Prof. Dr. M. Garcia
T. Zier
T. Müller

Brückenkurs *Theoretische Physik*

Musterlösung zu Aufgabenblatt 2

Aufgabe 1

i) Es gilt:

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = y^5 \ , \quad \frac{\partial f_1}{\partial y} = 5xy^4 \ , \quad \frac{\partial f_1}{\partial z} = 1$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{z}{x} \ , \quad \frac{\partial f_2}{\partial y} = 0 \ , \quad \frac{\partial f_2}{\partial z} = \ln(x) \, .$$

Damit erhalten wir:

$$\partial^2_{x,y} f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(5xy^4\right) = 5y^4 \ ,$$

$$\partial^2_{y,x} f_1 = \frac{\partial^2 f_1}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(y^5\right) = 5y^4 \, .$$

Wir sehen, dass das Vertauschen der Ableitungs-Reihenfolge das Ergebnis nicht ändert (dies ist laut dem Satz von Schwarz immer so, wenn die zweiten partiellen Ableitungen stetig sind).

ii) In den gegebenen Funktionen treten die Variablen x, y, z völlig gleichberechtigt (symmetrisch) auf. Daher genügt es jeweils die Ableitung der gegebenen Funktionen nach z.B. der Variable x zu berechnen. Aus der jeweiligen Ableitung nach x erhält man dann die Ableitung nach y bzw. z indem man die Ersetzung $x \leftrightarrow y$ bzw. $x \leftrightarrow z$ vornimmt. Es gilt:

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}|\boldsymbol{r}| = \frac{\partial}{\partial x}\sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{1/2} = \frac{1}{2}\,2x\,\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1/2} = \frac{x}{|\boldsymbol{r}|}$$

Mit diesem Ergebnis können wir die Ableitungen der übrigen Funktionen leicht bestimmen, indem wir die Kettenregel anwenden. Zur Erleichterung der Schreibweise verwenden wir r für $|\boldsymbol{r}|$:

$$\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r}\right)\cdot \underbrace{\frac{\partial r}{\partial x}}_{\overset{\text{s.o.}}{=} x/r} = -\frac{1}{r^2}\cdot\frac{x}{r} = -\frac{x}{r^3}$$

$$\frac{\partial \phi_3}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^2} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\frac{1}{r^2}\right)\cdot\frac{\partial r}{\partial x} = -\frac{2}{r^3}\cdot\frac{x}{r} = -2\,\frac{x}{r^4}\, .$$

iii) Ein Vektorfeld leitet man partiell ab, indem man jede Komponente partiell ableitet:

$$\frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial x} = \begin{pmatrix} y \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \ , \quad \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial y} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ 2y \end{pmatrix} \ , \quad \frac{\partial \boldsymbol{V}}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2z \\ -1 \end{pmatrix} \, .$$

Aufgabe 2

In dieser Aufgabe möchten wir den Umgang mit der Kettenregel einüben. Für die potentielle Energie gilt $E_{pot} = q\,\phi(\boldsymbol{r}, t)$. Für die partielle Ableitung der potentiellen Energie nach der Zeit t erhalten wir:

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial t} = q\,\frac{\partial \phi}{\partial t} = \alpha\,\sin(\alpha t)\,\frac{qQ}{|\boldsymbol{r}|} \overset{|\boldsymbol{r}|=vt}{=} \alpha\,\sin(\alpha t)\,\frac{qQ}{vt}\,.$$

Für die Ableitungen der Koordinaten x_1, x_2 und x_3 nach der Zeit t gilt:

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(vt) = v\,, \qquad \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t} = 0\,.$$

Da die zeitlichen Ableitungen von x_2 und x_3 verschwinden müssen wir zur Anwendung der Kettenregel lediglich die partielle Ableitung der potentiellen Energie nach x_1 bestimmen

$$\frac{\partial E_{pot}}{\partial x_1} = q\,\frac{\partial \phi}{\partial x_1} = \sin(\alpha t)\,qQ\,\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{1}{|\boldsymbol{r}|}\right) \overset{\text{siehe Aufg. 1}}{=} -\sin(\alpha t)\,qQ\,\frac{x_1}{|\boldsymbol{r}|^3} \overset{|\boldsymbol{r}|=x_1=vt}{=} -\sin(\alpha t)\,\frac{qQ}{(vt)^2}$$

