Frequenzanalyse

Überlagerung von Schwingungen

1. gleiche Frequenz

Überlagern sich zwei Schwingungen mit gleicher Frequenz erhält man eine Schwingung mit der selben Frequenz, aber andere Amplitude und Phase.

$\rightarrow$ Demonstration am Computer

2. verschiedene Frequenzen

Bei Schwingungen unterschiedlicher Frequenz erhält man eine Schwebung

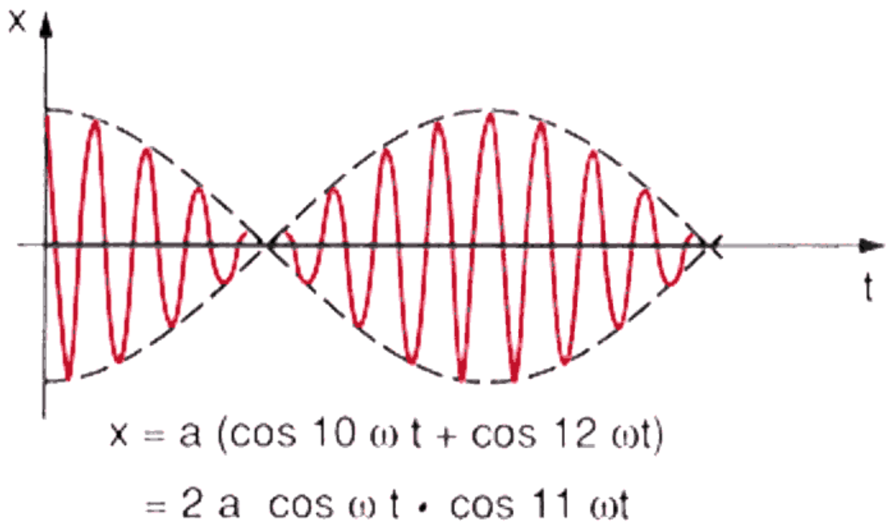
$$x_1(t) = A\cos(\omega_1 t) \qquad\qquad x_2(t) = A\cos(\omega_2 t)$$

Mit einem Additionstheorem ergibt sich

$$x_1(t) + x_2(t) = 2A\cos(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t)\cos(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t)$$

Liegen die Frequenzen ω_1 und ω_2 dicht beieinander, ergibt der Faktor

$$\cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right)$$



eine einhüllende Funktion

und der Faktor

$$\cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right)$$

die „scheinbare Schwingungsfrequenz“.

Eine Frequenzanalyse zeigt aber, dass die mittlere Frequenz $(\omega_1 + \omega_2) / 2$ nicht wirklich in der Schwingung enthalten ist.

Darstellung periodischer Funktionen als Überlagerung mehrerer harmonischer Schwingungen:

Jede periodische Funktion (Schwingungsdauer $T=2\pi/\omega$) kann als unendliche Summe über harmonische Schwingungen geschrieben werden:

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)$$

Die Koeffizienten (Vorfaktoren) a_n und b_n geben an, wie groß der Anteil der jeweiligen Frequenz in der Funktion *x(t)* ist.

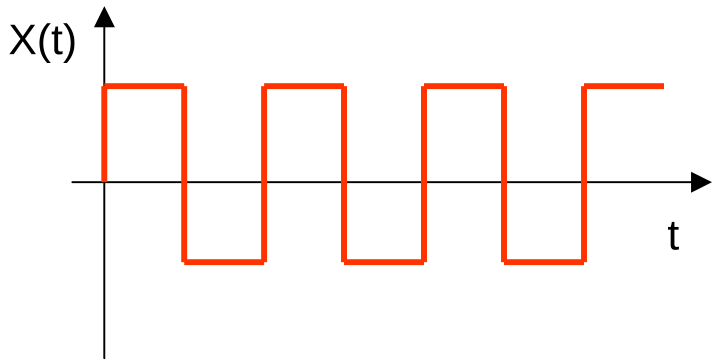
Aus *x(t)* lassen sich die Koeffizienten berechnen (Frequenzanalyse):

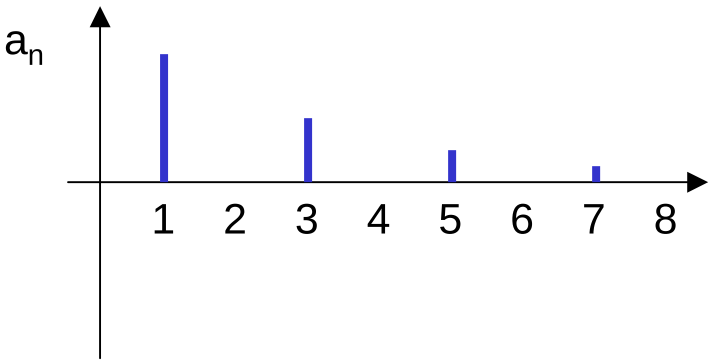
$$a_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \cos(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

$$b_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) \sin(n\omega t)\,\mathrm{d}t$$

Veranschaulichung am Computer:

Beispiel Rechteckfunktion:





Weitere Beispiele:

Dreieck, Sägezahn, ...

