Dispersion, nicht-lineare Effekte, Solitonen

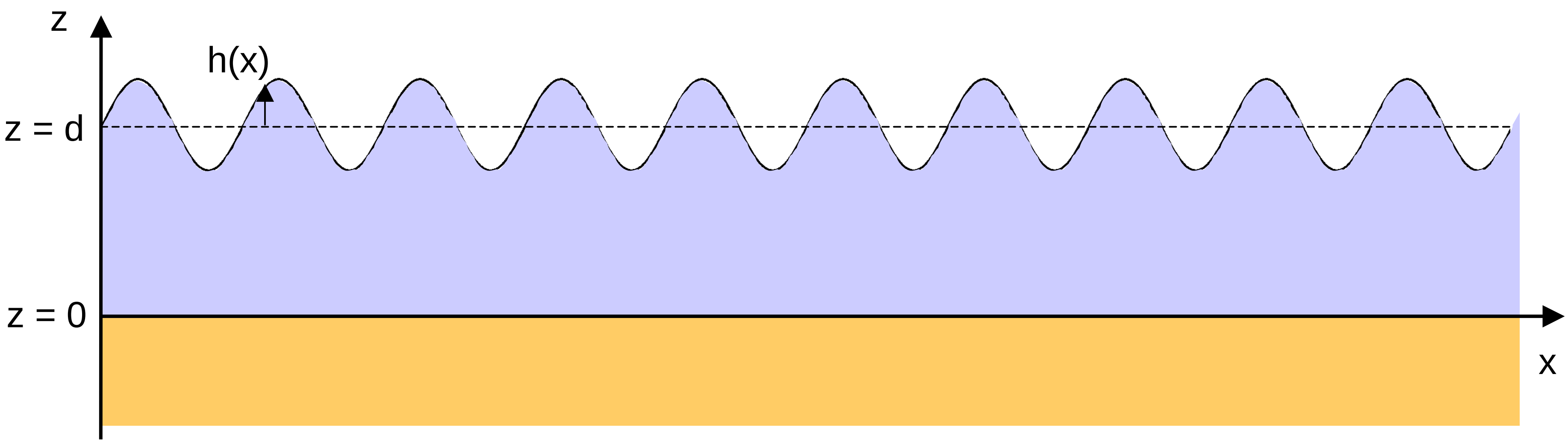
Als Beispiel für Dispersion und Effekte aufgrund von Nichtlinearität verwenden wir Oberflächenwellen auf Wasser.

An der Wasseroberfläche wirken Kräfte aufgrund der Gravitation und der Oberflächenspannung. Die Kräfte „versuchen die Oberfläche zu ebenen".

Bei kurzen Wellenlängen überwiegen die Kräfte durch Oberflächenspannung (Kapillarwellen λ<1cm), bei großen Wellenlängen überwiegen Kräfte durch den Schweredruck (Schwerewellen).

Das Verhalten der beiden Arten von Wellen ist unterschiedlich, wir beschränken uns auf Schwerewellen.

Zur Vereinfachung betrachten wir das Wasser als inkompressibel und reibungsfrei. Außerdem seien keine Wirbel vorhanden.



Berechnung des Strömungsfeldes des Wassers unter der welligen Oberfläche:

Aus der Kontinuitätsgleichung folgt für die inkompressible Flüssigkeit:

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = -\rho \operatorname{div} \vec{u} = 0 \qquad \text{weil} \qquad \rho = \text{const.}$$

also

$$\operatorname{div} \vec{u} = 0$$

Mathematischer Trick:

Da es keine Wirbel gibt, kann man das Geschwindigkeitsfeld als Gradient eines „Geschwindigkeitspotentials“ schreiben

$$\vec{u} = \mathrm{grad}\,\varphi$$

Aus der Kontinuitätsgleichung wird damit

$$\mathrm{div}\,\vec{u} = \mathrm{div}\;\mathrm{grad}\;\varphi = 0$$

Da Anwendung von Divergenz und Gradient der Anwendung des Laplace-Operators entspricht, folgt:

$$\Delta\,\varphi = 0$$

Da die y-Koordinate keine Rolle spielt ergibt sich

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = 0$$

Differentialgleichung

Nun müssen noch die Randbedingungen aufgestellt werden:

Randbedingungen:

Am Boden des Gefäßes (z=0) muss die senkrechte Komponente der Geschwindigkeit gleich Null sein.

$$u_z = 0$$

Für das Geschwindigkeitspotential heißt das:

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}z} = 0 \qquad \text{bei} \quad z = 0 \qquad \text{Randbedingung unten}$$

