Allgemeine Relativitätstheorie

Gerhard Soff

Institut für Theoretische Physik
Johann Wolfgang Goethe - Universität
Frankfurt am Main

Vorlesung im Wintersemester 1992/93

Vorbemerkungen

Dieses Skript soll einen Einblick in die Grundgedanken der Einsteinschen Gravitationstheorie vermitteln sowie ihre Anwendungsmöglichkeiten in der Theorie der Struktur des Kosmos aufzeigen.

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist eine klassische Theorie. Vorkenntnisse aus der Quantenmechanik werden daher im allgemeinen nicht benötigt. Typische Größen aus der Quantenmechanik, wie zum Beispiel das Plancksche Wirkungsquantum $\hbar$ treten in den Einstein-Gleichungen nicht auf. Jedoch werden wir auch die Reaktion quantenmechanischer Systeme auf Gravitationseffekte studieren und somit auch $\hbar$ wieder in einige Berechnungen einbeziehen.

Geeignet ist diese Vorlesungsmitschrift für alle diejenigen Studenten, die bereits mit der Theoretischen Mechanik und mit der Theoretischen Elektrodynamik vertraut sind. Insbesondere wird sich die Kenntnis der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik als vorteilhaft erweisen. Selbstverständlich ist ein fundiertes Wissen der Speziellen Relativitätstheorie Voraussetzung.

Um als Ziel unserer Studien die Einsteinschen Gleichungen ableiten und einige physikalische sowie philosophische Konsequenzen diskutieren zu können, bedarf es zunächst der Aneignung eines leider recht umfangreichen mathematischen Apparates. Ähnlich wie zu Beginn einer Vorlesung in Theoretischer Mechanik erst die Kenntnisse der Vektorrechnung vermittelt werden müssen, werden wir zunächst einige Resultate der Tensoranalysis diskutieren. Die Einstein-Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie sind Tensorgleichungen.

Die Allgemeine Relativitätstheorie wurde aus der Forderung geboren, zur Beschreibung der Naturgesetze beliebige Koordinatensysteme verwenden zu können. Entsprechend dem Kovarianzprinzip sollte die Form der Naturgesetze nicht entscheidend von der Wahl des speziellen Koordinatensystems abhängen. Dies stellt eine natürliche Erweiterung der Speziellen Relativitätstheorie dar, in der die Naturgesetze in allen Inertialsystemen die selbe Struktur haben.

Literaturverzeichnis

1. R. Adler, M. Bazin, M. Schiffer, Introduction to General Relativity, (Mc Graw-Hill, New York, 1965)

2. C. W. Misner, K. S. Thorne, J. A. Wheeler, Gravitation, (Freeman, San Francisco, 1973)

3. S. Weinberg, Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity, (Wiley, New York, 1972)

4. H. Stephani, Allgemeine Relativitätstheorie, (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin, 1980)

5. W. Rindler, Essential Relativity, (Springer, New York, 1969)

6. R.U. Sexl, H.K. Urbantke, Gravitation und Kosmologie, (B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1983)

7. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, Klassische Feldtheorie, Band II, (Akademie-Verlag, Berlin, 1973)

8. G. Ludwig Einführung in die Grundlagen der Theoretischen Physik, Band 2, (Bertelsmann Universitätsverlag, Düsseldorf, 1974)

9. T. Fließbach, Allgemeine Relativitätstheorie, (B.I.-Wissenschaftsverlag, Mannheim, 1990)

10. B. Schutz, Geometrical methods of mathematical physics, (Cambridge University Press, Cambridge, 1980)

11. M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, (Adam Hilger, Bristol, 1990)

Einführung

Die Allgemeine Relativitätstheorie ist die Theorie der Schwerkraft. Die Bezeichnung "Allgemeine" soll darauf hin deuten, daß die Naturgesetze kovariant formuliert werden. Es ist ein grundlegendes Postulat der Allgemeinen Relativitätstheorie: Physikalische Gesetze sollen invariant bleiben bei Koordinatentransformationen.

In diesem Zusammenhang muß natürlich die Frage diskutiert werden, ob wirklich alle Koordinatensysteme gleichberechtigt sind. Bereits Leibnitz studierte mehr aus philosophischer Sicht die Relativität des Raumes und der verschiedenen Bezugssysteme. Newton hingegen postulierte einen absoluten Raum und somit die Existenz eines absoluten Bezugssystems. Er führte sein berühmtes Eimerexperiment durch, um zu beweisen, daß die Physik in den verschiedenen Bezugssystemen tatsächlich unterschiedlich ist. Dabei wird der Eimer mit Wasser gefüllt und an einem aufgedrehten Seil angehängt. Beim Abwickeln des Seils wird der Eimer in Rotation versetzt.

Drei charakteristische Phasen können dabei beobachtet werden. In der ersten Phase dreht sich der Eimer, aber das Wasser ruht noch. In der zweiten Phase dreht sich der Eimer noch, aufgrund der Reibungskräfte zwischen der Eimerwand und dem Wasser rotiert dieses nun mit. Bewirkt durch die auftretende Zentrifugalkraft weist das Wasser eine parabolische Oberfläche auf. Schließlich ruht der Eimer, aber das Wasser rotiert noch und hat nach wie vor eine parabolische Oberfläche. Obwohl die Relativbewegung zwischen Wasser und Eimer in Phase eins und drei eigentlich die gleiche ist, so ist doch die physikalische Situation gänzlich verschieden. Newton schloß aus diesem Sachverhalt, daß es nur auf die relative Bewegung gegenüber einem absoluten Raum ankommt. Damit war die Leibnitzsche Hypothese der Relativität des Raumes durch das Experiment erst einmal widerlegt.

Scheinkräfte, wie sie sich bei diesem Eimerexperiment manifestieren, treten – obwohl sie durchaus reell sind – nur in gewissen Bezugssystemen auf. Es stellt sich nun die Frage, ob eventuell auch Gravitationskräfte den Charakter von Scheinkräften aufweisen und durch die Wahl eines geeigneten Bezugssystems wegtransformiert werden können. In der Tat wurde Newton's Eimer-Experiment durch ein Einsteinsches Gedankenexperiment relativiert.

Einstein dachte sich einen Beobachter in einem abgeschlossenen Kasten, der feststellt, daß eine Abwärtsbeschleunigung wirkt. Als erster Grund kann eine Anziehung durch eine schwere Masse stattfinden. Als zweiter Grund könnte jedoch jemand an einem Seil ziehen, das am oberen Ende des Kastens befestigt ist. Im Rahme der Mechanik läßt sich kein Experiment innerhalb des Kastens durchführen, um zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu unterscheiden. Damit wäre die Gravitationskraft keine absolute Kraft mehr, sondern weist vielmehr den Charakter einer Scheinkraft auf. Weiter kann dann die Gravitation in einem geeigneten Bezugssystem wegtransformiert werden. Dies ist in der Tat eine beliebte Übung von Astronauten. In einem frei fallenden Kasten oder in einem Satelliten auf einer Erdumlaufbahn ist die Schwerkraft nicht wirksam.

Eine prinzipielle Unterscheidungsmöglichkeit der beiden oben diskutierten Ursachen scheint zunächst durch die Verwendung eines Lichtstrahls gegeben zu sein. Für den Fall der Beschleunigung nach oben durch das Ziehen am Seil sollte der Lichtstrahl eine Parabel beschreiben und damit an einem Punkt der gegenüber der Lichtquelle liegenden Kastenwand auftreffen, der unterhalb der Geraden zwischen Quelle und Wand liegt, wobei diese Gerade senkrecht auf der Wand steht. Im Fall der wirkenden Schwerkraft wird zunächst erwartet, daß der Lichtstrahl einfach eine Gerade beschreibt.

Im Jahr 1919 wurde aber aufgrund der Einsteinschen Vorhersage von Eddington auch die Ablenkung von Licht im Schwerefeld nachgewiesen. Diese Überlegungen sind verknüpft mit dem Äquivalenzprinzip, d.h. der Nichtunterscheidbarkeit von träger und schwerer Masse. Dabei ist die träge Masse einfach ein Proportionalitätskonstante zwischen Beschleunigung und wirkender Kraft. Hingegen ist die schwere Masse ein Maß für die Anziehung eines Testteilchens durch die Gravitation.

Die metrische Fundamentalform

Bevor wir die metrische Fundamentalform einführen, erinnern wir uns an die Diskussion krummliniger Koordinatensysteme in der elementaren Mechanik. Wir betrachten einen 3-dimensionalen Raum mit den Koordinaten $x, \ y$ und z und wir wollen eine Transformation auf die krummlinigen Koordinaten $u_1, \ u_2$ und u_3 durchführen. Der funktionale Zusammenhang zwischen den beiden Koordinatensätzen sei gegeben durch

$$\begin{aligned} x &= f(u_1, u_2, u_3) \ , \\ y &= g(u_1, u_2, u_3) \ , \\ z &= h(u_1, u_2, u_3) \ , \end{aligned} \tag{1}$$

wobei $f, \ g$ und h stetige Funktionen kennzeichnen. Der Ortsvektor $\vec{r}$ ist dann darstellbar als

$$\vec{r} \ = \ x\,\vec{e}_x + y\,\vec{e}_y + z\,\vec{e}_z \ = \ f\,\vec{e}_x + g\,\vec{e}_y + h\,\vec{e}_z \ . \tag{2}$$

Für das Inkrement $d\vec{r}$ des Ortsvektors ausgedrückt in den krummlinigen Koordinaten folgt

$$d\vec{r} \ = \ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} du_3 \ . \tag{3}$$

Wir führen die Einheitsvektoren $\vec{e}_i (i \ = \ 1, 2, 3)$ entlang der u_i-Kurven ein. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} &= \left| \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_1} \right| \vec{e}_1 \ = \ h_1 \vec{e}_1 \ , \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_2} &= h_2 \vec{e}_2 \ , \\ \frac{\partial \vec{r}}{\partial u_3} &= h_3 \vec{e}_3 \end{aligned} \tag{4}$$

und somit

$$d\vec{r} \ = \ h_1\, du_1\, \vec{e}_1 + h_2\, du_2\, \vec{e}_2 + h_3\, du_3\, \vec{e}_3 \ . \tag{5}$$

Für ein orthogonales Koordinatensystem $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ergibt sich für das Quadrat des Linienelementes einfach

$$ds^2 \ = \ d\vec{r} \cdot d\vec{r} \ = \ h_1^2\, du_1^2 + h_2^2\, du_2^2 + h_3^2\, du_3^2 \tag{6}$$

mit der generellen Schreibweise $du_i^2 = du_i \, du_i$.

Als Beispiel transformieren wir auf Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ). Mit

$$
\begin{aligned}
x &= r \sin\vartheta \, \cos\varphi \, , \\
y &= r \sin\vartheta \, \sin\varphi \, , \\
z &= r \cos\vartheta
\end{aligned}
\tag{7}
$$

folgt aus einer elementaren Rechnung

$$
h_1 = 1, \quad h_2 = r, \quad h_3 = r \sin\vartheta \tag{8}
$$

und

$$
ds^2 = dr^2 + r^2 \, d\vartheta^2 + r^2 \sin^2\!\vartheta \, d\varphi^2 \, . \tag{9}
$$

Schreiben wir nun für das Quadrat des Längenelementes formal

$$
ds^2 = \sum_{i,k=1}^{3} g_{ik} \, du_i \, du_k \, , \tag{10}
$$

so gilt offensichtlich

$$
\begin{aligned}
g_{11} &= h_1^2 = 1 \, , \\
g_{22} &= h_2^2 = r^2 \, , \\
g_{33} &= h_3^2 = r^2 \sin^2\!\vartheta \, .
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Alle nichtdiagonalen Elemente der g_{ik}-Matrix verschwinden, $g_{ik} = 0$ für $i \neq k$.

Wir bleiben zunächst im dreidimensionalen Raum mit den Koordinaten x_1, x_2, x_3. Eine Fläche ist die Menge aller Punkte, die die Relation

$$
f(x_1, x_2, x_3) = 0 \tag{12}
$$

erfüllen. Die Relation (12) nennt man die implizite Darstellung der Fläche. Erfüllt die Funktion f spezielle Bedingungen, so läßt sich auch eine explizite Darstellung der Fläche gewinnen,

$$
x_3 = g(x_1, x_2) \, , \tag{13}
$$

die deutlich den zweidimensionalen Charakter einer Fläche aufzeigt. Um aber die Asymmetrie in den drei Koordinaten in (13) aufzuheben und um die Beschränkung an f zu beseitigen, hat bereits Gauß eine allgemeine Darstellung einer Fläche eingeführt. Ebenso hat sich Gauß bereits mit der Frage befaßt, wie ein zweidimensional denkendes Wesen feststellen könnte, daß es sich auf einer gekrümmten Fläche im dreidimensionalen Raum bewegt. Anhaltspunkte dazu sind beispielsweise die Untersuchungen, ob der Satz des Pythagoras gilt, ob die Winkelsumme im Dreieck 180^o beträgt oder ob der Umfang U eines Kreises durch $U = 2\pi R$ gegeben ist.

Wir führen die Parameterdarstellung einer Fläche ein. Gegeben seien zwei Parameter $u_1,\ u_2$, die frei in einem Bereich Δu der $(u_1,\ u_2)$-Ebene variieren können. Wir betrachten drei Funktionen $g_i(u_1, u_2)$, die in Δu definiert sind. Durch die Definition

$$x_i = g_i(u_1, u_2) \quad i = 1,\ 2,\ 3 \tag{14}$$

erzeugen wir eine zweidimensionale Untermenge von Punkten in dem dreidimensionalen Euklidischen Raum.

Als einfaches Beispiel geben wir die Parameterform einer Kugeloberfläche mit dem Radius a an

$$\begin{aligned} x &= a\ \cos u_1\ \sin u_2\ , \\ y &= a\ \sin u_1\ \sin u_2\ , \\ z &= a\ \cos u_2\ . \end{aligned} \tag{15}$$

Offensichtlich gilt

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0\ . \tag{16}$$

u_1 und u_2 sind die geographische Länge und die geographische Breite.

Es lassen sich nun viele gleichberechtigte Systeme von Gaußschen Flächenkoordinaten wählen. Wir nehmen im folgenden an, daß die Transformationen zwischen den Flächenkoordinaten umkehrbar sind

$$u_i = U_i(v_1, v_2)\ , \quad v_i = V_i(u_1, u_2)\ . \tag{17}$$

Aufgabe der Differentialgeometrie ist es nun, Gesetze abzuleiten, die gültig sind unabhängig von der gerade getroffenen Wahl der Flächenkoordinaten.

Als weiteres Beispiel betrachten wir nun eine Kurve auf einer Fläche, die in Parameterform $u_i(p)$ gegeben ist. Die Länge s der Kurve zwischen den Punkten $p = 0$ und

$p = 1$ ist

$$s = \int_0^1 ds = \int_0^1 \left[\left(\frac{dx_1}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dx_2}{dp}\right)^2 + \left(\frac{dx_3}{dp}\right)^2\right]^{1/2} dp$$

$$= \int_0^1 \left[\sum_{l=1}^{3}\left(\frac{dx_l}{dp}\right)^2\right]^{1/2} dp \,, \tag{18}$$

wobei wir vom Satz des Pythagoras ausgegangen sind

$$(ds)^2 = (dx_1)^2 + (dx_2)^2 + (dx_3)^2 \,. \tag{19}$$

Jetzt ist $x_l = x_l(u_1, u_2)$, also

$$\frac{dx_l}{dp} = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial x_l}{\partial u_i}\frac{du_i}{dp} \,. \tag{20}$$

Wir setzen in ds ein

$$ds = \left[\sum_{l=1}^{3}\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial x_l}{\partial u_i}\,\frac{du_i}{dp}\sum_{k=1}^{2}\frac{\partial x_l}{\partial u_k}\,\frac{du_k}{dp}\right]^{1/2} dp$$

$$= \left[\sum_{i,k=1}^{2}\sum_{l=1}^{3}\frac{\partial x_l}{\partial u_i}\,\frac{\partial x_l}{\partial u_k}\,\frac{du_i}{dp}\,\frac{du_k}{dp}\right]^{1/2} dp = \left[\sum_{i,k=1}^{2} g_{ik}\, du_i\, du_k\right]^{1/2} \tag{21}$$

mit

$$g_{ik} = \sum_{l=1}^{3}\frac{\partial x_l}{\partial u_i}\frac{\partial x_l}{\partial u_k} \,. \tag{22}$$

Hier ist die g_{ik}-Matrix eine Funktion der Flächenkoordinaten u_i. Wenn wir die Flächenkoordinaten u_i auf einen neuen Satz $\tilde{u}_i$ transformieren, dann wird sich die obige Relation transformieren in

$$ds = \left[\sum_{i,k=1}^{2}\tilde{g}_{ik}\, d\tilde{u}_i\, d\tilde{u}_k\right]^{1/2} \,. \tag{23}$$

$\tilde{g}_{ik}$ kann leicht aus den Transformationsformeln und aus den g_{ik} ermittelt werden. Die formale Struktur für ds in beiden Ausdrücken ist dieselbe. Gauß zeigte, daß sich von den metrischen Größen $g_{ik}(u_1, u_2)$ viele geometrische Eigenschaften einer Fläche ableiten lassen.

Diese Situation war der Startpunkt der Überlegungen des Mathematikers Riemann, der im Jahr 1854 zeigte, daß die Beschränkung auf zwei Flächenkoordinaten u_1 und u_2

nicht notwendig ist. Wir gehen jetzt zu einem n-dimensionalen Raum über, in dem wir einen Punkt A durch die Angabe von n Koordinaten $x^1, \ldots, x^n$ festlegen. Der Punkt A läßt sich angeben durch

$$A \;=\; \{x^1, \ldots, x^n\}\;. \tag{24}$$

Wir werden etwas später noch begründen, warum wir hier die Indizierung oben an den Koordinaten wählen. Orden wir nun jeder Zahl p eines Zahlenintervalls $p_1 \leq p \leq p_2$ mit den Intervallgrenzen p_1 und p_2 einen Punkt A zu,

$$p \;\longrightarrow A\;, \tag{25}$$

so können wir jede Koordinate $x^i (i = 1, \ldots, n)$ als Funktion des Parameters p auffassen

$$x^1 \;=\; x^1(p), \;\; \ldots, \;\; x^n \;=\; x^n(p)\;. \tag{26}$$

Sind alle Koordinaten $x^1(p), \ldots, x^n(p)$ stetige Funktionen des Parameters p, so heißt die Parametrisierung $A(p)$ des Punktes A eine Kurve.

Wir betrachten nun zwei infinitesimal benachbarte Punkte A und B auf einer Kurve, zum Beispiel $A = \{x^1, \ldots, x^n\}$ und $B = \{x^1 + dx^1, \ldots, x^n + dx^n\}$. Es wurde von Riemann vorgeschlagen, die Geometrie von Räumen zu untersuchen, in denen die Punkte durch die Angabe von n Koordinaten $x^i (i = 1, 2, \ldots, n)$ fixiert werden und in denen der infinitesimale Abstand zwischen zwei Punkten A und B mit der Koordinatendifferenz dx^i durch den Ausdruck

$$ds^2 \;=\; \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\, dx^i\, dx^k \tag{27}$$

angegeben wird. Hierbei sind die Größen $g_{ik} = g_{ik}(x^1, \ldots, x^n)$ zunächst beliebig vorgeschriebene Funktionen der Koordinaten x^i. Jedoch, sind die g_{ik} einmal gegeben, sollen sie sich bei Koordinatentransformationen $x^i \leftrightarrow u^i$ so transformieren, daß ds^2 unabhängig von der Wahl des verwendeten Koordinatensystems wird. Ein Raum, der eine Überdeckung mit einem Kartennetz erlaubt und der eine Riemannsche Metrik (27) aufweist, bezeichnet man auch als Riemannsche Mannigfaltigkeit. Den Ausdruck (27) bezeichnet man als metrische Fundamentalform.

Unter Benutzung von

$$dx^i \;=\; \frac{dx^i}{dp}\, dp \tag{28}$$

folgt weiter

$$ds^2 \;=\; \sum_{i,k=1}^{n} g_{ik}\,\frac{dx^i}{dp}\,\frac{dx^k}{dp}\,dp^2\;. \tag{29}$$

Im folgenden werden wir stets die Einsteinsche Summenkonvention verwenden: Über gleiche Indizes wird automatisch summiert. Damit läßt sich die metrische Fundamentalform (27) in verkürzter Form darstellen als

$$ds^2 \;=\; g_{ik}\,dx^i\,dx^k\;. \tag{30}$$

Diese Summenkonvention erspart uns nur etwas Schreibarbeit.

Ist die Matrix (g_{ik}) diagonal, so bezeichnen wir die Koordinaten x^i als orthogonal. Die Größen g_{ik} kann man offensichtlich als symmetrisch bezüglich der Indizes i und k annehmen,

$$g_{ik} \;=\; g_{ki}\;, \tag{31}$$

da die Koeffizienten g_{ik} und g_{ki} mit demselben Faktor $dx^i\,dx^k$ multipliziert in das Quadrat des Längenelementes (27) eingehen,

$$ds^2 \;=\; g_{ik}\,dx^i\,dx^k \;=\; g_{ki}\,dx^k\,dx^i \;=\; g_{ki}\,dx^i\,dx^k\;. \tag{32}$$

Dennoch liegt hier im Prinzip ein denkbarer Ansatzpunkt für mögliche Erweiterungen in zukünftigen Studien insbesondere für kosmologische Betrachtungen vor. Im folgenden werden wir jedoch stets von der Symmetrie (31) ausgehen.

Die Koeffizienten g_{ik} beschreiben die geometrischen Eigenschaften in einem krummlinigen Koordinatensystem. Sie stellen die Metrik des n-dimensionalen Raumes dar. Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie spielen die Koeffizienten g_{ik} eine fundamentale Rolle. Wir werden später noch sehen, daß sich die wesentlichen physikalischen Konsequenzen eines Gravitationsfeldes aus der Kenntnis der g_{ik} ableiten lassen. Im vierdimensionalen Raum hat die g_{ik}-Matrix 16 Komponenten. Davon sind aufgrund der Symmetriebedingung (31) jedoch nur 10 Komponenten unabhängig voneinander.

Es stellt sich natürlich die Frage, warum gerade der Spezialfall einer quadratischen Form für ds^2 gewählt wurde. In der Tat könnte man aus mathematischer Sicht von dem allgemeineren Fall der sogenannten Finsler-Räume ausgehen, in denen der Zusammenhang

$$ds \;=\; F(x^i, dx^i) \tag{33}$$

zwischen dem Längenelement ds, den Inkrementen dx^i und den Koordinaten x^i gilt. F ist zunächst eine beliebige Funktion. Jedoch sei hier erwähnt (ohne einen konkreten Beweis zu führen), daß rein empirische Sachverhalte, d.h. die Beobachtung der Natur, die mögliche Wahl von F auf eine Riemannsche Form reduzieren. Insbesondere bewirkt schon das Studium der freien Rotation eines Körpers eine starke Einschränkung der möglichen Freiheitsgrade von F. Dennoch sollte auch dieser Punkt für denkbare Erweiterungen der Allgemeinen Relativitätstheorie im Auge behalten werden. Im folgenden werden wir uns vom Einfachheitsprinzip leiten lassen und stets von der Riemannschen Struktur (27) ausgehen.

Die zu (g_{ik}) inverse Matrix bezeichnen wir mit

$$(g^{ik}) \;=\; (g_{ik})^{-1} \;. \tag{34}$$

Es gilt die Orthogonalitätsrelation

$$g_{ik}\, g^{kl} \;=\; \delta_i^{\,l} \;. \tag{35}$$

$\delta_i^{\,l}$ ist das Kronecker-Symbol

$$\delta_i^{\,l} \;=\; \begin{cases} 1 \;\text{ für }\; i \;=\; l \\ 0 \;\text{ für }\; i \;\neq\; l \end{cases} \quad . \tag{36}$$

Oftmals schreiben wir auch formal

$$\delta_i^{\,l} \;=\; g_i^{\,l} \;. \tag{37}$$

Wegen $g_{ik} \;=\; g_{ki}$ gilt auch

$$g^{ik} \;=\; g^{ki} \;. \tag{38}$$

Wir wollen nun einige Beispiele für Räume mit verschiedenen Metriken angeben und beginnen wieder mit dem 3-dimensionalen Euklidischen Raum. In kartesischen Koordinaten haben wir schlicht und einfach

$$ds^2 \;=\; dx^2 + dy^2 + dz^2 \;. \tag{39}$$

Somit lautet in diesem einfachen Fall die g_{ik}-Matrix

$$g_{ik} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \;. \tag{40}$$

Benutzen wir statt der rechtwinkligen Koordinaten (x, y, z) die Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ), so folgt für das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 \ = \ dr^2 + r^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \; d\varphi^2) \tag{41}$$

mit der g_{ik}-Matrix

$$g_{ik} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix} . \tag{42}$$

Für die zweidimensionale Kugeloberfläche ergibt sich auf einfache Weise wegen $r = R =$ const das Quadrat des Linienelementes

$$ds^2 \ = \ R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \; d\varphi^2) \tag{43}$$

mit der g_{ik}-Matrix

$$g_{ik} \ = \ \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2\vartheta \end{pmatrix} . \tag{44}$$

Im Minkowski-Raum der speziellen Relativitätstheorie gilt bekanntermaßen

$$ds^2 \ = \ (dx^0)^2 - \left[(dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2\right] \tag{45}$$

mit

$$dx^0 \ = \ c \, dt \tag{46}$$

und der g_{ik}-Matrix

$$g_{ik} \ = \ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{47}$$

Die Metrik dieses ebenen vierdimensionalen Raumes nennen wir auch pseudoeuklidisch im Unterschied zu einer Euklidischen Metrik, in der die Vorzeichen aller Koeffizienten g_{ik} positiv sind. Die Vorzeichensequenz $(+, -, -, -)$ bezeichnet man als Signatur der g_{ik}. Wir nennen diese Metrik eine hyperbolische Metrik. Ferner sprechen wir von einem lokalen Euklidischen Raum, wenn sich Koordinaten u^i finden lassen, so daß zumindest im infinitesimalen Rahmen der Satz des Pythagoras gilt

$$ds^2 \ = \ \sum_{i=1}^{n}(du^i)^2 \ . \tag{48}$$

Wir werden noch sehen, daß es ein Hauptpostulat der Allgemeinen Relativitätstheorie ist, daß in jedem Raum-Zeit-Punkt ein lokales Koordinatensystem eingeführt werden kann, in dem die Gravitation nicht wirksam ist und in dem der Raum lokal ein Minkowski-Raum ist.

Wie wir gesehen haben, gibt es auch im Euklidischen Raum nichttriviale Metriken, in denen die Koeffizienten g_{ik} eben nicht nur die Werte ± 1 oder 0 annehmen, sondern von den Koordinaten abhängen. Es ist ein bedeutendes Problem der Allgemeinen Relativitätstheorie festzustellen, ob bei Vorlage verschiedener Metriken auch wirklich verschiedene Räume vorliegen.

Mit Hilfe des infinitesimalen Ausdrucks ds können wir durch Integration auch die Bogenlänge zwischen zwei Punkten $A(p_1)$ und $B(p_2)$ ermitteln

$$s \;=\; \int_{A(p_1)}^{B(p_2)} ds \;=\; \int_{p_1}^{p_2} \left[g_{ik} \, \frac{dx^i}{dp} \, \frac{dx^k}{dp} \right]^{1/2} \; dp \; . \tag{49}$$

Eine direkt Bedeutung der metrischen Fundamentalform für die Mechanik beruht auf dem Zusammenhang mit dem Quadrat der Geschwindigkeit

$$v^2 \;=\; \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 \;=\; g_{ik} \, \frac{dx^i}{dt} \, \frac{dx^k}{dt} \; . \tag{50}$$

Zusammenfassung

Um einen Einblick in unsere zukünftigen Studien zu geben, diskutieren wir bereits an dieser Stelle kurz die fundamentale Gleichung der Allgemeinen Relativitätstheorie. Dabei kann es sich hier selbstverständlich nur um ein zitatenmäßiges Aufzählen und nicht um eine wissenschaftliche Ableitung handeln.

Zusammenfassend lauten die Einsteinschen Gleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie

$$G^{\alpha\beta} = C\,T^{\alpha\beta}\,. \tag{51}$$

Dies ist eine Tensorgleichung, wobei die Indizees α und β die Werte $\alpha, \beta = 0, 1, 2$ und 3 annehmen können. In (51) bedeutet C eine Konstante, die durch

$$C = -\frac{8\pi}{c^2}\kappa \tag{52}$$

bestimmt ist. Hierbei bezeichnet c die Lichtgeschwindigkeit und κ die Gravitationskonstante. Für konkrete Berechnungen verwenden wir die numerischen Werte $c = 2.99792458 \cdot 10^{10}$ cm s^{-1} und $\kappa = 6.67259 \cdot 10^{-8}$ cm^3 g^{-1}s^{-2}.

$T^{\alpha\beta}$ ist der Energie-Impuls Tensor. Im einfachsten Fall des masse- und feldfreien Raumes gilt $T^{\alpha\beta} = 0$. Hingegen folgt beispielsweise für den Fall einer ruhenden Masseverteilung mit der konstanten Dichte ρ_0

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{53}$$

Ist die Masseverteilung zusätzlich geladen, so enthält $T^{\alpha\beta}$ auch den Energie-Impuls Tensor des elektromagnetischen Feldes. Aus (53) erkennen wir, daß $T^{\alpha\beta}$ die Dimension einer Massendichte hat, dim $(T^{\alpha\beta})$ = g cm^{-3}.

Mit Hilfe des metrischen Tensors $g_{\alpha\beta}$ können wir die Indizees formal hoch und runter schieben. Wir definieren den gemischten Tensor $T^{\alpha}_{\ \gamma}$ durch

$$T^{\alpha}_{\ \gamma} = g_{\gamma\beta}\,T^{\alpha\beta}\,. \tag{54}$$

In dieser Gleichung sowie in allen folgenden Rechnungen wenden wir die Einsteinsche Summenkonvention an: Kommt unten und oben der gleiche Index vor, so wird darüber summiert. Explizit ausgeschrieben lautet Gleichung (54)

$$T^{\alpha}{}_{\gamma} = \sum_{\beta=1}^{4} g_{\gamma\beta} T^{\alpha\beta} = g_{\gamma 1} T^{\alpha 1} + g_{\gamma 2} T^{\alpha 2} + g_{\gamma 3} T^{\alpha 3} + g_{\gamma 4} T^{\alpha 4} \,. \tag{55}$$

Analog führen wir den Tensor $T_{\delta\gamma}$ ein durch

$$T_{\delta\gamma} = g_{\alpha\delta} T^{\alpha}{}_{\gamma} = g_{\alpha\delta}\ g_{\gamma\beta}\ T^{\alpha\beta} \,. \tag{56}$$

Während der Tensor $T^{\alpha\beta}$ die Energie- und Impulsverteilung von Materie oder Feldern im Raum beschreibt, kennzeichnet der sogenannte Ricci-Tensor $G^{\alpha\beta}$ in der Einsteinschen Gleichung (51) die grundlegende geometrische Struktur des Raumes. Auch den Ricci-Tensor wollen wir wieder auf uns bereits bekannte mathematische Grundgrößen reduzieren. Es gilt

$$G^{\alpha\beta} = R^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} R \,. \tag{57}$$

$g^{\alpha\beta}$ ist wieder der metrische Tensor. Er bestimmt den Zusammenhang zwischen den Koordinateninkrementen dx_α des vierdimensionalen Raumes und dem invarianten Längenelement ds,

$$ds^2 = g^{\alpha\beta} dx_\alpha dx_\beta \,, \tag{58}$$

wobei wir natürlich wieder die Summenkonvention verwendet haben. Im einfachsten Fall der Lorentz-Metrik der speziellen Relativitätstheorie folgt

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \tag{59}$$

Durch die Orthogonalitätsrelation

$$g_{\alpha\beta} g^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\gamma \tag{60}$$

definieren wir die inverse Matrix $g_{\alpha\beta}$. Die einzelnen Komponenten von $g^{\alpha\beta}$ sind Funktionen der Raum- und Zeitkoordinaten.

In der Definition des Ricci-Tensors (57) bezeichnet $R^{\alpha\beta}$ den Riemannschen Tensor, der gegeben ist durch

$$R_{\gamma\delta} = \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \delta \quad \rho \end{array} \right\}_{|\gamma} - \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \gamma \quad \delta \end{array} \right\}_{|\rho} + \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \gamma \quad \sigma \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \delta \quad \rho \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} \rho \\ \gamma \quad \delta \end{array} \right\} \left\{ \begin{array}{c} \sigma \\ \sigma \quad \rho \end{array} \right\} \tag{61}$$

und dem Zusammenhang

$$R_{\gamma\delta} = g_{\alpha\gamma}\ g_{\delta\beta}\ R^{\alpha\beta} \,. \tag{62}$$

Das Zeichen $\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \quad \gamma \end{array} \right\}$ ist ein Christoffel Symbol zweiter Art und ist definiert durch

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \beta \quad \gamma \end{array} \right\} = g^{\alpha\tau} [\beta\gamma, \tau] \,. \tag{63}$$

Schließlich stellt $[\beta\gamma, \tau]$ ein Christoffel Symbol erster Art dar. Es ist nur eine abkürzende Schreibweise für die folgende Kombination von Ableitungen des metrischen Tensors

$$[\beta\gamma, \tau] = \frac{1}{2} \left(g_{\beta\tau|\gamma} + g_{\gamma\tau|\beta} - g_{\beta\gamma|\tau} \right) \tag{64}$$

mit der Nomenklatur

$$g_{\beta\tau|\gamma} \equiv \frac{\partial g_{\beta\tau}}{\partial x^{\gamma}} \,. \tag{65}$$

Schließlich bezeichnet in (57) R den Krümmungsskalar, der durch

$$R = R^{\alpha}{}_{\alpha} \tag{66}$$

definiert ist. Selbstverständlich gilt wiederum die Summenkonvention; ferner haben wir $R^{\alpha}{}_{\gamma} = g_{\gamma\beta} R^{\alpha\beta}$.

