

# Deterministisches Chaos

Um 1900 Henri Poincaré:

„Bewegung von zwei Planeten um die Sonne kann zu sehr komplizierten Bahnen führen.“ (chaotische Bahnen)

Seit ca. 1970

Entwicklung der Chaostheorie basierend auf numerischen Berechnungen.

Allgemein:

Im Alltag tritt sehr komplexes Verhalten auf:

1. Komplexe Systeme mit vielen Teilchen und Parametern.
2. Einfache Systeme mit sehr komplizierten Bewegungen (Bahnen).

In der Vorlesung:

Einfache Systeme mit einfachen (z.B. periodische) Bahnen.

→ Vorlesung erweckt falschen Eindruck (z.B. Vorhersagbarkeit der Bahnen)

Bewegungen die durch lineare Differentialgleichungen beschrieben werden sind zuverlässig berechenbar.

Lineare Differentialgleichung:

$$a\ddot{x}(t) + b\dot{x}(t) + cx(t) = F(t)$$

Die Gleichung ist eine lineare Kombination der Ableitungen von  $x(t)$

Nichtlineare Differentialgleichung z.B.:

$$\ddot{x}(t) + \dot{x}^2(t) + \sin(x(t)) = F(t)$$

Es treten nichtlineare Verknüpfungen der Ableitungen von  $x(t)$  auf.

Bei nichtlinearen Differentialgleichungen können chaotische Bewegungen auftreten. Vorhersagen über längere Zeiten sind nicht möglich.

## Versuch: Doppelpendel

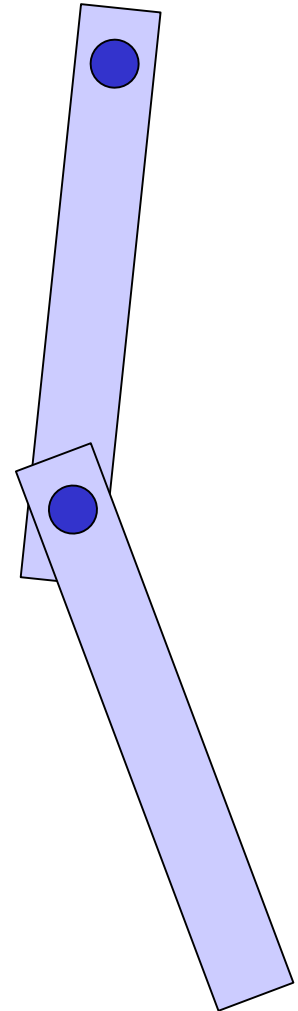
Bei kleinen Auslenkungen laufen beide Pendel fast gleich. Kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen verursachen kleine Änderungen der Bahnkurve.

Bei großen Auslenkungen anfänglich ähnlich, später vollkommen verschiedene Bahnen.

Kleine Abweichungen in den Anfangsbedingungen vergrößern sich mit der Zeit sehr stark.

→ Chaotisches Verhalten

Langfristige Vorhersagen sind nicht möglich, da die Anfangsbedingungen nicht beliebig genau bekannt sind.



Differentialgleichungen des Doppelpendels sind nichtlinear:

$$2l\ddot{\varphi}_1 + l\ddot{\varphi}_2 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l\dot{\varphi}_2^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -2g \sin \varphi_1$$

$$l\ddot{\varphi}_1 \cos(\varphi_1 - \varphi_2) + l\ddot{\varphi}_2 - l\dot{\varphi}_1^2 \sin(\varphi_1 - \varphi_2) = -g \sin \varphi_2$$

Herleitung siehe theoretische Physik.

Numerische Lösung:

Verschiedene Anfangsbedingungen:

$$\varphi_1 = 90^\circ \quad \omega_1 = 0^\circ \quad \varphi_2 = 180^\circ \quad \omega_2 = 0^\circ$$

$$\varphi_1 = 170^\circ \quad \omega_1 = 0^\circ \quad \varphi_2 = 180^\circ \quad \omega_2 = 0^\circ$$

Gleichzeitig zwei Pendel mit leicht unterschiedlichen Anfangsbedingungen:

$$\varphi_1 = 90^\circ \quad \omega_1 = 0^\circ \quad \varphi_2 = 180^\circ \quad \omega_2 = 0^\circ$$

$$\varphi'_1 = 90^\circ \quad \omega'_1 = 0^\circ \quad \varphi'_2 = 180.00001^\circ \quad \omega'_2 = 0^\circ$$

## Determinismus in der klassischen Physik muss aufgegeben werden

Zu jedem Satz von Anfangsbedingungen  $(\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2)$  gehört genau eine Bahnkurve.

Durch die Anfangsbedingungen ist die Bahnkurve für alle Zeiten festgelegt. Kenntnis der Anfangsbedingungen ist limitiert!

1. Experimenteller Fehler beim Messen der Anfangsbedingungen
2. Heisenbergs Unschärferelation limitiert prinzipiell:

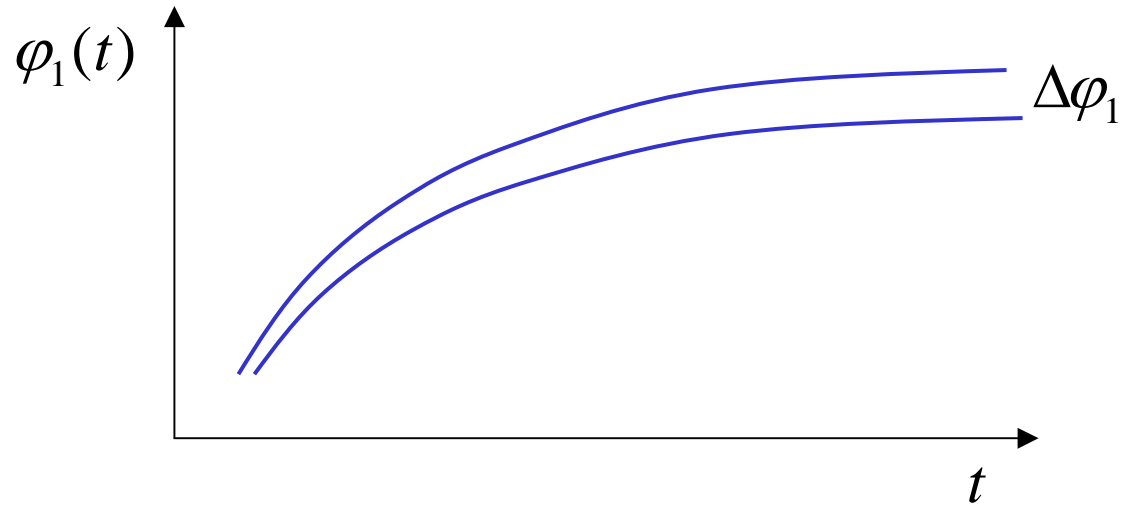
$$\Delta x_1 \cdot \Delta v_1 \geq \hbar / m \quad , \quad \Delta \varphi_1 \cdot \Delta \omega_1 \geq \hbar / J$$