An Oberfläche, d.h. genauer gesagt an der Position *z=d* herrscht durch die Wellenhöhe ein Schweredruck von

$$p = \rho g h$$

Verwenden wir die Eulergleichung

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\vec{u}}_{\substack{\text{klein weil} \\ u \text{ klein ist}}} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\, p$$

ergibt sich für kleine Geschwindigkeiten (linearisierte Gleichung)

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

Für das Geschwindigkeitspotential folgt

$$\mathrm{grad}\,\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p \qquad \Rightarrow \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\,p$$

Einsetzen von $p = \rho g h$ liefert die Randbedingung bei $z=d$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -g\,h \qquad \text{bei} \quad z = d$$

Einmal ableiten nach der Zeit ergibt

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -g\,\frac{\partial h}{\partial t} \quad = -g\,u_z \quad = -g\,\frac{\partial \varphi}{\partial z}$$

<u>Randbedingung oben</u>

Die Lösung der Differentialgleichung mit der unteren Randbedingungen lautet

$$\varphi(x,z,t) = A\ \cosh kz\ \ \cos(kx-\omega t)$$

Überprüfen der Lösung:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = -kA\cosh kz\ \ \sin(kx-\omega t)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = -k^2 A\ \cosh kz\ \ \cos(kx-\omega t)$$

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z} = kA\sinh kz\ \ \cos(kx-\omega t)$$

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = k^2 A\ \cosh kz\ \ \cos(kx-\omega t)$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$(-k^2+k^2)\ A\ \cosh kz\ \ \cos(kx-\omega t) = 0$$ stimmt also

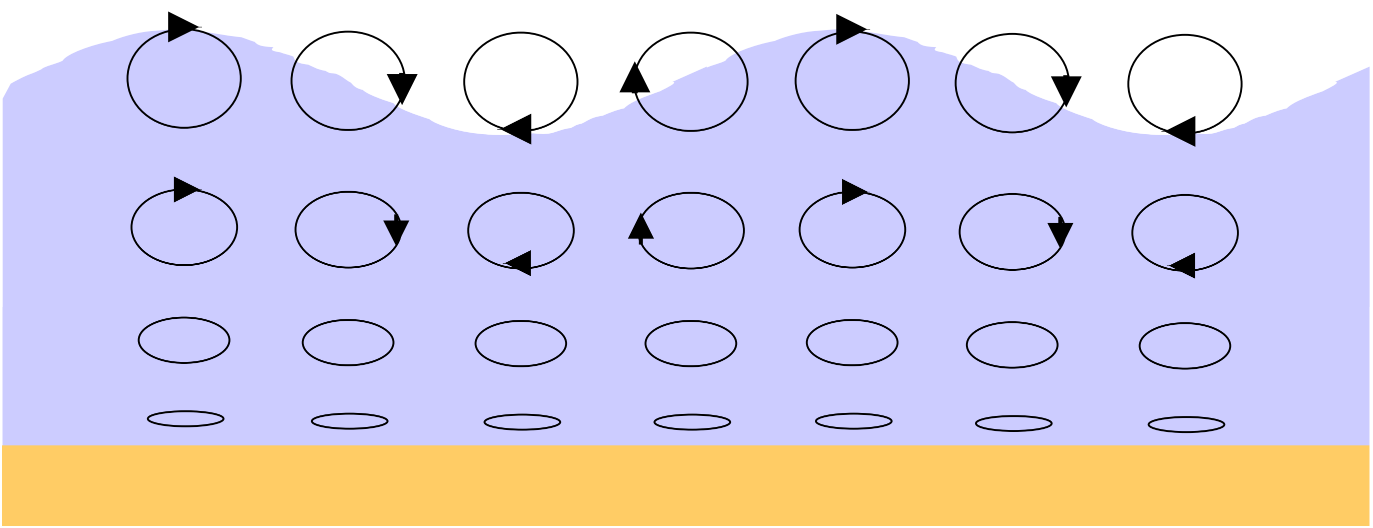
Aus dem Geschwindigkeitspotential

$$\varphi(x,z,t) = A\ \cosh kz\ \ \cos(kx - \omega t)$$

Berechnung des Geschwindigkeitsfeldes

$$u_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = -kA \cosh kz\ \ \sin(kx - \omega t)$$

$$u_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} = kA \sinh kz\ \ \cos(kx - \omega t)$$