Die Einstein-Gleichungen repräsentieren somit einen Satz von Differentialgleichungen zweiter Ordnung, deren Lösung die Raum- und Zeitabhängigkeit des metrischen Tensors $g^{\alpha\beta}(x_{\gamma})$ liefert.

Christoffel-Symbole in der klassischen Mechanik

Ausgehend von

$$v^2 \;=\; \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \;=\; g_{ik}\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^k}{dt} \tag{67}$$

und der Lagrange-Funktion L für die kräftefreie Bewegung

$$L \;=\; \tfrac{1}{2}mv^2 \;=\; \tfrac{1}{2}m\,g_{ik}\,\frac{dx^i}{dt}\,\frac{dx^k}{dt} \tag{68}$$

wollen wir die Bewegungsgleichungen ableiten. Abkürzend schreiben wir

$$\dot{x}^i \;=\; \frac{dx^i}{dt} \tag{69}$$

und somit

$$L \;=\; \tfrac{1}{2}m\,g_{ik}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k\,. \tag{70}$$

Die Bewegungsgleichungen folgen aus den Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dt}\,\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} - \frac{\partial L}{\partial x^l} \;=\; 0\,. \tag{71}$$

In den folgenden Ausführungen verwenden wir auch die Notation

$$L_{|l} \;=\; \frac{\partial L}{\partial x^l}\,. \tag{72}$$

Nun gilt

$$\begin{aligned}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} \;&=\; \tfrac{1}{2}m(g_{ik}\,\dot{x}^i\,\delta^k_l + g_{ik}\,\dot{x}^k\,\delta^i_l) \;=\; \tfrac{1}{2}m(g_{il}\,\dot{x}^i + g_{lk}\,\dot{x}^k)\\ &=\; \tfrac{1}{2}m(g_{kl}\,\dot{x}^k + g_{lk}\,\dot{x}^k) \;=\; m\,g_{lk}\,\dot{x}^k\end{aligned} \tag{73}$$

und weiter

$$\frac{\partial L}{\partial x^l} \;=\; L_{|l} \;=\; \tfrac{1}{2}m\,g_{ik|l}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k\,. \tag{74}$$

Damit wird aus den Euler-Lagrange-Gleichungen nach Division durch m

$$g_{lk}\,\ddot{x}^k + g_{lk|i}\,\dot{x}^k\,\dot{x}^i - \tfrac{1}{2}\,g_{ik|l}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k \;=\; 0\,. \tag{75}$$

Wir schreiben den zweiten Term um

$$g_{lk|i}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k \;=\; \tfrac{1}{2}\,g_{lk|i}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k + \tfrac{1}{2}\,g_{li|k}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k\,. \tag{76}$$

Somit bekommen wir

$$g_{lk}\,\ddot{x}^k + \tfrac{1}{2}(g_{lk|i} + g_{li|k} - g_{ik|l})\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k \;=\; 0\;. \tag{77}$$

Nach Multiplikation mit g^{hl} folgt aufgrund der Orthogonalitätsrelation der metrischen Größen g_{ik}

$$\ddot{x}^h + \tfrac{1}{2}\,g^{hl}(g_{lk|i} + g_{li|k} - g_{ik|l})\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k \;=\; 0\;. \tag{78}$$

Jetzt definieren wir die Koeffizienten

$$\Gamma^h_{ki} \;=\; \tfrac{1}{2}\,g^{hl}(g_{lk|i} + g_{li|k} - g_{ik|l})\,. \tag{79}$$

Offensichtlich folgt aus der Symmetrie $g_{ik} \;=\; g_{ki}$ auch

$$\Gamma^h_{ki} \;=\; \Gamma^h_{ik}\;. \tag{80}$$

Die Christoffel-Symbole (79) sind also symmetrisch in den unteren Indizes. Abschließend können wir die Bewegungsgleichung damit ausdrücken durch

$$\ddot{x}^h + \Gamma^h_{ki}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k \;=\; 0. \tag{81}$$

Oftmals wird auch die Nomenklatur

$$\left\{ \begin{array}{c} h \\ k \quad i \end{array} \right\} \;=\; \Gamma^h_{ki} \tag{82}$$

gewählt.

Zur expliziten Bestimmung der einzelnen Koeffizienten Γ^h_{ki} werden wir als Beispiel Kugelkoordinaten (r, ϑ, φ) verwenden. Aus

$$L \;=\; \tfrac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 + r^2\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2) \tag{83}$$

folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned} \ddot{r} - r\dot{\vartheta}^2 - r\sin^2\vartheta\,\dot{\varphi}^2 \;&=\; 0\;, \\ \ddot{\vartheta} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\vartheta} - \sin\vartheta\;\cos\vartheta\,\dot{\varphi}^2 \;&=\; 0\;, \\ \ddot{\varphi} + \frac{2}{r}\dot{r}\dot{\varphi} + 2\cot\vartheta\,\dot{\varphi}\,\dot{\vartheta} \;&=\; 0\;. \end{aligned} \tag{84}$$

Durch Koeffizientenvergleich mit (81) sehen wir, daß nur die Komponenten

$$
\begin{aligned}
\Gamma^1_{22} &= -r \,, \\
\Gamma^1_{33} &= -r \sin^2\vartheta \,, \\
\Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} = \frac{1}{r} \,, \\
\Gamma^2_{33} &= -\sin\vartheta \, \cos\vartheta \,, \\
\Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \,, \\
\Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \cot\vartheta
\end{aligned} \tag{85}
$$

von Null verschieden sind. Die physikalischen Lösungen der Gleichungen (85) müssen natürlich als Trajektorie eine gerade Bahn ergeben. Insofern ist die Wahl von Kugelkoordinaten in diesem Fall etwas ungeschickt.

Aufgrund der Symmetrie (80) haben im dreidimensionalen Raum die Christoffel-Symbole 18 unabhängige Komponenten.

Tensoren

Wir beginnen den Einstieg in die Tensoranalysis mit dem Studium von Koordinatentransformationen in einem n-dimensionalen Raum. Es sei

$$\bar{x}^j = f^j(x^i,\, i = 1, \ldots, n) \tag{86}$$

$$x^k = h^k(\bar{x}^i,\, i = 1, \ldots, n) \tag{87}$$

für $j,\, k = 1,\, \ldots,\, n$. Die Funktionen f^j und h^k seien stetig und differenzierbar, die partiellen Ableitungen $\partial \bar{x}^j / \partial x^i$ werden ebenfalls als stetig angenommen. Damit ist auch die Jacobi-Determinante der Transformation eine stetige Funktion der Ortskoordinaten. Die Forderung nach der eindeutigen Umkehrbarkeit der Koordinatentransformation impliziert, daß die Jacobi-Determinante niemals verschwindet.

Mathematische Größen, die invariant bleiben bei beliebigen Änderungen der Koordinatensysteme, sind Skalare. Ein Skalar ist eine Zahl, die nicht von der Wahl des Bezugssystems abhängt. Ein Beispiel für einen Skalar ist das Quadrat des infinitesimalen Längenelementes ds^2. Damit müssen sich das Inkrement dx^i und die Matrix g_{ik} so transformieren, daß insgesamt ds^2 invariant bleibt.

Wir betrachten nun eine infinitesimale Verrückung im Raum von einem Punkt A gekennzeichnet durch $\{x^i\}$ zu einem Punkt B, gekennzeichnet durch $\{x^i + dx^i\}$ in einem gegebenen Koordinatensystem. Was wird aus dem Inkrement dx^i bei einer Koordinatentransformation auf die Koordinaten $\bar{x}^i$? Wir erhalten

$$d\bar{x}^i = \frac{\partial f^i}{\partial x^j}\, dx^j = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\, dx^j\ . \tag{88}$$

Wir definieren nun, daß ein Satz von n Größen u^i $(i = 1,\, \ldots,\, n)$, der sich bei Koordinatentransformationen entsprechend dem Gesetz

$$\bar{u}^i = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\, u^j \tag{89}$$

verhält, einen kontravarianten Vektor bildet. Wir benötigen also zur Definition eines Vektors die Angabe von n Komponenten sowie eine Transformationsvorschrift. Wir kennzeichnen die Komponenten eines kontravarianten Vektors durch einen Index oberhalb des Buchstabens.

Es seien u^i und v^i zwei beliebige Vektoren an einem gegebenen Punkt x^i. Dann ist auch die Summe $a\, u^i + b\, v^i$ $(i = 0,\, 1,\, 2,\, 3)$ ein kontravarianter Vektor, falls a und b Skalare sind.

Als nächstes untersuchen wir eine skalare Funktion $\phi(x^i)$, die als differenzierbare Funktion der Koordinaten x^i gegeben sei. Durch $\phi(x^i)$ wird jedem Punkt in unserem n-dimensionalen Raum eine Zahl zugewiesen. Der skalare Charakter drückt sich durch die Unabhängigkeit von $\phi(x^i)$ von der Wahl der jeweiligen Koordinaten aus. Wir definieren die n Größen

$$w_i \;=\; \frac{\partial \phi(x^i)}{\partial x^i} \;,\;\; i \;=\; 1, \ldots, n \;. \tag{90}$$

Bei einer Koordinatentransformation von x^i nach $\bar{x}^i$ folgt

$$\bar{w}_i \;=\; \frac{\partial \phi}{\partial \bar{x}^i} \;=\; \frac{\partial \phi}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i} \;=\; \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^i}\, w_j \;. \tag{91}$$

Einen Satz von n Größen, der sich nach dem Gesetz (91) transformiert, bezeichnen wir als einen kovarianten Vektor. Die Komponenten werden durch einen Index unterhalb des Buchstabens gekennzeichnet.

Es gilt das folgende Theorem: Das Produkt $w_i u^i$ eines kovarianten Vektors mit einem kontravarianten Vektor bildet eine skalare Invariante. Unter Verwendung der Summenkonvention berechnen wir

$$\bar{P} \;=\; \bar{w}_i\,\bar{u}^i \;=\; \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\, w_k\, \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j}\, u^j \;. \tag{92}$$

Aus der Umkehrtransformation (87) folgt

$$\frac{\partial x^k}{\partial x^j} \;=\; \delta^k_j \;=\; \frac{\partial h^k}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \;=\; \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \;, \tag{93}$$

wobei δ^k_j wieder das Kronecker-Symbol bedeutet. Damit resultiert für $\bar{P}$

$$\bar{P} \;=\; \delta^k_j\, w_k\, u^j \;=\; w_j\, u^j \;=\; P \;. \tag{94}$$

P ist also ein Skalar wie behauptet. P bezeichnet das innere Produkt oder Skalarprodukt eines kovarianten mit einem kontravarianten Vektor.

Jetzt gehen wir aus von einem Satz von kovarianten und kontravarianten Vektoren in einem n-dimensionalen Raum. Wir bilden die multilineare Form P

$$P \;=\; (T^{i_1 i_2 \ldots i_a}_{j_1 j_2 \ldots j_b})\,(u^{j_1}_{(1)}\, u^{j_2}_{(2)}\, \ldots\, u^{j_b}_{(b)})\,(w^{(1)}_{i_1}\, w^{(2)}_{i_2}\, \ldots\, w^{(a)}_{i_a}) \;, \tag{95}$$

wobei $u^{j_1}_{(1)}$ die j_1-te Komponente eines beliebigen kontravarianten Vektors u, gekennzeichnet durch (1), ist. $w^{(1)}_{i_1}$ ist entsprechend die i_1-te Komponente eines beliebigen kovarianten Vektors w, gekennzeichnet durch (1). $T^{i_1 i_2 \ldots i_a}_{j_1 j_2 \ldots j_b}$ ist ein Satz von n^{a+b} Elementen mit a oberen und b unteren Indizes, die kontravariant und kovariant genannt werden.

Durch Definition legen wir fest, daß die Größen $T^{i_1 i_2 \ldots i_a}_{j_1 j_2 \ldots j_b}$ die Komponenten eines Tensors bilden, wenn sie sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems so transformieren, daß P invariant bleibt, d.h. einen Skalar bildet. $T^{i_1 i_2 \ldots i_a}_{j_1 j_2 \ldots j_b}$ wird ein Tensor vom Rang $(a + b)$ genannt mit a kontravarianten Indizes und b kovarianten Indizes.

Wir wollen die folgenden Spezialfälle studieren:
1. Ein Tensor vom Rang 0 ist ein Skalar, also eine Zahl, die invariant bei Koordinatentransformationen bleibt.
2. Ein Tensor vom Rang 1 kann entweder kontravariant, T^i, oder kovariant, T_i, sein. Entsprechend der Definition muß $P \;=\; T^i\, w_i$ ein Skalar sein. Dies ist richtig, wenn T^i ein kontravarianter Vektor ist. Daher ist ein kontravarianter Vektor ein Tensor vom Rang 1 mit einem kontravarianten Index. Genauso ist ein kovarianter Vektor ein kovarianter Tensor vom Rang 1.
3. Wir wollen die g_{ik}-Koeffizienten betrachten, die die Metrik in einem Riemannschen Raum definieren, $ds^2 \;=\; g_{ik}\, dx^i\, dx^k$. Unsere Definition würde nun nahelegen, daß g_{ik} die Komponenten eines kovarianten Tensors vom Rang 2 sind. Jedoch bezog sich unsere Definition auf die multilineare Form $P \;=\; T_{ik}\, u^i_{(1)}\, u^k_{(2)}$, wobei P eine skalare Größe sein muß, wenn $u_{(1)}$ und $u_{(2)}$ zwei beliebige Vektoren sind. In der Definition des invarianten Längenelementes sind aber dx^i und dx^k verschiedene Komponenten des selben kontravarianten Vektors dx. Aber der Beweis, daß g_{ik} ein Tensor ist, bleibt auch in diesem Fall gültig, da dx ein Vektor ist, den man auch als Summe von zwei verschiedenen Vektoren $dx_{(1)}$ und $dx_{(2)}$ darstellen kann. Man hat so

$$\begin{aligned} ds^2 &= g_{ik}\,(dx^i_{(1)} + dx^i_{(2)})\,(dx^k_{(1)} + dx^k_{(2)}) \\ &= g_{ik}\, dx^i_{(1)}\, dx^k_{(1)} + g_{ik}\, dx^i_{(2)}\, dx^k_{(2)} + 2\, g_{ik}\, dx^i_{(1)}\, dx^k_{(2)}\,. \end{aligned} \tag{96}$$

Die ersten beiden Terme ergeben gerade die Invarianten $ds^2_{(1)}$ und $ds^2_{(2)}$. Somit folgt, daß auch der dritte Term invariant ist. Schließlich ergibt sich daraus, daß auch g_{ik} ein kovarianter Tensor entsprechend unserer Definition ist.

Aus der Invarianzforderung der Größe P (95) bei Koordinatentransformationen folgt

$$\begin{aligned} &(\bar{T}^{i_1 i_2 \ldots i_a}_{j_1 j_2 \ldots j_b})\,(\bar{u}^{j_1}_{(1)}\, \bar{u}^{j_2}_{(2)}\, \ldots\, \bar{u}^{j_b}_{(b)})\,(\bar{w}^{(1)}_{i_1}\, \bar{w}^{(2)}_{i_2}\, \ldots\, \bar{w}^{(a)}_{i_a}) \;= \\ &\quad (T^{i_1 i_2 \ldots i_a}_{j_1 j_2 \ldots j_b})\,(u^{j_1}_{(1)}\, u^{j_2}_{(2)}\, \ldots\, u^{j_b}_{(b)})\,(w^{(1)}_{i_1}\, w^{(2)}_{i_2}\, \ldots\, w^{(a)}_{i_a})\,. \end{aligned} \tag{97}$$

Auf der linken Seite von (97) drücken wir die Vektorkomponenten $\bar{u}^{j_1}_{(1)}\, \bar{u}^{j_2}_{(2)} \ldots \bar{u}^{j_b}_{(b)}$ und $\bar{w}^{(1)}_{i_1}\, \bar{w}^{(2)}_{i_2}\, \ldots\, \bar{w}^{(a)}_{i_a}$ durch die Komponenten $u^{j_1}_{(1)}\, u^{j_2}_{(2)}\, \ldots\, u^{j_b}_{(b)}$ und $w^{(1)}_{i_1}\, w^{(2)}_{i_2} \ldots w^{(a)}_{i_a}$ aus und finden durch Koeffizientenvergleich

$$\bar{T}^{i_1 \dots i_a}_{j_1 \dots j_b} \left(\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{j_b}}{\partial x^{\beta_b}} \right) \left(\frac{\partial x^{\alpha_1}}{\partial \bar{x}^{i_1}} \dots \frac{\partial x^{\alpha_a}}{\partial \bar{x}^{i_a}} \right) = T^{\alpha_1 \dots \alpha_a}_{\beta_1 \dots \beta_b} . \tag{98}$$

Der Benutzung griechischer Buchstaben kommt hierbei keiner besonderen Bedeutung zu. Wir wollen nur der beschränkten Zahl lateinischer Buchstaben etwas ausweichen. Um Gleichung (98) nach $\bar{T}$ auflösen zu können, multiplizieren wir beide Seiten mit

$$\left(\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar{x}^{l_b}} \right) \left(\frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k_a}}{\partial x^{\alpha_a}} \right) . \tag{99}$$

Dies liefert auf der linken Seite Terme der Art

$$\frac{\partial \bar{x}^{j_1}}{\partial x^{\beta_1}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} = \delta^{j_1}_{l_1} . \tag{100}$$

Schließlich bekommen wir

$$\bar{T}^{k_1 \dots k_a}_{l_1 \dots l_b} = \frac{\partial \bar{x}^{k_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \dots \frac{\partial \bar{x}^{k_a}}{\partial x^{\alpha_a}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{l_1}} \dots \frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar{x}^{l_b}} T^{\alpha_1 \dots \alpha_a}_{\beta_1 \dots \beta_b} . \tag{101}$$

Dieses Transformationsgesetz entspricht der axiomatischen Definition eines Tensors. Die Transformation (101) ist linear und homogen in den Tensorkomponenten $T^{\alpha_1 \dots \alpha_a}_{\beta_1 \dots \beta_b}$.

Als Spezialfall gilt beispielsweise

$$\bar{T}^{\alpha\beta}_{\gamma} = \frac{\partial \bar{x}^{\alpha}}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{x}^{\beta}}{\partial x^j} \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^{\gamma}} T^{ij}_k . \tag{102}$$

Ferner ist die folgende Behauptung offensichtlich: Zwei Tensoren A und B sind genau dann gleich, wenn alle ihre Komponenten gleich sind

$$A^{\alpha\beta}_{\gamma} = B^{\alpha\beta}_{\gamma} \tag{103}$$

für alle α, β, γ. Es genügt, diese Gleichheit in einem speziellen Koordinatensystem nachzuweisen.

Es gilt ferner, daß die Summe von zwei Tensoren mit derselben Zahl von kovarianten und kontravarianten Indizes wieder ein Tensor ist,

$$A^{\alpha\beta}_{\gamma} + B^{\alpha\beta}_{\gamma} = C^{\alpha\beta}_{\gamma} , \tag{104}$$

und daß auch das Produkt eines Tensors mit einem Skalar (dies bedeutet die Multiplikation jeder Komponente mit einem Skalar) wieder ein Tensor ist.

Wir kommen jetzt zur Tensormultiplikation. $T_\gamma^{\alpha\beta}$ und $S^{\mu\nu}$ seien zwei gegebene Tensoren. Wir betrachten die Größe

$$G_\gamma^{\alpha\beta\mu\nu} \;=\; T_\gamma^{\alpha\beta}\, S^{\mu\nu}\,. \tag{105}$$

$G_\gamma^{\alpha\beta\mu\nu}$ ist ein 4-fach kontravarianter und einfach kovarianter Tensor. Um dies nachzuweisen, untersuchen wir die Größen

$$\bar{G}_\gamma^{\alpha\beta\mu\nu} \;=\; \bar{T}_\gamma^{\alpha\beta}\, \bar{S}^{\mu\nu}\,. \tag{106}$$

Es folgt

$$\begin{aligned} \bar{T}_\gamma^{\alpha\beta}\, \bar{S}^{\mu\nu} \;&=\; \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i}\,\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j}\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma}\, T_k^{ij}\, \frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^l}\,\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^m}\, S^{lm} \\ &=\; \frac{\partial \bar{x}^\alpha}{\partial x^i}\,\frac{\partial \bar{x}^\beta}{\partial x^j}\,\frac{\partial \bar{x}^\mu}{\partial x^l}\,\frac{\partial \bar{x}^\nu}{\partial x^m}\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^\gamma}\, G_k^{ijlm} \;=\; \bar{G}_\gamma^{\alpha\beta\mu\nu}\,. \end{aligned} \tag{107}$$

Dies zeigt, daß $G_\gamma^{\alpha\beta\mu\nu}$ ein Tensor ist entsprechend unserer axiomatischen Definition. Das Tensorprodukt $T_\gamma^{\alpha\beta}\, S^{\mu\nu} \;=\; G_\gamma^{\alpha\beta\mu\nu}$ wird oft als das äußere Produkt zweier Tensoren $T_\gamma^{\alpha\beta}$ und $S^{\mu\nu}$ genannt. Als ein weiteres Bespiel sei erwähnt, daß sich aus den drei Vektorkomponenten q^i, r^k, s^l die Komponenten eines Tensors vom Rang 3 bilden lassen,

$$t^{ikl} \;=\; q^i\, r^k\, s^l\,. \tag{108}$$

Wir machen noch einige weitere Bemerkungen speziell zu Tensoren vom Rang 2. Tensoren vom Rang 2 werden gewöhnlich in Form einer Matrix dargestellt

$$A \;=\; \begin{pmatrix} A^{11} & A^{12} & A^{13} \\ A^{21} & A^{22} & A^{23} \\ A^{31} & A^{32} & A^{33} \end{pmatrix}\,. \tag{109}$$

Das bedeutet aber nicht, daß jede Matrix ein Tensor ist. Zusätzlich muß stets die Transformationsbedingung (101) für einen Tensor erfüllt sein.

Wir zeigen jetzt, daß δ_l^k ein gemischter Tensor vom Rang 2 ist. Wir benutzen die Summenkonvention, damit folgt

$$\bar{\delta}_j^i \;=\; \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial \bar{x}^j} \;=\; \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j} \;=\; \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^l}\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\,\delta_k^l\,. \tag{110}$$

Für einen symmetrischen Tensor gilt

$$A^{mn} \;=\; A^{nm} \;, \tag{111}$$

ebenso ist ein antisymmetrischer Tensor definiert durch

$$A^{mn} \;=\; -A^{nm} \;. \tag{112}$$

Jeder Tensor vom Rang 2 kann in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Anteil zerlegt werden,

$$A^{mn} \;=\; \tfrac{1}{2}\left\{A^{mn} + A^{nm}\right\} + \tfrac{1}{2}\left\{A^{mn} - A^{nm}\right\} \;. \tag{113}$$

Kontraktion von Tensoren und das Quotiententheorem

Wir haben bereits gesehen, wie wir durch Tensormultiplikation einen Tensor höheren Ranges erzeugen können. Nun werden wir zeigen, wie wir durch Kontraktion aus einem gegebenen Tensor einen Tensor niederen Ranges generieren können. Dazu betrachten wir einen Tensor vom Rang $a + b$, $T^{i_1 i_2 \ldots i_a}_{j_1 j_2 \ldots j_b}$, und wir setzen $i_a = j_b = \sigma$. Dies ergibt $T^{i_1 i_2 \ldots i_{a-1}\sigma}_{j_1 j_2 \ldots j_{b-1}\sigma}$. Aufgrund der Einsteinschen Summenkonvention impliziert dies die Summation über alle σ. Wir behaupten nun: $T^{i_1 \ldots i_{a-1}\sigma}_{j_1 \ldots j_{b-1}\sigma}$ ist ein Tensor vom Rang $a + b - 2$, den wir mit $R^{i_1 \ldots i_{a-1}}_{j_1 \ldots j_{b-1}}$ bezeichnen. Zum Beweis untersuchen wir das Transformationsverhalten des Tensors $T^{i_1 \ldots i_a}_{j_1 \ldots j_b}$ und setzten $i_a = j_b = \sigma$.

$$\bar{T}^{i_1 \ldots i_{a-1}\sigma}_{j_1 \ldots j_{b-1}\sigma} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_{a-1}}}{\partial x^{\alpha_{a-1}}} \left(\frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^{\alpha_a}} \right) \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_{b-1}}}{\partial \bar{x}^{j_{b-1}}} \left(\frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar{x}^{\sigma}} \right) T^{\alpha_1 \ldots \alpha_a}_{\beta_1 \ldots \beta_b} \tag{114}$$

Die Faktoren in den Klammern zusammengefaßt ergeben

$$\frac{\partial \bar{x}^{\sigma}}{\partial x^{\alpha_a}} \frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial \bar{x}^{\sigma}} = \frac{\partial x^{\beta_b}}{\partial x^{\alpha_a}} = \delta^{\beta_b}_{\alpha_a} \ . \tag{115}$$

Damit können wir auf der rechten Seite von Gleichung (114) $\beta_b = \alpha_a = t$ setzten und es folgt

$$\bar{T}^{i_1 \ldots i_{a-1}\sigma}_{j_1 \ldots j_{b-1}\sigma} = \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_{a-1}}}{\partial x^{\alpha_{a-1}}} \frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{\beta_{b-1}}}{\partial \bar{x}^{j_{b-1}}} T^{\alpha_1 \ldots \alpha_{a-1} t}_{\beta_1 \ldots \beta_{b-1} t} \ . \tag{116}$$

Dies zeigt, daß $T^{\alpha_1 \ldots \alpha_{a-1} t}_{\beta_1 \ldots \beta_{b-1} t}$ ein Tensor vom Rang $(a-1)+(b-1) = a+b-2$ ist, den wir $R^{i_1 \ldots i_{a-1}}_{j_1 \ldots j_{b-1}}$ nennen können. Die Operation der Gleichsetzung zweier Indizes bezeichnen wir als Kontraktion oder Verjüngung von Tensoren. Im allgemeinen reduziert die Operation der Kontraktion den Rang eines Tensors um zwei.

Die Kontraktion von Tensoren ist eine Verallgemeinerung der Bildung des Skalarproduktes in der gewöhnlichen Vektorrechnung. Im Rahmen der Vektorrechnung haben wir das Skalarprodukt durch Summation der Produkte der Vektorkomponenten ermittelt,

$$\vec{A} \cdot \vec{B} = A_i \, B^i \ . \tag{117}$$

Wir wollen nun einen gemischten Tensor vom Rang 2 kontrahieren und sein Transformationsverhalten studieren. Es ergibt sich

$$\bar{B}^{i}_{\ i} = \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k} \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^i} B^{k}_{\ l} = \frac{\partial x^l}{\partial x^k} B^{k}_{\ l} = \delta^{l}_{\ k} \, B^{k}_{\ l} = B^{k}_{\ k} \ . \tag{118}$$

Der kontrahierte gemischte Tensor vom Rang 2 ist invariant bei Koordinatentransformationen und daher ein Skalar. In der Matrizenrechnung ist dieser Skalar gerade die Spur einer Matrix. Die Spur einer Matrix ist eine Invariante.

Als nächstes wollen wir das Quotiententheorem behandeln. Wir besitzen bis jetzt zwei Kriterien um festzustellen, ob ein Satz von Einzelkomponenten einen Tensor bildet. Dies ist zum einen durch die axiomatische Definition über die Transformationseigenschaft und zum anderen durch die Bildung des Skalarproduktes gegeben. Nun wird eine weitere, oftmals angewendete Möglichkeit zum Nachweis des Tensorcharakters aufgeführt.

Wir starten zunächst von einem Spezialfall. Gegeben sei ein Satz von Komponenten $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_r}$ mit gewissen Transformationseigenschaften, um sie in verschiedenen Koordinatensystemen ausdrücken zu können, sowie ein beliebiger Vektor mit den Komponenten u^{j_r}. Ferner wird angenommen, daß bekanntermaßen die Größe

$$S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{r-1}} \;=\; T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_r}\, u^{j_r} \tag{119}$$

ein Tensor ist. Dann behauptet das Quotiententheorem: $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_r}$ ist ein Tensor. Zur Beweisführung multiplizieren wir beide Seiten von Gleichung (119) mit p beliebigen kovarianten Vektoren $w^{(1)}_{i_1} \dots w^{(p)}_{i_p}$ und $(r-1)$ beliebigen kontravarianten Vektoren $u^{j_1}_{(1)} \dots u^{j_{r-1}}_{(r-1)}$.

$$S^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_{r-1}}\; w^{(1)}_{i_1} \dots w^{(p)}_{i_p}\;\; u^{j_1}_{(1)} \dots u^{j_{r-1}}_{(r-1)} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_r}\; u^{j_r}\; u^{j_{r-1}}_{(r-1)} \dots u^{j_1}_{(1)}\; w^{(1)}_{i_1} \dots w^{(p)}_{i_p} \tag{120}$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist ein Skalar entsprechend der zuerst gegebenen Definition eines Tensors. Daher muß auch die rechte Seite einen Skalar bilden. Daraus folgt weiter, daß T klarerweise ein Tensor sein muß, da auch u^{j_r} beliebig ist. Dies beweist das Quotiententheorem in dem angegebenen Spezialfall.

Wir wenden uns jetzt dem allgemeineren Fall zu, in dem wir den beliebigen Vektor u durch einen Tensor A ersetzen. Gegeben sei wieder ein Satz von Komponenten $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_r}$ und ein beliebiger Tensor $A^{j_l \dots j_r}_{i_k \dots i_p}$. Es wird ferner angenommen, daß die Größe

$$S^{i_1 \dots i_{k-1}}_{j_1 \dots j_{l-1}} \;=\; T^{i_1 \dots i_{k-1} i_k \dots i_p}_{j_1 \dots j_{l-1} j_l \dots j_r}\; A^{j_l \dots j_r}_{i_k \dots i_p} \tag{121}$$

ein Tensor ist. Dann behauptet das Quotiententheorem, daß $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_r}$ ein Tensor ist.

Zur Beweisführung nutzen wir aus, daß wir jeden Tensor in eine Summe von Produkten von Vektorkomponenten zerlegen können. Als Beispiel betrachten wir den Tensor $T^{\mu\nu}_{\sigma}$. Aufgrund der Definition des Tensors muß gelten,

$$P \;=\; T^{\mu\nu}_{\sigma}\, r^{\sigma}\, s_{\mu}\, t_{\nu} \tag{122}$$

ist ein Skalar. Wir können nun setzen

$$T^{\mu\nu}_{\sigma} \;=\; a^{\mu}\, b^{\nu}\, c_{\sigma}\ . \tag{123}$$

Daraus folgt tatsächlich, daß die Größe $a^{\mu} s_{\mu}\, b^{\nu} t_{\nu}\, c_{\sigma} r^{\sigma}$ ein Skalar ist. Wir zerlegen nun den Tensor $A^{j_l \ldots j_r}_{i_k \ldots i_p}$ wie bereits erwähnt in eine Summe von Produkten von Vektorkomponenten $u^{j_l}_{(l)} \ldots u^{j_r}_{(r)}\, w^{(k)}_{i_k} \ldots w^{(p)}_{i_p}$. Nun multiplizieren wir beide Seiten von Gleichung (121) mit beliebigen Vektoren $u^{j_1}_{(1)} \ldots u^{j_{l-1}}_{(l-1)}\, w^{(1)}_{i_1} \ldots w^{(k-1)}_{i_{k-1}}$. Abschließend gelten die gleichen Argumente wie im obigen Spezialfall.

Der Fundamentaltensor

In diesem Abschnitt wollen wir lernen, wie man Indizes von Tensoren von oben nach unten schieben kann und umgekehrt Indizes von unten nach oben schieben kann.

Wir gehen aus von einem zweifach kontravarianten Tensor T^{ik} und bilden das Tensorprodukt mit einem symmetrischen, zweifach kovarianten Tensor g_{lk}. Gleichzeitig kontrahieren wir den Index k. Wir definieren nun einen gemischten Tensor vom Rang 2 durch

$$T^i_{\ l} \;=\; g_{lk}\, T^{ik}\,, \qquad (124)$$

der zu T^{ik} assoziiert ist. Die Operation der Multiplikation mit g_{lk} und Kontraktion hat den Effekt den Index k zu erniedrigen. Die Reihenfolge der Indizes muß strikt beachtet werden. Im Fall der Gleichung (124) muß der Index i zuerst geschrieben werden. Im allgemeinen gilt $T^i_{\ l} \;\neq\; T_l^{\ i}$. Nur im Fall symmetrischer Tensoren $T^{ik} \;=\; T^{ki}$ ist die Reihenfolge der Indizes belanglos.

Wir können die Operation des Indexherunterschiebens wiederholen und definieren

$$T_{ml} \;=\; g_{im}\, T^i_{\ l} \;=\; g_{im}\, g_{lk}\, T^{ik}\,. \qquad (125)$$

Dies ist der zweifach kovariante Tensor, der assoziiert ist mit dem zweifach kontravarianten Tensor T^{ik}. Die Erweiterung dieser Prozedur auf eine beliebige Anzahl von Indizes ist offensichtlich.

Im Prinzip ist die Wahl des Tensors g_{lk} beliebig. Ist er jedoch einmal fixiert, spielt er eine wesentliche Rolle in der Tensoranalysis. Er etabliert die Beziehung zwischen kontravarianten und kovarianten Formen desselben Tensors. g_{lk} wird daher auch der Fundamentaltensor genannt. In einem metrischen Raum, wie etwa dem 4-dimensionalen Raum in der Allgemeinen Relativitätstheorie, ist es naheliegend den metrischen Tensor als Fundamentaltensor zu wählen.

