

Schwingungsanalyse eines horizontalen Federpendels

Vorbereitungsaufwand: 15 Minuten
Durchführungsdauer: 20-25 Minuten

1. Ziele

Ziel dieses Versuchs ist die Analyse der Schwingung eines Federpendels. Dabei wird Folgendes untersucht:

- Zusammenhang zwischen Ort und Geschwindigkeit
- Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Masse
- Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Federkonstanten

2. Material und Versuchsaufbau

Arduinospezifisch:

- Arduino nano mit Ultraschallsensor im Gehäuse (siehe Sensoranleitung)

Alternativ:

- Arduino Uno mit Verbindungskabel
- Ultraschallsensor

Wählen Sie beim Hochladen des Sketches im Menü „Werkzeuge“ → „Board“ das richtige Arduino-Board aus (Arduino Nano oder Uno).

Aus der Physksammlung:

- Rollbahn mit Rollwagen
- 2 identische Federn
- unterschiedliche Massestücke
- Lineal
- Stativmaterial

Wenn kein fertiges Gehäuse vorliegt, wird der Sensor entsprechend der Abbildung 1 angeschlossen.

| HC-SR04 | Arduino Uno |
|---------------|-------------|
| VCC (Rot) | 5V |
| GND (Schwarz) | GND |
| echo | Pin 6 |
| trig | Pin 7 |

Anschließend wird der Versuch, wie in Abbildung 2 dargestellt, aufgebaut.

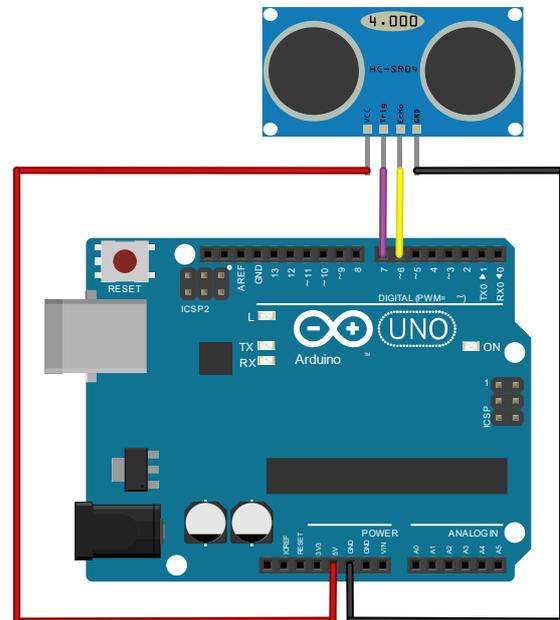


Abbildung 1: Schaltskizze des Ultraschallsensors mit Arduino Uno.

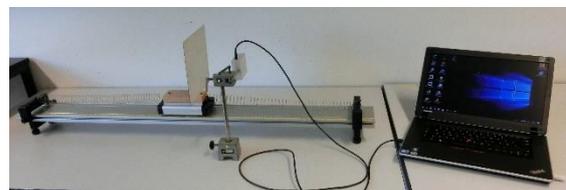


Abbildung 2: Versuchsaufbau.

3. Durchführung

Öffnen Sie den Sketch (Schwingungsanalyse_Monitor) in der Arduino-IDE. Folgende Konfigurationsmöglichkeiten stehen zur Verfügung:

messpause: Gibt die Verzögerung zwischen zwei Messungen in Millisekunden an. (Standard 0)

messdauer: Gibt die Dauer der gesamten Messreihe in Millisekunden an.

Zu Beginn wird der Rollwagen um eine feste Distanz ausgelenkt und zunächst an der ausgelenkten Position festgehalten. Zum Starten der Messung und der Ausgabe der Messwerte wird der „serielle Moni-

tor“ verwendet. Öffnen Sie diesen über das Menü „Werkzeuge“ > „Serieller Monitor“. Sobald Sie den Buchstaben „s“ in die Textzeile eingeben und die Eingabe mit Enter bestätigen, werden die Messwerte in Textform für die zuvor eingestellte Dauer ausgegeben. Wenn Sie den Wagen loslassen, wird die Bewegung aufgezeichnet.

4. Auswertung

Kopieren Sie die Messwerte nach abgeschlossener Messung in die Excel-Tabelle „Zeit-Ort-Geschwindigkeit-Auswertung“ (siehe Softwareanleitung „Daten nach Excel exportieren“).

a. Zusammenhang zwischen Ort und Geschwindigkeit

Wird der Ort des Wagens (vertikale Achse) bzw. die Geschwindigkeit (vertikale Achse) gegen die Zeit (horizontale Achse) aufgetragen, ergeben sich beispielsweise folgende Verläufe:

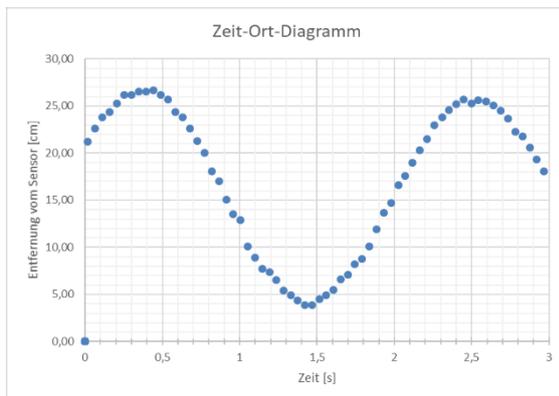


Abbildung 3: t-s-Diagramm

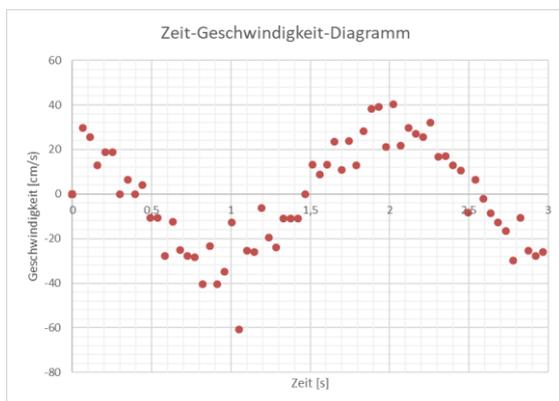


Abbildung 4: t-v-Diagramm

Es ist erkennbar, dass der Ort und die Geschwindigkeit eine Phasenverschiebung von 180° haben.

b. Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Masse

Aus der aufgenommenen Schwingungskurve kann die Masse des Wagens bestimmt werden.