Die untere Randbedingung ist erfüllt weil

$$u_z = kA \sinh kz \ \ \cos(kx - \omega t) = 0 \qquad \text{bei} \quad z = 0$$

Einsetzen der Lösung in die obere Randbedingung ergibt den Zusammenhang zwischen ω von *k* und damit die Phasengeschwindigkeit der Welle

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} = -\omega A \cosh kz \ \ \sin(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = -\omega^2 A \cosh kz \ \ \cos(kx - \omega t)$$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = kA \sinh kz \ \ \cos(kx - \omega t)$$

Einsetzen in die obere Randbedingung ergibt

$$-\omega^2 A \cosh kz \ \ \cos(kx - \omega t) = -gkA \sinh kz \ \ \cos(kx - \omega t)$$

Durch Auflösen nach ω erhält man den Zusammenhang zwischen ω von *k*

$$\omega^2 = gk \tanh kz \qquad \text{bei} \qquad z = d$$

also

$$\omega(k) = \sqrt{gk \tanh kd}$$

Für große Wassertiefen $d \gg \lambda$ also $kd \gg 1$ ist $\tanh kd \cong 1$

$$\omega(k) \cong \sqrt{gk}$$

Die Phasengeschwindigkeit der Welle

$$v = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}} = \sqrt{\frac{g\lambda}{2\pi}}$$

hängt von der Wellenlänge ab. Dies bezeichnet man als <u>Dispersion</u>

Wirft man einen Stein ins Wasser bildet sich eine Welle mit begrenzter Länge, ein s.g. Wellenpaket.

Nur unendlich lange Wellen bestehen aus einer einzigen Wellenlänge, Wellenpakete bestehen aus vielen dicht beieinander liegenden Wellenlängen.

Die verschiedenen Anteile laufen mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten aufgrund der Dispersion.

Das Wellenpaket wird daher länger und länger, d.h. es läuft auseinander.

Dieser Effekt tritt an vielen Stellen in der Physik auf:
z.B. Lichtblitz beim Durchgang durch Glas, Elektronenwelle, etc.

Bei Wasserwellen sind die langen Wellenlängen am schnellsten und überholen die Wellen mit kürzeren Wellenlängen. Die ganz kurzen Wellenlängen sind Kapillarwellen und sind aus anderen Gründen schneller.

Nichtlineare Effekte:

Dispersion ist ein Effekt der auch bei linearen Differentialgleichungen auftritt.

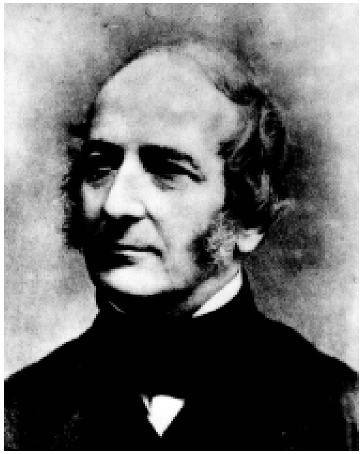
Bei großen Wellen im seichten Wasser kann die Euler-Gleichung nicht mehr linearisiert werden.

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{u}}_{\text{vergleichbar groß}} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

Es treten nichtlineare Effekte auf. Dadurch können Solitonen entstehen.

Bei Wellen in nichtlinearen Medien ist die Geschwindigkeit nicht nur von der Wellenlänge sondern auch von der Amplitude abhängig.

Dispersion und Amplitudenabhängigkeit können sich gegenseitig aufheben. Es bildet sich ein einziger Wellenberg mit bestimmter Form, der aber nicht wie ein Wellenpaket auseinander läuft: ein Soliton



Im Jahre 1934 beobachtete John Scott Russel erstmals ein solches Soliton.

Er schrieb:

Ich beobachtete ein Boot das von zwei Pferden schnell entlang eines schmalen Kanals gezogen wurde. Als das Boot stoppte – stoppte nicht das Wasser der Bugwelle. Es löste sich vom Boot mit großer Geschwindigkeit und nahm die Form einer solitären Erhebung an, ein runder, glatter wohl-definierter Wasserberg, der seinen Kurs entlang des Kanals fortsetzte ohne seine Form und Geschwindigkeit zu ändern. Ich folgte ihm auf meinem Pferd und überholte ihn bei einer Geschwindigkeit von 8-9 Meilen pro Stunde. Die ursprüngliche Form war 30 Fuß lang und 1 bis 1 ½ Fuß hoch, mit der Zeit langsam an Höhe abnehmend. Nach einer Jagd von 1-2 Meilen verlor ich ihn in den Windungen des Kanals.

Rekonstruktion der Beobachtung von John Scott Russel am Originalschauplatz in Edinburgh