Wir wollen nun die Erhöhung von Tensorindizes diskutieren. Dazu definieren wir einen kontravarianten Tensor, der für die Erhöhung der Indizes dieselbe Rolle spielt wie g_{ik} für die Erniedrigung der Indizes. Wir betrachten in einem speziellen Koordinatensystem die inverse Matrix zu der Matrix der g_{ik}-Koefizienten

$$(g^{ik}) \;=\; (g_{ik})^{-1}\,. \qquad (126)$$

Die inverse Matrix (g^{ik}) ist eindeutig durch die Eigenschaft

$$g^{ik}\, g_{jk} \;=\; \delta^i_j \tag{127}$$

charakterisiert. In Gleichung (127) wissen wir, δ^i_j ist ein Tensor und daß der Satz der g_{jk}-Koeffizienten ein Tensor ist. Aus dem Quotiententheorem folgt dann, daß auch der Satz der Koeffizienten g^{ik} ein Tensor ist. Wir definieren nun den Tensor (g^{ik}) durch Anwendung der Transformationsgesetze eines Tensors auf die Matrix (g^{ik}),

$$\bar{g}^{lm} \;=\; \frac{\partial \bar{x}^l}{\partial x^i}\,\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^k}\, g^{ik} \;. \tag{128}$$

Der gemischte Tensor ergibt sich aus der Definition

$$g^i{}_l \;=\; g_{lk}\, g^{ik} \;=\; \delta^i_l \;. \tag{129}$$

Wir definieren schließlich noch die zu T_{ml} assozierten Tensoren $T_m{}^k$ und T^{ik}

$$T_m{}^k \;=\; g^{kl}\, T_{ml} \;, \tag{130}$$

$$T^{ik} \;=\; g^{mi}\, T_m{}^k \;=\; g^{mi}\, g^{kl}\, T_{ml} \;. \tag{131}$$

Damit sind die Operationen (125) und (131) reziprok zueinander, was natürlich auf die Relation (127) zurückgeführt werden kann.

Tensorfelder in Riemannschen Räumen

Bisher haben wir die Tensoren eingeführt und einige algebraische Operationen mit Tensoren definiert. Jetzt werden wir das Konzept des Tensorfeldes einführen, um in der Lage zu sein, Tensoren an verschiedenen Raumpunkten miteinander vergleichen zu können.

Ein Tensorfeld besteht aus einer Zuweisung eines Tensors zu jedem Punkt im Raum. Die Komponenten eines Tensors werden somit Funktionen der Koordinaten

$$T^{ik} \;=\; T^{ik}(x^1, \ldots, x^n)\,. \tag{132}$$

Wir nehmen an, daß die Komponenten des Tensorfeldes zweifach differenzierbare Funktionen der Koordinaten sind. Wir beginnen unsere Studien mit Tensoren vom Rang 1, also mit Vektoren. Wir stellen uns nun beispielsweise die Frage: Wann ist ein Vektorfeld konstant? Im Rahmen der Euklidischen Geometrie würden wir sagen: Wenn alle Komponenten der Vektoren konstant sind. Daraus folgt auch eine konstante Länge der Vektoren. So können wir leicht Vektoren an verschiedenen Raumpunkten auf ihre Gleichheit hin überprüfen. Dies gilt in Riemannschen Räumen im allgemeinen nicht mehr. Aus der Konstanz der Komponenten der Vektoren folgt nicht mehr die Konstanz der Beträge. Der Grund hierfür liegt in der expliziten Ortsabhängigkeit des metrischen Tensors.

Wir betrachten ein spezielles Vektorfeld mit der selben konstanten ersten Komponente dx^1 an jedem Raumpunkt. Am Punkt P gilt

$$v^{(1)}(P) \;=\; (dx^1, 0, \ldots, 0) \tag{133}$$

mit

$$ds^2 \;=\; g_{11}(P)\,(dx^1)^2\,. \tag{134}$$

Am Punkt Q hingegen folgt für das Quadrat der Länge

$$ds^2 \;=\; g_{11}(Q)\,(dx^1)^2\,. \tag{135}$$

Aus der Konstanz der Länge schließen wir $g_{11}(P) \;=\; g_{11}(Q)$. Wir betrachten nun ein anderes Vektorfeld

$$v^{(i)}(P) \;=\; (0,\, 0, \ldots, dx^i,\, 0, \ldots,\, 0)\,. \tag{136}$$

Aufgrund derselben Annahmen wie oben folgt nun: g_{ii} muß im ganzen Raum konstant sein. Nun betrachten wir die Summe $v^{(i)} + v^{(j)}$ und finden, g_{ij} muß auch konstant sein.

Wenn wir also ein konstantes Vektorfeld durch die Konstanz der Komponenten beschreiben wollen folgt, daß alle g_{ik}'s konstant sein müssen. Einen solchen Raum nennen wir einen pseudo-Euklidischen Raum.

Die obige Definition der Konstanz eines Vektorfeldes ist auch nicht koordinaten-invariant. Haben wir ein Vektorfeld mit konstanten Komponenten im Koordinatensystem (x^i) vorliegen, so folgt für das System $(\bar{x}^i)$

$$\bar{v}^i \;=\; \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\, v^k\;. \tag{137}$$

Da die Koordinatentransformation beliebig ist, gilt im allgemeinen, $\bar{v}^i$ ist nicht konstant.

Wir wollen nun die Konstanz eines Vektorfeldes so definieren, daß sie unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem wird und als Spezialfall die Euklidische Definition beinhaltet. Dazu untersuchen wir, wie die Komponenten $\bar{v}^i$ variieren, wenn wir von einem Punkt im Raum zu einem benachbarten Punkt entlang einer Kurve gehen, die durch den Parameter p parametrisiert ist. Wir nehmen an, daß v^k konstant ist. Wir differenzieren $\bar{v}^i$ nach p

$$\frac{d\bar{v}^i}{dp} \;=\; \frac{d}{dp}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\, v^k\right) \;=\; \frac{\partial}{\partial x^l}\left(\frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right)\frac{dx^l}{dp}\, v^k \;=\; \frac{\partial^2\, \bar{x}^i}{\partial x^k\, \partial x^l}\,\frac{dx^l}{dp}\, v^k\,. \tag{138}$$

Aber wenn wir eine intrinsische Charakterisierung des konstanten Vektorfeldes haben wollen, unabhängig von einem speziellen Koordinatensystem, sollten wir $d\bar{v}^i$ durch $\bar{v}^i$ ausdrücken.

$$\frac{d\bar{v}^i}{dp} \;=\; \frac{\partial^2\, \bar{x}^i}{\partial x^k\, \partial x^l}\,\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^m}\,\frac{d\bar{x}^m}{dp}\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\,\bar{v}^j \;=\; -\bar{\Gamma}^i_{mj}\,\frac{d\bar{x}^m}{dp}\,\bar{v}^j \tag{139}$$

mit der abkürzenden Schreibweise

$$\bar{\Gamma}^i_{mj} \;=\; -\frac{\partial^2\, \bar{x}^i}{\partial x^k\, \partial x^l}\,\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^m}\,\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^j}\;. \tag{140}$$

Die Vorzeichenwahl ist reine Konvention. Die Konstanz der Vektorkomponenten in dem ursprünglichen Koordinatensystem bewirkt das allgemeinere Gesetz (139) in beliebig anderen Koordinatensystemen. Ohne auf die Ableitung dieser Relation wieder konkret bezug zu nehmen, betrachten wir zukünftig generell die Differentialform

$$dv^i \;=\; -\Gamma^i_{mj}\, dx^m\, v^j\;. \tag{141}$$

Wir nehmen also an, daß das Inkrement dv^i eine Bilinearform in der Verrückung dx^m und in den Vektorkomponenten v^j ist. Γ^i_{mj} kann im Prinzip jede beliebige Funktion der

Koordinaten sein und muß nicht mehr durch die spezielle Form (140) beschränkt sein. Bei der Ableitung der Relation (140) waren wir ja von einem konstanten Vektorfeld in einem speziellen Koordinatensystem ausgegangen. Der Ausdruck (141) ist ein generelles Gesetz für die Verrückung von Vektoren ausgehend von v^i bei $\{x^j\}$ zu $v^i + dv^i$ bei $\{x^j + dx^j\}$.

Wir fordern nun, daß dieses Transplantationsgesetz koordinaten-invariant gelten soll und daß ferner der Satz der Komponenten $v^i + dv^i$ wieder einen Vektor bei $\{x^j + dx^j\}$ bildet. Diese Forderung stellt natürlich gewisse einschränkende Bedingungen an die mögliche Form der Koeffizienten Γ^i_{mj}. Im ursprünglichen Koordinatensystem gilt das Transplantationsgesetz

$$v^i(x + dx) \;=\; v^i + dv^i \;=\; v^i - \Gamma^i_{mj}\, dx^m\, v^j\;. \tag{142}$$

Dieses Gesetz soll nun auch in den transformierten Koordinaten gelten, d.h., wir fordern, das Gesetz soll kovariant sein. Wir fordern ferner, der Satz der Komponenten $v^i(x + dx)$ bildet einen Vektor. Per Definition bedeutet dies

$$\bar{v}^j(x + dx) \;=\; v^i(x + dx)\, \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)_{x+dx}\;. \tag{143}$$

Einsetzten und ausschreiben ergibt

$$\bar{v}^j - \bar{\Gamma}^j_{ms}\, d\bar{x}^m\, \bar{v}^s \;=\; \left(v^i - \Gamma^i_{ml}\, dx^m\, v^l\right) \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)_{x+dx}\;. \tag{144}$$

Den letzten Faktor in (144) entwickeln wir in eine Taylor-Reihe und behalten nur die Terme in niedrigster Ordnung bei

$$\left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)_{x+dx} \;\simeq\; \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i}\right)_{x} \;+\; \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i\, \partial x^n}\, dx^n\;. \tag{145}$$

Dies setzten wir in (144) ein

$$\begin{aligned}\bar{v}^j - \bar{\Gamma}^j_{ms}\, d\bar{x}^m\, \bar{v}^s \;&=\; v^i\, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} + v^i\, \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i\, \partial x^n}\, dx^n \\ &\quad -\Gamma^i_{ml}\, dx^m\, v^l\, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} - \Gamma^i_{ml}\, dx^m\, v^l\, \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^i\, \partial x^n}\, dx^n\;.\end{aligned} \tag{146}$$

Wir behalten nur die Terme in niedrigster Ordnung in dx bei. Umbenennung der Indizes führt auf

$$\bar{\Gamma}^j_{ms}\, d\bar{x}^m\, \bar{v}^s \;=\; \left(\Gamma^i_{\alpha\beta}\, \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} - \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^\alpha\, \partial x^\beta}\right)\, dx^\alpha\, v^\beta\;. \tag{147}$$

Die beiden letzten Faktoren auf der rechten Seite können wir wieder durch die transformierten Koordinaten ausdrücken

$$dx^\alpha \, v^\beta \;=\; \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^m} \, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^s} \, d\bar{x}^m \, \bar{v}^s \; . \tag{148}$$

Daraus ergibt sich

$$\bar{\Gamma}^j_{ms} \, d\bar{x}^m \, \bar{v}^s \;=\; \left(\frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \, \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^m} \, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^s} \, \Gamma^i_{\alpha\beta} \;-\; \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta} \, \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^m} \, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^s} \right) d\bar{x}^m \, \bar{v}^s \, . \tag{149}$$

In dieser Beziehung sind $d\bar{x}^m$ und $\bar{v}^s$ beliebig. Daher muß gelten

$$\bar{\Gamma}^j_{ms} \;=\; \frac{\partial \bar{x}^j}{\partial x^i} \, \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^m} \, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^s} \, \Gamma^i_{\alpha\beta} \;-\; \frac{\partial^2 \bar{x}^j}{\partial x^\alpha \, \partial x^\beta} \, \frac{\partial x^\alpha}{\partial \bar{x}^m} \, \frac{\partial x^\beta}{\partial \bar{x}^s} \, . \tag{150}$$

Dies ist das Transformationsgesetz der Koeffizienten Γ^i_{kl} aufgrund der Kovarianz-Forderung. Die Koeffizienten Γ^i_{kl} werden auch affine Verbindungen genannt. Das Transformationsgesetz (150) ist inhomogen in den Koeffizienten Γ^i_{kl}. Es unterscheidet sich dadurch von dem Transformationsgesetz eines Tensors. Die Koeffizienten Γ^i_{kl} bilden keinen Tensor. Jedoch ist offensichtlich die Differenz zweier solcher Koeffizienten ein Tensor, da bei der Differenzbildung der inhomogene Term herausfällt. Bei linearen Transformationen zwischen $\bar{x}$ und x verschwindet ebenfalls der inhomogene Term in (150) und die Γ's transformieren sich wie ein Tensor.

Im folgenden postulieren wir die Existenz eines sogenannten geodätischen Koordinatensystems, in dem die Komponenten eines Vektors bei einer infinitesimalen Verrückung entsprechend dem Gesetz (141) nicht verändert werden. Da dx^m und v^i beliebig sind, impliziert dies, daß lokal gilt: $\Gamma^i_{mj} = 0$. Aus dem Transformationsgesetz (150) folgt dann eine Symmetrie der $\bar{\Gamma}^i_{ms}$ in den unteren Indizes, daß auch der inhomogene Term symmetrisch in diesen Indizes ist. Zukünftig werden wir stets

$$\Gamma^i_{mj} \;=\; \Gamma^i_{jm} \tag{151}$$

verwenden.

Als nächstes wollen wir die spezifische Form der Γ's in einem Riemannschen Raum ableiten. Wir haben bereits das Gesetz der Vektorverrückung mit Hilfe der affinen Verbindungen Γ kennengelernt. Eine Mannigfaltigkeit, in der ein Gesetz der Vektortransplantation definiert ist, heißt ein affiner Raum. Für die Definition der Vektorverrückung haben wir bisher noch nicht auf die Metrik zurückgreifen müssen.

Als weitere Einschränkung fordern wir nun: Das Skalarprodukt von zwei Vektoren soll bei Vektorverschiebungen invariant bleiben. Dies beinhaltet auch, daß die Länge eines

Vektors bei Verrückungen invariant bleibt. Ferner werden wir sehen, daß aufgrund dieser Forderung die Γ^i_{jk}-Koeffizienten Funktionen der Koeffizienten des metrischen Tensors und ihrer ersten Ableitungen werden.

Wir betrachten eine infinitesimale Verrückung entlang einer Kurve. Das Skalarprodukt zwischen den Vektoren u und v ist gegeben durch

$$u_k v^k \;=\; g_{ik}\, u^i v^k \;. \tag{152}$$

Die Forderung nach Invarianz des Skalarprodukts bei einer Verschiebung der Vektoren um das Element ds der Bogenlänge entlang der Kurve beinhaltet

$$\frac{d}{ds}(g_{ik}\, u^i v^k) \;=\; 0 \;. \tag{153}$$

Es folgt

$$g_{ik|l}\, \frac{dx^l}{ds}\, u^i v^k + g_{ik}\, \frac{du^i}{ds}\, v^k + g_{ik}\, u^i\, \frac{dv^k}{ds} \;=\; 0 \;. \tag{154}$$

Jetzt verwenden wir das Verschiebungsgesetz (141), das es uns erlaubt, die Vektoren $u^i(p)$ entlang einer gegebenen Kurve $x^m(p)$ zu berechnen, wenn die Anfangswerte $u^i(p = 0)$ bekannt sind.

$$\frac{du^i}{ds} \;=\; -\Gamma^i_{mj}\, \frac{dx^m}{ds}\, u^j \;. \tag{155}$$

Damit ergibt sich aus (154)

$$g_{ik|l}\, \frac{dx^l}{ds}\, u^i v^k - g_{rk}\, \Gamma^r_{il} \frac{dx^l}{ds}\, u^i v^k - g_{ir}\, \Gamma^r_{lk} \frac{dx^l}{ds}\, u^i v^k \;=\; 0 \;. \tag{156}$$

Im zweiten Term wurden die Indizes umbenannt $(i \to r,\; m \to l)$, ebenso wurden im dritten Term die Indizes umbenannt $(k \to r,\; m \to l)$. Außerdem haben wir von der Symmetrie (151) Gebrauch gemacht. Diese Gleichung führt auf eine eindeutige Bestimmung der Γ-Koeffizienten. Wir führen eine zyklische Permutation der Indizes durch

$$\begin{aligned} g_{ik|l} - g_{rk}\, \Gamma^r_{il} - g_{ir}\, \Gamma^r_{lk} &= 0 \;, \\ g_{kl|i} - g_{rl}\, \Gamma^r_{ki} - g_{kr}\, \Gamma^r_{il} &= 0 \;, \\ g_{li|k} - g_{ri}\, \Gamma^r_{lk} - g_{lr}\, \Gamma^r_{ki} &= 0 \;. \end{aligned} \tag{157}$$

Wir haben jetzt die Symmetrie der g_{ik} und die Symmetrie der Γ^l_{ik} in den unteren Indizes ausgenutzt. Wir addieren die beiden letzten Gleichungen von (157) und subtrahieren von der Summe die erste Gleichung. Dies ergibt schließlich

$$g_{kl|i} + g_{li|k} - g_{ik|l} - 2\Gamma^r_{ki}\, g_{rl} \;=\; 0 \;. \tag{158}$$

Auflösen führt auf das gewünschte Endergebnis

$$\Gamma^r_{ki} \;=\; \tfrac{1}{2}\, g^{rl}(g_{kl|i} + g_{li|k} - g_{ik|l}) \; . \tag{159}$$

Die Koeffizienten Γ^r_{ki} werden Christoffel-Symbole zweiter Art genannt. Als Christoffel-Symbole erster Art bezeichnet man abkürzend die folgende Kombination von Ableitungen des metrischen Tensors

$$[ik, l] \;=\; \tfrac{1}{2}\,(g_{kl|i} + g_{li|k} - g_{ik|l}) \; . \tag{160}$$

Mit Hilfe der Christoffel-Symbole läßt sich auch das Gesetz der Parallelverschiebung in einem metrischen Raum angeben. Hierbei verstehen wir unter “parallel” die Invarianz des Skalarproduktes.

$$du^i \;=\; -\Gamma^i_{kl}\, dx^k\, u^l \; . \tag{161}$$

Die Geodätengleichung

Die Gleichung einer Geodäten läßt sich in verschiedener Weise ableiten. Wir möchten hier jeweils eine geometrisch bzw. physikalisch betonte Betrachtung vorstellen.

Gegeben sei ein Raum, den wir wieder mit einem Koordinatennetz überziehen wollen. Ferner sei eine Metrik vom Riemann-Typ sowie ein Verschiebungsgesetz von Vektoren definiert. Wir wollen nun den Begriff einer Geraden in einem solchen affinen Raum diskutieren. In einem Euklidischen Raum ist eine Gerade dadurch charakterisiert, daß ein beliebiger Tangentialvektor parallel zu sich selbst bleibt, wenn wir ihn entlang der Geraden verschieben. Diese Eigenschaft werden wir benutzen, um eine verallgemeinerte gerade Linie in einem affinen Raum zu definieren, die wir Geodätische nennen.

Zunächst diskutieren wir den Tangentenvektor einer Kurve. Die Kurve sei in Parameterdarstellung gegeben

$$x^i = x^i(p) \tag{162}$$

mit dem Parameter p. s bezeichne das entsprechende Bogenmaß entlang der Kurve. Dann ist

$$u^i = \frac{dx^i(p)}{ds} = \frac{dx^i(p)}{dp} \cdot \frac{dp}{ds} \tag{163}$$

der Tangentenvektor der Kurve $x^i(p)$ in kontravarianter Darstellung. Mit Hilfe des metrischen Tensors g_{ik} können wir die kovariante Darstellung des Tangentenvektors gewinnen. Definitionsgemäß gilt

$$u_i = g_{ik} \frac{dx^k}{ds} \, . \tag{164}$$

Wir erinnern uns an die Definition des Bogenmaßes $ds^2 = g_{ik} \, dx^i \, dx^k$. Damit folgt sofort für den Betrag des Tangentenvektors

$$u^i u_i = g_{ik} \frac{dx^i dx^k}{ds^2} = 1 \, . \tag{165}$$

Mit Hilfe dieses Tangentenvektors können wir eine Definition der geodätischen Linie oder (etwas unpräzise ausgedrückt) der "geradesten" Linie angeben: Eine Raumkurve heißt geodätische Linie, wenn die Tangentenvektoren in zwei benachbarten Punkten durch Parallelverschiebung auseinander hervorgehen. Zwei benachbarte Punkte auf der

Raumkurve unterscheiden sich dabei um die Verschiebung dx^l. Bei einer Parallelverschiebung gilt für die Änderung von u^i entlang der Kurve

$$du^i = -u^k\,\Gamma^i_{kl}\,dx^l\,. \tag{166}$$

Das Christoffel-Symbol Γ^i_{kl} ist definiert durch

$$\Gamma^i_{kl} = \frac{1}{2}\,g^{ih}\,\left(g_{hk|l} + g_{hl|k} - g_{kl|h}\right) \tag{167}$$

mit der Nomenklatur

$$g_{hk|l} = \frac{\partial g_{hk}}{\partial x^l}\,. \tag{168}$$

Division durch ds in (166) führt auf

$$\frac{du^i}{ds} = -u^k\,\Gamma^i_{kl}\,\frac{dx^l}{ds}\,. \tag{169}$$

Schließlich erhalten wir aufgrund der Definition (163) die Gleichung für die Geodäte

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\,\frac{dx^k}{ds}\,\frac{dx^l}{ds} = 0\,. \tag{170}$$

Die geodätische Linie stellt eine Verallgemeinerung der Geraden der euklidischen Geometrie dar.

In einer zweiten Vorgehensweise definieren wir als geodätische Linie diejenige Raumkurve zwischen zwei Weltpunkten A und B, die die Bogenlänge

$$s = \int\limits_A^B ds \tag{171}$$

zu einem Extremum macht. Die Geodätische erhalten wir also aus der Forderung, daß die Variation

$$\delta \int\limits_A^B ds = \delta \int\limits_A^B \frac{ds}{dp} dp = \delta \int\limits_A^B \left[g_{ik}\,\frac{dx^i}{dp}\,\frac{dx^k}{dp}\right]^{1/2} dp = 0 \tag{172}$$

verschwindet. Dabei haben wir den Ausdruck

$$L = \left[g_{ik}\,\dot{x}^i\dot{x}^k\right]^{1/2} = \frac{ds}{dp} \tag{173}$$

eingeführt mit der Ableitung

$$\dot{x}^i = \frac{dx^i}{dp}\,. \tag{174}$$

Aus dem Variationsprinzip folgen die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l}\right) - \frac{\partial L}{\partial x^l} = 0\,. \tag{175}$$

Es gilt nun

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l} &= \frac{g_{ik}\,\dot{x}^i\,\delta^k_l + g_{ik}\,\dot{x}^k\,\delta^i_l}{2L} = \frac{g_{il}\,\dot{x}^i + g_{lk}\,\dot{x}^k}{2L} = \frac{g_{kl}\,\dot{x}^k + g_{lk}\,\dot{x}^k}{2L} \\
&= \frac{2\,g_{lk}\,\dot{x}^k}{2L} = g_{lk}\,\frac{dx^k}{ds}\,, \qquad (176)\\
\frac{\partial L}{\partial x^l} &= \frac{1}{2L}\,g_{ik|l}\,\dot{x}^i\,\dot{x}^k = \frac{L}{2}\,g_{ik|l}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds}\,. \qquad (177)
\end{aligned}$$

Einsetzen in die Euler-Lagrange-Gleichungen liefert

$$L\,\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^l}\right) - \frac{L}{2}\,g_{ik|l}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0\,. \tag{178}$$

Dies führt weiter auf

$$\frac{d}{ds}\left(g_{lk}\,\frac{dx^k}{ds}\right) - \frac{1}{2}\,g_{ik|l}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0 \tag{179}$$

und

$$g_{lk}\,\frac{d^2x^k}{ds^2} + \frac{dx^k}{ds}\,g_{lk|i}\,\frac{dx^i}{ds} - \frac{1}{2}\,g_{ik|l}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0\,. \tag{180}$$

Dies ergibt zusammengefaßt

$$g_{lk}\,\frac{d^2x^k}{ds^2} + \left(g_{lk|i} - \frac{1}{2}g_{ik|l}\right)\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0\,. \tag{181}$$

Nun gilt aber

$$g_{lk|i}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = \frac{1}{2}\,g_{lk|i}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} + \frac{1}{2}\,g_{li|k}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds}\,. \tag{182}$$

Damit lassen sich die Euler-Lagrange-Gleichungen schreiben als

$$g_{lk}\,\frac{d^2x^k}{ds^2} + \frac{1}{2}\,\left(g_{lk|i} + g_{li|k} - g_{ik|l}\right)\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0\,. \tag{183}$$

Wir multiplizieren mit g^{hl} und erhalten

$$\frac{d^2x^h}{ds^2} + \frac{1}{2}\,g^{hl}\,\left(g_{lk|i} + g_{li|k} - g_{ik|l}\right)\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0\,. \tag{184}$$

Wir verwenden die Definition (167) des Christoffel-Symbols, die Symmetrie des metrischen Tensors $g_{ik} = g_{ki}$ und bekommen somit

$$\frac{d^2x^h}{ds^2} + \Gamma^h_{ki}\,\frac{dx^i}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} = 0\,. \tag{185}$$

Schließlich benennen wir noch um $i \to l, h \to i$. Dies führt uns abschließend wieder auf die Gleichung für die Geodäte

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{kl}\,\frac{dx^k}{ds}\,\frac{dx^l}{ds} = 0\,. \tag{186}$$

Eine besondere Betrachtung müssen wir für den Fall einer Nullgeodäten durchführen, die definiert wird durch die Bedingung

$$ds = 0\,. \tag{187}$$

Offensichtlich können wir hier nicht mehr durch ds dividieren. In dem Spezialfall der Nullgeodäten gehen wir von der Parameterdarstellung der Raumkurve $x^i = x^i(p)$ aus. Wieder definieren wir

$$v^i = \frac{dx^i}{dp} \tag{188}$$

und

$$v_i = g_{ik}\frac{dx^k}{dp} \tag{189}$$

mit dem Betrag

$$v^i v_i = \left(\frac{ds}{dp}\right)^2 = 0 \tag{190}$$

auf der Nullgeodäten. Mit der Verrückung $dv^i = -v^k\,\Gamma^i_{kl}\,dx^l$ gilt offensichtlich die Differentialgleichung

$$\frac{d^2x^i}{dp^2} + \Gamma^i_{kl}\,\frac{dx^k}{dp}\,\frac{dx^l}{dp} = 0\,. \tag{191}$$

Diese Gleichung kann zur Bestimmung einer Nullgeodäten verwendet werden.

Gravitation als metrisches Problem

Wir betrachten einen Raum, in dem eine geringe Abweichung von der Lorentz-Metrik vorliegt. Wir nehmen an, daß ein zeitunabhängiger metrischer Tensor gegeben sei

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}^{(L)} + \epsilon\, \gamma_{\mu\nu} \; . \tag{192}$$

Hierbei bedeutet ϵ eine kleine Konstante, $g_{\mu\nu}^{(L)}$ die übliche Lorentz-Metrik mit der Signatur $(+,-,-,-)$ und schließlich weist der Tensor $\gamma_{\mu\nu}$ auf eine geringe Abweichung von der Lorentz-Metrik hin. Wir wollen nun zeigen, daß der Term $\epsilon\, \gamma_{\mu\nu}$ die Wirkung der Gravitationskraft wiederspiegeln kann. In den folgenden Näherungsrechnungen setzen wir kleine Geschwindigkeiten $v \ll c$ voraus und behalten somit nur Terme in erster Ordnung in ϵ und in $\beta = v/c$ bei. Für das Quadrat des Längenelementes folgt dann

$$ds^2 \;=\; (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2 + \epsilon\, \gamma_{\mu\nu}\, dx^\mu\, dx^\nu \tag{193}$$

und weiter

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \;=\; c^2 - v^2 + \epsilon\, \gamma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dt} \frac{dx^\nu}{dt} = c^2 \left(1 - \beta^2 + \epsilon\, \gamma_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{dx^0} \frac{dx^\nu}{dx^0}\right) \; . \tag{194}$$

In erster Ordnung in ϵ und β folgt

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 \cong c^2\, \left(1 + \epsilon\, \gamma_{00}\right) \; . \tag{195}$$

Wir betrachten nun die Differentialgleichung einer Geodätischen

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \eta \quad \tau \end{array} \right\} \frac{dx^\eta}{ds} \frac{dx^\tau}{ds} = 0 \; . \tag{196}$$

Die Ableitung von $g_{\mu\nu}^{(L)}$ verschwindet, daher enthält das Christoffel-Symbol den Faktor ϵ. Wir erhalten ferner

$$\frac{dx^\eta}{ds} \frac{dx^\tau}{ds} = \frac{dx^\eta}{dt} \frac{dx^\tau}{dt} \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = \frac{dx^\eta}{dt} \frac{dx^\tau}{dt} \frac{1}{c^2\, (1 + \epsilon\, \gamma_{00})} \; . \tag{197}$$

Für $\eta, \tau \neq 0$ läßt sich dies schreiben als

$$\frac{dx^\eta}{dt} \frac{dx^\tau}{dt} \frac{1}{c^2\, (1 + \epsilon\, \gamma_{00})} = \frac{v^\eta}{c} \frac{v^\tau}{c} \frac{1}{(1 + \epsilon\, \gamma_{00})} \tag{198}$$

Bis auf den Fall $\eta = \tau = 0$ ist das Produkt $\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ \eta \quad \tau \end{array} \right\} \frac{dx^\eta}{ds} \frac{dx^\tau}{ds}$ von der Ordnung $\epsilon\beta$ und wird daher vernachlässigt. In erster Ordnung in ϵ und β folgt

$$\frac{d^2 x^\alpha}{ds^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\} \left(\frac{dx^0}{ds}\right)^2 = 0 \; . \tag{199}$$

Mit (195) schreiben wir dies um in

$$\frac{\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2}}{c^2\,\left(1+\epsilon\,\gamma_{00}\right)} + \frac{\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\}}{1+\epsilon\,\gamma_{00}} = 0 \tag{200}$$

oder

$$\frac{d^2 x^\alpha}{dt^2} + \left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\} c^2 = 0\ . \tag{201}$$

Die Differentialgleichung für $x^0 = c\,t$ brauchen wir offensichtlich nicht zu untersuchen. In diesem Zusammenhang müssen wir zeigen, daß gilt

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\} = 0\ . \tag{202}$$

Per Definition gilt

$$[00,\lambda] = \frac{1}{2}\,\left(g_{0\lambda|0} + g_{\lambda 0|0} - g_{00|\lambda}\right)\ . \tag{203}$$

$g_{\mu\nu}$ ist zeitunabhängig, dies ergibt

$$[00,\lambda] = -\frac{1}{2}\,g_{00|\lambda} = -\frac{1}{2}\,\epsilon\,\gamma_{00|\lambda}\ . \tag{204}$$

Damit haben wir

$$\left\{ \begin{array}{c} \alpha \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\} = g^{\alpha\lambda}\,[00,\lambda] = -\frac{1}{2}\,g^{\alpha\lambda}\,\epsilon\,\gamma_{00|\lambda} = -\frac{1}{2}\,g^{(L)\alpha\lambda}\,\epsilon\,\gamma_{00|\lambda}\ . \tag{205}$$

Der letzte Schritt stellt wieder eine Näherung dar, da nur Terme in erster Ordnung in ϵ berücksichtigt wurden. Somit folgt

$$\left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\} = -\frac{1}{2}\,\epsilon\,\gamma_{00|0} = 0\ , \quad \left\{ \begin{array}{c} i \\ 0 \quad 0 \end{array} \right\} = \frac{1}{2}\,\epsilon\,\gamma_{00|i} \text{ für } i = 1,2,3\ . \tag{206}$$

Damit bekommen wir schließlich

$$\frac{d^2 x^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\,\epsilon\,\gamma_{00|i}\ . \tag{207}$$

In dreidimensionaler Notation können wir die Bewegungsgleichung schreiben als

$$\frac{d^2 \vec{x}}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\,\epsilon\,\vec{\nabla}\gamma_{00}\ . \tag{208}$$

Dies ist aber gerade die Newtonsche Bewegungsgleichung für die Bewegung eines Teilchens in einem Gravitationsfeld. Wir müssen nur identifizieren

$$\varphi = \frac{c^2}{2}\,\epsilon\,\gamma_{00}\ , \tag{209}$$

wobei φ das gewöhnliche Gravitationspotential aus der klassischen Mechanik bezeichnet. Auf der anderen Seite gilt, wenn das klassische Potential φ gegeben ist, so wird die Bewegung des Teilchens entlang der 4-dimensionalen Geodätischen erfolgen, wenn die g_{00}-Komponente des metrischen Tensors die folgende Form hat

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2}\ . \tag{210}$$

Da g_{00} letztlich festlegt, wie Zeiten gemessen werden, bedeutet dies auch: In einem Gravitationsfeld gehen die Uhren langsamer.

Die geodätische Abweichung –
Einführung des Riemannschen Krümmungstensors

Wir wollen nun ein Verfahren ableiten, um feststellen zu können, ob eine Bewegung in einer Ebene vorliegt oder ob wir es wirklich mit einem gekrümmten Raum zu tun haben. Im Fall der Bewegung in der Ebene sind die Geodäten Geraden in der Ebene und die Bewegungsgleichungen lassen sich relativ einfach integrieren.

Wir untersuchen eine Schar $x^i(s,p)$ von Geodäten auf einer Fläche. Dabei kennzeichnet die Bogenlänge s den Kurvenparameter. p ist der Scharparameter, der die verschiedenen Geodäten kennzeichnet.

