auf ein kleines Volumenelement $f \cdot dr$ im Abstand r vom Zentrum der Kugel

$$F_{grav} = -\frac{G M(r) \rho(r) f dr}{r^2}, \quad (1058)$$

wobei

$$M(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho(r') dr' \quad (1059)$$

die Masse der innerhalb von r liegenden Kugel ist. Die durch den Druckgradienten hervorgerufene Kraft lautet

$$F_p = -f \Delta P = -f \frac{dP}{dr} dr. \quad (1060)$$

Die Gleichgewichtsbedingung $0 = F_{grav} + F_p$ führt damit auf

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{GM(r)\rho}{r^2}. \quad (1061)$$

Zu berechnen sind nun $P(r)$, $M(r)$ und $\rho(r)$. Zusätzlich zu den beiden Gleichungen (1059) und (1061) benötigen wir also noch eine dritte Gleichung, die Zustandsgleichung der Materie, die den Zusammenhang zwischen Druck und Dichte wiedergibt:

$$P = P(\rho). \quad (1062)$$

Dieser Zusammenhang kann im allgemeinen beliebig kompliziert sein und Materialkonstanten enthalten. Im Falle normaler Sterne ist wegen der hohen Temperaturen im Inneren die Zustandsgleichung des idealen Gases eine sehr gute Näherung:

$$P = \frac{\rho}{m_0} kT. \quad (1063)$$

Allerdings wird nun zusätzlich die Funktion $T(r)$ eingeführt. Zur exakten Behandlung wären nun detaillierte Kenntnisse über die Energieerzeugung in Sternen, den Energietransport an die Sternoberfläche und die Abstrahlung von der Oberfläche nötig. Wir wollen das Problem durch die Annahme einer konstanten Dichte

$$\rho = \frac{M}{V} = \text{const} \quad (1064)$$

vereinfachen um wenigstens die Größenordnungen von Druck und Temperatur im Sterninneren abschätzen zu können. Gleichung (1059) vereinfacht sich damit zu

$$M(r) = \frac{r^3}{R^3} M \quad (1065)$$

und eingesetzt in die Gleichgewichtsbedingung (1061) erhalten wir

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{3GM^2 r}{4\pi R^6}. \quad (1066)$$

Integration führt auf

$$P(r) = -\frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^6} r^2 + P(0) \quad (1067)$$

mit der Integrationskonstanten $P(0)$, dem Druck im Zentrum. Dieser Zentraldruck kann bestimmt werden durch die Forderung, daß der Druck an der Oberfläche des Sternes verschwindet,

$$P(r = R) = 0 \quad \Rightarrow \quad P(0) = \frac{3}{8\pi} \frac{GM^2}{R^4}. \quad (1068)$$

Die Größen auf der rechten Seite der Gleichung können für die Sonne relativ leicht aus astronomischen Beobachtungen bestimmt werden, während der Druck im Sonneninneren direkten Messungen nicht zugänglich ist. Einsetzen der Werte

$$\begin{aligned} M_{\odot} &\approx 2 \cdot 10^{33} \text{ g} \\ R_{\odot} &\approx 7 \cdot 10^{10} \text{ cm} \end{aligned} \quad (1069)$$

ergibt

$$P_{\odot} \sim 1.3 \cdot 10^{15} \frac{\text{dyn}}{\text{cm}^2} \approx 1.3 \cdot 10^9 \text{ atm} \quad (1070)$$

sowie unter Ausnutzung der idealen Gasgleichung (1063)

$$T_{\odot} \sim 10^7 \text{ K}. \quad (1071)$$

Für m_0 haben wir dabei die Protonenmasse eingesetzt. Damit diese hohe Temperatur trotz der dauernden Energieabstrahlung aufrecht erhalten werden kann, muß im Sonneninneren Energie erzeugt werden. Bekanntlich erfolgt diese Energieerzeugung durch die Fusion von Wasserstoff zu Helium. Um fusionieren zu können müssen sich die Ausgangskerne so nahe kommen, daß die Kerne durch die starke Wechselwirkung zu einem großen Kern gebunden werden können. Dazu müssen die Kerne die Coulomb-Abstoßung überwinden:

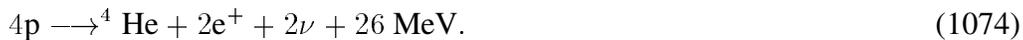
$$E_C = \frac{Z^2 \alpha}{r_0} \sim \text{MeV}. \quad (1072)$$

Die vorhandene thermische Energie ist mit der eben abgeschätzten Temperatur

$$E_{th} = kT \sim \text{keV}. \quad (1073)$$

Es gibt zwar in der Energieverteilung der Kerne stets auch einige Kerne mit etwas höherer Energie, jedoch ist die Wahrscheinlichkeit, die nötige Energie von MeV zu finden, verschwindend klein. Quantenmechanisch können die Kerne trotzdem die Barriere mit einer endlichen Wahrscheinlichkeit durchtunneln und eine Fusionsreaktion machen.