Bei linearen Dgl's. wächst eine Abweichung  $(\Delta\varphi_1, \Delta\omega_1, \Delta\varphi_2, \Delta\omega_2)$  gegenüber einer anderen Bahnkurve linear mit der Zeit an.

Bei chaotischem Verhalten wächst die Abweichung  $\delta = (\Delta\varphi_1, \Delta\omega_1, \Delta\varphi_2, \Delta\omega_2)$  exponentiell mit der Zeit an:

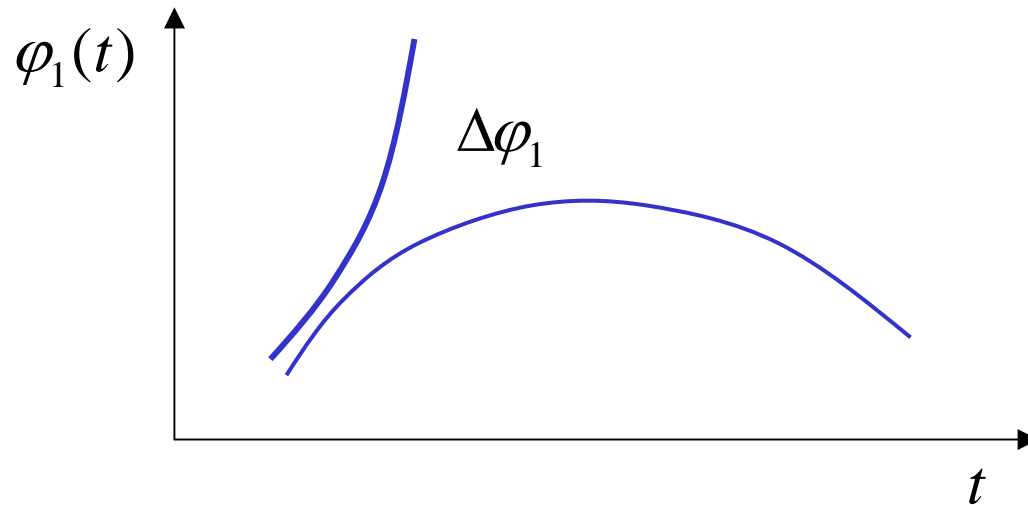
$$|\delta(t)| = e^{\lambda t} |\delta(0)| \quad \lambda: \text{Ljapunov-Exponent}$$

## Nicht-chaotisches Verhalten



$$\Delta\varphi_1(t) = (a + bt) \Delta\varphi_1(0)$$

## Chaotisches Verhalten



$$\Delta\varphi_1(t) = e^{\lambda t} \Delta\varphi_1(0)$$

## Darstellung im Phasenraum

Der komplette Satz von Anfangsbedingungen  $(\varphi_1, \omega_1, \varphi_2, \omega_2)$  wird als Vektor im Phasenraum aufgefasst (hier vierdimensional).

Beispiel: normales Fadenpendel

Anfangsbedingungen:  $(\varphi, \omega)$

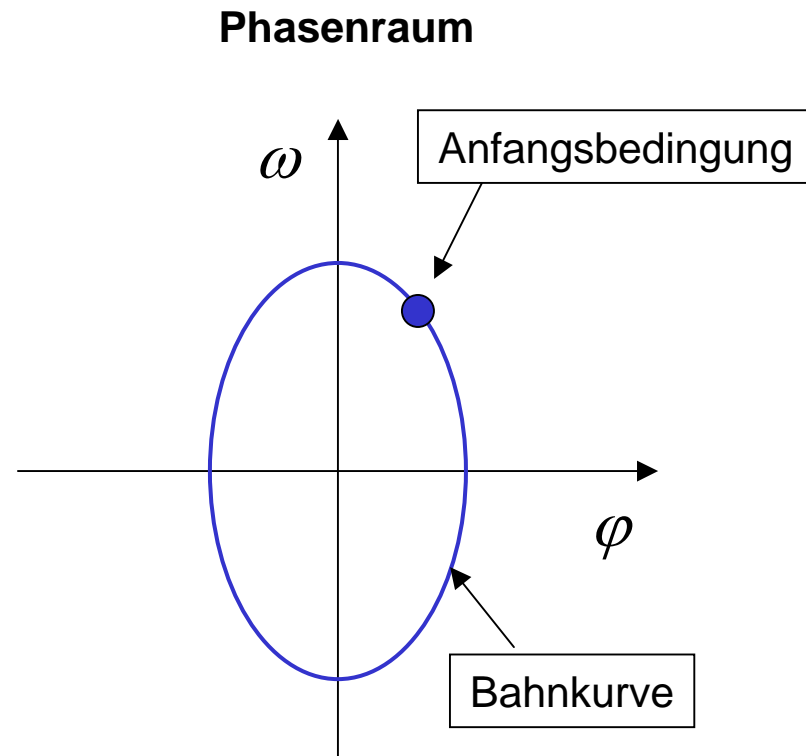
Phasenraum ist zweidimensional.