Wir bilden zunächst die partiellen Ableitungen

$$t^i = \frac{\partial x^i}{\partial s} \, ,$$

$$V^i = \frac{\partial x^i}{\partial p} \, ,$$

$$\frac{\partial t^i}{\partial p} = \frac{\partial V^i}{\partial s} \, . \tag{211}$$

Der Tangentenvektor t^i zeigt in Richtung der Geschwindigkeit. $V^i \, dp$ ist gerade der Abstandsvektor zweier benachbarter Geodäten. Um zu sehen, ob es sich bei der Fläche um eine Ebene handelt oder nicht, dürfen wir jedoch nicht einfach $\partial^2 V^i / \partial s^2$ bilden. Schon bei einer Geraden in der Ebene wird ja die Tatsache, daß der Tangentenvektor $t^i = \partial x^i / \partial s$ konstant, d.h. unabhängig von s ist, in einem beliebigen Koordinatensystem nicht durch dt^i/ds zum Ausdruck gebracht, sondern durch die Geodätengleichung

$$\frac{D}{Ds} t^i \;=\; \frac{dt^i}{ds} + \Gamma^i_{kl} \, t^k \, \frac{dx^l}{ds} \;=\; 0 \, . \tag{212}$$

Hierbei haben wir als abkürzende Schreibweise den Operator D/Ds definiert. Wir betrachten jetzt die Ausdrücke

$$\frac{D}{Dp} t^i \;=\; \frac{\partial^2 x^i}{\partial s \, \partial p} + \Gamma^i_{kl} \, t^k \, V^l \, , \tag{213}$$

$$\frac{D}{Ds} V^i \;=\; \frac{\partial^2 x^i}{\partial s \, \partial p} + \Gamma^i_{kl} \, V^k \, t^l \, . \tag{214}$$

Damit ersehen wir sofort

$$\frac{D}{Dp} t^i \;=\; \frac{D}{Ds} V^i \, . \tag{215}$$

Wir untersuchen jetzt die Größe

$$\frac{D^2\,V^i}{Ds^2} \;=\; \frac{D}{Ds}\left(\frac{D}{Dp}\,t^i\right)\;, \tag{216}$$

um mit ihrer Hilfe das Verhalten des Abstandes zweier benachbarter Geodäten zu diskutieren. Einsetzen führt auf

$$\begin{aligned}\frac{D^2\,V^i}{Ds^2} &= \frac{D}{Ds}\left(\frac{\partial\,t^i}{\partial p} + \Gamma^i_{kl}\,t^k\,V^l\right)\\ &= \frac{\partial^2\,t^i}{\partial s\,\partial p} + \Gamma^i_{kl|m}\,t^m\,t^k\,V^l + \Gamma^i_{kl}\left(\frac{\partial\,t^k}{\partial s}\,V^l + t^k\,\frac{\partial\,V^l}{\partial s}\right)\\ &\quad + \Gamma^i_{rs}\left(\frac{\partial\,t^r}{\partial p} + \Gamma^r_{kl}\,t^k\,V^l\right)t^s\;.\end{aligned} \tag{217}$$

Diese Gleichung können wir vereinfachen, indem wir aus der Geodätengleichung die offensichtliche Gleichung

$$0 \;=\; \frac{D}{Dp}\,\frac{Dt^i}{Ds} \;=\; \frac{D}{Dp}\left(\frac{\partial\,t^i}{\partial s} + \Gamma^i_{kl}\,t^k\,t^l\right) \tag{218}$$

auflösen.

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\,t^i}{\partial s\,\partial p} &= -\Gamma^i_{kl|m}\,V^m\,t^k\,t^l - \Gamma^i_{kl}\left(\frac{\partial\,t^k}{\partial p}\,t^l + \frac{\partial\,t^l}{\partial p}\,t^k\right)\\ &\quad -\Gamma^i_{rs}\left(\frac{\partial\,t^r}{\partial s} + \Gamma^r_{kl}\,t^k\,t^l\right)V^s\;.\end{aligned} \tag{219}$$

Einsetzen in (217) führt auf

$$\frac{D^2\,V^i}{Ds^2} \;=\; t^m\,t^k\,V^l\left(\Gamma^i_{kl|m} - \Gamma^i_{km|l} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^r_{kl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{km}\right)\;. \tag{220}$$

Die rechte Seite dieser Gleichung gibt uns ein Maß für die Abstandsänderung benachbarter Geodäten. In der Sprache der Mechanik ist dies die Relativbeschleunigung zweier auf benachbarten Bahnen fliegender Massenpunkte. Die Größe (220) wird geodätische Abweichung genannt.

Falls die Geodäten Geraden in einer Ebene sind, sollte die rechte Seite verschwinden. Damit ist (220) auch ein Maß für die Krümmung der Fläche, für das Abweichen der Fläche von der Ebene. Die Größe

$$R^i{}_{kml} \;=\; \Gamma^i_{kl|m} - \Gamma^i_{km|l} + \Gamma^i_{rm}\Gamma^r_{kl} - \Gamma^i_{rl}\Gamma^r_{km} \tag{221}$$

nennt man den Riemannschen Krümmungstensor. Man kann ihn rechnerisch aus den Christoffel-Symbolen oder durch Messung der Abstandsänderung benachbarter Bahnkurven bestimmen. Verschwindet er, so ist die Fläche eine Ebene, und die Bahnkurven sind Geraden.

Als Beispiel berechnen wir den Krümmungstensor der Kugelfläche. Es gilt

$$\begin{aligned} ds^2 &= R^2(d\vartheta^2 + \sin^2\vartheta \, d\varphi^2) \\ &= R^2[(dx^1)^2 + \sin^2 x^1 \, (dx^2)^2] \;=\; g_{ik} \, dx^i \, dx^k \; . \end{aligned} \tag{222}$$

Die einzigen nichtverschwindenden Christoffel-Symbole sind

$$\begin{aligned} \Gamma^1_{22} &= -\sin\vartheta \, \cos\vartheta \; , \\ \Gamma^2_{12} &= \Gamma^2_{21} \;=\; \cot\vartheta \; . \end{aligned} \tag{223}$$

Daraus erhalten wir die folgenden nichtverschwindenden Komponenten des Krümmungstensors

$$\begin{aligned} R^1{}_{221} &= -R^1{}_{212} \;=\; -\sin^2\vartheta \;=\; -\frac{1}{R^2} \, g_{22} \; , \\ R^2{}_{121} &= -R^2{}_{112} \;=\; 1 \;=\; \frac{1}{R^2} \, g_{11} \; . \end{aligned} \tag{224}$$

Für alle weiteren Komponenten gilt

$$R^i{}_{kml} \;=\; 0 \; . \tag{225}$$

Das Ergebnis läßt sich in die zusammenfassende Form

$$R^i{}_{kml} \;=\; \frac{1}{R^2} \left(\delta^i_m \, g_{kl} - \delta^i_l \, g_{km} \right) \tag{226}$$

bringen. Für $R \to \infty$ verschwindet der Krümmungstensor.

Die kovariante Ableitung

In krummlinigen Koordinaten bilden die Ableitungen

$$a_{k|i} = \frac{\partial a_k}{\partial x^i} , \tag{227}$$

$$a^k{}_{|i} = \frac{\partial a^k}{\partial x^i} \tag{228}$$

der Komponenten eines kovarianten bzw. kontravarianten Vektors im allgemeinen keinen Tensor. Dies zeigt man leicht am Beispiel eines kovarianten Vektors mit den Komponenten a_k, der sich nach

$$\bar{a}_k = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} a_l \tag{229}$$

transformiert. Daher folgt für die Ableitung

$$\frac{\partial \bar{a}_k}{\partial \bar{x}^i} = \frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^k} \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i} \frac{\partial a^l}{\partial x^m} + \frac{\partial^2 x^l}{\partial \bar{x}^i \, \partial \bar{x}^k} a_l . \tag{230}$$

Die Ableitung $a_{k|i}$ transformiert sich also nur dann wie ein Tensor, wenn die x^i lineare Funktionen der $\bar{x}^k$ sind. Analoge Schlußfolgerungen gelten auch für Tensoren höherer Stufe. Es stellt sich daher die Aufgabe, die Ableitung eines Vektors koordinatenunabhängig zu definieren.

Das Differential eines Vektors ist die Differenz zweier infinitesimal benachbarter Vektoren. Um diese Differenz bilden zu können, müssen wir zuvor offensichtlich einen der beiden Vektoren in den Raumpunkt des anderen verschieben.

Wir betrachten zunächst das kontravariante Vektorfeld $u^i(x^j)$ und dessen Änderung, wenn wir vom Raumpunkt x^j zum Punkt $x^j + dx^j$ gehen. Wir vergleichen am Punkt $x^j + dx^j$ den Wert $u^i(x^j + dx^j)$ des Vektorfeldes mit dem Vektor $u^{i*}(x^j + dx^j)$, den wir durch Transplantation von $u^i(x^j)$ um dx^j erhalten. Wir betrachten also die Differenz

$$D = u^i(x^j + dx^j) - u^{i*}(x^j + dx^j) . \tag{231}$$

Die Taylor-Entwicklung von $u^i(x^j + dx^j)$ um x^j liefert

$$u^i(x^j + dx^j) = u^i(x^j) + \frac{\partial u^i}{\partial x^k} dx^k + O(dx^k)^2 . \tag{232}$$

Für $u^{i*}(x^j + dx^j)$, also dem verschobenen Vektor, gilt

$$u^{i*}(x^j + dx^j) = u^i(x^j) - \Gamma^i_{kl} \, u^l \, dx^k . \tag{233}$$

Daraus folgt

$$D = \left[\frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl}\, u^l\right] dx^k + O(dx^k)^2 \; . \tag{234}$$

Dies legt die Interpretation nahe, daß der Ausdruck in Klammer, der unabhängig von dx^j ist, die Rolle der ersten Ableitung übernimmt.

D ist die Differenz von zwei Vektoren und somit ein Vektor, dx^k ist ein beliebiger Vektor. Vernachlässigen wir nun die höheren Terme in $(dx^k)^n, \;\; n > 1$, so folgt aus dem Quotiententheorem, daß der Klammerausdruck in (234) ein Tensor ist. Wir nennen ihn die kovariante Ableitung des kontravarianten Vektorfeldes u^i. Weder $\partial u^i/\partial x^k$ noch Γ^i_{kl} bilden einen Tensor, was wir aufgrund der Transformationseigenschaften nachgeprüft haben, aber die Kombination in eckigen Klammern ist ein Tensor. Wir führen die Notation ein

$$u^i{}_{||k} = \frac{\partial u^i}{\partial x^k} + \Gamma^i_{kl}\, u^l = u^i{}_{|k} + \Gamma^i_{kl}\, u^l \; . \tag{235}$$

Die Bezeichnung kovariante Ableitung ist aus den folgenden Gründen gerechtfertigt: 1) Es hat sich bereits gezeigt, daß die kovariante Ableitung die Rolle der ersten Ableitung in der Taylor-Entwicklung einnimmt. 2) In pseudo-Euklidischen Räumen reduziert sich die kovariante Ableitung auf die gewöhnliche Ableitung $u^i{}_{|k}$.

Wir wollen nun beweisen, daß die kovarianten Ableitungen $u^i{}_{||k}$ des kontravarianten Vektors mit den Komponenten u^i tatsächlich die Komponenten eines Tensors bilden. Dazu betrachten wir ein Vektorfeld $u^i(x^\alpha)$ in einem Riemannschen Raum. Es sei ferner $x^\alpha(s)$ eine beliebige Kurve und wir definieren ein Vektorfeld $v^i(s)$, so daß für jeden Punkt entlang der Kurve die Gleichung

$$\frac{dv^i}{ds} + \Gamma^i_{kl}\, \frac{dx^l}{ds}\, v^k = 0 \tag{236}$$

erfüllt wird. Dies ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung zur eindeutigen Bestimmung der v^i entlang der Kurve, sofern die Anfangswerte einmal fixiert sind. Die Größe

$$P(s) = g_{ik}\, u^i\, v^k \; , \tag{237}$$

die für jeden Punkt entlang der Kurve definiert ist, bildet offensichtlich einen Skalar. Damit ist auch die Ableitung

$$P'(s) = \frac{dP}{ds} \tag{238}$$

in bezug auf die Bogenlänge ein Skalar. Wir berechnen diese Größe

$$P'(s) \;=\; g_{ik|l}\,\frac{dx^l}{ds}\,u^i\,v^k + g_{ik}\,u^i{}_{|l}\,\frac{dx^l}{ds}\,v^k + g_{ik}\,u^i\,v^k_{|l}\,\frac{dx^l}{ds}\,. \tag{239}$$

Wir verwenden nun die Bestimmungsgleichung (236) der v^i, somit folgt nach Umbenennung der Indizes ($k \to r$)

$$P'(s) \;=\; g_{ir|l}\,u^i\,\frac{dx^l}{ds}\,v^r + g_{ir}\,u^i{}_{|l}\,\frac{dx^l}{ds}\,v^r - g_{ik}\,u^i\,\Gamma^k_{rl}\,\frac{dx^l}{ds}\,v^r\;. \tag{240}$$

Umschreiben ergibt

$$\begin{aligned} P'(s) &= \left[u^i\left(g_{ir|l} - g_{ik}\,\Gamma^k_{rl}\right) + g_{ir}\,u^i{}_{|l}\right]\frac{dx^l}{ds}\,v^r \\ &= T_{rl}\,\frac{dx^l}{ds}\,v^r\;, \end{aligned} \tag{241}$$

wobei T_{rl} den Ausdruck in der eckigen Klammer darstellt. Die linke Seite von (241) ist ein Skalar während dx^l/ds und v^r beliebige Vektoren sind. Aus dem Quotiententheorem folgt daher, daß die Komponenten T_{rl} einen Tensor bilden. Wir schreiben die Größe T_{rl} um. Zunächst folgt

$$\begin{aligned} g_{ir|l} - g_{ik}\,\Gamma^k_{rl} &= g_{ir|l} - g_{ik}\,g^{km}\,[rl,m] \;=\; g_{ir|l} - [rl,i] \\ &= g_{ir|l} - \tfrac{1}{2}(g_{ri|l} + g_{li|r} - g_{rl|i}) \;=\; \tfrac{1}{2}(g_{ir|l} + g_{rl|i} - g_{li|r}) \\ &= [il,r]\,. \end{aligned} \tag{242}$$

Damit können wir die T_{rl} darstellen durch

$$T_{rl} \;=\; u^i\,[il,r] + g_{ir}\,u^i{}_{|l}\;. \tag{243}$$

Wir multiplizieren und kontrahieren diesen Ausdruck mit g^{rs} und bekommen das Resultat

$$g^{rs}\,T_{rl} \;=\; T^s{}_l \;=\; u^s{}_{|l} + \Gamma^s_{il}\,u^i\;. \tag{244}$$

Da der Satz der Komponenten T_{rl} einen Tensor bildet, folgt auch, daß der Satz der Komponenten $T^s{}_l$ einen Tensor bilden. Damit haben wir schließlich, daß die kovariante Ableitung $u^s{}_{||l} = T^s{}_l$ einen Tensor repräsentiert.

Wir haben gerade festgestellt, daß der Satz der Komponenten $u^i{}_{||l}$ einen Tensor bildet. Die Kontraktion $u^i{}_{||i}$ ist demnach ein Skalar, den wir mit der Divergenz des Vektorfeldes identifizieren

$$u^i{}_{||i} \;=\; \operatorname{div} u \;=\; u^i{}_{|i} + \Gamma^i_{is}\,u^s\;. \tag{245}$$

Wir werden noch etwas ausführlicher auf die Divergenz zu sprechen kommen.

Wir wollen uns nun der kovarianten Ableitung eines kovarianten Vektorfeldes zuwenden. Als Bedingung an die kovariante Ableitung stellen wir dabei, daß sie ein Tensor ist und daß sie sich in einem geodätischen Koordinatensystem auf die gewöhnliche Ableitung reduziert. Wir gehen aus von einem kovarianten Vektorfeld $b_i(x^\alpha)$ und von einem kontravarianten Vektorfeld $a^i(x^\alpha)$. Wir bilden das skalare Feld

$$\phi(x^\alpha) \;=\; a^i(x^\alpha)\, b_i(x^\alpha)\;. \tag{246}$$

Den Gradienten des skalaren Feldes, von dem wir wissen, daß er einen kovarianten Vektor darstellt, können wir schreiben als

$$v_l \;=\; \phi_{|l} \;=\; a^i{}_{|l}\, b_i + a^i\, b_{i|l}\;. \tag{247}$$

Wir bemerken, daß v_l ein Vektorfeld ist, das aus zwei anderen Vektorfeldern generiert wurde ohne Christoffel-Symbole zu verwenden. Die kovariante Ableitung des kontravarianten Vektors a^i ist gegeben durch

$$a^i{}_{||l} \;=\; a^i{}_{|l} + \Gamma^i_{ml}\, a^m\;. \tag{248}$$

Unter Verwendung dieses Tensors bilden wir den kovarianten Vektor

$$w_l \;=\; b_i\, a^i{}_{||l}\;. \tag{249}$$

Ferner betrachten wir die Vektordifferenz

$$s_l \;=\; v_l - w_l \;=\; b_{i|l}\, a^i - \Gamma^i_{ml}\, a^m\, b_i\;. \tag{250}$$

Im ersten Term auf der rechten Seite benennen wir um $i \to m$ und im zweiten Term $i \to r$. Damit erhalten wir

$$s_l \;=\; a^m \left(b_{m|l} - \Gamma^r_{ml}\, b_r\right)\;. \tag{251}$$

Nun ist a^m ein beliebiger kontravarianter Vektor und s_l ein kovarianter Vektor. Wir können nun wieder das Quotiententheorem heranziehen, um zu zeigen, daß der Ausdruck $b_{m|l} - \Gamma^r_{ml}\, b_r$ ein Tensor ist. Dieser Ausdruck reduziert sich ferner in einem geodätischen Koordinatensystem auf die übliche Ableitung. Daher bezeichnen wir

$$b_{m||l} \;=\; b_{m|l} - \Gamma^r_{ml}\, b_r \tag{252}$$

als kovariante Ableitung des kovarianten Vektorfeldes b_m.

Kriterien für das Aufstellen von Gravitationsgleichungen

Als erstes Kriterium sei das Kovarianz-Prinzip erwähnt. Aufgrund des Äquivalenzprinzips sollten auch beschleunigte Bezugssysteme in der Beschreibung physikalischer Grundlagen gleichberechtigt sein zu Inertialsystemen. Die physikalischen Gesetze sollten bei Verwendung der verschiedenen Bezugssysteme die gleiche Form haben. Daraus folgt, daß die Gravitationsgleichungen in Tensorform ausgedrückt werden sollten. Dies erlaubt den Übergang von einem Koordinatensystem zu einem anderen, ohne die grundlegende Struktur der physikalischen Gleichungen zu ändern.

Die klassische Gravitationstheorie sollte als Grenzfall in den Gravitationsgleichungen enthalten sein. Die Newtonsche Gleichung lautet

$$\frac{d^2x^i}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} . \tag{253}$$

Die Poisson-Gleichung für das Potential hat die Form

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^{i2}} = -4\pi\rho . \tag{254}$$

Die erste Gleichung sagt aus, wie sich ein Teilchen in einem gegebenen Gravitationsfeld bewegt. Die zweite Gleichung sagt aus, wie das Gravitationspotential φ durch die Materiedichte ρ bestimmt wird. Diese Gleichungen sind wie viele Gleichungen in der klassischen Physik Differentialgleichungen von zweiter Ordnung. Wegen der Tensorstruktur der Gravitationsgleichungen sollten diese die zweiten Ableitungen der Komponenten g_{ik} des metrischen Tensors enthalten.

Im Fall des leeren Raumes, in dem keine Materie vorhanden ist, sollte die Lorentz-Metrik eine spezielle Lösung der Gravitationsgleichungen sein. Wir wollen eindeutige Lösungen der Feldgleichungen finden. Für eine Differentialgleichung der allgemeinen Form

$$F(y^{(n)}, \ldots, y, x) = 0 \tag{255}$$

ist die Linearität in $y^{(n)}$ eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der Lösung. Daraus schließen wir, daß die Feldgleichungen quasilinear sein sollten.

Tensoren in der Physik

In den folgenden Abschnitten dieses Einschubs werden wir Tensoren in verschiedenen Anwendungen kennenlernen. Um dem Begriff Tensor zu genügen, muß sich das betrachtete Objekt bei Koordinatentransformationen gemäß der Definition des Tensors transformieren.
Zuerst diskutieren wir den Trägheitstensor der klassischen Mechanik, danach werden wir den Spannungstensor untersuchen, der in einer speziellen Form Anwendung in den Euler-Gleichungen der nichtrelativistischen Hydrodynamik findet. Wir werden die relativistische Verallgemeinerung der Euler-Gleichungen betrachten und hier den Energie-Impuls-Tensor der Hydrodynamik herleiten. Schließlich werden wir uns noch mit Tensoren beschäftigen, die in der kovarianten Formulierung der Elektrodynamik auftreten.

1. Der Trägheitstensor

Gegeben sei ein System von Massenpunkten, die starr miteinander verbunden sind (diskreter starrer Körper). In der Vorlesung über Mechanik haben wir gesehen, daß sich die kinetische Energie dieses Systems zerlegen läßt in einen Schwerpunktsanteil, der eine gemeinsame Translationsbewegung beschreibt, und einen Rotationsterm

$$T = \frac{1}{2}M\vec{V}^2 + \frac{1}{2}\sum_{\mu=1}^{3}\sum_{\nu=1}^{3}(\omega^T)^\mu \, \mathrm{J}_{\mu\nu}\, \omega^\nu \quad . \tag{256}$$

M ist die Gesamtmasse, $\vec{V}$ die Schwerpunktsgeschwindigkeit und $\vec{\omega}$ die Winkelgeschwindigkeit der Rotationsbewegung. Der Trägheitstensor hat die explizite Gestalt

$$\begin{aligned} \mathrm{J}_{\mu\nu} \quad &:= \quad \sum_{i=1}^{n} m_i \left[\vec{x}_i^2\delta_{\mu\nu} - (x_i)_\mu (x_i)_\nu\right] \\ &\rightarrow \quad \int \mathrm{d}^3x\, \rho(x) \left[\vec{x}^2\delta_{mu\nu} - x_\mu x_\nu\right] \quad , \end{aligned} \tag{257}$$

wobei die letzte Zeile den Übergang zum kontinuierlichen Fall andeutet. In der klassischen Mechanik sind Inertialsysteme dadurch ausgezeichnet, daß die Newtonschen Bewegungsgleichungen beim Übergang zwischen ihnen forminvariant bleiben. Die allgemeinste dieser Abbildungen bildet die 10-parametrige eigentliche, orthochrone Galileigruppe $\mathcal{G}_+^\uparrow$ (3 Freiheiten in der Rotation, 3 in der gleichmäßigen Geschwindigkeit, 3 in der absoluten Verschiebung und 1 Freiheit in der Zeit). Den Begriff des Tensors im

$\mathbf{R}^3$ definiert man jedoch über sein Transformationsverhalten unter orthogonalen Drehungen $\mathcal{R} \in$ O(3) (vergleiche: die Lorentz-Transformation ist eine Drehung der Raum-Zeit-Achsen, die allgemeine Gruppe ist jedoch die Poincaré-Gruppe, die auch Verschiebungen beinhaltet). Deshalb wollen wir das Transformationsverhalten des Trägheitstensors unter diesen Drehungen untersuchen. (Schränkt man die Möglichkeiten det$\mathcal{R}$ = ± 1 auf det$\mathcal{R}$ = 1 ein, erhält man die Gruppe der eigentlichen, orthogonalen Drehungen, die SO(3).)
Der erste Term ist ein Produkt des Skalars $\vec{x}^2$ und des Kronecker-Symbols $\delta_{\mu\nu}$, d.h. wir müssen das Transformationsverhalten des Kronecker-Deltas untersuchen:

$$\bar{\delta}_{\mu\nu} = \mathcal{R}_{\mu\alpha}\mathcal{R}_{\nu\beta}\delta_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\mu\alpha}(\mathcal{R}^T)_{\beta\nu}\delta_{\alpha\beta} = \mathcal{R}_{\mu\alpha}(\mathcal{R}^T)_{\alpha\nu} = \delta_{\mu\nu} \quad , \tag{258}$$

was zeigt, daß das Kronecker Symbol unter Drehungen invariant ist. Wir erhalten also den Trägheitstensor im gedrehten Koordinatensystem durch

$$\begin{aligned} \bar{\mathrm{J}}_{\mu\nu} &= \left[(\bar{x}_\sigma \bar{x}^\sigma)\bar{\delta}_{\mu\nu} - \bar{x}_\mu \bar{x}_\nu\right] \\ &= \left[x_\tau x^\tau \mathcal{R}_{\mu\alpha}\mathcal{R}_{\nu\beta}\delta_{\alpha\beta} - \mathcal{R}_{\mu\alpha}\mathcal{R}_{\nu\beta}x_\alpha x_\beta\right] \\ &= \mathcal{R}_{\mu\alpha}\mathcal{R}_{\nu\beta}\mathrm{J}_{\alpha\beta} \quad , \end{aligned} \tag{259}$$

was genau der (axiomatischen) Definition eines Tensors 2. Stufe entspricht.

2. Der Spannungstensor

Gegeben sei ein Volumenelement dV in einem Kontinuum (Flüssigkeit, Gas, Kernmaterie etc.). Damit sich dieses Volumenelement im statischen Gleichgewicht befindet, muß die auf das Volumenelement angewendete Massenkraft $\vec{f}\,\mathrm{d}V$ entgegengesetzt gleich der Summe der Kräfte zwischen dem betrachteten Volumenelement und den benachbarten Volumenelementen sein. Das infinitesimal kleine Volumenelement sei quadratisch gedacht, wie es in der Zeichnung angedeutet ist. Auf die Fläche $x^1 = x^1_0 =$ const. wirkt die Kraft

$$\vec{K}^1(x^1_0) = -\vec{t}^{(1)}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \quad . \tag{260}$$

wobei $\vec{t}^{(1)}$ eine Kraft pro Fläche ist (was der Einheit des Druckes entspricht), und die Flächenkraft muß nicht senkrecht auf der Volumenelementfläche stehen. Gemäß einer Taylor-Entwicklung in erster Ordnung wirkt dann auf die Fläche $x^1 = x^1_0 + \mathrm{d}x^1$ die

Abbildung 1: Schematische Darstellung des betrachteten Volumenlementes innerhalb eines Kontinuums. Die angezeichneten Kräftevektoren dienen der Vorzeichenkonvention. Die Kräftevektoren müssen nicht notwendigerweise senkrecht auf den Seitenflächen des Volumenelementes stehen.

Kraft

$$\begin{aligned} \vec{K}^1(x_0^1 + \mathrm{d}x_0^1) &= \left[\vec{t}^{(1)} + \frac{\partial \vec{t}^{(1)}}{\partial x^1}\mathrm{d}x^1 + \frac{\partial \vec{t}^{(1)}}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 + \frac{\partial \vec{t}^{(1)}}{\partial x^3}\mathrm{d}x^3\right]\mathrm{d}x^2\mathrm{d}x^3 \quad \text{oder} \\ \mathrm{d}\vec{K}^1 &= \frac{\partial \vec{t}^{(1)}}{\partial x^1}\mathrm{d}V + \mathcal{O}((\mathrm{d}x^i)^2) \quad . \end{aligned} \tag{261}$$

Gleichsetzen aller auf das Volumenelement wirkenden Kräfte liefert bei Vernachlässigung aller in einer infinitesimalen Größe quadratischer Glieder (Summation über den Index i)

$$\frac{\partial \vec{t}^{(i)}}{\partial x^i} + \vec{f} = \vec{0} \quad . \tag{262}$$

Wählen wir eine Koordinatenbasis $\vec{e}_i$, dann gilt

$$\vec{f} = f^i \vec{e}_i \quad , \tag{263}$$

$$\vec{t}^i = \tau^{ij} \vec{e}_j \quad . \tag{264}$$

Man nennt τ^{ij} den Spannungstensor. Gleichung (262) schreibt sich nun in Komponenten

$$\tau^{ij}{}_{|i} + f^j = 0 \quad , \tag{265}$$

wobei der Index $|i$ Differentiation nach x^i bedeutet. Gehen wir noch zur Dynamik über: das Volumenelement bewege sich mit der Geschwindigkeit $\vec{v}(t)$, d.h. es gilt mit der Massendichte $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}V$ die Newtonsche Bewegungsgleichung in Komponenten

$$\rho \frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t} = f^j + \tau^{ij}{}_{|i} \quad . \tag{266}$$

3. Die Euler-Gleichungen der Hydrodynamik

Beachten wir, daß in der Grundgleichung (266) für die Bewegung eines Kontinuumsvolumenelementes i.a. gilt

$$\vec{v} = \vec{v}(t, \vec{x}) \quad ,$$

dann schreiben wir für die totale Zeitableitung

$$\frac{\mathrm{d}v^j}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i}\frac{\partial x^i}{\partial t} = \frac{\partial v^j}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla})v^j \quad . \tag{267}$$

In dem Fall, daß das betrachtete Kontinuum eine ideale Flüssigkeit ist (keine Reibung), treten nur Normalspannungen auf, d.h. der Spannungstensor τ^{ij} ist diagonal und die Diagonalelemente des Tensors sind alle gleich (isotrope Spannung): wir nennen diesen Wert den Druck $p(t, \vec{x})$. In dieser Spezialisierung gilt

$$\tau^{ij} = -p\,\delta^{ij} \quad . \tag{268}$$

Damit haben wir die Eulerschen Bewegungsgleichungen für ideale (inkompressible) Flüssigkeiten hergeleitet

$$\rho \left[\frac{\partial v^j}{\partial t} + v^j{}_{|k} v^k \right] = f^j - p_{|i}\delta^{ij} \quad . \tag{269}$$

Die Unbekannten dieser Gleichungen sind das Geschwindigkeitsfeld $\vec{v}(t, \vec{x})$, die Verteilung des Drucks $p(t, \vec{x})$ und die Massendichte $\rho(t, \vec{x})$, wobei ρ im Fall inkompressibler Flüssigkeiten konstant ist (es bleibt anzumerken, daß in der bisherigen Herleitung die Massenverteilung als zeitunabhängig angesehen wurde, z.B in Gl. (266). Um Lösungen für die fünf Unbekannten zu erhalten, benötigen wir neben den Euler-Gleichungen noch die Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla}(\rho \cdot \vec{v}) = 0 \tag{270}$$

und eine Zustandsgleichung.

4. Relativistische Hydrodynamik und der Energie-Impuls-Tensor

Wir stellen uns nun der Frage: Gibt es eine relativistische Verallgemeinerung der Eulerschen Bewegungsgleichungen und wenn ja, wie sieht diese aus? In der Speziellen Relativitätstheorie gilt

$$\begin{aligned} \vec{x} &\rightarrow x^\mu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3) \quad , \\ \vec{v} &\rightarrow u^\mu = (u^0 = c\gamma, \gamma\vec{v}) \quad . \end{aligned}$$

Definieren wir nun den Vierer-Tensor zweiter Stufe (weil u^α ein Vierervektor ist folgt die per definitionem)

$$M^{\alpha\beta} := \rho u^\alpha u^\beta \quad , \tag{271}$$

wobei $\rho = \mathrm{d}m/\mathrm{d}V$ im jeweiligen Ruhesystem des betrachteten Volumenelementes genommen werden soll (und daher ein Skalar ist). Diese Definition erscheint sinnvoll: Zum einen wissen wir, daß in den Eulerschen Bewegungsgleichungen eine quadratische Form von Geschwindigkeit und Ableitung der Geschwindigkeit vorkommt, und andererseits, daß Δm_r selbst 0-Komponente eines Vierervektors ist (des Impulsvektors $p^\mu = (m_r c, m_r \vec{v})$) und sich $\Delta m_r/\Delta V$ deshalb wie die 00-Komponente eines Vierertensors zweiter Stufe transformieren sollte ($1/\Delta V$ transformiert sich wie die 0-Komponente eines Vierervektors; z.B. Stromdichte $s^0 = \Delta q/\Delta V \equiv \rho_e$). Ausgeschrieben haben wir

$$M^{\alpha\beta} = \rho\gamma^2 c^2 \begin{pmatrix} 1 & v^1/c & v^2/c & v^3/c \\ v^1/c & \ddots & & \\ v^2/c & \cdots & v^i v^j/c^2 & \\ v^3/c & & & \end{pmatrix} \quad . \tag{272}$$

Daraus ersehen wir, daß sich $\tilde{\rho} = M^{00}/c^2 = \gamma^2\rho$ = Energie-Massendichte wie die 00-Komponente eine Tensors transformiert. Sehen wir uns nun die partiellen Ableitungen des definierten Tensors an:

$$\partial_\beta M^{0\beta} = c\left(\partial_t\tilde{\rho} + \partial_k(\tilde{\rho}v^k)\right) \tag{273}$$

$$\begin{aligned} \partial_\beta M^{i\beta} &= \partial_t(\tilde{\rho}v^i) + \partial_k(\tilde{\rho}v^i v^k) \\ &= \left(\tilde{\rho}\partial_t v^i + v^i\partial_t\tilde{\rho}\right) + \tilde{\rho}v^k\partial_k v^i + v^i\partial_k(\tilde{\rho}v^k) \quad . \end{aligned} \tag{274}$$

Die obere Gleichung ist, wenn wir sie gleich Null setzen, nichts anderes als die Kontinuitätsgleichung, und in der unteren Gleichung erkennen wir so die Eulerschen Bewegungsgleichungen für ein Kontinuum ohne Kräfte (hier ist die volle Zeit- und Raumabhängigkeit der Energie-Massendichte mit berücksichtigt - $v^i \partial_t \tilde{\rho} + v^i \partial_k(\tilde{\rho} v^k)$). Zusammengenommen erhalten wir

$$\left.\begin{array}{rl} \text{Kontinuitätsgleichung} & \partial_\beta M^{0\beta} = 0 \\ \text{Kräftefreie Euler-Gleichungen} & \partial_\beta M^{i\beta} = 0 \end{array}\right\} \quad \rightarrow \quad \partial_\beta M^{\alpha\beta} = M^{\alpha\beta}{}_{|\beta} = 0 \quad . \tag{275}$$

Diese Gleichung ist die relativistische Verallgemeinerung der kräftefreien Euler-Gleichungen. Sie ist relativistisch forminvariant formuliert, da $M^{\alpha\beta}$ ein Vierertensor zweiter Stufe ist. Man nennt diese Gleichung auch den Erhaltungssatz der Viererimpulsdichte.
Um den eigentlichen Energie-Impuls(-Dichte)-Tensor zu definieren, müssen wir den Druck noch in relativistisch kovarianter Form mit in die Gleichung einbauen. Für eine ideale Flüssigkeit hatten wir einen isotropen Drucktensor angenommen

$$P^{ij} = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad . \tag{276}$$

Wie muß nun der relativistische Drucktensor $P^{\alpha\beta}$ aussehen? Im lokalen Ruhesystem soll natürlich gelten

$$(\partial_\beta P^{\alpha\beta}) = (0, \partial_i p) \quad ,$$

also

$$(P^{\alpha\beta}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & p \end{pmatrix} \quad . \tag{277}$$

Erneut definieren wir p als den im jeweiligen Ruhesystem gemessenen Eigendruck, der damit ein (Lorentz-)Skalar ist. Da $P^{\alpha\beta}$ ein Vierertensor ist, muß das Transformationsgesetz

$$(P')^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu \Lambda^\beta_\nu P^{\mu\nu} \tag{278}$$

gelten. Die explizite Gestalt einer (speziellen) Lorentz-Transformation (auch: Lorentzboost) in ein Inertialsystem, daß sich mit einer Geschwindigkeit $\vec{v}$ in beliebiger Richtung relativ zum momentanen Inertialsystem bewegt, ist

$$\Lambda(\vec{v}) = \begin{pmatrix} \gamma & \gamma \frac{v^k}{c} \\ \gamma \frac{v^i}{c} & \delta^{ik} + \frac{\gamma^2}{1+\gamma} \frac{v^i v^k}{c^2} \end{pmatrix} \quad . \tag{279}$$

Ausführung der Rechnung führt uns auf die relativistisch invariante Formulierung des Drucktensors

$$P^{\alpha\beta} = p\left(\frac{u^\alpha u^\beta}{c^2} - \eta^{\alpha\beta}\right) = p\begin{pmatrix} \gamma^2 - 1 & \dfrac{\gamma^2 v^k}{c} \\ \dfrac{\gamma^2 v^i}{c} & \delta^{ij} + \dfrac{\gamma^2 v^i v^k}{c^2} \end{pmatrix} \quad , \tag{280}$$

mit der Lorentzmetrik $\eta^{\alpha\beta}$, für die gilt diag(η) = $(+,-,-,-)$. Dieser Drucktensor ist als Vierertensor definiert worden, und er reduziert sich im nichtrelativistischen Limes auf Gleichung (277).