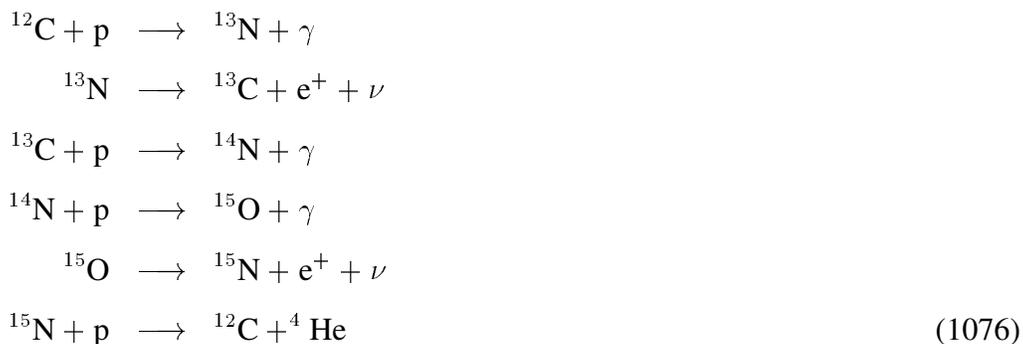
Man sieht, daß die Höhe der Coulomb-Barriere quadratisch mit der Kernladung geht und daher bei "kleinen" Temperaturen wie in unserer Sonne die direkte Fusion von Wasserstoff zu Helium überwiegt:



Diese Nettoreaktion läuft in mehreren Schritten ab:



Der erste Schritt läuft dabei am langsamsten ab, da dabei durch die schwache Wechselwirkung ein Proton in ein Neutron umgewandelt werden muß. Dies ist der Grund dafür, daß bei etwas höheren Temperaturen eine andere Reaktion dominiert:



Der am Anfang dieses *CNO-Zyklus* benötigte Kohlenstoffkern wird also am Ende der Kette wieder zurückgeliefert; der ^{12}C -Kern wirkt hier als Katalysator. Auch in dieser Zerfallskette werden zwei Umwandlungen durch die schwache Wechselwirkung vermittelt, jedoch sind die Kerne ^{13}N und ^{15}O abgesehen von dieser Zerfallsmöglichkeit stabil und können sich daher für den Betazerfall Zeit lassen. In der direkten Fusion zweier Protonen dagegen ist das Diproton völlig ungebunden und der schwache Zerfall muß während der kurzen Zeit der gegenseitigen Annäherung passieren. Andererseits sind im CNO-Zyklus schwerere Kerne beteiligt, so daß die Coulomb-Barriere höher ist. Deshalb setzt der CNO-Zyklus erst bei höheren Temperaturen ein, dominiert dann aber.

Nicht die gesamten 26 MeV der Nettoreaktion (1074) stehen dem Stern zur Verfügung. Die entstandenen Neutrinos tragen einen kleinen Teil davon weg, da sie ungehindert aus dem Inneren des Sternes entweichen können. Die von der Sonne emittierten Neutrinos können sogar auf der Erde noch nachgewiesen werden. Damit kann man gewissermaßen bis in das Zentrum der Sonne sehen, wo die Kernfusionen stattfinden. Allerdings stellt man fest, daß im experimentell zugänglichen Energiebereich nur etwa ein Drittel der Neutrinos gemessen werden, die man theoretisch erwarten würde. Möglicherweise ist also die Energieverteilung der Neutrinos anders als erwartet und die Modelle zur Beschreibung des Sonneninneren sind mangelhaft. Eine andere diskutierte Möglichkeit wäre, daß die ursprünglich in der Sonne erzeugten Elektron-Neutrinos sich auf dem langen Weg zur Erde in Neutrinos der beiden anderen Leptonenfamilien umwandeln. Da es gerade drei Leptonenfamilien mit den Neutrinos ν_e , ν_μ und ν_τ gibt, könnte dies gerade den fehlenden Faktor drei der Sonnenneutrinos erklären, denn Myon- und Tau-Neutrinos können nicht nachgewiesen werden.