Gut graphisch darstellbar

Punkt im Phasenraum ist vollständige Angabe der Anfangsbedingung.

Jede Anfangsbedingung hat ihre zugehörige Bahn.

Beispiele am Computer zeigen



## Systeme mit Reibung (Dissipative Systeme):

### Beispiel: gedämpftes Pendel

Bahnkurve strebt gegen  $\varphi = 0$  und  $\omega = 0$

Im Phasenraum strebt die Bahn gegen den Punkt  $(0,0)$ .

Solche Punkte nennt man Fixpunkt.

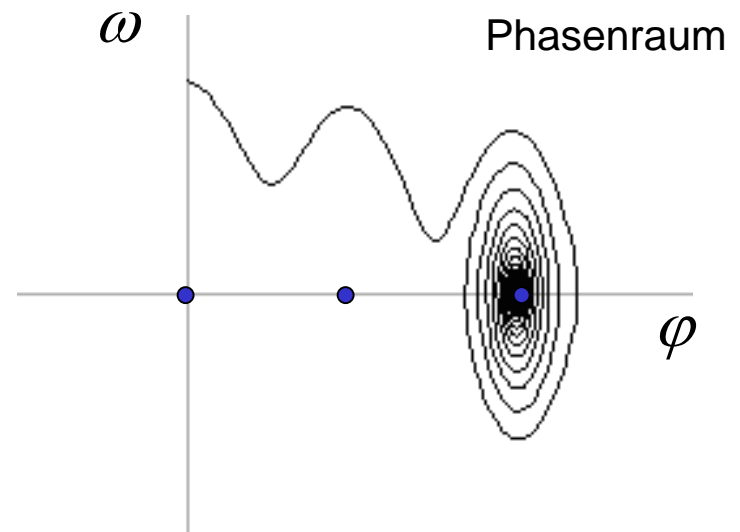
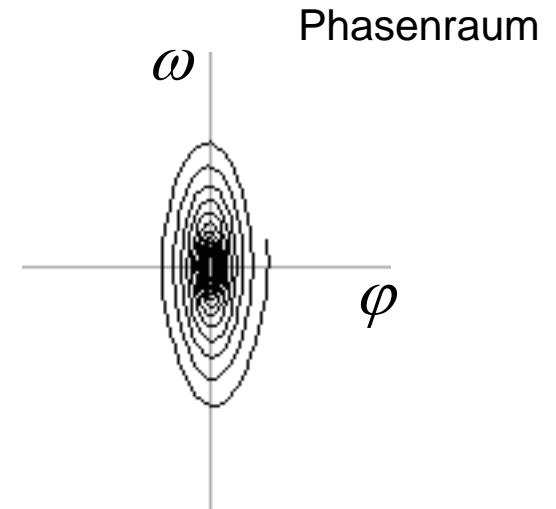
Es gibt weitere Fixpunkte:

$(2\pi,0)$  und  $(4\pi,0)$  und  $(6\pi,0)$  .....

Anfangsbedingung = Fixpunkt

→ keine Bewegung

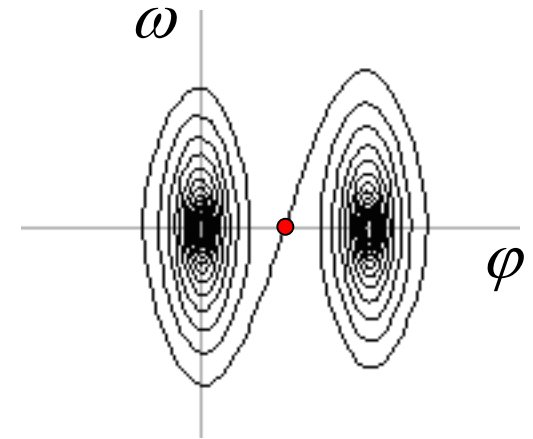
Demonstration am Computer





Die Punkte  $(\pi, 0)$  und  $(3\pi, 0)$  und  $(5\pi, 0)$  .....  
sind auch Fixpunkte, aber sind instabil.

Kleinste Differenzen in den Anfangsbedingungen  
in seiner Nähe führen auf verschiedene Bahnen.



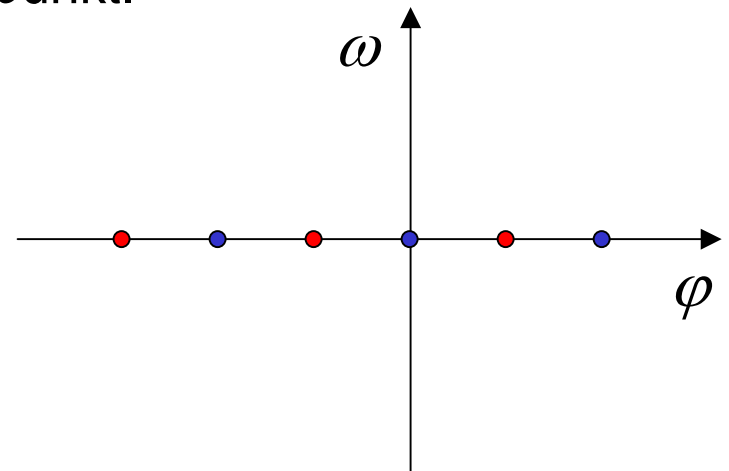
Demonstration am Computer

Stabile Fixpunkte haben ein Einzugsgebiet.

Alle Bahnen mit Anfangsbedingungen in dem  
Einzugsgebiet führen letztendlich zu dem Fixpunkt.