Die kovariante Form des Drucktensors

In einer Zwischenrechnung wollen wir die Gültigkeit von Gl. (280) beweisen. Ein erster Zwischenschritt führt uns auf

$$(P')^{\alpha\beta} = \Lambda^\alpha_\mu (\tilde{P})^{\mu\beta} = p\begin{pmatrix} \gamma & \gamma\dfrac{v^k}{c} \\ \gamma\dfrac{v^i}{c} & \delta^{ik} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\dfrac{v^i v^k}{c^2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma\dfrac{v^i}{c} & \delta^{ik} + \dfrac{\gamma^2}{1+\gamma}\dfrac{v^i v^k}{c^2} \end{pmatrix} . \tag{281}$$

Ausführung der Matrixmultiplikation führt uns, nach einigen trivialen Rechenschritten auf die in Gl. (280) angegebene Form des kovarianten Drucktensors. Hier zeigen wir die Übereinstimmung für die 00-, die 01- und die 11-Komponente.

<u>00-Komponente:</u> Wir erhalten

$$\begin{aligned} (P')^{00} &= p\gamma^2\left(\frac{(v^1)^2}{c^2} + \frac{(v^2)^2}{c^2} + \frac{(v^3)^2}{c^2}\right) = p\gamma^2\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2} \\ &= p\gamma^2\left(1 - \frac{1}{\gamma^2}\right) = p(\gamma^2 - 1) \quad . \end{aligned} \tag{282}$$

Dies stimmt mit der oben angegebenen 00-Komponente überein.

<u>01-Komponente:</u> Die Multiplikation der Spalten- und Zeilenelemente führt auf

$$\begin{aligned} (P')^{01} &= p\gamma\left(\frac{v^1}{c} + \frac{v^1}{c}\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{(v^1)^2}{c^2} + \frac{v^2}{c}\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{v^2 v^1}{c^2} + \frac{v^3}{c}\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{v^3 v^1}{c^2}\right) \\ &= p\gamma\frac{v^1}{c}\left(1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}\right) = p\gamma\frac{v^1}{c}\left(1 + \frac{\gamma^2}{1+\gamma}\left[1 - \frac{1}{\gamma^2}\right]\right)) \\ &= p\gamma\frac{v^1}{c}\left(1 + \frac{\gamma^2 - 1}{1+\gamma}\right) = p\gamma^2\frac{v^1}{c^2} \quad . \end{aligned} \tag{283}$$

Auch diese Rechnung führt zum geforderten Ergebnis.

11-Komponente: Wiederum geben wir die Rechenschritte in aller Ausführlichkeit an

$$
\begin{aligned}
(P')^{11} &= p\left(\left[1+\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{(v^1)^2}{c^2}\right]^2+\left[\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{v^2v^1}{c^2}\right]^2+\left[\frac{\gamma^2}{1+\gamma}\frac{v^3v^1}{c^2}\right]^2\right)\\
&= p\left(1+\gamma^2\frac{(v^1)^2}{c^2}\left[\frac{2}{1+\gamma}+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2}\left\{\frac{(v^1)^2}{c^2}+\frac{(v^2)^2}{c^2}+\frac{(v^3)^2}{c^2}\right\}\right]\right)\\
&= p\left(1+\gamma^2\frac{(v^1)^2}{c^2}\left[\frac{2}{1+\gamma}+\frac{\gamma^2}{(1+\gamma)^2}\frac{\vec{v}^{\,2}}{c^2}\right]\right)\\
&= p\left(1+\gamma^2\frac{(v^1)^2}{c^2}\left[\frac{2}{1+\gamma}+\frac{\gamma^2-1}{1+2\gamma+\gamma^2}\right]\right)=p\left(1+\gamma^2\frac{(v^1)^2}{c^2}\right)
\end{aligned}
\tag{284}
$$

Wie in den beiden Rechnungen zuvor wurde auch hier für $\vec{v}^{\,2}/c^2 = 1-1/\gamma^2$ gesetzt (Übergang von der vorletzten zur letzten Zeile).

Wir schreiben nun die Eulerschen Bewegungsgleichungen für ein Volumenelement im Kontinuum ohne äußere Felder als

$$
\partial_\beta T^{\alpha\beta}=0 \quad , \tag{285}
$$

mit dem Energie-Impuls Tensor

$$
T^{\alpha\beta}=M^{\alpha\beta}+P^{\alpha\beta}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)u^\alpha u^\beta-\eta^{\alpha\beta}p \quad . \tag{286}
$$

Der so definierte Energie-Impulsdichte-Tensor ist die relativistisch verallgemeinerte Form der Energie-Massendichte. Daher wird $T^{\alpha\beta}$ in der Allgemeinen Relativitätstheorie zur Quelle des Gravitationsfeldes. In der allgemein relativistischen Formulierung muß man dem Lorentz-Tensor $T^{\alpha\beta}$ einen Riemann-Tensor $T^{\mu\nu}$ zuordnen. Im allgemein relativistischen Fall gilt

$$
T^{\alpha\beta}\to T^{\mu\nu}=\left(\rho+\frac{p}{c^2}\right)u^\mu u^\nu-g^{\mu\nu}p \quad .
$$

Hierbei sind die u^μ als kontravariante Riemann-Vektoren zu verstehen. ρ und p sind als Riemann-Skalare, weil man in jedem Koordinatensystem an jeder Stelle x ein lokales Inertialsystem einführen kann. In diesem sind dann die Größen Eigendruck und Eigenmassendichte zu bestimmen. Dann wird der Erhaltungssatz zu

$$
T^{\alpha\beta}{}_{|\beta}=0\to T^{\mu\nu}{}_{||\nu}=0 \quad ,
$$

was die Grundgleichungen der Hydrodynamik im Gravitationsfeld sind (wobei diese nicht mehr als Erhaltungssatz für Energie und Impuls zu verstehen ist, da Gravitationskräfte auf die Flüssigkeit wirken).

5. Die Maxwellschen Gleichungen in kovarianter Form

In diesem Abschnitt beschäftigen wir uns damit, die Grundgleichungen der klassischen Elektrodynamik, die Maxwellschen Gleichungen, in eine relativistisch invariante Form zu bringen. Die Vorgehensweise wird dabei ähnlich der sein, wie man sie aus den Vorlesungen zur speziellen Relativitätstheorie kennt. Dort wurden die Maxwellschen Gleichungen so formuliert, daß sie in jedem beliebigen *Inertialsystem* Gültigkeit hatten. Hier werden wir jedoch darüber hinausgehen und auf der Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie eine kovariante Formulierung finden, so daß die Maxwellschen Gleichungen in jedem beliebigen *beschleunigten Bezugssystem* die gleiche Gestalt besitzen.

Wir schreiben zunächst einmal die Maxwellschen Gleichungen für das Vakuum auf. Die inhomogenen Gleichungen lauten

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad , \tag{287}$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} - \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{E} = \frac{1}{c}\vec{j} \quad , \tag{288}$$

und die homogenen Gleichungen haben die Form

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{H} = \vec{0} \quad , \vec{\nabla} \cdot \vec{H} = 0 \quad . \tag{289}$$

$\vec{E}$ und $\vec{H}$ bezeichnen hier die elektrische bzw. die magnetische Feldstärke. Die Ladungsdichte ρ und die Stromdichte $\vec{j}$ sind nicht unabhängig voneinander, sie sind vielmehr durch die Kontinuitätsgleichung miteinander verknüpft

$$\partial_t \rho + \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = 0 \quad . \tag{290}$$

Diese Beziehung erhält man, indem man zum einen die erste inhomogene Gleichung, Gl. (287), nach der Zeit ableitet, zum anderen die Divergenz von der zweiten inhomogenen Gleichung, Gl. (288), bildet und anschließend die Resultate addiert. Die Gültigkeit der Kontinuitätsgleichung (290) ist eine notwendige Bedingung für die Konsistenz des Maxwellschen Differentialgleichungssystems.

Als nächstes haben wir uns um die Metrik zu kümmern. Wir übernehmen dazu den aus der speziellen Relativitätstheorie bereits bekannten metrischen Tensor

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix} \quad , \tag{291}$$

wobei nur die nichtverschwindenden Matrixelemente explizit aufgeschrieben wurden. Es ist durchaus nichttrivial zu verstehen, warum diese Metrik, die im Rahmen der relativistischen Mechanik verwendet wurde, auf die Elektrodynamik übertragen werden kann. Beides sind voneinander verschiedene Theorien. Wir können aber wenigstens plausibel machen, daß die Metrik (291) von dem Maxwellschen Differentialgleichungssystem selbst nahegelegt wird:

Die Maxwellschen Gleichungen sind in Abwesenheit äußerer Quellen äquivalent zu Wellengleichungen für das elektrische und das magnetische Feld:

$$\frac{1}{c^2}\partial_t(\partial_t \vec{E}) - \Delta\vec{E} = \vec{0} \quad , \tag{292}$$

$$\frac{1}{c^2}\partial_t(\partial_t \vec{H}) - \Delta\vec{H} = \vec{0} \quad . \tag{293}$$

Statt des Operators $((1/c^2)\partial_t^2 - \Delta)$ schreibt man oft auch $\Box \equiv (1/c^2\partial_t^2 - \Delta) \equiv \partial_\mu\partial^\mu$. Dieser Operator ist relativistisch invariant. Die Charakteristik, die in der Theorie der partiellen Differentialgleichungen eine grundlegende Rolle spielt, ist für die Wellengleichung gegeben durch die Relation

$$c^2t^2 - \vec{x}\cdot\vec{x} = 0 \quad . \tag{294}$$

D.h. ein Signal, das vom Punkt $(t = 0, \vec{x} = \vec{0})$ ausgegangen ist, beeinflußt zur Zeit t die Orte auf der Kugelschale $\{\vec{x} \ : \ \vec{x}\cdot\vec{x} = c^2t^2\}$. Obwohl die Theorie der Elektrodynamik vor der Speziellen Relativitätstheorie formuliert wurde, sind die Maxwell-Gleichungen schon relativistisch invariant; die elektromagnetische Wechselwirkung erfüllt das Kausalitätsprinzip und generiert keine instantanen Wirkungen, d.h. die elektromagnetischen Felder bewegen sich mit einer endlichen Geschwindigkeit (Lichtgeschwindigkeit c) durch den Raum (bzw. durch den Äther der damaligen Vorstellung). Natürlich sind die Bewegungsgleichungen der Elektrodynamik nicht invariant unter Galilei-Transformationen, weshalb man früher dachte, die Maxwell-Gleichungen würden in ihrer Form nur für ausgezeichnete Inertialsysteme gelten, nämlich für solche, die bezüglich des Äthers ruhen.

Gleichung (294) läßt sich auch als Bilinearform eines Tensors a_{ij} schreiben

$$x^i\, a_{ij}\, x^j = 0 \quad , \tag{295}$$

wobei $x^i = (ct, \vec{x})$. Den Tensor a_{ij} übernehmen wir dann als metrischen Tensor $\eta_{\mu\nu}$. Er ist genau von der Gestalt (291).

Wir können nun anfangen, die Maxwellschen Gleichungen in der kovarianten Formulierung aufzustellen. Wir beginnen mit den Quelltermen ρ und $\frac{1}{c}\vec{j}$ und definieren einen Vierervektor (Stromdichtevektor)

$$s^\alpha := \left(\rho = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}V}, \frac{1}{c}\vec{j}\right) \quad . \tag{296}$$

Der Vierergradient ist gegeben durch $\partial_\alpha := (\frac{1}{c}\partial_t, \vec{\nabla})$. Damit ergibt sich für die Viererdivergenz von s^α

$$s^\alpha{}_{|\alpha} = \partial_\alpha s^\alpha = \frac{1}{c}\partial_t \rho + \frac{1}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{j} \quad . \tag{297}$$

Dies stellt aber gerade die Kontinuitätsgleichung dar, d.h. es gilt

$$s^\alpha{}_{|\alpha} = 0 \quad . \tag{298}$$

Da sämtliche Ableitungen des metrischen Tensors (291) verschwinden, sind alle Christoffel-Symbole gleich null, und die gewöhnliche Ableitung ist in unserem Bezugssystem gleich der kovarianten Ableitung; wir erhalten also

$$s^\alpha{}_{||\alpha} = 0 \quad . \tag{299}$$

Diese Gleichung sagt aus, daß die Erhaltung der elektrischen Ladung nicht nur in jedem Inertialsystem, wie aus der speziellen Relativitätstheorie folgt, sondern auch *in jedem beschleunigten Bezugssystem* gilt. Diese Aussage bedarf jedoch der experimentellen Verifikation.

Als nächstes definieren wir den Feldstärketensor

$$F^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & E_x & E_y & E_z \\ -E_x & 0 & H_z & -H_y \\ -E_y & -H_z & 0 & H_x \\ -E_z & H_y & -H_x & 0 \end{pmatrix} \quad . \tag{300}$$

Der Feldstärketensor ist offensichtlich antisymmetrisch

$$F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu} \quad . \tag{301}$$

Wir behaupten nun, daß die inhomogenen Maxwell-Gleichungen beschrieben werden durch den Ausdruck

$$F^{\mu\nu}{}_{|\nu} = s^\mu \quad . \tag{302}$$

Zum Beweis setzen wir zunächst $\mu = 0$. Damit erhalten wir

$$\begin{aligned} F^{0\mu}{}_{|\nu} &= s^0 \qquad \text{oder} \\ \partial_x E_x + \partial_y E_y + \partial_z E_z &= \vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \rho \quad , \end{aligned} \tag{303}$$

also gerade die skalare inhomogene Gleichung. Für $\mu = 1$ ergibt sich

$$\begin{aligned} F^{1\nu}{}_{|\nu} &= s^1 \qquad \text{oder} \\ -\frac{1}{c}\partial_t E_x + \partial_y H_z - \partial_z H_y &= \frac{1}{c} j_x \quad . \end{aligned} \tag{304}$$

Für $\mu = 2$ und $\mu = 3$ erhalten wir analog

$$-\frac{1}{c}\partial_t E_y - \partial_x H_z + \partial_z H_x = \frac{1}{c} j_y \quad , \tag{305}$$

$$-\frac{1}{c}\partial_t E_z + \partial_x H_y - \partial_y H_x = \frac{1}{c} j_z \quad . \tag{306}$$

Die drei letzten Gleichungen lassen sich vektoriell schreiben als

$$-\frac{1}{c}\partial_t \vec{E} + \vec{\nabla} \times \vec{H} = \frac{1}{c}\vec{j} \quad , \tag{307}$$

was gerade die vektorielle inhomogene Maxwellsche Gleichung darstellt. Mit dem gleichen Argument, wie wir es im Fall der Kontinuitätsgleichung gebraucht haben, schreiben wir die gewöhnliche Ableitung in Gleichung (302) als kovariante Ableitung und erhalten

$$F^{\mu\nu}{}_{||\nu} = s^\mu \quad . \tag{308}$$

Aufgabe: Das Quotiententheorem

Beweisen Sie das Quotiententheorem mittels des Transformationsverhaltens ko- und kontravarianter Tensoren:

Gilt für die Kontraktion einer indizierten Größe $R^{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_p}{}_{i_1 \dots i_n l_1 \dots l_q}$ mit einem beliebigen Tensor $(n+m)$-ter Stufe, $T^{i_1 \dots i_n}{}_{j_1 \dots j_m}$, die Beziehung:

$$T^{i_1 \dots i_n}{}_{j_1 \dots j_m} R^{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_p}{}_{i_1 \dots i_n l_1 \dots l_q} = S^{k_1 \dots k_p}{}_{l_1 \dots l_q} \quad , \tag{309}$$

wobei $S^{k_1 \dots k_p}{}_{l_1 \dots l_q}$ einen Tensor $(p+q)$-ter Stufe darstellt, so ist $\mathbf{R}$ selbst ein Tensor, und zwar ein Tensor $(n+m+p+q)$-ter Stufe.

Lösung:

Wir bezeichnen im folgenden die Koordinatentransformationen, die die Komponenten eines kontravarianten Vektors von ungestrichenen in gestrichene Koordinaten überführen, mit

$$a^i{}_j = \frac{\partial x'^i}{\partial x^j}$$

und die Transformationen für die Komponenten eines kovarianten Vektors mit

$$b^i{}_j = \frac{\partial x^i}{\partial x'^j} \quad .$$

Offensichtlich gilt

$$a^i{}_j \; b^j{}_k = \delta^i{}_k \quad . \tag{310}$$

Unter einer Änderung des Koordinatensystems transformiert sich $\mathbf{T}$ gemäß

$$T^{i_1 \dots i_n}{}_{j_1 \dots j_m} = a^{i_1}{}_{i'_1} \cdots a^{i_n}{}_{i'_n} b^{j'_1}{}_{j_1} \cdots b^{j'_m}{}_{j_m} \overline{T}^{i'_1 \dots i'_n}{}_{j'_1 \dots j'_m} \quad . \tag{311}$$

Das Transformationsgesetz für $\mathbf{S}$ lautet

$$S^{k_1 \dots k_p}{}_{l_1 \dots l_q} = a^{k_1}{}_{k'_1} \cdots a^{k_p}{}_{k'_p} b^{l'_1}{}_{l_1} \cdots b^{l'_q}{}_{l_q} \overline{S}^{k'_1 \dots k'_p}{}_{l'_1 \dots l'_q} \quad . \tag{312}$$

Damit erhält man aus (309)

$$\begin{aligned} & a^{i_1}{}_{i'_1} \cdots a^{i_n}{}_{i'_n} b^{j'_1}{}_{j_1} \cdots b^{j'_m}{}_{j_m} \; \overline{T}^{i'_1 \dots i'_n}{}_{j'_1 \dots j'_m} \; R^{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_p}{}_{i_1 \dots i_n l_1 \dots l_q} \\ = \;\; & a^{k_1}{}_{k'_1} \cdots a^{k_p}{}_{k'_p} b^{l'_1}{}_{l_1} \cdots b^{l'_q}{}_{l_q} \; \overline{S}^{k'_1 \dots k'_p}{}_{l'_1 \dots l'_q} \quad . \end{aligned} \tag{313}$$

Wir multiplizieren beide Seiten der letzten Gleichung mit

$$b^{\tau_1}{}_{k_1} \cdots b^{\tau_p}{}_{k_p} a^{l_1}{}_{\sigma_1} \cdots a^{l_q}{}_{\sigma_q}$$

und summieren über $k_1, \dots k_p$ sowie $l_1, \dots l_q$. Mit Gleichung (310) ergibt dies die folgende Beziehung:

$$
\begin{aligned}
& b^{\tau_1}{}_{k_1} \cdots b^{\tau_p}{}_{k_p} a^{l_1}{}_{\sigma_1} \cdots a^{l_q}{}_{\sigma_q} a^{i_1}{}_{i'_1} \cdots a^{i_n}{}_{i'_n} b^{j'_1}{}_{j_1} \cdots b^{j'_m}{}_{j_m} \\
& \qquad \times \overline{T}^{i'_1 \dots i'_n}{}_{j'_1 \dots j'_m} R^{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_p}{}_{i_1 \dots i_n l_1 \dots l_q} \\
& = \quad \overline{S}^{\tau_1 \dots \tau_p}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \quad .
\end{aligned} \tag{314}
$$

Andererseits gilt in gestrichenen Koordinaten

$$
\overline{T}^{i'_1 \dots i'_n}{}_{j'_1 \dots j'_m} \overline{R}^{j'_1 \dots j'_m \tau_1 \dots \tau_p}{}_{i'_1 \dots i'_n \sigma_1 \dots \sigma_q} = \overline{S}^{\tau_1 \dots \tau_p}{}_{\sigma_1 \dots \sigma_q} \quad . \tag{315}
$$

Damit erhalten wir die Relation

$$
\begin{aligned}
\overline{R}^{j'_1 \dots j'_m \tau_1 \dots \tau_p}{}_{i'_1 \dots i'_n \sigma_1 \dots \sigma_q} &= b^{\tau_1}{}_{k_1} \cdots b^{\tau_p}{}_{k_p} a^{l_1}{}_{\sigma_1} \cdots a^{l_q}{}_{\sigma_q} a^{i_1}{}_{i'_1} \cdots a^{i_n}{}_{i'_n} b^{j'_1}{}_{j_1} \cdots b^{j'_m}{}_{j_m} \\
& \quad \times R^{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_p}{}_{i_1 \dots i_n l_1 \dots l_q}
\end{aligned} \tag{316}
$$

oder

$$
\begin{aligned}
R^{j_1 \dots j_m k_1 \dots k_p}{}_{i_1 \dots i_n l_1 \dots l_q} &= a^{k_1}{}_{\tau_1} \cdots a^{k_p}{}_{\tau_p} b^{\sigma_1}{}_{l_1} \cdots b^{\sigma_q}{}_{l_q} b^{i'_1}{}_{i_1} \cdots b^{i'_n}{}_{i_n} a^{j_1}{}_{j'_1} \cdots a^{j_m}{}_{j'_m} \\
& \quad \times \overline{R}^{j'_1 \dots j'_m \tau_1 \dots \tau_p}{}_{i'_1 \dots i'_n \sigma_1 \dots \sigma_q}
\end{aligned} \tag{317}
$$

Also befolgt $\mathbf{R}$ die Transformationsvorschrift eines gemischt ko- und kontravarianten Tensors $(m+n+p+q)$-ter Stufe. Dann ist nach der Definition eines Tensors $\mathbf{R}$ selbst ein Tensor.

Die kovariante Ableitung von Tensoren

Wir hatten die kovariante Ableitung von kontravarianten und kovarianten Vektoren diskutiert, und wir hatten gefunden, daß gilt

$$\begin{aligned} u^i{}_{||j} &= u^i{}_{|j} + \Gamma^i_{jk}\, u^k \ , \\ w_{i||j} &= w_{i|j} - \Gamma^k_{ij}\, w_k \ . \end{aligned} \tag{318}$$

Nun wollen wir uns der kovarianten Ableitung von Tensoren zuwenden. Zu diesem Zweck betrachten wir zunächst zwei beliebige Vektorfelder u^i und v^k und wir bilden den Tensor $u^i\, v^k$. Wir bezeichnen die kovariante Ableitung dieses Tensors mit $(u^i\, v^k)_{||l}$. Wir fordern, daß in einem geodätischen Koordinatensystem, in dem die Christoffel-Symbole verschwinden, die kovariante Ableitung dieses Tensors identisch ist mit der gewöhnlichen Ableitung $(u^i\, v^k)_{|l} \;=\; u^i\, v^k{}_{|l} + u^i{}_{|l}\, v^k$. Wir wissen, daß in einem geodätischen Koordinatensystem gilt, $u^i{}_{||l} \;=\; u^i{}_{|l}$ und daß daher in einem geodätischen Koordinatensystem ebenfalls gilt

$$\left(u^i\, v^k\right)_{||l} \;=\; u^i\, v^k{}_{||l} + u^i{}_{||l}\, v^k \ . \tag{319}$$

Aber diese Form hat die Gestalt einer Tensorgleichung. Wir können somit das Resultat (319) als konsistente Definition des Ausdruckes $(u^i\, v^k)_{||l}$ verstehen.

Natürlich läßt sich mit genau der gleichen Argumentation auch die kovariante Ableitung eines Tensors der Form $u^i\, v^k\, w_m$ ermitteln. Wir erhalten nach dieser Regel

$$\left(u^i\, v^k\, w_m\right)_{||l} \;=\; u^i\, v^k\, w_{m||l} + u^i\, v^k{}_{||l}\, w_m + u^i{}_{||l}\, v^k\, w_m \ . \tag{320}$$

Wir ersetzen nun die kovariante Ableitung durch die expliziten Ausdrücke (318). Dies führt auf

$$\left(u^i\, v^k\, w_m\right)_{||l} \;=\; \left(u^i\, v^k\, w_m\right)_{|l} + \Gamma^i_{lr} u^r\, v^k\, w_m + \Gamma^k_{lr} u^i\, v^r\, w_m - \Gamma^r_{lm} u^i\, v^k\, w_r \tag{321}$$

Es ist wichtig zu beachten, daß bei der kovarianten Ableitung eines kovarianten Vektors der Summenindex in der oberen Position des Christoffel-Symbols auftritt. Bei der kovarianten Ableitung eines kontravarianten Vektors erscheint der Summenindex stets in der unteren Position.

Nun nutzen wir aus, daß wir beispielsweise jeden Tensor $T^{ij}{}_k$ schreiben können als Linearkombination eines Vektorproduktes

$$T^{ij}{}_k \;=\; \sum u^i\, v^j\, w_k \ . \tag{322}$$

Damit haben wir aber auch die Regel für die kovariante Differentiation eines Tensors gefunden. Es gilt also

$$T^{ij}{}_{k||l} \;=\; T^{ij}{}_{k|l} + \Gamma^i_{ml}\, T^{mj}{}_k + \Gamma^j_{ml}\, T^{im}{}_k - \Gamma^m_{kl}\, T^{ij}{}_m \;. \tag{323}$$

Die Verallgemeinerung auf eine beliebige Anzahl von Indizes ist evident. Man muß nur jeweils mit der Stellung der Summenindizes und mit den Vorzeichen aufpassen.

Wir wollen nun das für viele nachfolgende Rechnungen äußerst wichtige Ricci-Theorem beweisen. Die Behauptung lautet: Die kovariante Ableitung des metrischen Tensors verschwindet identisch. Zunächst beweisen wir die Relation

$$g_{ir|l} \;=\; [il, r] + g_{ik}\, \Gamma^k_{rl} \;. \tag{324}$$

Wir erinnern an die Definition der Christoffel-Symbole

$$\begin{aligned} [ik, l] \;&=\; \tfrac{1}{2}\left(g_{il|k} + g_{kl|i} - g_{ik|l}\right) \;, \\ \Gamma^j_{ik} \;&=\; g^{jl}\, [ik, l] \;. \end{aligned} \tag{325}$$

Aufgrund dieser Definitionen gilt

$$\begin{aligned} g_{ir|l} - g_{ik}\, \Gamma^k_{rl} \;&=\; g_{ir|l} - g_{ik}\, g^{ks}\, [rl, s] \;=\; g_{ir|l} - [rl, i] \\ &=\; g_{ir|l} - \tfrac{1}{2}\left(g_{ri|l} + g_{li|r} - g_{rl|i}\right) \\ &=\; \tfrac{1}{2}\left(g_{ir|l} + g_{rl|i} - g_{li|r}\right) \;=\; [il, r] \;. \end{aligned} \tag{326}$$

Damit ist die Relation (324) bewiesen und es folgt für die kovariante Ableitung des metrischen Tensors

$$\begin{aligned} g_{ir||l} \;&=\; [il, r] + g_{ik}\, \Gamma^k_{rl} - g_{ik}\, \Gamma^k_{rl} - g_{kr}\, \Gamma^k_{il} \\ &=\; [il, r] - g_{kr}\, \Gamma^k_{il} \;=\; 0 \;. \end{aligned} \tag{327}$$

Der metrische Tensor hat also in der Tat eine verschwindende kovariante Ableitung. Dieses Resultat war eigentlich zu erwarten. Die kovariante Ableitung war gerade so konstruiert, daß wir die gewöhnliche Ableitung gebildet haben und davon den Beitrag, der durch die Änderung der Metrik bei einer infinitesimalen Verrückung bewirkt wird, wieder abgezogen haben. Bilden wir die Ableitung des metrischen Tensors und ziehen davon wieder den Beitrag ab, der durch die Änderung der Metrik bewirkt wird, so muß natürlich Null übrig bleiben.

Aus diesen Betrachtungen ist auch offensichtlich, daß die kovariante Ableitung mit der Operation der Erhöhung und Erniedrigung von Indizes vertauscht. Als Beispiel betrachten wir

$$(u_i)_{||l} \;=\; \left(g_{ik}\, u^k\right)_{||l} \;=\; g_{ik||l}\, u^k + g_{ik}\, u^k{}_{||l} \;=\; g_{ik}\, \left(u^k{}_{||l}\right) \; . \tag{328}$$

Als wichtige Nebenbemerkung müssen wir in diesem Zusammenhang festhalten, daß im allgemeinen gilt

$$u^i{}_{||j||k} \neq u^i{}_{||k||j} \; . \tag{329}$$

Schließlich wollen wir noch die Rotation eines Vektors diskutieren. Dazu gehen wir von kovarianten Vektoren w_i aus und bilden die kovarianten Ableitungen

$$\begin{aligned} w_{i||k} &= w_{i|k} - \Gamma^r_{ik}\, w_r \; , \\ w_{k||i} &= w_{k|i} - \Gamma^r_{ki}\, w_r \; . \end{aligned} \tag{330}$$

Die Christoffel-Symbole sind symmetrisch in den unteren Indizes. Wir bilden nun den Tensor

$$w_{i||k} - w_{k||i} \;=\; w_{i|k} - w_{k|i} \; . \tag{331}$$

Dieser Ausdruck enthält keine Christoffel-Symbole. Er ist ein antisymmetrischer Tensor, den wir die Rotation des Vektors w_i nennen.

Die Bildung der Rotation kann nur mit den kovarianten Komponenten eines Vektors durchgeführt werden. Betrachten wir die kovariante Ableitung eines kontravarianten Vektors u^i

$$\begin{aligned} u^i{}_{||k} &= u^i{}_{|k} + \Gamma^i_{kl}\, u^l \; , \\ u^k{}_{||i} &= u^k{}_{|i} + \Gamma^k_{il}\, u^l \; , \end{aligned} \tag{332}$$

so stellen wir fest, daß sich bei der Differenzbildung die Christoffel-Symbole nicht wegheben.

Zur Unterstreichung der bereits abgeleiteten Resultate weisen wir noch auf einen anderen Ansatz zur Bestimmung der kovarianten Ableitung von Tensoren hin, der bereits bei der kovarianten Ableitung von kovarianten Vektoren verwendet wurde. Es sei $T^i{}_{jk}$ ein Tensor und $u_i,\; v^j,\; w^k$ drei beliebige Vektoren. Wir bilden den Skalar $T^i{}_{jk}\, u_i\, v^j\, w^k$.

