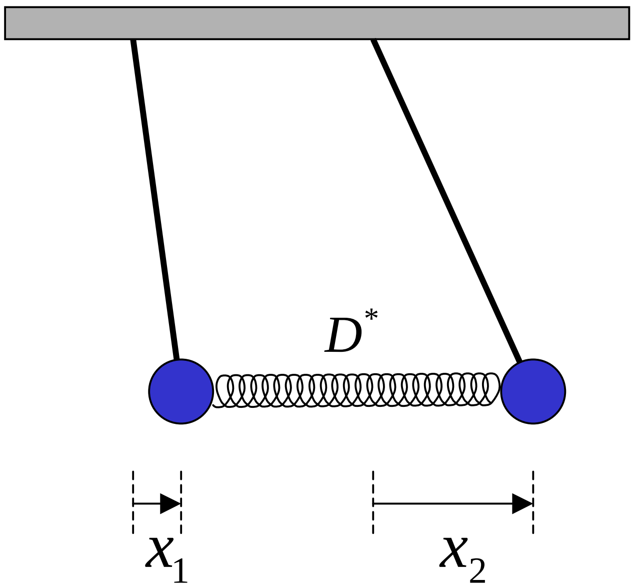
Gekoppelte Schwingungen

Durch die Kopplung wird Energie vom einen Pendel auf das Andere übertragen.



Ist die Federkraft schwach im Vergleich zur Rückstellkraft der Pendel, dann wird die Energie langsam hin und her übertragen.

Man beobachtet eine Art „Schwebung“

Fadenpendel wird linearisiert: F = D x

Die Bewegungsgleichungen lauten dann:

$$m\ddot{x}_1 = -D\,x_1 + D^*(x_2 - x_1)$$

$$m\ddot{x}_2 = -D\,x_2 - D^*(x_2 - x_1)$$

Zur Lösung macht man den Ansatz:

$$x_1 = A_1\, e^{i\omega t}$$

$$x_2 = A_2\, e^{i\omega t}$$

Beide Differentialgleichungen müssen gleichzeitig erfüllt sein.

Einsetzen liefert:

$$m\omega^2 A_1 - D\, A_1 + D^*(A_2 - A_1) = 0$$

$$m\omega^2 A_2 - D\, A_2 - D^*(A_2 - A_1) = 0$$

Lineares Gleichungssystem für Amplituden. Matrixschreibweise:

$$\begin{pmatrix} m\omega^2 - D - D^* & D^* \\ D^* & m\omega^2 - D - D^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = 0$$

Das Gleichungssystem hat eine Lösung, wenn die Determinante =0 ist.

$$(m\omega^2 - D - D^*)^2 - D^{*2} = 0$$

Es folgt:

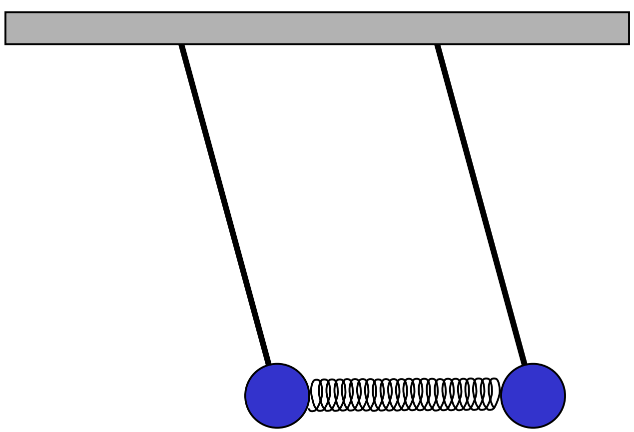
$$m\omega^2 - D - D^* = \pm D^*$$

Daraus ergeben sich die möglichen Kreisfrequenzen

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{D}{m}} \qquad \omega_2 = \sqrt{\frac{D + 2D^*}{m}}$$

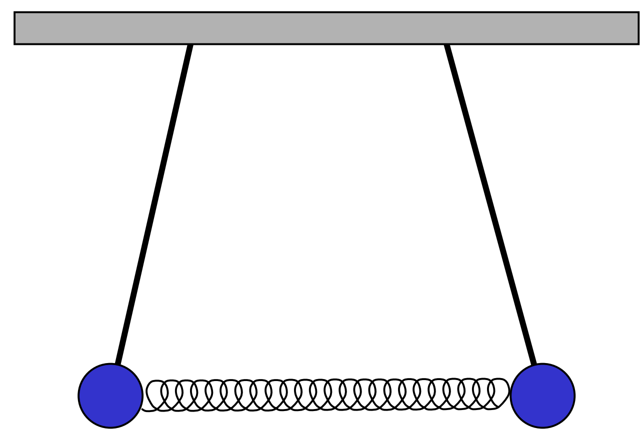
Es gibt zwei <u>Eigenschwingungen</u> des Systems.