Bei noch höheren Temperaturen im Sterninneren können schließlich auch noch schwerere Kerne zur Fusion gebracht werden. Solche Reaktionen werden in Sternen wichtig, die bereits einen großen Teil ihrer Wasserstoffvorräte aufgebraucht haben. Bei Erreichen von ^{56}Fe kann allerdings durch weitere Fusion keine Energie mehr gewonnen werden.

Irgendwann sind alle Energievorräte eines Sternes erschöpft. Die Temperatur und damit der Druck sinken; der Stern schrumpft. Diese Endphase kann sehr schnell durchlaufen werden und ist ein dynamischer Prozeß. Beispielsweise kann es hier auch zu spektakulären Supernova-Explosionen kommen.

Ein möglicher Endzustand eines Sternes ist ein *Weißer Zwerg* oder — nach längerer Abkühlzeit — ein *Schwarzer Zwerg*. Ein völliges Zusammenfallen der Materie wird dabei (bei nicht zu schweren Sternen) durch das Pauli-Prinzip verhindert.

Bei großer Verdichtung der Materie sind die Elektronen nicht mehr an den Atomen gebunden sondern können sich wie in Metallen frei zwischen den positiven Ionen bewegen. Der Hintergrund der positiven Ionen bildet einen Potentialtopf für die Elektronen, die sich darin frei bewegen können. Die Elektronen-Wellenfunktionen müssen aber Randbedingungen an der Oberfläche des Potentialtopfes erfüllen. Dadurch sind nur noch diskrete Zustände für die Elektronen erlaubt, denn es muß (im eindimensionalen Bild) ein Vielfaches der Elektronenwellenlänge genau in den Topf passen. Die Elektronen müssen sich als Fermionen an das Pauli-Prinzip halten und dürfen jeden dieser Zustände nur jeweils paarweise besetzen (mit je einem Elektron mit Spin nach oben und Spin nach unten). Bei niedrigen Temperaturen $T \approx 0$ sind also genau die untersten Zustände von Elektronen besetzt.

Wird der Topf verkleinert, so werden auch die erlaubten Wellenlängen kleiner, was zu höheren Impulsen und damit höheren Energien führt. Möchte man also das Volumen des Systems verkleinern, so muß Energie zugeführt werden, was sich als Druck bemerkbar macht. Wir wollen im folgenden den Fermidruck bzw. die Zustandsgleichung eines solchen *entarteten Elektronengases* berechnen.

Zunächst bestimmen wir die Zahl der Zustände dN in einem Volumen V mit Impulsen zwischen k und $k + dk$. Es gilt

$$h^3 dN = 2 \cdot \underbrace{V \cdot 4\pi k^2 dk}_{\text{Phasenraumvolumen}}, \quad (1077)$$

weil sich in jeder Phasenraumzelle der Größe h^3 nur höchstens 2 Elektronen mit antiparallelen Spins befinden können. Die Gesamtzahl der Elektronen mit Impuls $\leq k_f$, dem Fermiimpuls, beträgt dann

$$N = \int_0^{k_f} \frac{dN}{dk} dk = V \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_f} k^2 dk = \frac{8\pi}{3h^3} V k_f^3. \quad (1078)$$

Aufgelöst nach dem Fermiimpuls erhalten wir

$$k_f = \frac{h}{2} \left(\frac{3N}{\pi V} \right)^{1/3} \quad (1079)$$

und

$$\frac{dk_f}{dV} = -\frac{1}{3} \frac{k_f}{V}. \quad (1080)$$

Die gesamte Energie aller Elektronen erhalten wir durch

$$E = \int_0^{k_f} E(k) \frac{dN}{dk} dk = V \frac{8\pi}{h^3} \int_0^{k_f(V)} E(k) k^2 dk. \quad (1081)$$

Der Druck ergibt sich nun als Energieänderung pro Volumenänderung:

$$-P = \frac{\partial E}{\partial V} = \frac{E}{V} + V \frac{8\pi}{h^3} E(k_f) k_f^2 \frac{dk_f}{dV} = \frac{E}{V} - \frac{8\pi}{3h^3} E(k_f) k_f^3. \quad (1082)$$