Der Gradient $(T^i{}_{jk}\, u_i\, v^j\, w^k)_{|l}$ dieses Skalars ist ein kovarianter Vektor, den wir a_l nennen. Es gilt

$$a_l \;=\; T^i{}_{jk|l}\, u_i\, v^j\, w^k + T^i{}_{jk}\, u_{i|l}\, v^j\, w^k + T^i{}_{jk}\, u_i\, v^j{}_{|l}\, w^k + T^i{}_{jk}\, u_i\, v^j\, w^k{}_{|l}\;. \tag{333}$$

Als nächstes betrachten wir den Vektor b_l

$$b_l \;=\; T^i{}_{jk}\, \left(u_i\, v^j\, w^k\right)_{||l}\;, \tag{334}$$

den wir schreiben können als

$$b_l \;=\; T^i{}_{jk}\, u_{i||l}\, v^j\, w^k + T^i{}_{jk}\, u_i\, v^j{}_{||l}\, w^k + T^i{}_{jk}\, u_i\, v^j\, w^k{}_{||l}\;. \tag{335}$$

Wir untersuchen nun die Differenz der beiden Vektoren

$$\begin{aligned} a_l - b_l \;&=\; T^i{}_{jk|l}\, u_i\, v^j\, w^k + T^i{}_{jk}\, \left(u_{i|l} - u_{i||l}\right)\, v^j\, w^k + \\ &\quad + T^i{}_{jk}\, u_i \left(v^j{}_{|l} - v^j{}_{||l}\right)\, w^k + T^i{}_{jk}\, u_i\, v^j \left(w^k{}_{|l} - w^k{}_{||l}\right)\;. \end{aligned} \tag{336}$$

Wir wissen bereits, daß gilt

$$u_{i|l} - u_{i||l} \;=\; \Gamma^r_{il}\, u_r\;. \tag{337}$$

Ähnliches gilt für die Differenzen $v^j{}_{|l} - v^j{}_{||l}$ und $w^k{}_{|l} - w^k{}_{||l}$. Einsetzen in (336) liefert

$$\begin{aligned} a_l - b_l \;&=\; T^i{}_{jk|l}\, u_i\, v^j\, w^k + T^i{}_{jk}\, \Gamma^r_{il}\, u_r\, v^j\, w^k - T^i{}_{jk}\, \Gamma^j_{lr}\, u_i\, v^r\, w^k \\ &\quad - T^i{}_{jk}\, \Gamma^k_{lr}\, u_i\, v^j\, w^r\;. \end{aligned} \tag{338}$$

Wir benennen einige Summenindizes um und bekommen so

$$a_l - b_l \;=\; \left[T^i{}_{jk|l} + \Gamma^i_{ls}\, T^s{}_{jk} - \Gamma^s_{lj}\, T^i{}_{sk} - \Gamma^s_{lk}\, T^i{}_{js}\right] u_i\, v^j\, w^k\;. \tag{339}$$

Die Größe $a_l - b_l$ ist ein Vektor, ferner sind $u_i,\;\; v^j,\;\; w^k$ beliebige Vektoren. Aus dem Quotiententheorem folgt dann, daß auch die Größe in den eckigen Klammern ein Tensor sein muß. Weiterhin reduziert sich diese Größe in einem geodätischen Koordinatensystem auf die gewöhnliche Ableitung $T^i{}_{jk|l}$. Dies rechtfertigt uns, diesen Ausdruck als die kovariante Ableitung des Tensors $T^i{}_{jk}$ zu bezeichnen. Wie zuvor erhalten wir damit

$$T^i{}_{jk||l} \;=\; T^i{}_{jk|l} + \Gamma^i_{ls}\, T^s{}_{jk} - \Gamma^s_{lj}\, T^i{}_{sk} - \Gamma^s_{lk}\, T^i{}_{js}\;. \tag{340}$$

Die Eigenzeit

Wir hatten bereits definiert, daß ein Ereignis ein Punkt im vierdimensionalen Raum darstellt. Durch die Angabe der vier Koordinaten ist der Weltpunkt oder das Ereignis eindeutig fixiert. Eine einfach zusammenhängende unendliche Menge solcher Ereignisse bildet eine Weltlinie. Die Bogenlänge zwischen zwei Ereignissen entlang einer Weltlinie ist eine geometrische Invariante.

Als Wiederholung diskutieren wir kurz das Eigenzeitintervall im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie. Hier gilt

$$ds^2 \;=\; c^2\, dt^2 - \left(dx^2 + dy^2 + dz^2\right) \;\geq\; 0 \tag{341}$$

für ein zeitartiges Intervall, das kausale Ereignisse miteinander verknüpft. Wir wählen ein Lorentz-System, das Eigensystem, in dem der dreidimensionale Abstand zwischen Ereignissen verschwindet. Damit folgt natürlich

$$ds^2 \;=\; c^2\, dt^2 \tag{342}$$

und daraus wiederum

$$dt \;=\; \frac{ds}{c}\,. \tag{343}$$

Die Größe ds/c wird das Eigenzeit-Intervall zwischen den Ereignissen genannt. Es entspricht dem Zeitintervall, das ein Physiker messen würde, für den beide Ereignisse am selben Punkt im dreidimensionalen Raum stattfinden. In der Praxis würde dies beispielsweise dem Zeitintervall entsprechen, das ein Physiker als Eigenlebenszeit eines Myons mißt, in dem er im Ruhesystem des Myons das Myon beobachtet, vom Prozeß der Entstehung bis zum Zerfall.

In der Allgemeinen Relativitätstheorie wollen wir analog zum Fall der Lorentz-Metrik vorgehen. Im Rahmen der Allgemeinen Relativitätstheorie ist ein infinitesimales Eigenzeitintervall zwischen zwei benachbarten Ereignissen definiert durch

$$d\tau \;=\; \frac{ds}{c} \;=\; \frac{1}{c}\sqrt{g_{00}}\, dx^0 \quad \text{mit} \quad dx^i \;=\; 0 \quad \text{für} \quad i \neq 0\,. \tag{344}$$

Das Integral hierüber ist

$$\int_{\text{Ereignis 1}}^{\text{Ereignis 2}} \frac{ds}{c} \;=\; \frac{s}{c} \;=\; \tau\,. \tag{345}$$

Dieses Integral hängt vom Integrationsweg ab und ist daher keine Invariante. Bereits im Rahmen der Speziellen Relativitätstheorie führt dies beispielsweise zum Zwillingsparadoxon. Die Eigenzeit ist nicht eindeutig integrabel. Hingegen besitzt jeder Punkt eine eindeutige Koordinatenzeit, die integrabel ist. Die Koordinatenzeitintervalle sind jedoch keine Invariante, bei Koordinatentransformationen können sie sich ändern.

Wir wollen nun Eigenzeitintervalle an verschiedenen Raumpunkten miteinander vergleichen. An einem Punkt x^j spezifizieren wir ein Eigenzeitintervall

$$d\tau(x^j) \ = \ \sqrt{g_{00}(x^j)}\, dt \ . \tag{346}$$

dt ist ein integrables Koordinatenzeitintervall, es hat eine eindeutige Bedeutung im ganzen Raum. An einem anderen Punkt y^j gilt

$$d\tau(y^j) \ = \ \sqrt{g_{00}(y^j)}\, dt \ . \tag{347}$$

Daraus folgt sofort

$$\frac{d\tau(x^j)}{d\tau(y^j)} \ = \ \left(\frac{g_{00}(x^j)}{g_{00}(y^j)}\right)^{1/2} \ . \tag{348}$$

Die Rotverschiebung des Lichtes im Gravitationsfeld

Wir hatten bereits nachgewiesen, daß wir die Newtonsche Bewegungsgleichung für ein Teilchen in einem Gravitationspotential φ im Rahmen einer Näherungsbetrachtung aus der Geodätengleichung ableiten können, sofern die g_{00}-Komponente des metrischen Tensors die folgende Form hat:

$$g_{00} \; = \; 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \; . \tag{349}$$

Wie in der klassischen Mechanik ist außerhalb der Massenverteilung des anziehenden Körpers mit der Gesamtmasse M das Potential φ durch

$$\varphi(r) \; = \; -\kappa \frac{M}{r} \tag{350}$$

gegeben. κ bezeichnet die Gravitationskonstante. Ebenso haben wir bereits den Zusammenhang zwischen dem infinitesimalen Eigenzeitintervall $d\tau$ und dem Koordinatenzeitintervall dt diskutiert:

$$d\tau \; = \; \sqrt{g_{00}} \, dt \; . \tag{351}$$

Als Beispiel betrachten wir nun Licht, das auf der Sonne emittiert und das auf der Erde empfangen wird. Die Rotverschiebung des Lichtes aufgrund des unterschiedlichen Gravitationspotentials auf der Sonne und auf der Erde soll berechnet werden. Auf der Oberfläche der Sonne gilt nach (349) und (351) der Zusammenhang

$$d\tau_s \; = \; \left[1 + \frac{2\varphi_s}{c^2} \right]^{1/2} \, dt \; . \tag{352}$$

In ähnlicher Weise haben wir auf der Erdoberfläche

$$d\tau_e \; = \; \left[1 + \frac{2\varphi_e}{c^2} \right]^{1/2} \, dt \; . \tag{353}$$

Die Frequenz ν des Lichtes ist definiert als die Anzahl der Schwingungen pro Zeiteinheit $\Delta\tau$. Wir nehmen nun an, daß ein Atom auf der Sonnenoberfläche Licht mit der Frequenz

$$\nu_s \; = \; \frac{n}{\Delta\tau_s} \tag{354}$$

emittiert. Damit ist offensichtlich die Zahl der Schwingungen

$$n \; = \; \nu_s \, \Delta\tau_s \; . \tag{355}$$

Auf der Erde empfängt man diese n Schwingungen, jedoch haben sich die Zeitdauer des Wellenzuges und damit die Frequenz geändert. Somit folgt aus

$$n = \nu_e \, \Delta\tau_e \; . \tag{356}$$

der Zusammenhang

$$\nu_s \, \Delta\tau_s = \nu_e \, \Delta\tau_e \tag{357}$$

und weiter

$$\nu_e = \nu_s \, \frac{\Delta\tau_s}{\Delta\tau_e} \; . \tag{358}$$

Wir gehen davon aus, daß das Koordinatenzeitintervall Δt auf der Sonne dasselbe ist wie auf der Erde. Dies impliziert

$$\frac{\Delta\tau_s}{\Delta\tau_e} = \left[\frac{1 + 2\varphi_s/c^2}{1 + 2\varphi_e/c^2}\right]^{1/2} \; . \tag{359}$$

Entsprechend lautet die Relation der verschiedenen Frequenzen

$$\nu_e = \nu_s \left[\frac{1 + 2\varphi_s/c^2}{1 + 2\varphi_e/c^2}\right]^{1/2} \; . \tag{360}$$

Bereits bei der Ableitung der g_{00}-Komponente (349) des metrischen Tensors hatten wir Näherungen durchgeführt. Nun führen wir in (360) eine Taylor-Entwicklung durch, wobei wir uns nur auf Terme erster Ordnung in den kleinen Größen φ_s/c^2 und φ_e/c^2 beschränken. Wir erhalten

$$\nu_e = \nu_s(1 + \varphi_s/c^2 + \ldots)(1 - \varphi_e/c^2 + \ldots) \tag{361}$$

und schließlich

$$\frac{\nu_e - \nu_s}{\nu_s} = \frac{\varphi_s - \varphi_e}{c^2} \; . \tag{362}$$

Da sich die Sonne auf einem großen negativen Gravitationspotential gegenüber der Erde befindet, ist die Differenz $\varphi_s - \varphi_e$ negativ. Die Frequenz des Lichtes verringert sich also, wenn es die Sonne verläßt.

Allgemeiner ausgedrückt folgt für die Frequenzverschiebung $\Delta\nu$ des Lichtes, das mit der Frequenz ν_0 emittiert wurde, bei einem Gravitationspotentialgefälle $\Delta\varphi$

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_0} = \frac{\Delta\varphi}{c^2} \; . \tag{363}$$

Abschließend bleibt festzuhalten, daß alle bisherigen Resultate nur näherungsweise für den Fall relativ schwacher Gravitationspotentiale gültig sind. Zur Ableitung der Rotverschiebung haben wir noch nicht auf die Feldgleichungen der Allgemeinen Relativitätstheorie zurückgreifen müssen.

Schließlich wollen wir noch eine alternative, etwas simplere Ableitung der Rotverschiebung vorstellen, die auf der Massen-Energie-Äquivalenz beruht,

$$E = mc^2 . \tag{364}$$

Wir betrachten dabei das Licht als Energiequant mit der effektiven Masse m. Somit gilt

$$m = \frac{E}{c^2} = \frac{h\nu}{c^2} \tag{365}$$

mit dem Plankschen Wirkungsquantum h. Wir nehmen nun an, daß die Wirkung der Gravitation auf ein Lichtquant der Energie $h\nu$ die gleiche ist wie die auf ein massives Teilchen mit der äquivalenten Ruheenergie mc^2. Damit beträgt die Summe der kinetischen Energie eines Lichtquants in einem Gravitationspotential $h\nu + m\varphi$. Gehen wir wieder von der Situation aus, daß Licht auf der Sonne emittiert und auf der Erde empfangen wird und fordern wir ferner die Erhaltung der Gesamtenergie, so gilt

$$h\nu_e + m\varphi_e = h\nu_s + m\varphi_s . \tag{366}$$

Dies ergibt

$$h\nu_e - h\nu_s = m(\varphi_s - \varphi_e) = \frac{h\nu_s}{c^2}(\varphi_s - \varphi_e) . \tag{367}$$

Wieder finden wir

$$\frac{\Delta\nu}{\nu_s} = \frac{\Delta\varphi}{c^2} . \tag{368}$$

Experimentell kann die Rotverschiebung mit Hilfe der Mößbauer-Spektroskopie genau determiniert werden. Wenn ein Atomkern ein Photon emittiert, wird normalerweise ein Rückstoß auf den Kern übertragen. Durch diesen Effekt wird die Energie des emittierten Photons unscharf. Wird dieser Atomkern jedoch in einem Kristall eingebettet, so wird der Rückstoß von dem gesamten Kristall übernommen. Dabei wird zwar Impuls aber keine Energie übertragen, so daß die Energie des emittierten Photons sehr scharf wird. Nur dieses, in der Energie genau fixierte Photon kann auch wieder von dem Atomkern absorbiert werden. An einem hohen Turm kann nun folgendes Experiment durchgeführt werden: Ein Photon-Emitter befindet sich am Boden des Turmes, der dazugehörige Photon-Absorber befindet sich an der der Spitze des Turmes. Bedingt durch das Gravitationsfeld verändert sich jedoch die Frequenz des Photons geringfügig und kann daher durch den Atomkern an der Turmspitze nicht mehr absorbiert werden. Durch eine Bewegung der Absorberaperatur in Richtung Boden kann jedoch mittels der Dopplerverschiebung die Frequenzverschiebung ausgeglichen werden. Durch Variation der Bewegungsgeschwindigkeit läßt sich $\Delta\nu$ sehr präzise vermessen. Bei diesen Experimenten beträgt die relative Frequenzverschiebung nur etwa $\Delta\nu/\nu \simeq 10^{-15}$.

Der Riemannsche Krümmungstensor

Wir wollen nun eine notwendige Bedingung an die Struktur der Gravitationsgleichungen ableiten, so daß die Lorentz-Metrik eine Lösung darstellt. Ist wie bei der Lorentz-Metrik g_{ik} konstant im ganzen Raum, verschwinden alle Christoffel-Symbole. Daraus folgt, daß die gewöhnliche und die kovariante Ableitung identisch sind.

$$u^i{}_{||j} \;=\; u^i{}_{|j} \tag{369}$$

und damit weiter

$$u^i{}_{||j||k} \;=\; u^i{}_{|j|k} \;. \tag{370}$$

Aus der Vertauschbarkeit der gewöhnlichen Ableitung folgt hieraus die Vertauschbarkeit der kovarianten Ableitung

$$u^i{}_{||j||k} - u^i{}_{||k||j} \;=\; 0 \;. \tag{371}$$

Dies ist aber eine Tensorgleichung, denn die kovariante Ableitung ist ein Tensor. Damit muß diese Gleichung nicht nur in dem speziellen Koordinatensystem, in dem alle Christoffel-Symbole verschwinden gültig sein, sondern in allen Systemen. Tensorgleichungen sind forminvariant bei Koordinatentransformationen. Damit haben wir eine Bedingungsgleichung dafür vorliegen, wann ein Raum eine Lorentz-Metrik zuläßt.

Wir führen einige Umformungen durch. Zunächst definieren wir den gemischten Tensor

$$t^i{}_j \;=\; u^i{}_{||j} \;=\; u^i{}_{|j} + \Gamma^i_{jl}\, u^l \;. \tag{372}$$

Daraus ergibt sich für die kovariante Ableitung

$$t^i{}_{j||k} \;=\; u^i{}_{||j||k} \;=\; t^i{}_{j|k} + \Gamma^i_{mk}\, t^m_j - \Gamma^n_{jk}\, t^i{}_n \;. \tag{373}$$

Wir setzten (372) in (373) ein und erhalten

$$u^i{}_{||j||k} \;=\; u^i{}_{|j|k} + \Gamma^i_{jl}{}_{|k}\, u^l + \Gamma^i_{jl}\, u^l{}_{|k} + \Gamma^i_{mk}\, u^m{}_{|j} + \Gamma^i_{mk}\, \Gamma^m_{jl}\, u^l - \Gamma^n_{jk}\, t^i{}_n \;. \tag{374}$$

Wir vertauschen nun die Indizes j und k und bekommen

$$u^i{}_{||k||j} \;=\; u^i{}_{|k|j} + \Gamma^i_{kl|j}\, u^l + \Gamma^i_{kl}\, u^l{}_{|j} + \Gamma^i_{lj}\, u^l{}_{|k} + \Gamma^i_{mj}\, \Gamma^m_{kl}\, u^l - \Gamma^n_{kj}\, t^i{}_n \;. \tag{375}$$

Schließlich bilden wir die Differenz dieser beiden Ausdrücke.

$$\begin{aligned} u^i{}_{||j||k} - u^i{}_{||k||j} \;&=\; \Gamma^i_{jl}{}_{|k}\, u^l - \Gamma^i_{kl|j}\, u^l + \Gamma^i_{mk}\, \Gamma^m_{jl}\, u^l - \Gamma^i_{mj}\, \Gamma^m_{kl}\, u^l \\ &=\; \left[\Gamma^i_{jl}{}_{|k} - \Gamma^i_{kl|j} + \Gamma^i_{mk}\, \Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{mj}\, \Gamma^m_{kl}\right] u^l \;. \end{aligned} \tag{376}$$

Aufgrund des Quotiententheorems muß das Objekt in eckigen Klammern ein Tensor sein. Wir bezeichnen

$$R^i{}_{ljk} \;=\; \Gamma^i_{jl|k} - \Gamma^i_{lk|j} + \Gamma^i_{mk}\,\Gamma^m_{jl} - \Gamma^i_{mj}\,\Gamma^m_{kl}\ . \tag{377}$$

Dies ist der Riemannsche Krümmungstensor. Er spielt eine zentrale Rolle beim Studium der geometrischen Struktur von Riemannschen Räumen. Zusammengefaßt haben wir

$$u^i{}_{||j||k} - u^i{}_{||k||j} \;=\; R^i{}_{ljk}\; u^l \;=\; 0\ . \tag{378}$$

Da nun u^l beliebig ist, folgt daraus offensichtlich

$$R^i{}_{ljk} \;=\; 0\ . \tag{379}$$

Einen Raum, in dem der Riemannsche Krümmungstensor verschwindet, nennen wir flach. Somit ist auch ein Raum mit einer Lorentz-Metrik ein flacher Raum. Die Gleichungen (379) stellen die Feldgleichungen für einen flachen und gravitationsfreien Raum dar. Ist eine beliebige Metrik gegeben, so können wir durch Nachprüfen der Gleichungen (379) feststellen, ob der Raum flach ist und somit prinzipiell eine Lorentz-Metrik erlaubt oder nicht. Die Gleichungen (379) sind Differentialgleichungen zweiter Ordnung in den metrischen Koeffizienten g_{ik}. Sie sind quasilinear.

Wir wollen die Bedeutung der Gleichungen (379) unterstreichen und nochmals die essentiellen Einsichten erläutern. Im flachen Raum gibt es stets ein Koordinatensystem, in dem die Metrik die einfache Form $g_{ik} \;=\; g^{(L)}_{ik}$ annimmt. In diesem Koordinatensystem verschwinden alle Christoffel-Symbole und daher auch alle Komponenten des Riemann-Tensors. Da aber das Verschwinden eines Tensors unabhängig vom gewählten Koordinatensystem ist, so ist auch der Riemann-Tensor im flachen Raum für ein beliebiges Koordinatensystem identisch Null. Wenn nun eine Metrik vorgelegt wird, von der man vermutet, daß sie nur eine komplizierte Form der Metrik des ebenen Raumes ist (wie etwa bei Verwendung parabolischer Koordinaten), so braucht man nur den Riemann-Tensor für diese Metrik zu berechnen. Falls er verschwindet, folgt daraus, daß der Raum flach ist und daß es ein Koordinatensystem geben muß, in dem der metrische Tensor die Elementarform annimmt. Oftmals ist es aber eine schwierige Aufgabe, eine Koordinatentransformation explizit anzugeben, die diesen Übergang auch tatsächlich bewerkstelligt.

Es ist möglich, ein ähnliches Resultat auch für einen Tensor höheren Ranges abzuleiten. Für einen Tensor der Form $u^i v^l$ folgt

$$\left(u^i v^l\right)_{||j} \;=\; u^i{}_{||j}\, v^l + u^i\, v^l{}_{||j} \tag{380}$$

und weiter

$$\left(u^i v^l\right)_{||j||k} \;=\; u^i{}_{||j||k}\, v^l + u^i\, v^l{}_{||j||k} + u^i{}_{||j}\, v^l{}_{||k} + u^i{}_{||k}\, v^l{}_{||j}\ . \tag{381}$$

Wir vertauschen nun wieder die Indizes j und k und bekommen

$$\left(u^i v^l\right)_{||k||j} \;=\; u^i{}_{||k||j}\, v^l + u^i\, v^l{}_{||k||j} + u^i{}_{||k}\, v^l{}_{||j} + u^i{}_{||j}\, v^l{}_{||k}\ . \tag{382}$$

Die Differenz dieser beiden Ausdrücke ist damit

$$\begin{aligned}\left(u^i v^l\right)_{||j||k} - \left(u^i v^l\right)_{||k||j} &= \left(u^i{}_{||j||k} - u^i{}_{||k||j}\right) v^l + \left(v^l{}_{||j||k} - v^l{}_{||k||j}\right) u^i \\ &= R^i{}_{mjk}\, u^m\, v^l + R^l{}_{mjk}\, u^i\, v^m\ . \end{aligned} \tag{383}$$

Dieses Resultat ist analog zu (378). Allgemein gilt

$$T^{il}{}_{||j||k} - T^{il}{}_{||k||j} \;=\; R^i{}_{mjk}\, T^{ml} + R^l{}_{mjk}\, T^{im}\ . \tag{384}$$

Für kovariante Vektoren ergibt sich in analoger Weise

$$u_{i||j||k} - u_{i||k||j} \;=\; R_{irjk}\, u^r\ . \tag{385}$$

Gradient, Divergenz und Rotation in Riemannschen Räumen

Wir hatten bereits einen Ausdruck für die Divergenz eines kontravarianten Vektorfeldes gefunden.

$$u^i{}_{||i} \;=\; u^i{}_{|i} + \Gamma^i_{ij}\, u^j \;. \tag{386}$$

Wir wollen dieses Ergebnis nun so umformen, daß es keine Christoffel-Symbole mehr enthält. Das Ricci-Theorem führt auf

$$g_{ij||h} \;=\; g_{ij|h} - \Gamma^k_{hi}\, g_{kj} - \Gamma^k_{hj}\, g_{ik} \;=\; 0 \;. \tag{387}$$

Multiplikation und Kontraktion mit g^{ij} liefert

$$g^{ij}\, g_{ij|h} - \Gamma^i_{hi} - \Gamma^j_{hj} \;=\; 0 \;. \tag{388}$$

Damit folgt sofort

$$\Gamma^i_{ih} \;=\; \tfrac{1}{2} g^{ij}\, g_{ij|h} \;. \tag{389}$$

g^{ij} sind die Elemente der inversen Matrix von g_{ij}. Wir können die g^{ij} ausdrücken durch

$$g^{ij} \;=\; \frac{\Delta^{ij}}{g} \tag{390}$$

mit

$$g \;=\; \det(g_{ij}) \;. \tag{391}$$

Δ^{ij} bezeichnet die zugeordnete Unterdeterminante. Die Determinante g können wir durch Entwicklung nach einer Zeile bestimmen. So gilt beispielsweise bei einer Entwicklung nach der dritten Zeile

$$g \;=\; g_{3j}\, \Delta^{3j} \;. \tag{392}$$

Δ^{3j} ist die Determinante derjenigen Matrix, die aus der Matrix (g_{ij}) durch Streichen der 3. Zeile und der j-ten Spalte entsteht. Daraus erkennen wir, daß offensichtlich gilt

$$\frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \;=\; \Delta^{ij} \;. \tag{393}$$

Δ^{ij} ist eine Unterdeterminante von g, die die Variable g_{ij} nicht enthält. Somit haben wir

$$g^{ij} = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \tag{394}$$

und weiter

$$\begin{aligned} \Gamma^i_{ih} &= \tfrac{1}{2}\frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial g_{ij}} \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^h} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^h} = \tfrac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x^h} \log|g| \\ &= \frac{\partial}{\partial x^h} \log\sqrt{-g} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^h} . \end{aligned} \tag{395}$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt natürlich nur, sofern $-g$ positiv ist. Wir setzen das Resultat (395) für das Christoffel-Symbol mit den beiden gleichen Indizes i in den Ausdruck (386) für die Divergenz ein.

$$u^i{}_{||i} = \operatorname{div} u = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left[u^i{}_{|i}\sqrt{-g} + u^j \frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^j}\right] = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(u^i\sqrt{-g}\right)_{|i} . \tag{396}$$

Wir fassen die wesentlichen Resultate zusammen

$$\text{Gradient:} \quad W_{|k} = \frac{\partial}{\partial x^k} W , \tag{397}$$

$$\text{Divergenz:} \quad u^i{}_{||i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(u^i\sqrt{-g}\right)_{|i} , \tag{398}$$

$$\text{Rotation:} \quad w_{i||k} - w_{k||i} = w_{i|k} - w_{k|i} . \tag{399}$$

Für die Wirkung des Laplace-Operators auf das skalare Feld W ergibt sich

$$\nabla^2 W = \operatorname{div}\operatorname{grad} W = \left(g^{ik}\, W_{|k}\right)_{||i} = \frac{1}{\sqrt{-g}}\left(\sqrt{-g}\, g^{ik}\, W_{|k}\right)_{|i} . \tag{400}$$

Mit diesem Formalismus ist es relativ leicht den Laplace-Operator in jedem beliebigen Koordinatensystem auszudrücken. Als Beispiel betrachten wir den dreidimensionalen Raum unter Verwendung von Kugelkoordinaten $r,\ \theta,\ \varphi$. Es gilt

$$ds^2 = dr^2 + r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta\, d\varphi^2 \tag{401}$$

und somit

$$\begin{aligned} g_{11} &= 1 , \\ g_{22} &= r^2 , \\ g_{33} &= r^2 \sin^2\theta . \end{aligned} \tag{402}$$

Für die Determinante g folgt

$$g \;=\; r^4 \sin^2\theta \tag{403}$$

und für die Element der inversen Matrix g^{ij}, die natürlich auch diagonal ist,

$$\begin{aligned} g^{11} &= 1\;, \\ g^{22} &= \frac{1}{r^2}\;, \\ g^{33} &= \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\;. \end{aligned} \tag{404}$$

Da nun g positiv ist, müssen wir im Ausdruck (400) für den Laplace-Operator $\sqrt{-g}$ durch $\sqrt{g}$ ersetzen. Damit bekommen wir schließlich

$$\begin{aligned} \nabla^2 W &= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\sqrt{g}\left(g^{i1}\,\frac{\partial W}{\partial r} + g^{i2}\,\frac{\partial W}{\partial \theta} + g^{i3}\,\frac{\partial W}{\partial \varphi}\right)\right]_{|i} \\ &= \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\sin\theta\,\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{\partial}{\partial\theta}\left(r^2\,\sin\theta\,\frac{1}{r^2}\,\frac{\partial W}{\partial\theta}\right)\right. \\ &\quad \left. + \;\frac{\partial}{\partial\varphi}\left(r^2\,\sin\theta\,\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial W}{\partial\varphi}\right)\right]\;. \end{aligned} \tag{405}$$

Wir fassen zusammen und erhalten das bekannte Ergebnis

$$\nabla^2 W \;=\; \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\,\frac{\partial W}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\,\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial W}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2 W}{\partial\varphi^2} \tag{406}$$

Wir wollen noch einige weitere Untersuchungen bezüglich der Divergenz durchführen. Zunächst betrachten wir wieder Koordinatentransformationen von x^i nach $\bar{x}^i$. Der metrische Tensor transformiert sich dann entsprechend

$$\bar{g}_{ij} \;=\; \frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^l}{\partial \bar{x}^j}\,g_{kl}\;. \tag{407}$$

Daraus ersehen wir, daß sich die Determinante g bei einer Koordinatentransformation verhält wie

$$\bar{g} \;=\; g\,\left(\det\frac{\partial x^k}{\partial \bar{x}^i}\right)^2 \tag{408}$$

und somit

$$\sqrt{-\bar{g}} \;=\; \sqrt{-g}\,\left|\frac{\partial(x^1,\,x^2,\ldots)}{\partial(\bar{x}^1,\,\bar{x}^2,\ldots)}\right|\;, \tag{409}$$

wobei der letzte Faktor das Inverse des Absolutbetrages der Jakobi-Determinante der Koordinatentransformation ist. Wir haben stets die positive Wurzel gezogen.

Wir wissen auch wie sich das differentielle Volumenelement transformiert. In vier Dimensionen gilt

$$dV \;=\; dx_0\, dx_1\, dx_2\, dx_3 \tag{410}$$

sowie

$$d\bar{V} \;=\; \left|\frac{\partial(\bar{x}^1,\, \bar{x}^2, \ldots)}{\partial(x^1,\, x^2, \ldots)}\right|\; dV\ . \tag{411}$$

Dies führt auf das essentielle Resultat

$$\sqrt{-\bar{g}}\, d\bar{V} \;=\; \sqrt{-g}\, dV\ , \tag{412}$$

d.h., $\sqrt{-g}\, dV$ ist ein Skalar.

In einem n-dimensionalen Gebiet G untersuchen wir nun das Integral

$$I \;=\; \int_G (\mathrm{div}\, u)\, (\sqrt{-g}\, dV) \;=\; \int_G u^i{}_{||i}\, \sqrt{-g}\, dV\ . \tag{413}$$

Dieses Integral ist eine skalare Größe. Mit Hilfe der Divergenz-Formel (398) können wir das Integral (413) schreiben als

$$I \;=\; \int_G \left(u^i\, \sqrt{-g}\right)_{|i}\, dV\ . \tag{414}$$

Die Integration führt auf

$$I \;=\; \sum_i \int_{\text{Grenzfläche}} u^i\, \sqrt{-g}\, dx^1\, \ldots\, dx^{i-1}\, dx^{i+1}\, \ldots\, dx^n\ . \tag{415}$$

Dieses Integral läßt sich als Fluß des Vektors u^i durch die Grenzfläche des Gebiets G interpretieren. Dies ist der Gaußsche Integralsatz für Riemannsche Räume.

Die Einstein-Gleichungen für den freien Raum

Wir wollen nun die Einsteinschen Feldgleichungen für den freien Raum ableiten, d.h., es soll ein Satz von Differentialgleichungen in Tensorform abgeleitet werden, der das Gravitationsfeld im freien Raum beschreibt. Diese Differentialgleichungen müssen den Kriterien genügen, die wir bereits diskutiert haben.

Die gesuchten Feldgleichungen sollten in irgendeiner Form den Riemannschen Krümmungstensor beinhalten, da er einen großen Teil der Information über die Geometrie des Raumes trägt. Wir wissen bereits, daß der gravitationsfreie Raum mit einer Lorentz-Metrik durch die Gleichungen $R_{ijkl} = 0$ richtig beschrieben wird. R_{ijkl} ist jedoch ein Tensor mit 256 Komponenten, der aufgebaut ist aus dem symmetrischen g_{ik}-Tensor mit 10 unabhängigen Komponenten. Genau diese 10 unabhängigen Komponenten des g_{ik}-Tensors sollen die Lösungen der Feldgleichungen sein. In der Tat werden wir noch beweisen, daß letztlich die Feldgleichungen 10 gekoppelte Differentialgleichungen sind. Ferner stellen wir fest, daß die Gleichungen $R_{ijkl} = 0$ eine sehr strenge Bedingung darstellt, die nur für den flachen Raum Gültigkeit hat. Diese Bedingung sollte etwas abgeschwächt werden, um auch Gravitationsphänomene im freien Raum beschreiben zu können.

Zur Ableitung der Feldgleichungen lassen wir uns wieder von der klassischen Gravitationsgleichung für den freien Raum, der Laplace-Gleichung, leiten

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^{i2}} = \sum_{i=1}^{3} \varphi_{|i|i} = 0 . \tag{416}$$

Wir haben bereits nachgewiesen, daß das Newtonsche Gesetz und die Geodätengleichung für ein schwaches Gravitationsfeld näherungsweise die selbe Trajektorie liefert, wenn für die g_{00}-Komponente gilt

$$g_{00} = 1 + \frac{2\varphi}{c^2} \tag{417}$$

und somit

$$\varphi = \frac{c^2}{2}(g_{00} - 1) . \tag{418}$$

Damit lautet die Laplace-Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3} g_{00|i|i} = 0 . \tag{419}$$

Dies muß eine Näherungsform der relativistischen Feldgleichung sein. In einer kovarianten Tensorgleichung ist das Analogon zu einer Summation über i die Kontraktion. Wir wollen die Gleichung $R_{ijkl} \;=\; 0$ kontrahieren. Dazu gehen wir von den folgenden Behauptungen aus, die wir etwas später im einzelnen beweisen werden:

Beh. (1): R_{ijkl} ist antisymmetrisch in i und j. $R_{ijkl} = -R_{jikl}$.
Beh. (2): R_{ijkl} ist antisymmetrisch in k und l. $R_{ijkl} = -R_{ijlk}$.
Beh. (3): $R_{ijkl} = R_{klij}$.
Beh. (4): R_{ijkl} hat 20 unabhängige Komponenten.