gleichphasiges Schwingen
Feder entspannt



ω_1

gegenphasiges Schwingen
Feder maximal gespannt



ω_2

Die Eigenschwingungen sind:

$$x_1 = A_{11}\, e^{i\omega_1 t} \qquad x_2 = A_{21}\, e^{i\omega_1 t}$$

bzw.

$$x_1 = A_{12}\, e^{i\omega_2 t} \qquad x_2 = A_{22}\, e^{i\omega_2 t}$$

Alle möglichen Schwingungen des Systems sind eine Linearkombination aus den beiden Eigenschwingungen

$$x_1 = a\, A_{11}\, e^{i\omega_1 t} + b\, A_{12}\, e^{i\omega_2 t}$$

$$x_2 = a\, A_{21}\, e^{i\omega_1 t} + b\, A_{22}\, e^{i\omega_2 t}$$

Oder zusammengefasst geschrieben:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} A_{11}\, e^{i\omega_1 t} \\ A_{21}\, e^{i\omega_1 t} \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} A_{12}\, e^{i\omega_2 t} \\ A_{22}\, e^{i\omega_2 t} \end{pmatrix}$$

Die beiden Eigenschwingungen in zusammengefasster Schreibweise

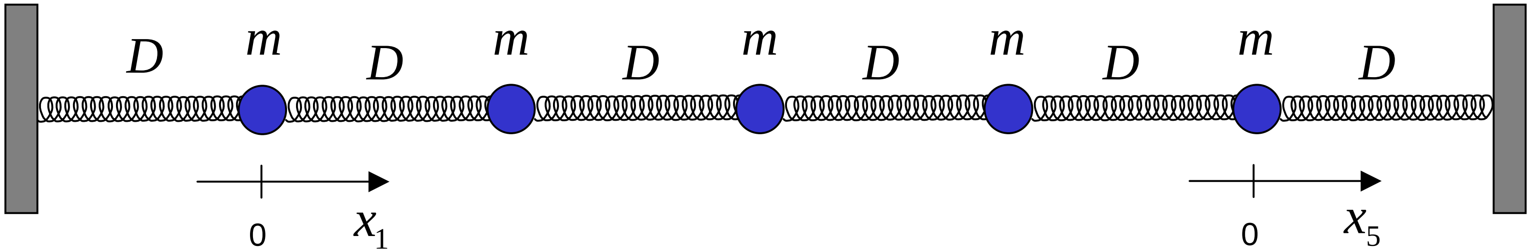
$$\begin{pmatrix} A_{11}\, e^{i\omega_1 t} \\ A_{21}\, e^{i\omega_1 t} \end{pmatrix} \qquad \text{und} \qquad \begin{pmatrix} A_{12}\, e^{i\omega_2 t} \\ A_{22}\, e^{i\omega_2 t} \end{pmatrix}$$

nennt man <u>Eigenfunktionen.</u>

Sie gehören zu den <u>Eigenfrequenzen</u> ω_1 und ω_2

Diese Formulierung spielt in der Quantenmechanik eine zentrale Rolle.

Kette aus fünf gleichen Massen zwischen gleichen Federn



Dgl‘s:

$$m\ddot{x}_1 = -D\,x_1 + D\,(x_2 - x_1)$$
$$m\ddot{x}_2 = -D\,(x_2 - x_1) + D\,(x_3 - x_2)$$
$$m\ddot{x}_3 = -D\,(x_3 - x_2) + D\,(x_4 - x_3)$$
$$m\ddot{x}_4 = -D\,(x_4 - x_3) + D\,(x_5 - x_4)$$
$$m\ddot{x}_5 = -D\,(x_5 - x_4) - D\,x_5$$

Als Matrix

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}_1\\ \ddot{x}_2\\ \ddot{x}_3\\ \ddot{x}_4\\ \ddot{x}_5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2D & D & 0 & 0 & 0\\ D & -2D & D & 0 & 0\\ 0 & D & -2D & D & 0\\ 0 & 0 & D & -2D & D\\ 0 & 0 & 0 & D & -2D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\\ x_5\end{pmatrix}$$

Jede Masse koppelt nur an ihre nächsten Nachbarn.