Zur konkreten Berechnung benötigen wir noch den Zusammenhang zwischen Impuls und Energie:

$$E(k) = \sqrt{m_e^2 c^4 + k^2 c^2} \approx \begin{cases} \frac{k^2}{2m_e} & k \ll m_e c \\ kc & k \gg m_e c \end{cases} \quad (1083)$$

Da ohnehin nur Energiedifferenzen interessieren, haben wir im nichtrelativistischen Grenzfall die Ruhemasse der Elektronen weggelassen. In den beiden angegebenen Grenzfällen ist die Integration zur Berechnung von E sehr einfach und nach Einsetzen in (1082) erhalten wir für den Druck des entarteten Elektronengases (n bezeichnet die Elektronendichte N/V)

$$P \approx \begin{cases} \frac{8\pi}{15h^3} \frac{k_f^5}{m_e} = \frac{1}{20} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{2/3} \frac{h^2}{m_e} n^{5/3} & \text{nichtrelativistisch} \\ \frac{2\pi}{3h^3} k_f^4 c = \frac{1}{8} \left(\frac{3}{\pi}\right)^{1/3} hc n^{4/3} & \text{extrem relativistisch.} \end{cases} \quad (1084)$$

Dabei geschieht der Übergang von der nichtrelativistischen zur relativistischen Beschreibung ungefähr bei dem Impuls

$$k_0 \approx m_e c = \frac{h}{2} \left(\frac{3n_0}{\pi}\right)^{1/3} \quad (1085)$$

beziehungsweise bei einer zugehörigen Fermionendichte

$$n_0 = \frac{8\pi m_e^3 c^3}{3h^3} \quad (1086)$$

$$\approx 6 \cdot 10^{29} \text{ cm}^{-3} \text{ für Elektronen.} \quad (1087)$$

Dem nichtrelativistischen Grenzfall der Gleichung (1084) können wir entnehmen, daß zum Druck im wesentlichen nur die leichten Elektronen beitragen, denn der analoge Ausdruck für den Protonendruck wäre durch die größere Protonenmasse um einen Faktor 2000 unterdrückt. Andererseits ist die Masse des Sternes fast ausschließlich durch die Masse der Nukleonen gegeben.

Nehmen wir an, daß der Stern im wesentlichen aus Wasserstoff aufgebaut ist, dann enthält er genauso viele Nukleonen (Protonen) wie Elektronen und wir erhalten eine

Massendichte von

$$\rho_0 = m_p n_0 \quad (1088)$$

$$\approx 1000 \text{ kg/cm}^3 \quad \text{für Weiße Zwerge.} \quad (1089)$$

Wir können nun die Zustandsgleichung (1084) in die Beziehung (1068) für den Zentraldruck einsetzen und erhalten schließlich die Masse eines weißen Zwerges in Abhängigkeit von seiner Zentraldichte:

$$M = \begin{cases} \frac{c^3}{\rho_0^{1/2} G^{3/2}} \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^{3/2} \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} = M_C \left(\frac{\rho}{\rho_0} \right)^{1/2} & \text{falls } \rho < \rho_0 \\ \frac{c^3}{\rho_0^{1/2} G^{3/2}} \left(\frac{m_e}{m_p} \right)^{3/2} = M_C & \text{falls } \rho > \rho_0 \end{cases} \quad (1090)$$

Dabei wurde $R = (3M/4\pi\rho)^{1/3}$ benutzt. Da bereits mehrere Näherungen eingegangen sind, haben wir konstante Zahlenfaktoren in der Größenordnung von 1 weggelassen. Die hier eingeführte Größe M_C ist die *Chandrasekhar-Masse*. Wie man sieht, wächst die Masse des weißen Zwerges mit steigender Zentraldichte bis zur Chandrasekhar-Masse an und bleibt dann konstant.

Wenn wir ρ_0 und n_0 aus den Gleichungen (1088) und (1086) einsetzen, dann sehen wir, daß die Chandrasekhar-Masse gar nicht von der Fermionenmasse — also von m_e — abhängt, sondern allein von der Größe der Gravitationskonstanten und der Protonenmasse bestimmt wird:

$$M_C = m_p \left(\frac{c\hbar}{m_p^2 G} \right)^{3/2} \quad (1091)$$

$$\approx 1.4 M_\odot \quad (1092)$$

Für $\rho < \rho_0$, das heißt im nichtrelativistischen Fall, ist

$$R^3 \rho \propto M \propto \rho^{1/2} \Rightarrow R^3 \rho^{1/2} \propto R^3 M = \text{const}, \quad (1093)$$

das heißt der Stern schrumpft, wenn seine Masse vergrößert wird.