Aus Behauptung (1) und (2) folgt, daß eine Kontraktion zwischen i und j und zwischen k und l die triviale Nullidendität ergibt. Wir führen die Kontraktion zwischen i und k durch

$$R^i{}_{jil} \;=\; 0 \;. \tag{420}$$

Die Kontraktion zwischen i und l liefert aufgrund der Behauptung (2)

$$R^i{}_{jki} \;=\; -R^i{}_{jik} \;=\; 0 \;. \tag{421}$$

Dies ist bis auf das Gesamtvorzeichen die Gleichung (420). Die Kontraktion zwischen j und l liefert aufgrund der Behauptungen (1) und (2) das Gleiche wie die Gleichung (420). Die einzig sinnvolle Kontraktion lautet damit

$$R^i{}_{jil} \;\equiv\; R_{jl} \;=\; 0 \;. \tag{422}$$

Dies sind die Einstein-Gleichungen für den freien Raum. Wir schreiben sie ausführlich aus

$$R_{jl} \;=\; \Gamma^i_{ji|l} - \Gamma^i_{jl|i} + \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{ji} - \Gamma^i_{mi}\Gamma^m_{jl} \;=\; 0 \;. \tag{423}$$

Wir verwenden die Definition des Christoffel-Symbols

$$\Gamma^i_{jl} \;=\; \tfrac{1}{2}g^{im}\;\left(g_{jm|l} + g_{lm|j} - g_{jl|m}\right) \tag{424}$$

und erkennen damit die ausführliche Struktur der Einstein-Gleichungen

$$\begin{aligned} R_{jl} \;\; = \;\; & \tfrac{1}{2}\left\{g^{im}\;\left(g_{jm|i} + g_{mi|j} - g_{ji|m}\right)\right\}_{|l} \\ & - \tfrac{1}{2}\left\{g^{im}\;\left(g_{jm|l} + g_{ml|j} - g_{jl|m}\right)\right\}_{|i} \\ & + \text{Terme in 1. Ableitungen von } g_{ij} \;=\; 0 \;. \end{aligned} \tag{425}$$

Unter Verwendung der Behauptung (3) führen wir die folgende Umformung durch

$$R_{mk} \;=\; R^{i}{}_{mik} \;=\; g^{ij}\, R_{jmik} \;=\; g^{ij}\, R_{ikjm} \;=\; R^{j}{}_{kjm} \;=\; R_{km}\;. \tag{426}$$

Damit erkennen wir, daß der kontrahierte Riemann-Tensor symmetrisch ist. Damit folgt weiter, daß das Gleichungssystem (423) ein System von 10 unabhängigen Gleichungen darstellt.

Es verbleibt die Aufgabe, die Behauptungen (1) - (4) zu beweisen. Die Lösungen von (423) liefern die Komponenten g_{ik}. Mit der Kenntnis der g_{ik}-Komponenten können wir durch Lösung der Geodätengleichung die Trajektorie eines Teilchens bestimmen.

Symmetrieeigenschaften des Riemannschen Krümmungstensors

Für den Riemannschen Krümmungstensor hatten wir den folgenden Ausdruck abgeleitet

$$R^i{}_{jkl} \;=\; \Gamma^i_{kj|l} - \Gamma^i_{jl|k} + \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{kj} - \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{lj} \;. \tag{427}$$

Wir vertauschen die beiden letzten Indizes

$$R^i{}_{jlk} \;=\; \Gamma^i_{lj|k} - \Gamma^i_{jk|l} + \Gamma^i_{mk}\Gamma^m_{lj} - \Gamma^i_{ml}\Gamma^m_{kj} \;. \tag{428}$$

Der Vergleich dieser beiden Gleichungen zeigt sofort

$$R^i{}_{jkl} \;=\; -R^i{}_{jlk} \;, \tag{429}$$

wobei wir nur von der Symmetrie der Christoffel-Symbole in den unteren Indizes Gebrauch gemacht haben. Damit ist auch die Behauptung (2) des vorangegangenen Kapitels bewiesen. Der kl-Unterblock hat damit anstatt 16 nur 6 unabhängige Komponenten. Zusammen mit den 16 Komponenten des ij-Unterblocks haben wir nur noch höchstens 96 unabhängige Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors vorliegen.

Als nächstes wollen wir den Beweis der Behauptung (1) des vorangegangenen Kapitels erbringen. Dazu betrachten wir ein beliebiges Vektorfeld u und das Quadrat der Länge

$$\varphi \;=\; g_{mn}\, u^m\, u^n \;. \tag{430}$$

φ ist ein Skalar, daher gibt es auch keinen Unterschied zwischen der gewöhnlichen und der kovarianten Ableitung

$$\varphi_{||k} \;=\; \varphi_{|k} \;. \tag{431}$$

Für die zweite Ableitung folgt

$$\varphi_{||k||l} - \varphi_{||l||k} \;=\; \varphi_{|k|l} - \varphi_{|l|k} \;=\; 0 \;. \tag{432}$$

Nun gilt aber auch

$$\varphi_{||k} \;=\; g_{mn}\, u^m{}_{||k}\, u^n + g_{mn}\, u^m\, u^n{}_{||k} \;=\; 2\, g_{mn}\, u^m\, u^n{}_{||k} \;. \tag{433}$$

Hier haben wir vom Ricci-Theorem und von der Symmetrie der g_{mn}-Koeffizienten Gebrauch gemacht. Es folgt weiter

$$\varphi_{||k||l} \;=\; 2\, g_{mn}\, u^m{}_{||l}\, u^n{}_{||k} + 2\, g_{mn}\, u^m\, u^n{}_{||k||l} \tag{434}$$

und somit

$$\varphi_{||k||l} - \varphi_{||l||k} \;=\; 2\, g_{mn}\, u^m \left(u^n{}_{||k||l} - u^n{}_{||l||k} \right) \;=\; 0 \;. \tag{435}$$

Den Ausdruck in der Klammer können wir mit Hilfe des Riemannschen Krümmungstensors umschreiben. Damit erhalten wir

$$\varphi_{||k||l} - \varphi_{||l||k} \;=\; 2\, u_i\, R^i{}_{jkl}\, u^j \;=\; 0 \;. \tag{436}$$

Es gilt also für ein beliebiges Vektorfeld

$$R_{ijkl}\, u^j\, u^i \;=\; 0 \;. \tag{437}$$

Bei einem gegebenen, fixierten Punkt im Riemannschen Raum wählen wir den beliebigen Vektor u als Einheitsvektor mit der i_0-Komponente gleich 1. Alle anderen Komponenten sollen verschwinden. Daraus resultiert offensichtlich

$$R_{i_0 i_0 kl} \;=\; 0 \;. \tag{438}$$

Es muß betont werden, daß i_0 kein Summationsindex ist. Somit wissen wir bereits, daß die Diagonalterme des Unterblocks der ersten beiden Indizes des Riemannschen Krümmungstensors verschwinden. In (437) können wir die Summation auch ausdrücken durch

$$R_{ijkl}\, u^i\, u^j \;=\; \tfrac{1}{2} \left(R_{ijkl} + R_{jikl} \right)\, u^i\, u^j \;=\; 0 \;. \tag{439}$$

Nun wählen wir u so, daß der Vektor die beiden nichtverschwindenden Komponenten u^{i_0} und u^{j_0} hat. Beide Komponenten seien gleich 1. Damit ergibt sich

$$R_{i_0 j_0 kl} + R_{j_0 i_0 kl} \;=\; 0 \;. \tag{440}$$

Da i_0 und j_0 nun zwei beliebige Komponenten sein können, folgt daraus die Antisymmetrie-Beziehung

$$R_{ijkl} \;=\; -R_{jikl} \;. \tag{441}$$

Wir haben damit 6 unabhängige Komponenten im ij-Unterblock. Dies ergibt insgesamt höchstens $6 \cdot 6 = 36$ unabhängige Komponenten für den Riemannschen Krümmungstensor.

Wir wenden uns nun der Behauptung (3) zu. Wir definieren einen antisymmetrisierten Tensor durch

$$\{A_{ik}\} \;=\; \frac{1}{2}\left(A_{ik} - A_{ki}\right) \;, \tag{442}$$

$$\{A_{ikl}\} \;=\; \frac{1}{3!}\left(A_{ikl} - A_{kil} + A_{kli} - A_{ilk} + A_{lik} - A_{lki}\right) \;. \tag{443}$$

Es liegt also ein Vorzeichenwechsel bei einer ungeraden Permutation der Indizes vor. Ein weiteres Beispiel für einen antisymmetrischen Tensor ist einfach

$$T_{ikl} \;=\; -T_{kil} \;=\; T_{kli} \;. \tag{444}$$

Hingegen gilt für einen symmetrischen Tensor

$$T_{ikl} \;=\; T_{kil} \;=\; T_{lik} \;. \tag{445}$$

Die Symmetrie bzw. Antisymmetrie eines Tensors sind intrinsische Eigenschaften eines Tensors, die sich bei einem Wechsel des Koordinatensystems nicht ändern. Aus

$$\bar{T}_{ik} \;=\; \frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\,\frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}\,T_{mn} \;, \tag{446}$$

$$\bar{T}_{ki} \;=\; \frac{\partial x^n}{\partial \bar{x}^k}\,\frac{\partial x^m}{\partial \bar{x}^i}\,T_{nm} \tag{447}$$

folgt jeweils mit

$$T_{mn} \;=\; T_{nm} \quad\longrightarrow\quad \bar{T}_{ik} \;=\; \bar{T}_{ki} \;, \tag{448}$$

$$T_{mn} \;=\; -T_{nm} \quad\longrightarrow\quad \bar{T}_{ik} \;=\; -\bar{T}_{ki} \;. \tag{449}$$

In einem dreidimensionalen Raum hat ein antisymmetrischer Tensor vom Rang 2 nur 3 unabhängige Komponenten, die mit einem Vektor assoziiert werden können. Gehen wir von den beliebigen Vektoren u^i und v^k aus und bilden den antisymmetrischen Tensor $u^i\,v^k - u^k\,v^i$, so entspricht dies gerade dem Vektorprodukt oder Kreuzprodukt der beiden Vektoren. Wir haben bereits mehrfach auf den Sachverhalt hingewiesen, daß im vierdimensionalen Raum ein symmetrischer Tensor vom Rang 2 nur 10 unabhängige Komponenten aufweist. Ein antisymmetrischer Tensor vom Rang 2 hat sogar nur 6 unabhängige Komponenten.

Wir machen einige weitere Bemerkungen zur Antsymmetrisierung. Die Antisymmetrisierung ist eine lineare Operation, d.h.,

$$\{A_{ikl} + B_{ikl}\} \;=\; \{A_{ikl}\} + \{B_{ikl}\} \;. \tag{450}$$

Wir hatten bei der Diskussion der Rotation gezeigt, daß bei der Antisymmetrisierung kovariante und gewöhnliche Ableitung dasselbe Ergebnis liefern. Genauso läßt sich das allgemeinere Theorem beweisen

$$\left\{A_{ikl||m}\right\} = \left\{A_{ikl|m}\right\} . \tag{451}$$

Dabei ist zu betonen, daß hierbei von vollständig kovarianten Tensoren ausgegangen werden muß. Als weiteren Punkt betrachten wir einen Skalar W und dessen kovariante Ableitung, den Gradienten $W_{|k}$. Die Antisymmetrisierung dieser Größe liefert aufgrund des einen Index wieder die ursprüngliche Größe. Wir antisymmetrisieren die kovariante Ableitung des Gradienten und erhalten

$$\left\{W_{|k|l}\right\} = \frac{1}{2}\left(W_{|k|l} - W_{|l|k}\right) = 0 . \tag{452}$$

Damit haben wir schlicht und einfach gefunden: rot grad $W = 0$. Es liegt also die Sequenz vor

$$W; \quad W_{|k}; \quad \left\{W_{|k|l}\right\} = 0 . \tag{453}$$

Genau die gleiche Studie führen wir jetzt mit einem Tensor vom Rang $q = 1$ durch. Dazu gehen wir von einem kovarianten Vektor u_i aus. Wir bilden die kovariante Ableitung und antisymmetrisieren wieder.

$$\left\{u_{i||k}\right\} = \left\{u_{i|k}\right\} = \frac{1}{2}\left(u_{i|k} - u_{k|i}\right) . \tag{454}$$

Dies ist proportional zur Rotation des Vektors u_i. Wir bilden nun die kovariante Ableitung der Rotation und antisymmetrisieren.

$$\begin{aligned}\left\{\left\{u_{i||k}\right\}_{||l}\right\} &= \left\{\left\{u_{i||k}\right\}_{|l}\right\} = \frac{1}{2}\left\{\left(u_{i|k} - u_{k|i}\right)_{|l}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left[\left\{u_{i|k|l}\right\} - \left\{u_{k|i|l}\right\}\right] .\end{aligned} \tag{455}$$

Für diesen antisymmetrischen Tensor gilt aber

$$\left\{u_{i|k|l}\right\} = -\left\{u_{k|i|l}\right\} . \tag{456}$$

Damit folgt

$$\left\{\left\{u_{i|k}\right\}_{|l}\right\} = \left\{u_{i|k|l}\right\} . \tag{457}$$

Da wir die Reihenfolge der gewöhnlichen Ableitung vertauschen können, folgt aus

$$u_{i|k|l} = u_{i|l|k} \tag{458}$$

das Resultat

$$\left\{u_{i|k|l}\right\} \;=\; \left\{u_{i|l|k}\right\} \;. \tag{459}$$

Eine zyklische Permutation der Indizes läßt aber einen antisymmetrischen Ausdruck invariant

$$\left\{u_{i|k|l}\right\} \;=\; \left\{u_{k|i|l}\right\} \;. \tag{460}$$

Die Antisymmetrie in i und k implizierte

$$\left\{u_{i|k|l}\right\} \;=\; -\left\{u_{k|i|l}\right\} \;. \tag{461}$$

Vergleichen wir die letzten beiden Gleichungen, so finden wir

$$\left\{u_{i|k|l}\right\} \;=\; -\left\{\left\{u_{i|k}\right\}_{|l}\right\} \;=\; 0 \;, \tag{462}$$

d.h., die zweite antisymmetrisierte Ableitung liefert den Null-Tensor.

Um eine weitere wichtige Symmetrieeigenschaft des Riemannschen Krümmungstensors abzuleiten, betrachten wir den folgenden antisymmetrisierten Tensor

$$\left\{u_{i||k||l} - u_{k||i||l}\right\} \;=\; 2\left\{\left\{u_{i||k}\right\}_{||l}\right\} \;, \tag{463}$$

der aus einem beliebigen Vektor u_i gebildet wird. Aufgrund der Eigenschaft (451) können wir die kovariante Ableitung durch die gewöhnliche Ableitung ersetzen.

$$\left\{u_{i||k||l} - u_{k||i||l}\right\} \;=\; 2\left\{\left\{u_{i|k}\right\}_{|l}\right\} \;. \tag{464}$$

Mit dem Resultat (462) erhalten wir

$$\left\{u_{i||k||l} - u_{k||i||l}\right\} \;=\; 0 \;. \tag{465}$$

Wir führen eine zyklische Permutation der Indizes des zweiten Terms durch. Dies führt zu keiner Änderung des Resultates.

$$\left\{u_{i||k||l} - u_{i||l||k}\right\} \;=\; 0 \;. \tag{466}$$

Dies läßt sich aber auch mit Hilfe des Riemannschen Krümmungstensors ausdrücken

$$\left\{u_{i||k||l} - u_{i||l||k}\right\} \;=\; \left\{R_{ijkl}\, u^j\right\} \;=\; 0 \;. \tag{467}$$

Wir führen eine neue Notation ein,

$$\left\{R_{ijkl}\, u^j\right\}_{(i,k,l)} \;=\; 0 \;. \tag{468}$$

Dies bedeutet, daß nur die Indizes i, k und l in die Antisymmetrisierungsprozedur eingeschlossen sind, nicht aber der Summationsindex j. Damit können wir auch schreiben

$$\left\{R_{ijkl}\, u^j\right\}_{(i,k,l)} \;=\; \{R_{ijkl}\}_{(i,k,l)}\; u^j \;=\; 0\;. \tag{469}$$

Da aber u^j beliebig ist, haben wir

$$\{R_{ijkl}\}_{(i,k,l)} \;=\; 0\;. \tag{470}$$

Umbennung der Indizes liefert

$$\{R_{jikl}\}_{(j,k,l)} \;=\; 0\;. \tag{471}$$

Wir schreiben die beiden letzten Gleichungen aus, wobei wir von den Behauptungen (1) und (2) Gebrauch machen, d.h., von der Antisymmetrie zwischen dem ersten und zweiten bzw. zwischen dem dritten und vierten Index. Wir erhalten

$$R_{ijkl} + R_{kjli} + R_{ljik} \;=\; 0\;, \tag{472}$$

$$R_{jikl} + R_{kilj} + R_{lijk} \;=\; 0\;. \tag{473}$$

Wir subtrahieren beide Gleichungen voneinander unter Berücksichtigung der Antisymmetrie in den ersten beiden Indizes. Es folgt

$$2\,R_{ijkl} + R_{kjli} + R_{ljik} - R_{kilj} - R_{lijk} \;=\; 0 \tag{474}$$

oder äquivalent

$$2\,R_{ijkl} - R_{jkli} - R_{jlik} - R_{ikjl} - R_{ilkj} \;=\; 0 \tag{475}$$

oder

$$2\,R_{ijkl} - (R_{jkli} + R_{ikjl}) - (R_{jlik} + R_{ilkj}) \;=\; 0\;. \tag{476}$$

In (472) und in (473) benennen wir die Indizes um (in (472) $k \leftrightarrow j$ und in (473) $i \to l$, $k \to i, l \to k$). Dies ergibt

$$R_{jkli} + R_{ikjl} \;=\; -R_{lkij}\;, \tag{477}$$

$$R_{jlik} + R_{ilkj} \;=\; -R_{klji}\;. \tag{478}$$

Diese beiden Gleichungen können wir in den Gleichungen darüber einsetzen.

$$2\,R_{ijkl} + R_{lkij} + R_{klji} \;=\; 0\;. \tag{479}$$

Wir nutzen jetzt die Antisymmetrie in den ersten beiden und in den letzten beiden Indizes aus. Daraus ersieht man, daß die beiden letzten Terme gleich sind und somit haben wir

$$2\,(R_{ijkl} + R_{lkij}) \;=\; 0 \;=\; 2\,(R_{ijkl} - R_{klij}) \;. \tag{480}$$

Schließlich folgt daraus die Behauptung (3)

$$R_{ijkl} \;=\; R_{klij} \;. \tag{481}$$

Aufgrund dieser Symmetrierelation bleiben von den maximal 6·6 = 36 unabhängigen Komponenten nur noch maximal 21 unabhängige Komponenten übrig.

Wir wenden uns abschließend der vierten Behauptung zu. In (470) ist noch eine weitere Symmetrierelation enthalten, die die Zahl der unabhängigen Komponenten des Riemannschen Krümmungstensors letztlich auf 20 reduziert. Wir betrachten hierzu die Komponente R_{0123} des Riemannschen Tensors. Es gibt 4! = 24 Permutationen der Indizes. Wenn wir jedoch die bis jetzt bewiesenen Symmetrierelationen betrachten, so bleiben jeweils die Indizes 0 und 1, bzw. 2 und 3 benachbart. Daher können alle Komponenten aus der Basis $R_{0123},\ R_{0231},\ R_{0312}$ aufgebaut werden. Aber aus (473) folgt

$$R_{1023} + R_{2031} + R_{3012} \;=\; 0 \;. \tag{482}$$

Dies stellt eine weitere Relation innerhalb des Basissystems dar. Damit ist auch die Behauptung (4) bewiesen.

Eine divergenzfreie Form der Einstein-Gleichung

Auf dem Weg zu einer divergenzfreien Form der Einstein-Gleichung müssen wir zunächst eine nützliche Identdität beweisen, die sogenannte Bianchi-Idendität. Wir stellen die Behauptung auf

$$\Big\{R_{ijkl||m}\Big\}_{(k,l,m)} \;=\; 0 \;. \tag{483}$$

Wir werden die bereits bewiesenen Symmetrie-Relationen des Riemann-Tensors verwenden, um eine Symmetrie-Relation bezüglich der kovarianten Ableitung des Riemann-Tensors abzuleiten. Wir gehen aus von

$$u^i{}_{||k||l} - u^i{}_{||l||k} \;=\; R^i{}_{jkl}\, u^j \tag{484}$$

und erniedrigen den Index i

$$u_{i||k||l} - u_{i||l||k} \;=\; R_{ijkl}\, u^j \;. \tag{485}$$

Wir nutzen die Produktregel der kovarianten Ableitung aus und erhalten

$$\Big(u_{i||k||l} - u_{i||l||k}\Big)_{||m} \;=\; R_{inkl||m}\, u^n + R_{inkl}\, u^n{}_{||m} \;. \tag{486}$$

Wir antisymmetrisieren diesen Ausdruck bezüglich der Indizes $k,\; l$ und m.

$$\Big\{u_{i||k||l||m} - u_{i||l||k||m}\Big\}_{(k,l,m)} \;=\; \Big\{R_{inkl||m}\Big\}_{(k,l,m)}\; u^n + \Big\{R_{inkl}\, u^n{}_{||m}\Big\}_{(k,l,m)} \tag{487}$$

Wir führen auf der linken Seite eine gerade Permutation der Indizes $k,\; l$ und m durch

$$\Big\{\Big(u_{i||m}\Big)_{||k||l} - \Big(u_{i||m}\Big)_{||l||k}\Big\}_{(k,l,m)} \;=\; \Big\{R_{inkl||m}\Big\}_{(k,l,m)}\; u^n + \Big\{R_{inkl}\, u^n{}_{||m}\Big\}_{(k,l,m)} \;. \tag{488}$$

Der Tensor $u_{i||m}$ erscheint in beiden Termen auf der linken Seite. Wir verwenden jetzt die bereits bewiesene Gleichung

$$T^{im}{}_{||k||l} - T^{im}{}_{||l||k} \;=\; R^i{}_{nkl}\, T^{nm} + R^m{}_{nkl}\, T^{in} \;. \tag{489}$$

Wir ziehen die Indizes i und m runter. Dies führt zu

$$\Big(u_{i||m}\Big)_{||k||l} - \Big(u_{i||m}\Big)_{||l||k} \;=\; R_{inkl}\, u^n{}_{||m} + R_{mnkl}\, u_i{}^{||n} \;, \tag{490}$$

wobei

$$u_i{}^{||n} \;=\; g^{nr}\, u_{i||r} \tag{491}$$

die kontravariante Form von $u_{i||n}$ ist. Wir antisymmetrisieren und erhalten eine alternative Form zu (488)

$$\left\{\left(u_{i||m}\right)_{||k||l} - \left(u_{i||m}\right)_{||l||k}\right\}_{(k,l,m)} \;=\; \left\{R_{inkl}\, u^{n}{}_{||m}\right\}_{(k,l,m)} + \;\{R_{mnkl}\}_{(k,l,m)}\, u_i{}^{||n} \;. \tag{492}$$

Wir vergleichen dies mit (488) und erhalten somit

$$\left\{R_{inkl||m}\right\}_{(k,l,m)}\; u^n \;=\; \{R_{mnkl}\}_{(k,l,m)}\, u_i{}^{||n} \;=\; 0 \tag{493}$$

Hierbei haben wir ausgenutzt, daß gilt $\{R_{mnkl}\}_{(k,l,m)} \;=\; 0$. Da u^n eine beliebiger Vektor ist, haben wir schließlich

$$\left\{R_{inkl||m}\right\}_{(k,l,m)} \;=\; 0\;. \tag{494}$$

Damit ist die aufgestellte Behauptung bewiesen.

Es ist oftmals sehr ästhetisch, Gleichungen in divergenzfreier Form darzustellen, da divergenzfreie Größen in der Physik zumeist einen Erhaltungssatz wiederspiegeln. So ist beispielsweise die Divergenz des Viererstroms in der Elektrodynamik direkt verknüpft mit der Erhaltung der Ladung. Um nun die Einstein-Gleichungen in eine divergenzfreie Form zu bringen, gehen wir aus von der Bianchi-Idendität und erhöhen die ersten beiden Indizes.

$$\left\{R^{in}{}_{kl||m}\right\}_{(k,l,m)} \;=\; 0 \;=\; R^{in}{}_{kl||m} + R^{in}{}_{lm||k} + R^{in}{}_{mk||l}\;. \tag{495}$$

Dabei haben wir die Indizes zyklisch vertauscht und die Antisymmetrie-Eigenschaften des Riemann-Tensors ausgenutzt. Wir kontrahieren nun i mit k und n mit l. Dies ergibt

$$R^{in}{}_{in||m} + R^{in}{}_{nm||i} + R^{in}{}_{mi||n} \;=\; 0\;. \tag{496}$$

Wir verwenden nun die Definition des kontrahierten Riemannschen Tensors und nutzen die Symmetrie-Eigenschaften des Riemannschen Tensors aus.

$$R^{n}{}_{n||m} - R^{i}{}_{m||i} - R^{n}{}_{m||n} \;=\; 0\;. \tag{497}$$

Im zweiten Term benennen wir um $i \to k$ und im dritten Term $n \to k$. Dies ergibt

$$R^{n}{}_{n||m} \;=\; 2\, R^{k}{}_{m||k}\;. \tag{498}$$

Wir bezeichnen den doppelt kontrahierten Riemannschen Tensor $R^{n}{}_{n}$ mit R. R ist der Riemann-Skalar.

$$R^{n}{}_{n} \;\equiv\; R\;. \tag{499}$$

Damit gilt

$$\tfrac{1}{2}R_{||m} \;=\; \tfrac{1}{2}g^{k}{}_{m}\,R_{||k} \;=\; R^{k}{}_{m||k}\;. \tag{500}$$

Wenn beide Indizes in kontravarianter Position sind haben wir

$$R^{km}{}_{||k} \;=\; \tfrac{1}{2}\left(g^{km}\,R\right)_{||k} \tag{501}$$

Hierbei haben wir wieder das Ricci-Theorem ausgenutzt. Daher hat der Ricci-Tensor, definiert durch

$$G^{km} \;\equiv\; R^{km} - \tfrac{1}{2}\,g^{km}\,R\;, \tag{502}$$

eine verschwindende Divergenz

$$G^{km}{}_{||k} \;=\; 0\;. \tag{503}$$

Angenommen der kontrahierte Riemann-Tensor erfüllt die Gleichung für den freien Raum

$$R^{km} \;=\; 0\;, \tag{504}$$

so folgt sofort $R \;=\; 0$ und damit auch

$$G^{km} \;=\; R^{km} - \tfrac{1}{2}\,g^{km}\,R \;=\; 0\;. \tag{505}$$

Gilt auf der anderen Seite $G^{km} \;=\; 0$, so folgt auch

$$G^{k}{}_{m} \;=\; R^{k}{}_{m} - \tfrac{1}{2}\,g^{k}{}_{m}\,R \;=\; 0\;. \tag{506}$$

Wir kontrahieren und finden

$$G^{k}{}_{k} \;=\; R - \tfrac{1}{2}\,g^{k}{}_{k}\,R \;=\; R - 2R \;=\; -R \;=\; 0\;. \tag{507}$$

Der Riemann-Skalar verschwindet also. Damit folgt weiter

$$R^{k}{}_{m} \;=\; G^{k}{}_{m} + \tfrac{1}{2}\,g^{k}{}_{m}\,R \;=\; 0\;. \tag{508}$$

Wir schlußfolgern also, $G^{k}{}_{m}$ ist dann und nur dann null, wenn $R^{k}{}_{m}$ null ist.

Damit können wir die Einsteinschen Feldgleichungen für den freien Raum mit Hilfe des divergenzfreien Ricci-Tensors ausdrücken

$$G^{k}{}_{m} \;=\; R^{k}{}_{m} - \tfrac{1}{2}\,g^{k}{}_{m}\,R \;=\; 0\;. \tag{509}$$

Der Energie-Impuls Tensor

Im Fall schwacher Gravitationsfelder reduziert sich die Einstein-Gleichung auf die Laplace-Gleichung bezüglich des Gravitationspotentials φ

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_{|i|i} \;=\; 0\;. \tag{510}$$

Im nichtleeren Raum gilt im Rahmen der klassischen Mechanik die Poisson-Gleichung

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_{|i|i} \;=\; 4\pi\kappa\,\rho\;. \tag{511}$$

Hierbei bezeichnet κ die Gravitationskonstante und ρ die Massendichte im Raum. Als Lösung für φ folgt

$$\varphi(\vec{x}) \;=\; -\kappa \int \frac{\rho(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\, d^3x'\;. \tag{512}$$

Dies ist eine direkte Folge der Relation

$$\nabla^2 \int \frac{\rho(\vec{x}\,')}{|\vec{x}-\vec{x}\,'|}\, d^3x' \;=\; -4\pi\rho(\vec{x})\;. \tag{513}$$

Wir wollen nun anstreben, analoge relativistische Feldgleichungen zu finden. Wegen $E \;=\; mc^2$ müssen wir in einer relativistischen Theorie den gesamten Energieinhalt berücksichtigen und können uns nicht nur auf die Masse oder die Ruheenergie beschränken. Zu diesem Zweck werden wir den Energie-Impuls Tensor T^{ij} einführen, der die Dimension [Masse/Länge^3] besitzt. Als Verallgemeinerung der klassischen Gleichung suchen wir nun eine Tensorgleichung, wobei die Tensoren den Rang 2 haben, mit der allgemeinen Grundstruktur: Ein Tensor, der die Geometrie des Raumes beschreibt, soll einem Tensor entsprechen, der den Energieinhalt des Raumes repräsentiert. Im Fall schwacher Felder sollen die relativistischen Feldgleichungen in die klassischen Feldgleichungen übergehen. Falls die Energiedichte im Raum verschwindet, soll sich ferner die gesuchte Gleichung auf die bereits abgeleitete Einstein-Gleichung für den freien Raum reduzieren.

Wir beginnen unsere Untersuchungen mit einigen Betrachtungen, die für einen flachen Raum gültig sind. Wir führen die Vierer-Flußgeschwindigkeit $u^i(x)$ sowie die skalare Massendichte $\rho_0(x)$ im mitbewegten System ein. Der einfachste Tensor vom Rang 2, der daraus konstruiert werden kann, lautet

$$T^{ij} \;=\; \rho_0(x)\, u^i(x)\, u^j(x) \tag{514}$$

mit

$$u^i \;=\; \frac{dx^i}{ds}\,. \tag{515}$$

Der Tensor (514) beschreibt als einfachsten Fall ein nichtwechselwirkendes, inkohärentes Materiefeld. Wir verwenden die üblichen Koordinaten $(ct,\, x,\, y,\, z)$ aus der speziellen Relativitätstheorie. Damit können wir die T^{00}-Komponente des Energie-Impuls Tensors schreiben als

$$T^{00} \;=\; \rho_0\, \frac{dx^0}{ds}\, \frac{dx^0}{ds} \;=\; c^2\, \rho_0 \left(\frac{dt}{ds}\right)^2 . \tag{516}$$

Nun gilt

$$ds^2 \;=\; c^2\, dt^2 - (dx^2 + dy^2 + dz^2) \;=\; c^2\, dt^2 \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \tag{517}$$

und damit

$$\frac{ds}{dt} \;=\; c \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \;=\; \frac{c}{\gamma}\,. \tag{518}$$

Dies ergibt schließlich

$$T^{00} \;=\; \gamma^2\, \rho_0\,. \tag{519}$$

Die Proportionalität von T^{00} zu γ^2 ist leicht zu verstehen. Relativistisch wächst die effektive Masse mit dem Faktor γ an, gleichzeitig verringert sich das Volumen aufgrund der Lorentz-Kontraktion um denselben Faktor. Durch die Quotientenbildung erhalten wir das Resultat (519).

Wir betrachten nun die Komponenten T^{kl}, wobei k und l nur die Werte 1, 2 oder 3 annehmen können. Es folgt

$$T^{0k} \;=\; \rho_0\, \frac{dx^0}{ds}\, \frac{dx^k}{ds} \;=\; \rho_0\, c\, \frac{dt}{ds}\, \frac{dx^k}{dt}\, \frac{dt}{ds}\,. \tag{520}$$

Mit

$$v^k \;=\; \frac{dx^k}{dt} \tag{521}$$

folgt

$$T^{0k} \;=\; \rho_0\, \gamma^2\, \frac{v^k}{c} \;=\; \rho\, \frac{v^k}{c}\,. \tag{522}$$

Ebenso erhalten wir

$$T^{kl} \;=\; \rho_0 \, \frac{dx^k}{ds} \, \frac{dx^l}{ds} \;=\; \rho_0 \, \gamma^2 \, \frac{v^k \, v^l}{c^2} \;=\; \rho \, \frac{v^k \, v^l}{c^2} \; . \tag{523}$$

Damit kann der gesamte Energie-Impuls Tensor dargestellt werden als

$$T^{ij} \;=\; \rho \, \begin{pmatrix} 1 & v_x/c & v_y/c & v_z/c \\ v_x/c & v_x^2/c^2 & v_x v_y/c^2 & v_x v_z/c^2 \\ v_y/c & v_y v_x/c^2 & v_y^2/c^2 & v_y v_z/c^2 \\ v_z/c & v_z v_x/c^2 & v_z v_y/c^2 & v_z^2/c^2 \end{pmatrix} \; . \tag{524}$$

Der Energie-Impuls Tensor ist ebenso wie der Ricci-Tensor G^{ij} symmetrisch. Führen wir den gleichen Grad der Approximation wie bei der Diskussion ”Gravitation als metrisches Problem“ durch, nämlich $|\vec{v}| \ll c$, so folgt einfach $T^{00} = \rho_0$.