Man nennt sie auch Attraktor

Rechtes Bild: Punkte = Fixpunkte  
blaue Punkte = Attraktoren



# Periodisch angeregtes mathematisches Pendel mit Reibung

(Dissipatives System)

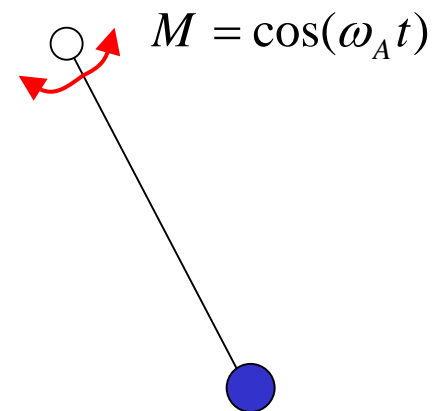
1. Linearisiert ( $\sin \varphi \cong \varphi$ ) :

$$\ddot{\varphi} + \gamma \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = K \cos(\omega_A t)$$

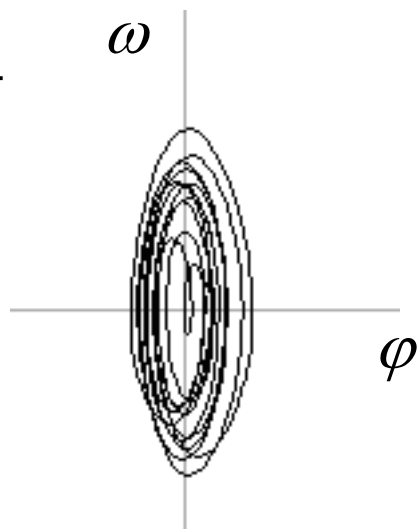
Verhält sich wie erzwungenes Federpendel.

Kein Chaos da lineare Differentialgleichung.

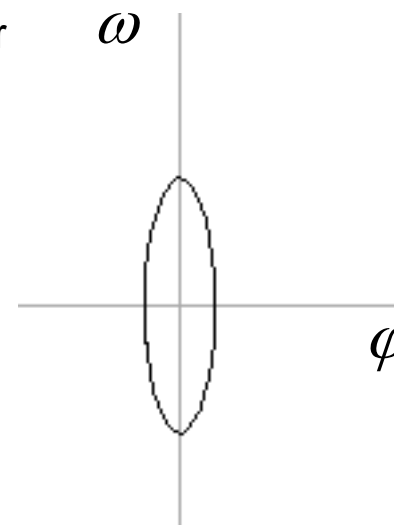
Periodische Schwingung nach Einschwingvorgang.



Einschwingvorgang



Attraktor



Phasenraum ist hier sogar dreidimensional wegen der zeitabh. äußeren Kraft.  
Die Kraft (Drehmoment) am Pendel ist abhängig von drei Größen:

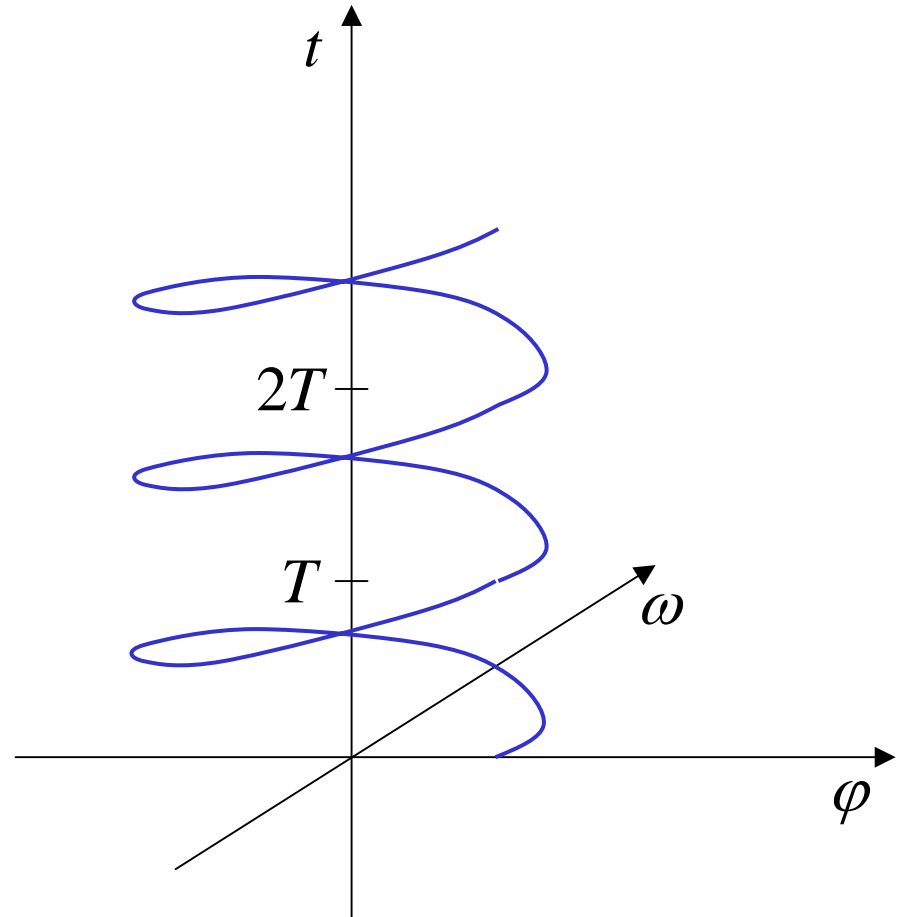
$$M = M(\varphi, \dot{\varphi}, t)$$

Attraktor im 3-D Phasenraum:  
Spirale entlang Zeit-Achse

Nach der Zeit

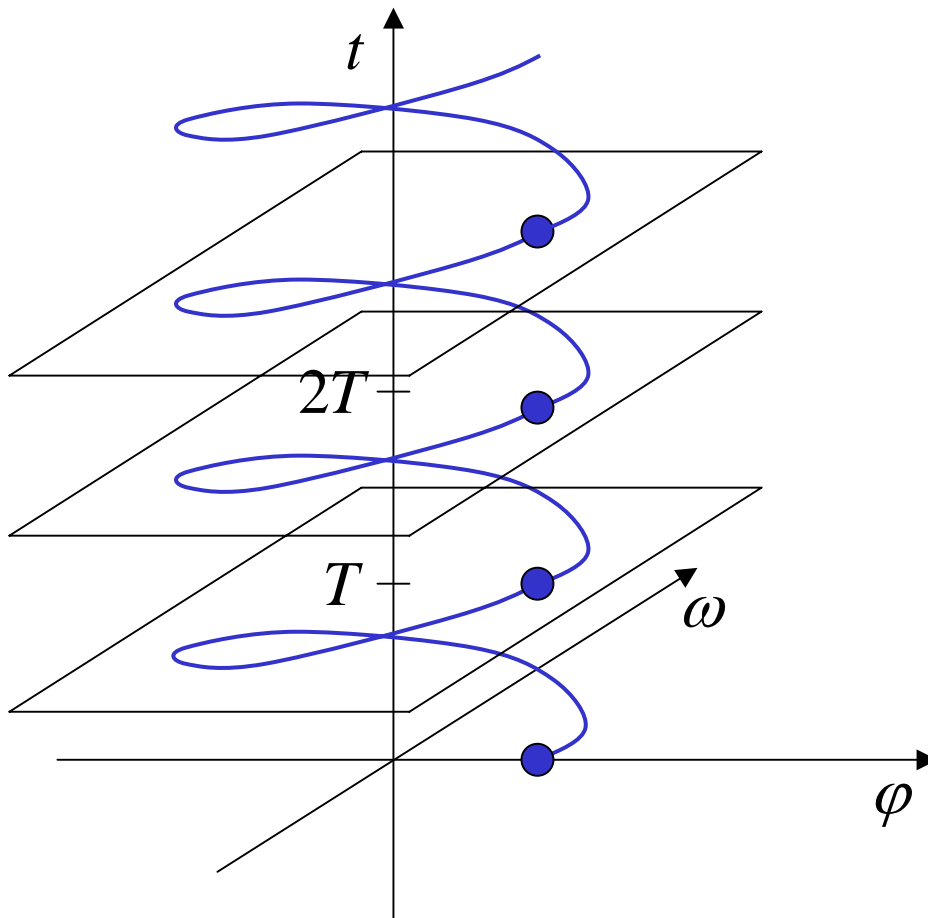
$$T = \frac{2\pi}{\omega_A}$$

sind  $\varphi$ ,  $\omega$  und äußere Kraft  
wieder gleich.

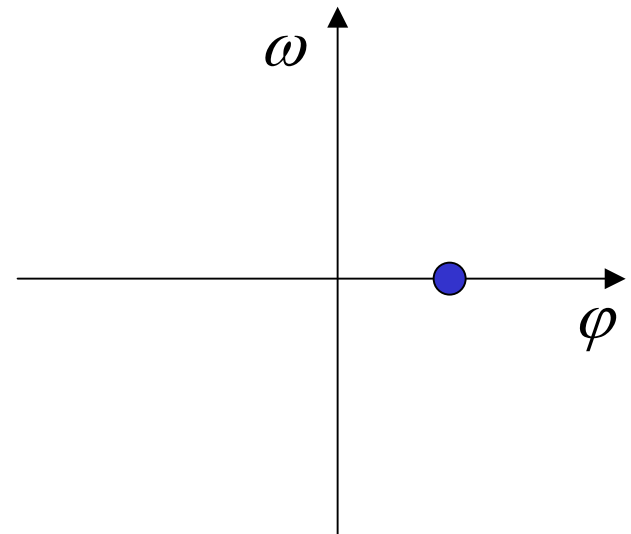


## Poincaré-Schnitt:

Darstellung nur von Schnitten durch den Phasenraum bei Zeiten  $t+nT$ .  
Projektion der Schnittpunkte auf die  $\varphi, \omega$ -Ebene.