Im extrem relativistischen Fall, $\rho > \rho_0$, gilt sogar

$$R^3 \rho \propto M = M_C, \quad (1094)$$

das heißt bei konstanter Masse kann der Stern beliebige Radien annehmen. Bei einer kleinen Störung kollabiert der Stern bereits.

Bei sehr hohen Dichten kommt noch ein weiterer Aspekt ins Spiel. Wenn nämlich die Fermienergie der Elektronen die Massendifferenz zwischen Neutron und Proton übersteigt, dann ist kein β -Zerfall des Neutrons mehr möglich, weil die energetisch erlaubten Zustände des erzeugten Elektrons bereits alle besetzt sind. Es wird sogar der umgekehrte Prozeß stattfinden:



so daß die Zahl der Elektronen abnimmt. Dies senkt allerdings auch den Fermidruck der Elektronen, und der Stern ist nicht mehr stabil. Er kollabiert und es werden praktisch alle Protonen in Neutronen umgewandelt. Es sind nun zwar auch keine Elektronen mehr vorhanden, aber da auch die jetzt vorhandenen Neutronen Fermionen sind, kann jetzt der Fermidruck des entarteten Neutronengases (bei nicht zu schweren Systemen) den völligen Kollaps verhindern und es bildet sich ein *Neutronenstern*. In den obigen Gleichungen ist nur m_e durch $m_n \approx m_p$ zu ersetzen.

Da die Chandrasekhar-Masse unabhängig von der Fermionenmasse war, ist die Grenzmasse für Neutronensterne im Rahmen unserer Betrachtungen die gleiche wie für weiße Zwerge. Lediglich die Massendichte ρ_0 skaliert mit $(m_p/m_e)^3$ und der Radius mit m_e/m_p . Die typische Dichte eines Neutronensternes wäre also

$$\rho_0 \approx 10^{15} \text{ g/cm}^3 \text{ für Neutronensterne} \quad (1096)$$

Der typische Radius eines Neutronensternes ergibt sich zu 5 km, was bereits vergleichbar ist mit dem Schwarzschildradius, der in der gleichen Größenordnung liegt. Bei einer genaueren Untersuchung sind also Effekte der allgemeinen Relativitätstheorie in Rechnung zu stellen. Außerdem ist zu beachten, daß die Neutronen wegen der bei hohen Dichten einsetzenden starken Wechselwirkung nicht mehr gut durch ein *freies* Fermionengas beschrieben werden können. Bessere Abschätzungen liefern für Neutronensterne eine etwas größere Grenzmasse von etwa zwei Sonnenmassen.

Bei größeren Massen kann der Fermidruck der Neutronen der Gravitation keinen Widerstand leisten und das System kollabiert völlig. Es ist aber zu beachten, daß der Übergang von Sternen zu Weißen Zwergen oder Neutronensternen ein dynamischer Prozeß ist, der sehr heftig und explosiv verlaufen kann (Supernova), wobei große Materiemengen in das Weltall geschleudert werden können. Daher muß nicht jeder Stern mit ursprünglich mehr als zwei Sonnenmassen als schwarzes Loch enden.

Hydrodynamik in gekrümmten Räumen

Die Hydrodynamik dient zur Beschreibung von Flüssigkeiten und Gases, die im lokalen thermodynamischen Gleichgewicht stehen. Die Beschreibung erfolgt mittels einer Reihe von Feldern, nämlich dem Geschwindigkeitsfeld $u^i(x)$, dem Druckfeld $p(x)$, dem Dichtefeld $\rho(x)$ und dem Temperaturfeld $T(x)$. Der Wert des Feldes gibt den Gleichgewichtswert von mittlerer Geschwindigkeit, Druck, Dichte und Temperatur des Gases in einem kleinen Volumen um den raum-zeitlichen Punkt x an. Wir betrachten zunächst die Beschreibung in einem flachen, nichtgekrümmten Raum. Da alle diese Felder lokale Größen beschreiben, ist es immer möglich, sie in einem mitbewegten (Gaußschen) Koordinatensystem zu betrachten, wo der metrische Tensor an einem Punkt keine Krümmung enthält.