Die Kraft hängt von der Auslenkung der nächsten Nachbarn ab.

Ansatz einer harmonischen Schwingung für alle Massen

$$x_1 = A_1\, e^{i\omega t}$$

....

$$x_5 = A_5\, e^{i\omega t}$$

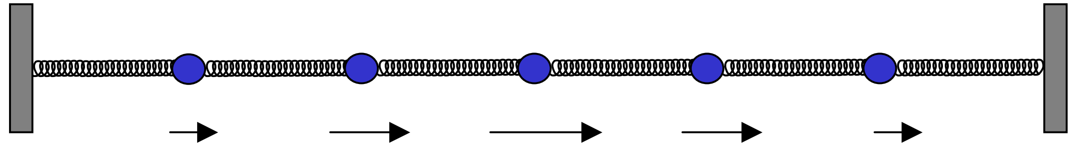
Liefert die Eigenwertgleichung:

$$\begin{pmatrix} -2D/m & D/m & 0 & 0 & 0 \\ D/m & -2D/m & D/m & 0 & 0 \\ 0 & D/m & -2D/m & D/m & 0 \\ 0 & 0 & D/m & -2D/m & D/m \\ 0 & 0 & 0 & D/m & -2D/m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = -\omega^2 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix}$$

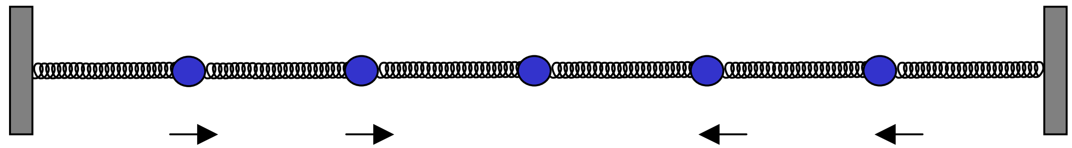
Ganz ähnlich kann man die Schrödinger-Gleichung schreiben.
(Quantenmechanik)

Eine komplizierte Rechnung liefert die Eigenwerte und Eigenfunktionen:

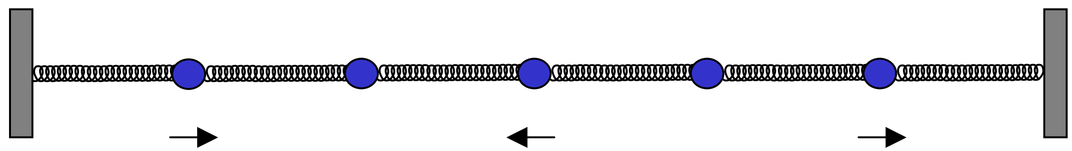
$$\omega_a = 0.517\sqrt{D/m}$$



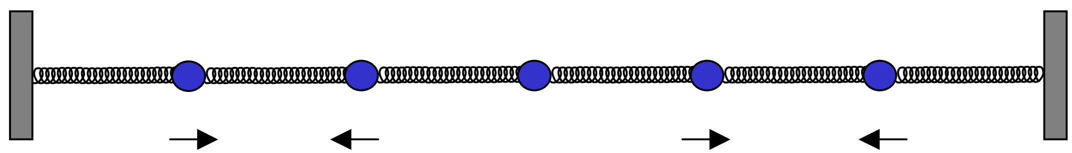
$$\omega_b = 1.000\sqrt{D/m}$$



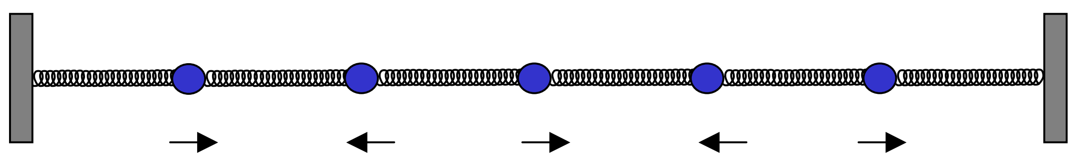
$$\omega_c = 1.414\sqrt{D/m}$$



$$\omega_d = 1.732\sqrt{D/m}$$



$$\omega_e = 1.932\sqrt{D/m}$$



Wichtiges Model zur Beschreibung von Gitterschwingungen in der Festkörperphysik (Phononen).