Ausgangspunkt ist dabei das Kraftgesetz aufgrund der Schwingungsgleichung.

$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot \gamma$$

Mit Der Kraft F , der Masse des Fahrzeuges m , der Kreisfrequenz ω und der Auslenkung γ .

γ steht hier für die Auslenkung aus der Ruhelage, nicht den Abstand vom Sensor.

Weiterhin gilt, dass die Federspannkraft F_{Spann} gleich dem negativen Produkt der Federkonstante D und der Auslenkung γ ist.

$$F_{\text{Spann}} = -D \cdot \gamma$$

Werden diese beiden Formeln nun gleichgesetzt, ergibt sich für die Masse:

$$m = \frac{D}{\omega^2}$$

Nun nutzen wir die Definition der Schwingungsdauer T , welche nach der Frequenz umgestellt wird, um eine Formel für die Federkonstante in Abhängigkeit von der Schwingungsdauer zu erhalten.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Dadurch ergibt sich folgende Gleichung:

$$m = \frac{D}{\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2}$$

Die Federkonstante der Federn wird dabei mit mehreren Massestücken bestimmt. Die

Schwingungsdauer kann näherungsweise ermittelt werden, indem die Änderung der Zeit ΔT zwischen drei Nullstellen (für eine volle Schwingung) aus der Messwertetabelle bestimmt wird.

Beispielrechnung:

Gegebene Werte:

$$D = 33,33 \frac{\text{N}}{\text{m}}, \quad t_1 = 363 \text{ ms}, \quad t_2 = 1078 \text{ ms}$$

Berechnung der Schwingungsdauer:

$$T = t_2 - t_1 = 1078 \text{ ms} - 363 \text{ ms} = 0,715 \text{ s}$$

Einsetzen in die Formel zur Bestimmung von m . Dabei muss beachtet werden, dass die Federkonstante verdoppelt werden muss, da in diesem Versuch zwei Federn eingebaut sind.

$$m = \frac{66,66 \frac{\text{N}}{\text{m}}}{\left(\frac{2\pi}{0,715 \text{ s}}\right)^2}$$

$$m = 0,863 \text{ kg}$$

Die berechnete Masse kann gegebenenfalls mit einer Waage überprüft werden, was in diesem Fall zu einem Fehler von ca. 9,6 % führt.

c. Abhängigkeit der Schwingungsdauer von der Federkonstanten

Aus der aufgenommenen Schwingungskurve kann die Federkonstante der Federn bestimmt werden.

Ausgangspunkt ist dabei das Kraftgesetz aufgrund der Schwingungsgleichung.

$$F = -m \cdot \omega^2 \cdot \gamma$$

γ steht hier für die Auslenkung aus der Ruhelage, nicht den Abstand vom Sensor.

Mit der Kraft F , der Masse des Fahrzeuges m , der Frequenz ω und der Auslenkung γ .

Weiterhin gilt, dass die Federspannkraft F_{Spann} gleich dem negativen Produkt der

Federkonstante D und der Auslenkung γ ist.

$$F_{\text{Spann}} = -D \cdot \gamma$$

Werden diese beiden Formeln nun gleichgesetzt ergibt sich für die Federkonstante:

$$D = m \cdot \omega^2$$

Nun nutzen wir die Definition der Schwingungsdauer T , welche nach der Frequenz umgestellt wird, um eine Formel für die Federkonstante in Abhängigkeit von der Schwingungsdauer zu erhalten.

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

Dadurch ergibt sich folgende Gleichung:

$$D = m \cdot \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$$

Die Masse des Wagens wird dabei mit einer Waage bestimmt. Die Schwingungsdauer kann näherungsweise ermittelt werden, indem die Änderung der Zeit ΔT zwischen drei Nullstellen (für eine volle Schwingung) aus der Messwertetabelle bestimmt wird.

Beispielrechnung:

Gegebene Werte:

$$m = 0,781 \text{ kg}, \quad t_1 = 363 \text{ ms}, \quad t_2 = 1078 \text{ ms}$$

Berechnung der Schwingungsdauer.

$$T = t_2 - t_1$$

$$T = 1078 \text{ ms} - 363 \text{ ms} = 715 \text{ ms} = 0,715 \text{ s}$$

Einsetzen in die Formel zur Bestimmung von D .

$$D = 0,781 \text{ kg} \cdot \left(\frac{2\pi}{0,715 \text{ s}}\right)^2 = 60,31 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Die ermittelte Federkonstante muss nun halbiert werden, da für die horizontale Schwingung zwei Federn verwendet werden. Somit erhalten wir für jede Feder eine Federkonstante von ca. $30,155 \frac{\text{N}}{\text{m}}$.

Diese kann über $F = -D \cdot \gamma$, einem Lineal und Kontrollmassen auch direkt nachgeprüft werden, wodurch man auf einen ungefähren Fehler von 9,6 % kommt.