Im folgenden führen wir die Dichte aufgrund ihrer Transformationseigenschaften hinsichtlich der Lorentz-Gruppe (also im flachen Raum) ein. Dichten spielen eine zu Volumen duale Rolle: das Produkt aus einer Dichte und einem Volumen ergibt eine skalare physikalische Größe, z.B. eine Anzahl von Teilchen oder eine Energie. Kennt man das Transformationsverhalten des Volumens, so muß die Dichte gerade die dazu duale Größe sein.

Im dreidimensionalen Raum wird eine Dichte durch die Gleichheit

$$(\text{Anzahl in } dV) = (\text{Dichte}) \cdot dV \quad (1097)$$

definiert. Da das dreidimensionale Volumenelement dV im dreidimensionalen Raum ein Skalar ist, ist auch die Dichte ein dreidimensionaler Skalar. Im vierdimensionalen Raum dagegen hat das 3-Volumenelement das Transformationsverhalten eines Vierervektors. Wir ersehen das daraus, daß die Translation eines dreidimensionalen Volumens um einen Vierervektor dx^i ein vierdimensionales Volumen aufspannt:

$$(\text{4-Volumen}) = (\text{3-Volumen})_i \cdot dx^i. \quad (1098)$$

Ein dreidimensionales Volumen im vierdimensionalen Raum hat daher den Transformationscharakter eines Vierervektors; nur so läßt sich zusammen mit dem Vierervektor der Translation ein Skalar bilden. Dies ist analog zu einer zweidimensionalen Fläche im dreidimensionalen Raum, die durch ihren Normalenvektor charakterisiert wird. Der Normalenvektor dV_i charakterisiert die "Ausrichtung" des 3-Volumens; für ein senkrecht zur Zeitachse stehendes (also nur zu einem Zeitpunkt definiertes) Volumen ist der Normalenvektor parallel zur Zeitachse

$$dV_i = (d|V|, 0, 0, 0), \quad (1099)$$

wenn $|V|$ den Betrag des dreidimensionalen Volumens angibt. Befindet sich das Volumen in einem bewegten Koordinatensystem, so existiert es aufgrund der Lorentz-Transformation nicht gleichzeitig, sondern zu verschiedenen Zeitpunkten, und der Vektor hat rotierte Komponenten. Schließlich gibt es auch zeitartige 3-Volumen; sie entsprechen dem Teil des vierdimensionalen Raumes, der von einer zweidimensionalen Fläche in einem bestimmten Zeitraum durchlaufen wird.

Definiert man eine vierdimensionale Dichte analog zum dreidimensionalen Raum, d.h., fordert man, daß das Produkt aus Dichte und 3-Volumen ein Skalar sei,

$$(\text{Anzahl in } dV) = (\text{Dichte})_i dV^i, \quad (1100)$$

so wird die Dichte ebenfalls durch einen Vierervektor beschrieben. (Im gekrümmten Raum ist das 4-Volumen allein kein Skalar, sondern muß mit $\sqrt{-g}$ multipliziert werden.) Wir bezeichnen die Teilchenzahldichte mit n^i ; die Anzahl der Teilchen in einem kleinen 3-Volumen dV_i ist also

$$dN = n^i dV_i. \quad (1101)$$

Der Vektor n^i gibt dann die Dichte der Weltlinien der Teilchen an; er ist parallel zur Tangente an die Weltlinien.

Wir haben schon gesehen, daß sich die Erhaltung der Teilchenzahl in der Kontinuitätsgleichung

$$n^i_{||i} = 0 \quad (1102)$$

manifestiert. Dies folgt aus dem Gaußschen Integralsatz. Betrachtet man nämlich ein 3-Volumen zu zwei verschiedenen Zeitpunkten und formt im vierdimensionalen Raum aus ihnen durch Verbindung ihrer Ränder ein abgeschlossenes 4-Volumen H , so ist die Nettozahl der Teilchen, deren Weltlinien den Rand von H , ∂H , durchdringen, durch

$$\Delta N = \int_{\partial H} n^i dV_i \quad (1103)$$

gegeben. Die Integration läuft über das räumlichen 3-Volumen zu beiden Zeitpunkten und über das zeitartige 3-Volumen, das sie verbindet. Letzteres entspricht der Oberfläche des räumlichen Volumens in ihrer Existenz über den Zeitraum zwischen den beiden Zeitpunkten. Aus dem Gaußschen Satz folgt

$$\Delta N = \int_H n^i_{||i} dH \quad (1104)$$

und damit die genannte Kontinuitätsgleichung für den Fall, daß genausoviele Teilchen das 4-Volumen H verlassen wie sich hineinbewegen. Dies entspricht der Situation, daß die Weltlinien der Teilchen nicht enden dürfen.