Wir betrachten nun die Divergenz des Energie-Impuls Tensors. Speziel untersuchen wir

$$T^{0i}{}_{|i} \;=\; \frac{1}{c} \, \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{c} \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] \; . \tag{525}$$

In dreidimensionaler Vektornotation lautet dies

$$T^{0i}{}_{|i} \;=\; \frac{1}{c} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \right] \; . \tag{526}$$

Die rechte Seite entspricht gerade der Kontinuitätsgleichung der klassischen Hydrodynamik,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \rho \vec{v} \;=\; 0 \; , \tag{527}$$

die letztlich die Massen- oder Energieerhaltung wiederspiegelt. Somit gilt also

$$T^{0i}{}_{|i} \;=\; 0 \; . \tag{528}$$

Als nächstes untersuchen wir die Divergenz von T^{1i}. Wir bekommen

$$\begin{aligned} T^{1i}{}_{|i} \;&=\; \frac{1}{c^2} \left[\frac{\partial(\rho v_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x^2)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_x v_z)}{\partial z} \right] \\ &=\; \frac{\rho}{c^2} \left[\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \, \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \, \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \, \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \\ &\quad + \frac{v_x}{c^2} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} \right] \; . \end{aligned} \tag{529}$$

Der Ausdruck in der zweiten eckigen Klammer verschwindet aufgrund der gerade diskutierten Kontinuitätsgleichung. Somit erhalten wir zusammenfassend

$$T^{1i}{}_{|i} \;=\; \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}v_x\right) . \tag{530}$$

Ebenso gilt allgemeiner

$$T^{ki}{}_{|i} \;=\; \frac{\rho}{c^2}\left(\frac{\partial v^k}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}v^k\right) . \tag{531}$$

Auch hier ist die rechte Seite wieder aus der Hydrodynamik bekannt. In der Hydrodynamik kann die kräftefreie Bewegung eines Materiefeldes beschrieben werden durch das Nullsetzen der Eulerschen Ableitung, die definiert ist durch

$$\frac{DQ}{Dt} \;\equiv\; \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x^i}v^i \;=\; \frac{\partial Q}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}Q . \tag{532}$$

In unserem Fall folgt für die Eulersche Ableitung

$$\frac{Dv^k}{Dt} \;=\; \frac{\partial v^k}{\partial t} + \vec{v}\cdot\vec{\nabla}v^k \;=\; 0 . \tag{533}$$

Dies ist eine Folge der Impulserhaltung bei der kräftefreien Bewegung des Materiefeldes. Somit folgt zusammengefaßt

$$T^{ki}{}_{|i} \;=\; 0 . \tag{534}$$

Die Energie- und Impulserhaltung impliziert also das Verschwinden der Divergenz des Energie-Impuls Tensors.

Im Rahmen unserer Kovarianzforderung übertragen wir diesen physikalischen Sachverhalt auf beliebige Koordinatensysteme. In Riemannschen Räumen erhalten wir aufgrund der Forderung nach Kovarianz

$$T^{ij}{}_{||j} \;=\; 0 . \tag{535}$$

Die Einstein-Gleichung für den nichtleeren Raum

Der simpelste Ansatz für die Feldgleichung des nichtleeren Raumes wäre wohl $R^{ij} = \mathrm{const} \cdot T^{ij}$. Dies ist jedoch keine erlaubte Version einer allgemein gültigen Feldgleichung. Die Begründung ist durch die verschwindende Divergenz von T^{ij} gegeben, während R^{ij} keine verschwindende Divergenz aufweist. Wir hatten aber bereits die Feldgleichungen für den freien Raum mit Hilfe des divergenzfreien Ricci-Tensors ausgedrückt

$$G^{ij} = R^{ij} - \tfrac{1}{2} g^{ij} R = 0 . \tag{536}$$

Wir machen nun die folgende, insbesondere für kosmologische Studien wichtige Bemerkung, ohne jedoch an dieser Stelle einen konkreten Beweis zu führen: Der allgemeinste Tensor B^{ij} vom Rang 2, dessen Divergenz verschwindet und der vollständig aus dem metrischen Tensor und dessen erster und zweiter Ableitung aufgebaut wird, muß eine Linearkombination des Ricci-Tensors G^{ij} und des metrischen Tensors g^{ij} sein, d.h.,

$$B^{ij} = G^{ij} + \Lambda\, g^{ij} . \tag{537}$$

Λ ist eine beliebige Konstante. Damit nehmen die Gravitationsgleichungen für den nichtleeren Raum die folgende Gestalt an:

$$G^{ij} + \Lambda\, g^{ij} = \mathrm{const} \cdot T^{ij} . \tag{538}$$

Es wird nun gefordert, daß sich diese Gleichung für den Fall des leeren Raumes auf die bereits bekannte Gleichung reduziert. Aufgrund dieser Forderung setzten wir im folgenden

$$\Lambda = 0 . \tag{539}$$

Somit postulieren wir die Feldgleichungen

$$G^{ij} = R^{ij} - \tfrac{1}{2} g^{ij} R = C\, T^{ij} , \tag{540}$$

wobei C eine noch zu bestimmende Konstante ist.

Wir können diese Gleichung auch noch in etwas modifizierter Form darstellen. Wir kontrahieren die Gleichung (540)

$$R^{i}{}_{i} - \tfrac{1}{2} g^{i}{}_{i} R = C\, T^{i}{}_{i} . \tag{541}$$

Dies führt auf

$$R \;=\; -C\, T^{i}_{\;i} \;=\; -C\, T\;. \tag{542}$$

T wird der Laue-Skalar genannt. Damit nehmen die Feldgleichungen auch die Form an

$$R^{ij} \;=\; C\, \left(T^{ij} - \tfrac{1}{2}\, g^{ij}\, T\right)\;. \tag{543}$$

Die nächste Aufgabe liegt in der Bestimmung der Konstanten C. Wir wollen nun zeigen, daß die Einstein-Gleichung (540) eine Verallgemeinerung der Poisson-Gleichung ist

$$\sum_{i=1}^{3} \varphi_{|i|i} \;=\; 4\pi\kappa\, \rho\;. \tag{544}$$

Als Nebenprodukt werden wir dabei die Konstante C bestimmen. Für ein statisches System reduziert sich der Energie-Impuls Tensor auf

$$T^{ij} = \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\;. \tag{545}$$

Wir schreiben den metrischen Tensor als

$$g_{ij} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} + \epsilon\, \gamma_{ij}\;. \tag{546}$$

Wir betrachten nur kleine ρ_0, d.h., im Laue-Skalar $T^{i}_{\;i}$ vernachlässigen wir Terme der Ordnung $\epsilon\rho_0$. Damit gilt

$$T^{i}_{\;i} = \mathrm{Sp} \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \;=\; \rho_0\;. \tag{547}$$

Damit enthält die rechte Seite der Feldgleichungen nur Terme erster Ordnung in den Größen $\rho_0,\ v/c,\ \epsilon\gamma_{ij}$. Es folgt

$$\begin{aligned} C\, \left(T_{ij} - \tfrac{1}{2}\, g_{ij}\, T\right) \;&=\; C \left\{ \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \rho_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\rho_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\rho_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\rho_0 \end{pmatrix} \right\} \\ &=\; \frac{C\, \rho_0}{2}\, \delta_{ij}\;. \end{aligned} \tag{548}$$

Die linke Seite des metrischen Tensors wurde bereits berechnet. Aufgrund der Zeitunabhängigkeit des metrischen Tensors folgt

$$\epsilon \sum_{i=1}^{3} \gamma_{00|i|i} \;=\; -C\;\rho_0\;. \tag{549}$$

Dies ist aber gerade die Poisson-Gleichung, wenn wir idendifizieren

$$\frac{-\,\epsilon\gamma_{00}}{C} \;=\; \frac{\varphi}{4\pi\kappa}\;. \tag{550}$$

Wir haben somit die klassische Newtonsche Theorie in der relativistischen Theorie wiederentdeckt. Wir verwenden $\varphi \;=\; c^2/2\;\epsilon\gamma_{00}$, was wir schon bei der Diskussion "Gravitation als metrisches Problem" ermittelt hatten und finden damit

$$C \;=\; -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\;. \tag{551}$$

Wir schreiben die Feldgleichungen geschlossen auf. Es gilt

$$G^{ij} \;=\; R^{ij} - \tfrac{1}{2}\,g^{ij}\,R \;=\; -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,T^{ij} \tag{552}$$

oder äquivalent

$$R^{ij} \;=\; -\frac{8\pi\kappa}{c^2}\,\left(T^{ij} - \tfrac{1}{2}\,g^{ij}\,T\right)\;. \tag{553}$$

Diese Feldgleichungen liefern als Lösung die Metrik g_{ik}, also ein Tensor-Feld. Diese Metrik setzen wir in die Geodätengleichung ein

$$\frac{d^2x^i}{ds^2} + \Gamma^i_{jk}\,\frac{dx^j}{ds}\,\frac{dx^k}{ds} \;=\; 0. \tag{554}$$

Die Lösung der Geodätengleichung liefert die Bahnkurve eines Teilchens im Gravitationsfeld.

Die Schwarzschild-Lösung

Wir betrachten nun die Einstein-Gleichung für den freien Raum, wobei wir uns auf eine zeitunabhängige und sphärisch symmetrische Metrik beschränken. Die resultierenden Feldgleichungen wurden im Jahr 1916 erstmals von Schwarzschild gelöst. Diese Lösung ist von besonderer Bedeutung für astrophysikalische Betrachtungen, denn sie liefert die Metrik außerhalb eines einzelnen isolierten Sternes. Die Feldgleichungen für den freien Raum lauten

$$R_{ij} \;=\; \Gamma^k_{kj|i} - \Gamma^k_{ij|k} + \Gamma^k_{li}\Gamma^l_{kj} - \Gamma^k_{lk}\Gamma^l_{ij} \;=\; 0 \,. \tag{555}$$

Wir suchen eine Lösung, die zeitunabhängig, sphärisch symmetrisch ist und die asymptotisch für große Entfernungen von der Sonne in die Lorentz-Metrik übergeht. In Polarkoordinaten ausgedrückt soll also für große r gelten

$$ds^2 \;=\; c^2\,dt^2 - \left(dr^2 + r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\!\theta\,d\varphi^2\right) \,. \tag{556}$$

Die Zeitunabhängigkeit der Metrik beinhaltet, daß das Längenelement invariant bei der Substitution $dx^0 \to -dx^0$ bleibt. Hieraus folgt sofort, daß alle Terme der Form $g_{0i}\,dx^0\,dx^i$ verschwinden müssen. Das Quadrat des Längenelementes hat also die Form

$$ds^2 \;=\; g_{00}\,(dx^0)^2 + g_{ik}\,dx^i\,dx^k, \tag{557}$$

wobei i und k nur die Werte 1, 2 oder 3 annehmen kann. Wenn ferner entsprechend unserer Annahme keine spezielle Richtung im Raum ausgezeichnet ist, sollte das Längenelement unabhängig von einem Wechsel $d\theta \to -d\theta$ und $d\varphi \to -d\varphi$ sein. Daraus ergibt sich, daß alle Terme proportional zu $dr\,d\theta$, $d\theta\,d\varphi$ usw. verschwinden müssen. Der gesuchte metrische Tensor ist also diagonal, d.h.

$$ds^2 \;=\; A\,c^2\,dt^2 - \left(B\,dr^2 + C\,r^2\,d\theta^2 + D\,r^2\sin^2\!\theta\,d\varphi^2\right) \,. \tag{558}$$

Aufgrund der geforderten sphärischen Symmetrie müssen die Funktionen $A,\ B,\ C$ und D allein Funktionen von r sein. Eine weitere Symmetriebetrachtung führt uns dazu $C(r)$ und $D(r)$ gleichzusetzen. Bei einer Kugel ist es egal, welchen Winkel wir mit θ und welchen Winkel wir mit φ bezeichnen. Beide Koordinaten sind austauschbar. Eine Verschiebung um $\epsilon = r\,d\theta$ vom Nordpol ($\theta = 0$) entspricht $ds^2 = -C\,\epsilon^2$, eine Verschiebung um $\epsilon = r\,d\varphi$ entlang des Äquators ($\theta = \pi/2$) entspricht $ds^2 = -D\,\epsilon^2$. Da θ und φ Winkelkoordinaten sind, sollte ds^2 jeweils gleich sein. Daraus folgt, $C = D$. Wir haben somit

$$ds^2 \;=\; A\,c^2\,dt^2 - B\,dr^2 - C\left(r^2\,d\theta^2 + r^2\sin^2\!\theta\,d\varphi^2\right) \,. \tag{559}$$

Eine weitere Vereinfachung ergibt sich durch eine geeignete Wahl der radialen Koordinate. Wir definieren

$$\hat{r} \;=\; \sqrt{C(r)}\, r \tag{560}$$

und damit

$$C(r)\, r^2 \;=\; \hat{r}^2 \;. \tag{561}$$

Wir bilden das totale Differential von (561),

$$d(C\, r^2) \;=\; d\hat{r}^2 \tag{562}$$

und somit

$$\frac{dC}{dr}\, dr\, r^2 + 2rC\, dr \;=\; 2\hat{r}\, d\hat{r} \;=\; 2\sqrt{C}\, r\, d\hat{r} \tag{563}$$

und weiter

$$d\hat{r} \;=\; \left(\frac{r}{2\sqrt{C}}\, \frac{dC}{dr} + \sqrt{C} \right)\, dr \;. \tag{564}$$

Dies führt uns schließlich auf

$$B\, dr^2 \;=\; \frac{B}{C} \left(1 + \frac{r}{2C}\, \frac{dC}{dr} \right)^{-2} d\hat{r}^2 \;\equiv\; \hat{B}\, d\hat{r}^2 \;. \tag{565}$$

Damit erhält das Längenelement die Gestalt

$$\begin{aligned} ds^2 \;&=\; A\, c^2\, dt^2 - \frac{B}{C} \left(1 + \frac{r}{2C}\, \frac{dC}{dr} \right)^{-2} d\hat{r}^2 - \left(\hat{r}^2\, d\theta^2 + \hat{r}^2 \sin^2\!\theta\, d\varphi^2 \right) \\ &=\; A\, c^2\, dt^2 - \hat{B}\, d\hat{r}^2 - \left(\hat{r}^2\, d\theta^2 + \hat{r}^2 \sin^2\!\theta\, d\varphi^2 \right) \;. \end{aligned} \tag{566}$$

Wir benennen nun wieder um $\hat{B} \to B$ und $\hat{r} \to r$ und erhalten die einfache Form

$$ds^2 \;=\; A\, c^2\, dt^2 - B\, dr^2 - \left(r^2\, d\theta^2 + r^2 \sin^2\!\theta\, d\varphi^2 \right) \;. \tag{567}$$

Der letzte Term in runden Klammern hat also damit den Koeffizienten 1. Wir haben nur noch die beiden unbekannten Funktionen $A(r)$ und $B(r)$ zu bestimmen. Als Funktion von r soll die Metrik ihre Signatur nicht ändern. Ferner wollen wir asymtotisch für $r \to \infty$ die Lorentz-Metrik erhalten. Daher können wir $A(r)$ und $B(r)$ als positiv definite Funktionen wählen und machen den Ansatz

$$A(r) \;=\; e^{\nu(r)} \;, \tag{568}$$

$$B(r) \;=\; e^{\lambda(r)} \;. \tag{569}$$

Die Randbedingung der Lorentz-Metrik im Unendlichen verlangt, daß $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ verschwinden für $r \to \infty$. Somit ist

$$ds^2 \;=\; e^{\nu(r)}\, c^2\, dt^2 - e^{\lambda(r)}\, dr^2 - r^2 \left(d\theta^2 + \sin^2\theta\, d\varphi^2\right) \;. \tag{570}$$

Selbst mit diesem relativ einfachen Ansatz wäre die direkte Lösung der Einsteinschen Gleichung eine sehr mühseelige Angelegenheit aufgrund der Vielzahl der auftretenden Christoffel-Symbole.

Es gibt jedoch einen bequemen Kunstgriff, um alle nichtverschwindenden Christoffel-Symbole zu berechnen. Die Euler-Lagrange Gleichungen einer geodätischen Linie in der Form

$$\ddot{x}^i + \Gamma^i_{jk}\, \dot{x}^j\, \dot{x}^k \;=\; 0 \tag{571}$$

mit

$$\dot{x}^r \;\equiv\; \frac{dx^r}{ds} \tag{572}$$

enthält alle diese Christoffel-Symbole. Kennen wir auf der anderen Seite die Euler-Lagrange-Gleichungen für die Geodätische genau, so können wir alle nichtverschwindenden Christoffel-Symbole identifizieren. Dieses Identifikationsverfahren ist besonders einfach für einen diagonalen metrischen Tensor. Die Euler-Lagrange Gleichungen können aus dem Variationsproblem gewonnen werden,

$$\delta \int ds \;=\; \delta \int \left[e^{\nu}\, \left(\dot{x}^0\right)^2 - \left(e^{\lambda}\, \dot{r}^2 + r^2\, \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right)\right]^{1/2} ds \;=\; 0\;. \tag{573}$$

Wir quadrieren den Integranden

$$\delta \int \left[e^{\nu}\, \left(\dot{x}^0\right)^2 - \left(e^{\lambda}\, \dot{r}^2 + r^2\, \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2\theta\, \dot{\varphi}^2\right)\right] ds \;=\; 0\;. \tag{574}$$

Bezeichnen wir hier den Integranden mit F, so gilt

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial F}{\partial \dot{x}^i}\right) \;=\; \frac{\partial F}{\partial x^i}\;. \tag{575}$$

Wir schreiben die vier Gleichungen explizit aus und vergleichen sie mit der Form in (571). Wir setzten dabei natürlich $x^1 \;=\; r,\; x^2 \;=\; \theta,\; x^3 \;=\; \varphi$.

Für $x^i \;=\; x^0$ folgt

$$\frac{d}{ds}\left(2\, e^{\nu}\, \dot{x}^0\right) \;=\; 0\;. \tag{576}$$

Die Ableitung von ν nach r bezeichnen wir im folgenden mit $\nu' = d\nu/dr$. Damit ergibt sich

$$2\, e^{\nu}\, \nu'\, \dot{r}\, \dot{x}^0 + 2\, e^{\nu}\, \ddot{x}^0 \;=\; 0 \tag{577}$$

und weiter

$$\ddot{x}^0 + \nu'\, \dot{r}\, \dot{x}^0 \;=\; 0\;. \tag{578}$$

Der Vergleich von (578) mit (571) führt auf

$$\Gamma^0_{10} \;=\; \Gamma^0_{01} \;=\; \tfrac{1}{2}\, \nu'\;. \tag{579}$$

Für die Variable r folgt

$$\frac{d}{ds}\left(-e^{\lambda}\, 2\, \dot{r}\right) - \nu'\, e^{\nu}\, \left(\dot{x}^0\right)^2 + \lambda'\, e^{\lambda}\, \dot{r}^2 + 2\, r\, \dot{\theta}^2 + 2\, r\, \sin^2\!\theta\, \dot{\varphi}^2 \;=\; 0\;. \tag{580}$$

Ausdifferenzieren ergibt

$$-\lambda'\, e^{\lambda}\, 2\, \dot{r}^2 - e^{\lambda}\, 2\, \ddot{r} - \nu'\, e^{\nu}\, \left(\dot{x}^0\right)^2 + \lambda'\, e^{\lambda}\, \dot{r}^2 + 2\, r\, \dot{\theta}^2 + 2\, r\, \sin^2\!\theta\, \dot{\varphi}^2 \;=\; 0\;. \tag{581}$$

Durch Umsortieren der Terme erhalten wir schließlich

$$\ddot{r} + \tfrac{1}{2}\, \lambda'\, \dot{r}^2 + \tfrac{1}{2}\, \nu'\, e^{\nu-\lambda}\, \left(\dot{x}^0\right)^2 - r\, e^{-\lambda}\, \dot{\theta}^2 - r\, \sin^2\!\theta\, \dot{\varphi}^2\, e^{-\lambda} \;=\; 0\;. \tag{582}$$

Die einzigen nichtverschwindenden Christoffel-Symbole mit dem oberen Index 1 sind daher

$$\begin{aligned}
\Gamma^1_{00} &= \tfrac{1}{2}\, \nu'\, e^{\nu-\lambda}\;,\\
\Gamma^1_{11} &= \tfrac{1}{2}\, \lambda'\;,\\
\Gamma^1_{22} &= -e^{-\lambda}\, r\;,\\
\Gamma^1_{33} &= -r\, \sin^2\!\theta\, e^{-\lambda}\;.
\end{aligned} \tag{583}$$

Für die Variable θ folgt

$$\frac{d}{ds}\left(-r^2\, 2\, \dot{\theta}\right) + 2\, r^2\, \sin\theta\, \cos\theta\, \dot{\varphi}^2 \;=\; 0\;. \tag{584}$$

Ausdifferenzieren ergibt

$$-2\, r\, \dot{r}\, 2\, \dot{\theta} - 2\, r^2\, \ddot{\theta} + 2\, r^2\, \sin\theta\, \cos\theta\, \dot{\varphi}^2 \;=\; 0 \tag{585}$$

und umsortieren führt auf

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r}\, \dot{\theta}\, \dot{r} - \sin\theta\, \cos\theta\, \dot{\varphi}^2 \;=\; 0\;. \tag{586}$$

Damit haben wir die Christoffel-Symbole

$$\begin{aligned}\Gamma^2_{21} &= \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r} \, , \\ \Gamma^2_{33} &= -\sin\theta\,\cos\theta \, .\end{aligned} \tag{587}$$

Für die Variable φ folgt schließlich

$$\frac{d}{ds}\left(2\,r^2\sin^2\theta\,\dot\varphi\right) = 0 \, . \tag{588}$$

Ausdifferenzieren ergibt

$$2\cdot 2\,r\,\dot r\sin^2\theta\,\dot\varphi + 2\,r^2\,2\,\sin\theta\,\cos\theta\,\dot\theta\,\dot\varphi + 2\,r^2\sin^2\theta\,\ddot\varphi = 0 \, . \tag{589}$$

Wir sortieren wieder

$$\ddot\varphi + \frac{2}{r}\,\dot r\,\dot\varphi + 2\,\mathrm{ctg}\theta\,\dot\theta\,\dot\varphi = 0 \, . \tag{590}$$

Damit erhalten wir

$$\begin{aligned}\Gamma^3_{23} &= \Gamma^3_{32} = \mathrm{ctg}\theta \, , \\ \Gamma^3_{13} &= \Gamma^3_{31} = \frac{1}{r} \, .\end{aligned} \tag{591}$$

Damit sind alle nichtverschwindenden Christoffel-Symbole bestimmt.

Die Feldgleichungen (555) enthalten auch Christoffel-Symbole der Form Γ^k_{kj}, die sich auch in der Form $(\log\sqrt{-g})_{|j}$ schreiben lassen. Diesen Zusammenhang hatten wir bereits nachgewiesen. Damit lauten die Feldgleichungen

$$R_{ij} = \left(\log\sqrt{-g}\right)_{|i|j} - \Gamma^k_{ij|k} + \Gamma^k_{li}\,\Gamma^l_{kj} - \Gamma^l_{ij}\left(\log\sqrt{-g}\right)_{|l} = 0 \, . \tag{592}$$

Wir wollen jetzt $\log\sqrt{-g}$ berechnen. Der metrische Tensor lautet aufgrund des Längenelementes

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} e^{\nu(r)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{\lambda(r)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} . \tag{593}$$

Damit bekommen wir sofort

$$g = \det(g_{ij}) = -e^{\nu(r)+\lambda(r)}\,r^4\sin^2\theta \, . \tag{594}$$

Dies führt weiter auf

$$\log(-g) \;=\; (\nu + \lambda) + 4\,\log r + 2\,\log|\sin\theta| \tag{595}$$

und somit

$$\log\sqrt{-g} \;=\; \frac{\nu+\lambda}{2} + 2\,\log r + \log|\sin\theta|\;. \tag{596}$$

Wir betrachten nun zunächst die Komponente mit $i \;=\; j \;=\; 0$ der Feldgleichungen

$$R_{00} \;=\; \left(\log\sqrt{-g}\right)_{|0|0} - \Gamma^{k}_{00|k} + \Gamma^{k}_{l0}\,\Gamma^{l}_{k0} - \Gamma^{l}_{00}\left(\log\sqrt{-g}\right)_{|l} \;=\; 0\;. \tag{597}$$

Viele Terme, die hier auftreten, sind null. Es bleibt übrig

$$\begin{aligned} &-\;\; \Gamma^{1}_{00|1} + 2\,\Gamma^{1}_{00}\,\Gamma^{0}_{01} - \Gamma^{1}_{00}\left(\log\sqrt{-g}\right)_{|1} \;=\; \\ &-\;\; \left(\tfrac{1}{2}\,\nu'\,e^{\nu-\lambda}\right)' + \tfrac{1}{2}\,\nu'^{2}\,e^{\nu-\lambda} - \left(\tfrac{1}{2}\,\nu'\,e^{\nu-\lambda}\right)\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) \;=\; 0\;. \end{aligned} \tag{598}$$

Dies reduziert sich auf

$$-\nu'' - \nu'(\nu' - \lambda') + \nu'^{2} - \nu'\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) \;=\; 0\;. \tag{599}$$

und weiter auf

$$\nu'' + \tfrac{1}{2}\,\nu'^{2} - \tfrac{1}{2}\,\lambda'\,\nu' + \frac{2\nu'}{r} \;=\; 0\;. \tag{600}$$

Wir betrachten nun in gleicher Weise den Fall $i \;=\; j \;=\; 1$.

$$R_{11} \;=\; \left(\log\sqrt{-g}\right)_{|1|1} - \Gamma^{k}_{11|k} + \Gamma^{k}_{l1}\,\Gamma^{l}_{k1} - \Gamma^{l}_{11}\left(\log\sqrt{-g}\right)_{|l} \;=\; 0\;. \tag{601}$$

Einsetzten der Christoffel-Symbole liefert

$$\begin{aligned} R_{11} \;\;=\;\; &\left(\log\sqrt{-g}\right)_{|1|1} - \Gamma^{1}_{11|1} + \Gamma^{1}_{11}\,\Gamma^{1}_{11} + \Gamma^{0}_{10}\,\Gamma^{0}_{10} + \Gamma^{2}_{21}\,\Gamma^{2}_{21} + \Gamma^{3}_{31}\,\Gamma^{3}_{31} \\ &- \Gamma^{1}_{11}\left(\log\sqrt{-g}\right)_{|1} \;=\; 0\;. \end{aligned} \tag{602}$$

Wir verwenden wieder die bereits berechneten Ausdrücke für die Christoffel-Symbole. Dies ergibt

$$\left(\frac{\nu''+\lambda''}{2} - \frac{2}{r^{2}}\right) - \tfrac{1}{2}\,\lambda'' + \frac{1}{4}\,\nu'^{2} + \frac{1}{4}\,\lambda'^{2} + \frac{2}{r^{2}} - \tfrac{1}{2}\,\lambda'\left(\frac{\nu'+\lambda'}{2} + \frac{2}{r}\right) \;=\; 0 \tag{603}$$

Wir fassen zusammen

$$\nu'' + \tfrac{1}{2}\,\nu'^{2} - \tfrac{1}{2}\,\lambda'\,\nu' - \frac{2\lambda'}{r} \;=\; 0\;. \tag{604}$$

Damit haben wir ein System von gekoppelten Differentialgleichungen zweiter Ordnung für die unbekannten Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ vorliegen. Wir ziehen Gleichung (604) von Gleichung (600) ab.

$$\nu' + \lambda' \;=\; 0\;. \tag{605}$$

Integration ergibt offensichtlich

$$\nu + \lambda \;=\; \text{const}\;. \tag{606}$$

Die Randbedingung der Lorentz-Metrik im Unendlichen erfordert, daß $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ verschwindet für $r \to \infty$. Daraus folgt

$$\text{const} \;=\; 0 \tag{607}$$

und somit

$$\lambda \;=\; -\nu\;. \tag{608}$$

Wir setzen dieses Resultat in Gleichung (604) ein und bekommen

$$\lambda'' - \lambda'^2 + \frac{2\lambda'}{r} \;=\; 0\;. \tag{609}$$

Dies läßt sich schreiben als

$$\left(r\,e^{-\lambda}\right)'' \;=\; 0\;. \tag{610}$$

Um dies zu beweisen differenzieren wir diesen Ausdruck aus

$$\left(e^{-\lambda} + r(-\lambda')\,e^{-\lambda}\right)' \;=\; 0\;. \tag{611}$$

Umschreiben ergibt

$$\left((1-\lambda'\,r)\,e^{-\lambda}\right)' \;=\; 0 \tag{612}$$

und weiter

$$\begin{aligned} (-\lambda'\,r)'\;e^{-\lambda} - \lambda'\,(1-\lambda'\,r)\,e^{-\lambda} \;&=\; 0\;, \\ -\lambda''\,r - \lambda' - \lambda' + \lambda'^2\,r \;&=\; 0\;. \end{aligned} \tag{613}$$

Dies führt wieder auf Gleichung (609). Damit erhalten wir sofort

$$\left(r\,e^{-\lambda}\right)' \;=\; \text{const}\;. \tag{614}$$

Dies lassen wir zunächst so stehen. Statt dessen betrachten wir erst R_{22} genau so wie zuvor R_{00} und R_{11}.

$$R_{22} \;=\; \left(\log\sqrt{-g}\right)_{|2|2} - \Gamma^k_{22|k} + \Gamma^k_{l2}\,\Gamma^l_{k2} - \Gamma^l_{22}\left(\log\sqrt{-g}\right)_{|l} \;=\; 0\;. \tag{615}$$

Durch Einsetzen der nichtverschwindenden Christoffel-Symbole bekommen wir

$$\begin{aligned} R_{22} \;&=\; \left(\log\sqrt{-g}\right)_{|2|2} - \Gamma^1_{22|1} + \Gamma^1_{22}\,\Gamma^2_{21} + \Gamma^2_{21}\,\Gamma^1_{22} + \Gamma^3_{23}\,\Gamma^3_{23} \\ &\quad - \Gamma^1_{22}\left(\log\sqrt{-g}\right)_{|1} \;=\; 0\;. \end{aligned} \tag{616}$$

Wir verwenden die expliziten Ausdrücke für die Christoffel-Symbole und erhalten

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\left(\log|\sin\theta|\right) \;&+\; \left(e^{-\lambda}\,r\right)' + 2\left(-e^{-\lambda}\right) + \cot^2\theta \\ &+\; e^{-\lambda}\,r\left(\frac{\lambda'+\nu'}{2} + \frac{2}{r}\right) \;=\; 0\;. \end{aligned} \tag{617}$$

Wir verwenden die bereits abgeleitete Relation $\lambda' + \nu' \;=\; 0$. Wegen

$$\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\;\left(\log|\sin\theta|\right) \;=\; -1 - \cot^2\theta \tag{618}$$

folgt schließlich

$$\left(e^{-\lambda}\,r\right)' \;=\; 1\;. \tag{619}$$

Dies ist genau der gleiche Ausdruck wie (614) mit der wichtigen Ausnahme, daß jetzt die Konstante fixiert ist. Durch Integration bekommen wir sofort

$$e^{-\lambda}\,r \;=\; r - 2m\;, \tag{620}$$

wobei $-2m$ eine noch zu bestimmende Integrationskonstante ist.

Wir haben also aus den drei Gleichungen $R_{00} \;=\; R_{11} \;=\; R_{22} \;=\; 0$ die Funktionen $\nu(r)$ und $\lambda(r)$ bestimmt. Damit gilt

$$e^{\nu} \;=\; e^{-\lambda} \;=\; 1 - \frac{2m}{r} \tag{621}$$

oder

$$e^{\lambda} \;=\; \frac{1}{1-\frac{2m}{r}}\;. \tag{622}$$

Wir haben nur drei der zehn unabhängigen Gleichungen benötigt, um die Lösung zu finden. Es muß noch nachgewiesen werden, daß die anderen Gleichungen konsistent mit der gerade gefundenen Lösung sind. Diese Übungsaufgabe sei dem fleißigen Leser überlassen.

Wir fassen das Resultat zusammen. Das Schwarzschildsche Längenelement lautet

$$ds^2 \;=\; \left(1-\frac{2m}{r}\right)\left(dx^0\right)^2 - \frac{dr^2}{1-\frac{2m}{r}} - r^2\,\left(d\theta^2+\sin^2\theta\,d\varphi^2\right)\;. \tag{623}$$

Dies ist vielleicht die bedeutenste Leistung der Allgemeinen Relativitätstheorie, was die Himmelsmechanik anbelangt: Das Längenelement ist eine exakte Lösung der Einstein-Gleichung, es entspricht dem $1/r^2$-Gesetz der Newtonschen Gravitationstheorie und alle wesentlichen experimentellen Tests der Allgemeinen Relativitätstheorie beruhen auf diesem Längenelement.

Wir müssen abschließend noch die Integrationskonstante m bestimmen. Im Fall schwacher Felder hatten wir bereits gefunden

$$g_{00} \;\simeq\; 1+\frac{2\varphi}{c^2}\;. \tag{624}$$

Nun ist $\varphi \;=\; -\kappa M/r$, wobei M die Masse der gravitierenden Sonne oder eines Planeten ist und κ die Gravitationskonstante bezeichnet. Damit bekommen wir

$$g_{00} \;\simeq\; 1-\frac{2\kappa M}{c^2\,r}\;. \tag{625}$$

Der Vergleich mit (623) liefert sofort

$$m \;=\; \frac{\kappa M}{c^2}\;. \tag{626}$$

Wir sehen sofort, daß das Schwarzschildsche Längenelement unendlich wird für $r \;=\; 2m$. Die Größe

$$r_S \;=\; 2m \;=\; \frac{2\kappa M}{c^2} \tag{627}$$

heißt Schwarzschild-Radius.