Prof. Dr. M. E. Garcia
Tobias Müller
Tobias Zier

Universität Kassel
Fachbereich 10

Brückenkurs Theoretische Mechanik

SS 2012

Brückenkurs Theoretische Mechanik

Lösungen zum Übungsblatt 1

0.1 Vektoralgebra

Aufgabe 1 Berechnen Sie die folgenden Produkte:

(a) $\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix} = 7 \cdot 12 + 4 \cdot 5 + 13 \cdot 4 = 156$

(b) $\begin{pmatrix} 22 \\ 3 \\ 1.5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t \\ 1+t \\ 1 \end{pmatrix} = 25t + 4,5$

Für welches t stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander?
d.h.: $25t + 4,5 = 0 \rightarrow t = \frac{-4,5}{25}$

(c) $\begin{pmatrix} 1 \\ b \\ b^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = b^2 + 2b + 1$

Für welches b stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander?
d.h.: $b^2 + 2b + 1 = 0 \rightarrow b = -1$

(d) $\begin{pmatrix} s \\ 2s \\ -5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} s^2 \\ s \\ s + \frac{6}{5} \end{pmatrix} = s^3 + 2s^2 - 5s - 6$

Für welches s stehen die beiden Vektoren senkrecht aufeinander?
d.h.: $s^3 + 2s^2 - 5s - 6 = 0 \rightarrow s_1 = -1, s_2 = 2, s_3 = -3$

Aufgabe 2 Bestimmen Sie die Länge der folgenden Vektoren und geben sie den zugehörigen Einheitsvektor an. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 1^2} = \sqrt{3} \Rightarrow \vec{e_a} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}}$

$\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3a \\ 4a \end{pmatrix}$ $|\vec{b}| = 5a \Rightarrow \vec{e_b} = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}}{5}$, $\vec{c} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $|\vec{c}| = 3 \cdot t \Rightarrow \vec{e_c} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{3}$

.

Aufgabe 3 Berechnen sie die Seitenlängen und die Innenwinkel des Dreiecks ABC mit Hilfe des Skalarproduktes.
Die Punkte des Dreiecks sind $A(1|2|3)$, $B(0|4|5)$ und $C(1|-2|0)$

Nur Beispielhaft für α.

$\vec{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ -3 \end{pmatrix}$, $|\vec{AB}| = 3$, $|\vec{AC}| = 5$

Mit

$$\cos\alpha = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AB}}{|\vec{AB}||\vec{AC}|}$$

folgt:

$$\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-14}{15}\right)$$

Aufgabe 4 Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte mit Hilfe von ϵ_{ijk}:

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)_1 = \epsilon_{111}(1\cdot 2) + \epsilon_{112}(1\cdot 1) + \epsilon_{113}(1\cdot 3) + \epsilon_{121}(1\cdot 2) + \epsilon_{131}(3\cdot 2) + \epsilon_{122}(1\cdot 1) + \epsilon_{133}(3\cdot 3) + \epsilon_{123}(1\cdot 3) + \epsilon_{132}(1\cdot 3) = \epsilon_{123}(1\cdot 3) + \epsilon_{132}(1\cdot 3) = 3 - 3 = 0$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)_2 = \epsilon_{213}(1\cdot 3) + \epsilon_{231}(3\cdot 2) = -3 + 6 = 3$

$\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)_3 = \epsilon_{312}(1\cdot 1) + \epsilon_{321}(1\cdot 2) = 1 - 2 = -1$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

(b) $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(c) $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \times \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 82 \\ -52 \\ -42 \end{pmatrix}$

(d) $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - a^2 \\ a^2 - 1 \\ 1 - a \end{pmatrix}$

Für welches a verschwindet das Vektorprodukt, und wie stehen dann die Vektoren zueienander?

Für $a = 1$ verschwindet das Kreuzprodukt. Die Vektoren stehen dann senkrecht aufeinander.

0.2 Matrizenalgebra

Aufgabe 5 Seien $A = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 3 \\ 8 & 1 & 4 \\ -12 & -4 & -5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 0 & 4 \\ -2 & 6 & 7 & 5 \\ -2 & 1 & t & 8 \\ 4 & -1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ und $c = \begin{pmatrix} 12 & -5 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 8 \\ -2 & 3 & -t & 2 \\ 13 & 48 & 0 & 9 \end{pmatrix}$

gegebene Matrizen, und $\vec{e} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}$, $\vec{f} = \begin{pmatrix} 1 \\ 11 \\ 16 \\ 6 \end{pmatrix}$ gegebene Vektoren.

Berechnen Sie:

(a) $\vec{e} \cdot A$, $\vec{f} \cdot B$
Nur mit den transponierten Vektoren möglich!!

(b) $A \cdot \vec{e} = \begin{pmatrix} 48 \\ 53 \\ -84 \end{pmatrix}$, $B \cdot \vec{f} = \begin{pmatrix} -6 \\ 206 \\ 57 - 16t11 \end{pmatrix}$

(c) $B + C = \begin{pmatrix} 20 & 3 & 4 & 5 \\ -4 & 6 & 8 & 13 \\ -4 & 4 & 0 & 10 \\ 17 & 47 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, A + C ist nicht möglich zu berechnen

(d) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -2 & 13 \\ -8 & 1 & 4 \\ -20 & 4 & -9 \end{pmatrix}$, Für welches t ist B invertierbar?? Eine Matrix M ist genau dann invertierbar, wenn $det(M) \neq 0$ ist $\Rightarrow$ Für $t \in R \setminus \{\frac{7}{11}\}$ ist B invertierbar.

Aufgabe 6 Sei $D = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, und $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$ gegeben. Berechnen Sie $\vec{x'} = D\vec{x}$. Danach bestimmen Sie den Winkel zwischen $\vec{x}$ und $\vec{x'}$. Wie würden Sie die Matrix D nennen?

$\vec{x'} = \begin{pmatrix} 3\cos\alpha - 4\sin\alpha \\ 3\sin\alpha + 4\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix}$,
$\vec{x'} \cdot \vec{x} = 25\cos\alpha$, $|\vec{x'}| = 5$, $|\vec{x}| = 5$
Mit

$$\cos\varphi = \frac{\vec{x'} \cdot \vec{x}}{|\vec{x'}||\vec{x}|}$$

folgt: $\cos\alpha = \cos\varphi$, d.h. der Vektor $\vec{x'}$ wurde um den Winkel α gedreht. D ist eine Drehmatrix für eine Drehung um die z-Achse.

Alle Angaben ohne Gewähr!