Im flachen Raum lautet die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_i n^i = \frac{\partial n^0}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{n} = 0. \quad (1105)$$

Wir können daher die Zeitkomponente n^0 mit der Teilchenzahldichte und die Raumkomponenten \vec{n} mit dem Flußvektor identifizieren. Man schreibt dann

$$n^i = n u^i, \quad u_i u^i = 1, \quad n_i n^i = n^2 \quad (1106)$$

und bezeichnet das skalare Feld $n(x)$ als Teilchenzahldichte und das 4-Vektorfeld $u^i(x)$ als Geschwindigkeitsfeld.

Neben der Teilchenzahldichte $n^i(x)$ ist zur thermodynamischen Beschreibung mindestens noch der isotrope Druck $p(x)$, ein Skalar, erforderlich. Beide zusammen erlauben es, den Energie-Impuls-Tensor (oder, streng gesprochen, seine Dichte) im Ruhesystem als

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p/c^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p/c^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p/c^2 \end{pmatrix} \quad (1107)$$

zu schreiben. Schließlich wird als dritte thermodynamische Grundgröße die Temperatur T oder die Entropiedichte s benötigt; dann ist das Gas vollständig beschrieben.

Um das System der hydrodynamischen Gleichungen abzuschließen, muß man auch den Zusammenhang zwischen Dichte, Druck und Temperatur kennen, die Zustandsgleichung. Sie hängt von der Wechselwirkung der Teilchen ab; im einfachsten Falle ist sie die eines idealen Gases. Betrachtet man den Endzustand der Sternentwicklung, in dem alle Energie durch Strahlung aus dem Stern gewichen ist, kann man sich behelfen, indem man die Temperatur zu Null setzt und die Zustandsgleichung des entarteten Fermigases gebraucht. In allen anderen Fällen setzt die Berechnung die Kenntnis des Energietransports im Stern voraus.

Die Dichte des Energie-Impuls-Tensors eines Gases ist gegeben durch

$$T^{ij} = \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i u^j - p g^{ij}, \quad (1108)$$

wenn u^i das 4-Geschwindigkeitsfeld, p das Druckfeld und ρ das Dichtefeld ist. Energie-Impuls-Erhaltung wird durch die Gleichung

$$T^{ij}{}_{||j} = 0 \quad (1109)$$

sichergestellt: die kovariante Divergenz des Energie-Impuls-Tensors verschwindet.

Wir betrachten die Konsequenzen dieser Gleichung für die Strömung eines Gases. Dazu setzen wir (1108) in (1109) ein

$$\begin{aligned}
T^{ij}{}_{\parallel j} &= \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i u^j - p g^{ij} \right]_{\parallel j} \\
&= \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)_{\parallel j} u^i u^j + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i{}_{\parallel j} u^j + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i u^j{}_{\parallel j} \\
&\quad - p_{\parallel j} g^{ij} \\
&= \left[\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)_{\parallel j} u^j + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^j{}_{\parallel j} \right] u^i + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^i{}_{\parallel j} u^j \\
&\quad - p_{\parallel j} g^{ij}
\end{aligned} \tag{1110}$$

Es ist zweckmäßig, den Vierervektor, den die Divergenz eines Tensors darstellt, bezogen auf die Vierergeschwindigkeit u^i zu betrachten: wir projizieren zunächst auf u^i ; später betrachten wir die Komponenten senkrecht dazu.

$$\begin{aligned}
u_i T^{ij}{}_{\parallel j} &= \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right)_{\parallel j} u^j + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^j{}_{\parallel j} + \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_i u^i{}_{\parallel j} u^j \\
&\quad - p_{\parallel j} g^{ij} u_i
\end{aligned} \tag{1111}$$

Im dritten Term ist

$$u_i u^i{}_{\parallel j} = \frac{1}{2} (u_i u^i)_{\parallel j} = 0, \tag{1112}$$

da das Produkt $u_i u^i = 1$ eine Konstante ist. Damit erhält man schließlich

$$u^j \rho_{\parallel j} = - \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^j{}_{\parallel j}. \tag{1113}$$