### Poincaré-Schnitt



Periodische Bewegung ist nur noch Punkt im Poincaré-Schnitt

Vorteil dieser Darstellung: Vereinfachung

Periodische Bewegung → Punkt

Chaotische Bewegung → ?

Chaos ist möglich, wenn Differentialgleichung nichtlinear und Dimension des Phasenraums  $\geq 3$

Periodisch angeregtes mathematisches Pendel mit Reibung

$$\ddot{\varphi} + \gamma \dot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = K \cos(\omega_A t)$$

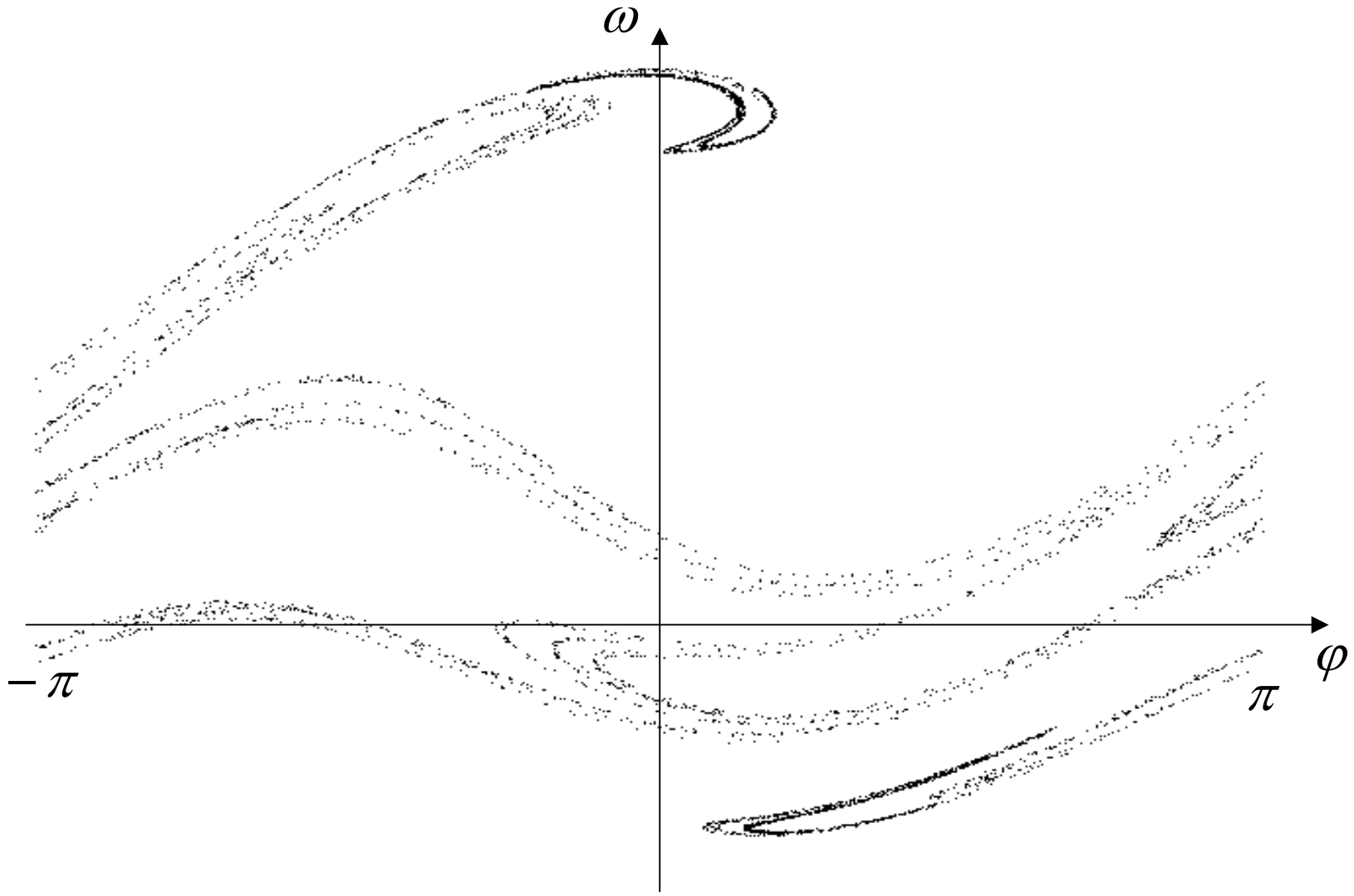
Nichtlineare Differentialgleichung.