Nun können wir die Kettenregel anwenden um die totale zeitliche Änderung der potentiellen Energie zu bestimmen:

$$\frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial t} + \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial E_{pot}}{\partial x_i}\,\frac{\mathrm{d}x_i}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial E_{pot}}{\partial t} + \frac{\partial E_{pot}}{\partial x_1}\,\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = \alpha\,\sin(\alpha t)\,\frac{qQ}{vt} - \sin(\alpha t)\,\frac{qQ}{v\,t^2}\,.$$

Natürlich hätten wir diese Aufgabe auch einfacher lösen können, indem wir $|\boldsymbol{r}(t)| = vt$ in den Ausdruck für $E_{pot}(\boldsymbol{r}, t)$ eingesetzt hätten um einen Ausdruck für E_{pot} zu erhalten, welcher lediglich von der Zeit abhängt:

$$E_{pot}(t) = \sin(\alpha t)\,\frac{qQ}{vt} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}E_{pot}}{\mathrm{d}t} = \alpha\,\sin(\alpha t)\,\frac{qQ}{vt} - \sin(\alpha t)\,\frac{qQ}{v\,t^2}\,.$$

Aufgabe 3

Es gilt:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3} a_j x_j = a_i \quad \Rightarrow \quad \nabla\,(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \boldsymbol{a}\,.$$

Die partiellen Ableitungen der Funktionen $|\boldsymbol{r}|$, $|\boldsymbol{r}|^{-1}$ und $|\boldsymbol{r}|^{-2}$ habe wir bereits in Aufgabe 1 bestimmt. Da die partiellen Ableitungen die Komponenten des Gradienten sind können wir die Gradienten dieser Funktionen sofort angeben:

$$\nabla\,|\boldsymbol{r}| = \frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|} = \boldsymbol{e}_r\,, \quad \nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}|} = -\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^3} = -\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^2}\,, \quad \nabla\frac{1}{|\boldsymbol{r}|^2} = -2\,\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|^4} = -2\,\frac{\boldsymbol{e}_r}{r^3}\,,$$

wobei $\boldsymbol{e}_r = \boldsymbol{r}/\,|\boldsymbol{r}|$ der Einheitsvektor in radialer Richtung und $r = |\boldsymbol{r}|$ ist.

Aufgabe 4

Es gilt:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r} = \sum_{i=1}^{3}\frac{\partial x_i}{\partial x_i} = 3$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}) = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\,(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})_k = \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\underbrace{\sum_{i,j=1}^{3}\varepsilon_{ijk}x_i a_j}_{=(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})_k} = \sum_{i,j,k=1}^{3}\varepsilon_{ijk}a_j\underbrace{\frac{\partial x_i}{\partial x_k}}_{=\delta_{ik}} = \sum_{j,k=1}^{3}\underbrace{\varepsilon_{kjk}}_{=0}a_j x_k = 0\,.$$

Aufgabe 5

Beweis der Rechenregel (wir lassen das Argument $\boldsymbol{r}$ weg um eine übersichtlichere Schreibweise zu ermöglichen):

$$\nabla \cdot (\phi\, \boldsymbol{V}) = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_i} (\phi\, V_i) = \sum_{i=1}^{3} \left(\phi\, \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + V_i\, \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = \sum_{i=1}^{3} \left(\phi\, \frac{\partial V_i}{\partial x_i} + V_i\, (\nabla \phi)_i \right) =$$

$$= \phi\, \underbrace{\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial V_i}{\partial x_i}}_{=\nabla \cdot \boldsymbol{V}} + \underbrace{\sum_{i=1}^{3} V_i\, (\nabla \phi)_i}_{=\boldsymbol{V} \cdot \nabla \phi} = \phi\, \nabla \cdot \boldsymbol{V} + \boldsymbol{V} \cdot \nabla \phi\,.$$