Die kovariante Ableitung auf der rechten Seite läßt sich auf das Dichtefeld umschreiben, wenn man beachtet, daß der Teilchenzahlstrom erhalten ist

$$n^j{}_{\parallel j} = (n u^j)_{\parallel j} = 0. \tag{1114}$$

Dann gilt

$$(n u^j)_{\parallel j} = 0 = n_{\parallel j} u^j + n u^j{}_{\parallel j} \tag{1115}$$

und daher

$$u^j{}_{\parallel j} = - \frac{n_{\parallel j} u^j}{n}. \tag{1116}$$

Wir finden schließlich die Kontinuitätsgleichung der Hydrodynamik im gekrümmten Raum:

$$u^j \rho_{||j} = -\frac{\rho + p/c^2}{n} u^j n_{||j}. \quad (1117)$$

Das hier auftretende Konstrukt $u^j f_{||j}$ mit einer beliebigen Größe f bedeutet die Änderung der Größe entlang der Weltlinie, an die u^i Tangente ist, also die Änderung pro Eigenzeitintervall $d\tau$ auf dieser Weltlinie

$$\frac{d\rho}{d\tau} = \frac{\rho + p/c^2}{n} \frac{dn}{d\tau}. \quad (1118)$$

Diese Gleichung drückt die Erhaltung von Masse-Energie aus; anders als die nichtrelativistische Hydrodynamik erlaubt sie die Umwandlung von Masse in Energie.

Wir wenden uns nun den Komponenten von $T^{ij}_{||j}$ senkrecht zu u^i zu. Dazu verwenden wir den Projektionstensor

$$P_{ij} = g_{ij} - u_i u_j. \quad (1119)$$

Angewandt auf einen beliebigen Vektor, projiziert er auf die zu u_i senkrechte Komponente. Angewandt auf die Divergenz des Energie-Impuls-Tensor finden wir

$$\begin{aligned} P_{ij} T^{jk}_{||k} &= \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) \left(u_{i||k} u^k - u_i u_j u^j_{||k} u^k \right) \\ &\quad - p_{||i} + u_i u^k p_{||k} \\ &= \left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u_{i||k} u^k - p_{||i} + \left(u^k p_{||k} \right) u_i, \end{aligned} \quad (1120)$$

wobei ein Term wieder aufgrund von $(u_j u^j_{||k}) = 0$ verschwindet. Nullsetzen liefert die Eulersche Gleichung der Hydrodynamik in gekrümmten Räumen

$$\left(\rho + \frac{p}{c^2} \right) u^k u_{i||k} = p_{||i} - \left(u^k p_{||k} \right) u_i \quad (1121)$$

Auf der linken Seite drückt der Ausdruck $u^k u_{i||k}$ die Änderung der Vierergeschwindigkeit entlang der Weltlinie, also die Viererbeschleunigung aus; die linke Seite stellt also das Äquivalent von “Masse mal Beschleunigung” dar. Die rechte Seite kann umgeschrieben werden

$$p_{||i} - \left(u^k p_{||k} \right) u_i = \left(g_i{}^k - u_i u^k \right) p_{||k}. \quad (1122)$$

Sie stellt die Projektion des Druckgradienten senkrecht zur Vierergeschwindigkeit dar, im mitbewegten Koordinatensystem also den dreidimensionalen Druckgradienten und

damit die wirkenden Kraft. Die Eulersche Gleichung drückt also das Erste Newtonsche Gesetz aus: die Beschleunigung eines Flüssigkeitsvolumens ist gleich der Kraft, die Kraft ist durch den Druckgradienten gegeben. Sie unterscheidet sich vom nichtrelativistischen Fall durch die explizite Kovarianz und durch die träge Masse der inneren Energie p/c^2 auf der linken Seite.

Diese beiden Gleichungen stellen die Grundlage der Hydrodynamik in gekrümmten Räumen dar. Sie sind insbesondere durch Reibungsterme zu ergänzen, die nicht aus der Erhaltung von Energie und Impuls folgen. Im folgenden betrachten wir nur den Fall eines statischen Sterns, in dem die räumlichen Komponenten des Geschwindigkeitsfeldes verschwinden. Dann gilt

$$u^i u_i = 1 = u^0 u_0 = g_{00} (u^0)^2 \implies u^0 = \frac{1}{\sqrt{g_{00}}}, \quad (1123)$$

wenn wir die Metrik diagonal wählen. Ebenso verschwinden die zeitlichen Ableitungen $\rho_{||0}$ des Dichtefeldes und $p_{||0}$ des Druckfeldes, und die Kontinuitätsgleichung ist immer erfüllt.