Nur $a_n \neq 0$ und $b_n \neq 0$ alle anderen $a_i = b_i = 0$: Beobachtung der Phase

Nur $a_n \neq 0$ und $a_{n+1} \neq 0$ alle anderen $a_i = b_i = 0$: Schwebung

Versuch: Zungenfrequenzmesser

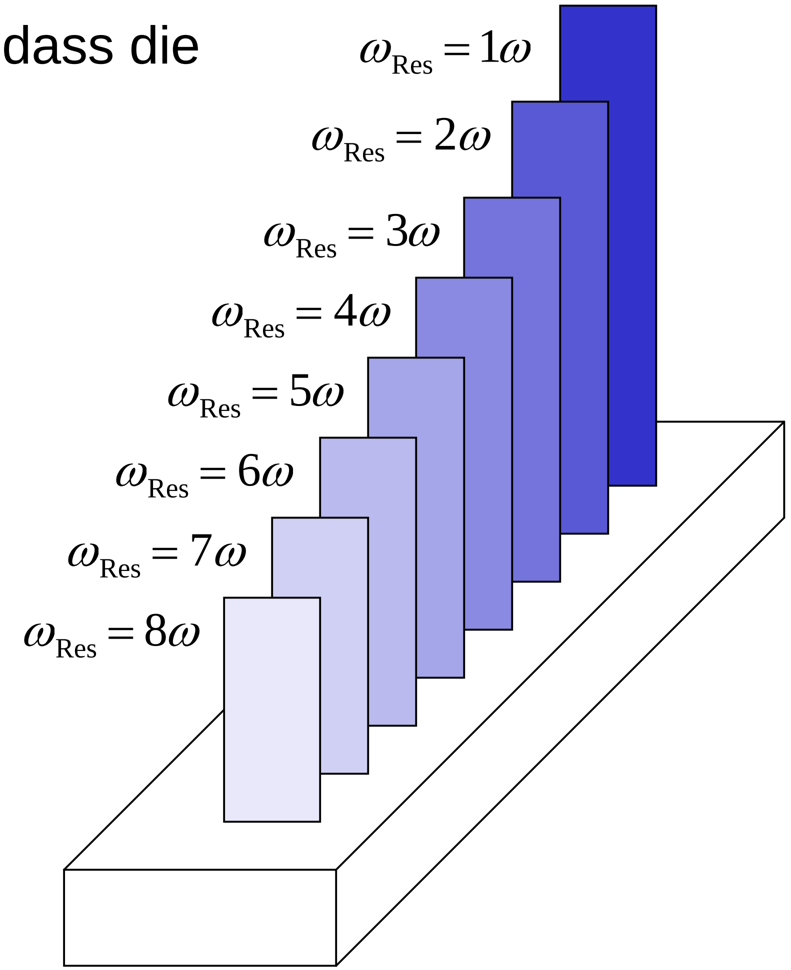
Blattfedern sind so abgestimmt, dass sie die Resonanzfrequenzen $n\omega$ haben.

Die Dämpfung der Federn sei schwach, so dass die Resonanzkurve schmal ist.

Jede Feder koppelt nur an den Anteil der Schwingung mit der Frequenz $n\omega$.

$\rightarrow$ Fourier-Zerlegung

Anharmonische Schwingungen sind aus mehreren Frequenzen zusammengesetzt.



<u>Frequenzanalyse **nicht** periodischer Funktionen</u>

Nicht periodische Funktionen können als Überlagerung eines kontinuierlichen Frequenzspektrums dargestellt werden.

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} A(\omega)\, e^{-i\omega t}\, \mathrm{d}\omega$$

Die Funktion A(ω) gibt an, wie groß der Anteil der jeweiligen Frequenz in der Funktion *x(t)* ist.

Aus *x(t)* lässt sich die Funktion A(ω) (das Spektrum) berechnen:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{i\omega t}\, \mathrm{d}t$$

Statt komplexem A(ω) könnte man auch reelle a(ω) und b(ω) verwenden und in sin(ωt) und cos(ωt) zerlegen.

Beispiel: gedämpfte Schwingung:

Eine komplexe Lösung des schwach gedämpften Pendels lautet:

$$x(t) = e^{-\lambda t - i\omega_0 t} = e^{-(\lambda + i\omega_0)t} \qquad \text{für} \;\; t > 0 \quad \text{sonst} \quad x = 0$$

Die Frequenzanalyse ergibt:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(\lambda + i\omega_0)t} \, e^{i\omega t} \, \mathrm{d}t$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty e^{-(\lambda + i(\omega_0 - \omega))t} \, \mathrm{d}t$$

$$A(\omega) = \frac{-\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}{\lambda + i(\omega_0 - \omega)} e^{-(\lambda + i(\omega_0 - \omega))t} \Big|_{t=0}^{t=\infty}$$

$$A(\omega) = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}}{\lambda + i(\omega_0 - \omega)}$$

Betragsquadrat der Spektralfunktion:

$$\left|A(\omega)\right|^2 = \frac{\frac{1}{2\pi}}{(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2}$$

Diese Funktion nennt man Lorentzfunktion.