Dimension des Phasenraums = 3.

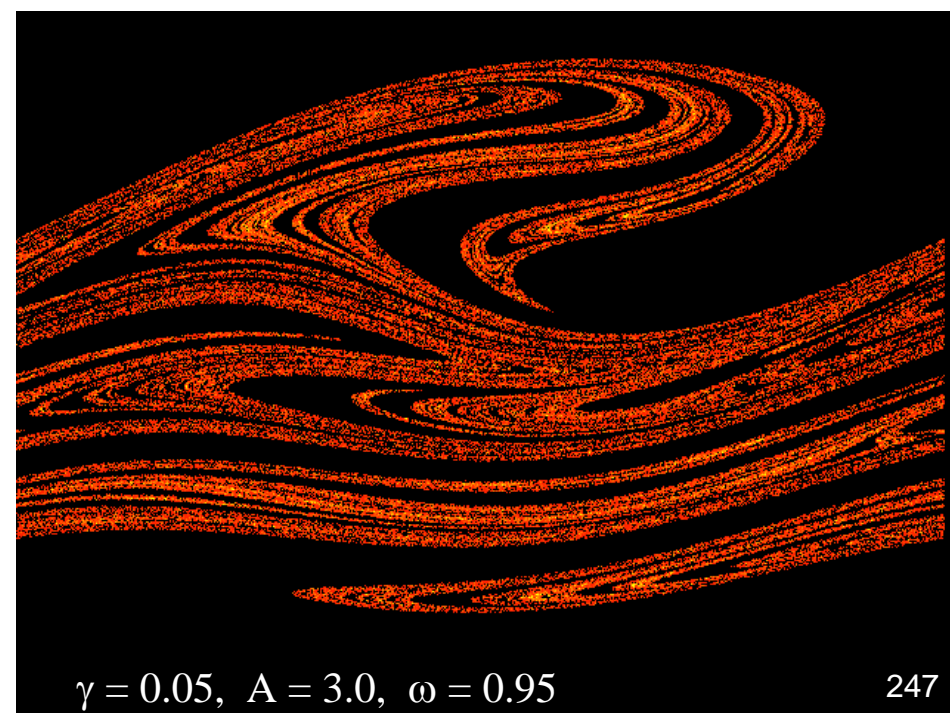
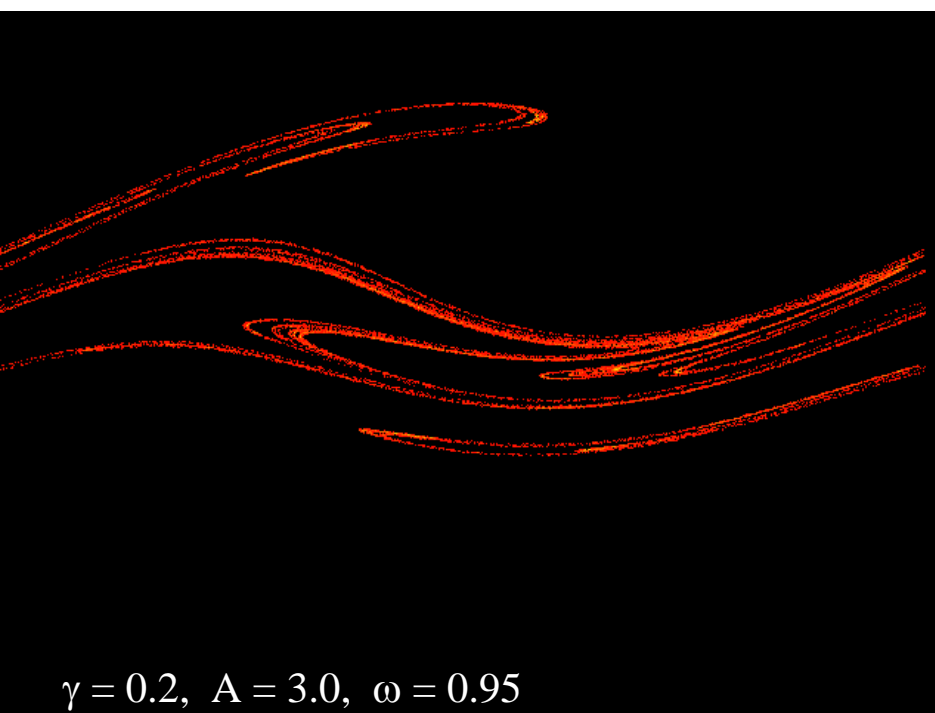
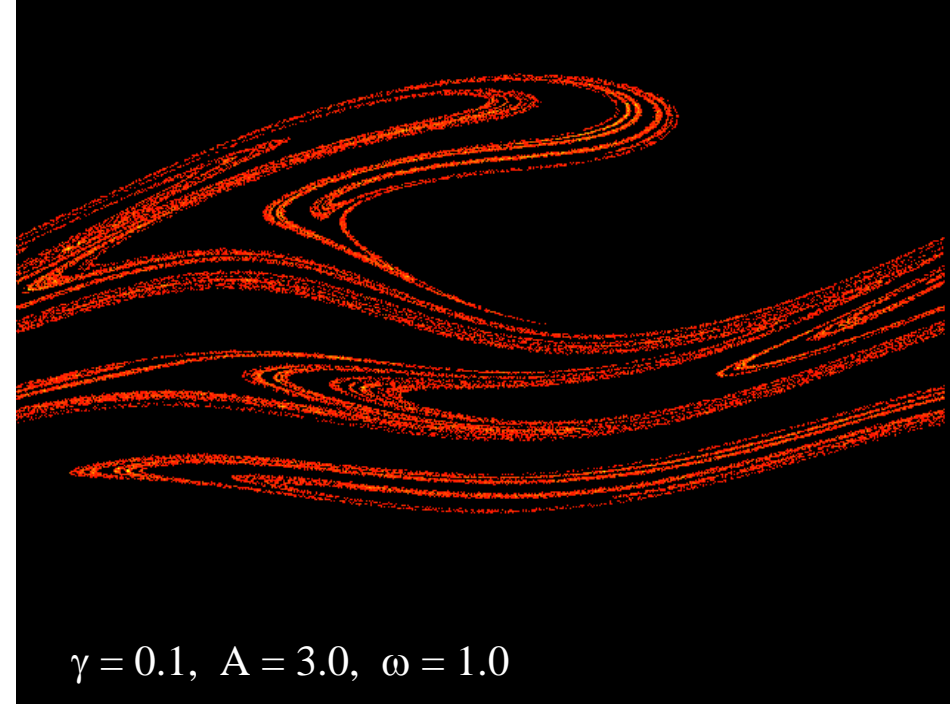
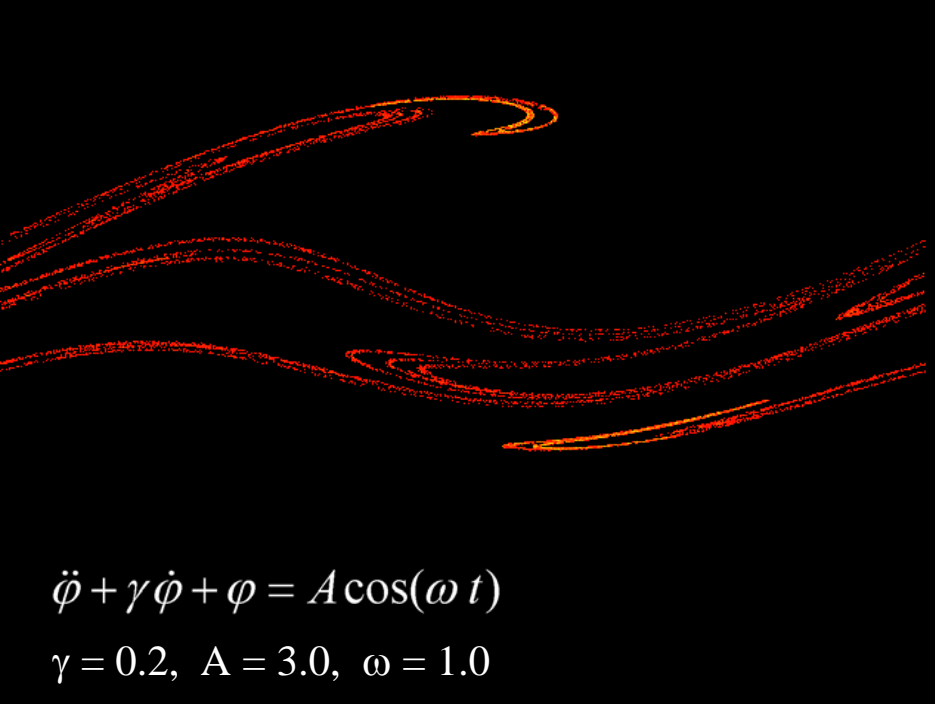
→ Chaos ist möglich.

Demonstration am Computer.

Bei großen Auslenkungen (mit Überschlag) tritt Chaos auf:



Atraktor im Poincaré-Schnitt ( $\gamma = 0.2$ ,  $K = 3.0$ ,  $\omega = 0.2$ )



Bahnen sind nicht nur willkürlich-zufällig sondern zeigen eine bizarre Struktur bei geeigneter Darstellung.

Einfache nichtlineare Systeme (einfache Dgln.) zeigen komplexe Bewegungen und folgen (verborgenen) komplizierten Mustern.

### Seltsame Attraktoren:

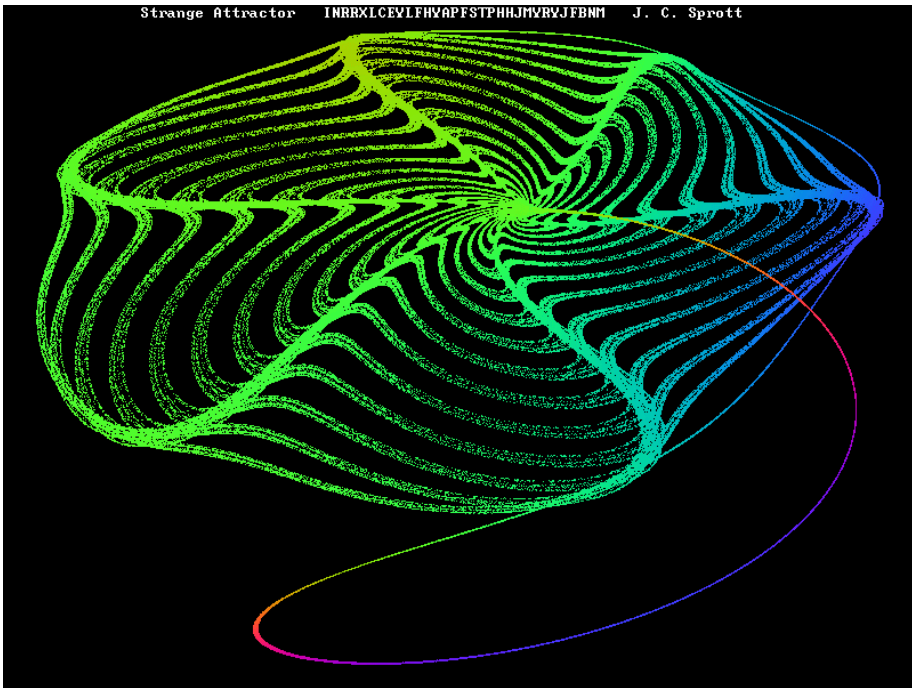
Der Attraktor (vorige Seite) ist weder eine Linie (1-dimensional) noch eine Fläche (2-dimensional) sondern etwas dazwischen.

Er setzt sich aus mehr als abzählbar unendlich vielen verschlungenen Linien zusammen und besitzt eine fraktale Dimension.

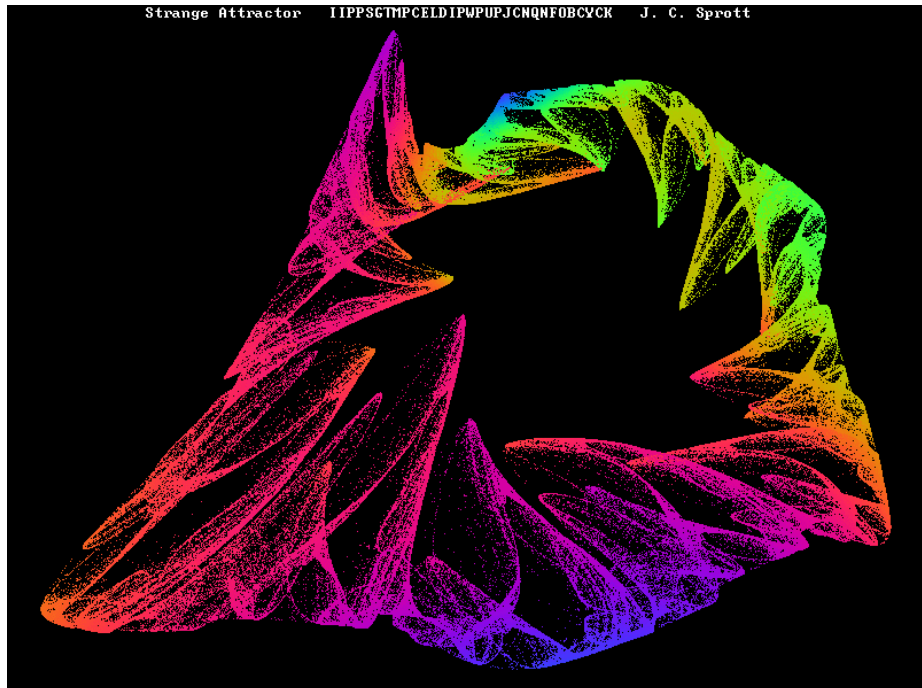
Attraktoren mit fraktaler Dimension nennt man seltsame Attraktoren.



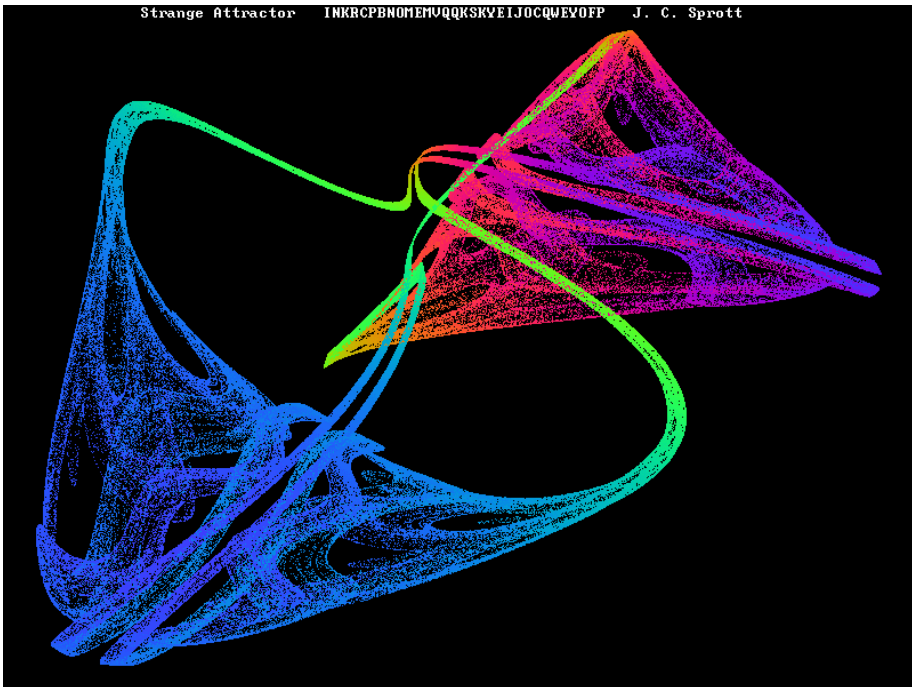
Strange Attractor INBRXLCEVLFHWAPFSTPHHJMVRVJFBNM J. C. Sprott



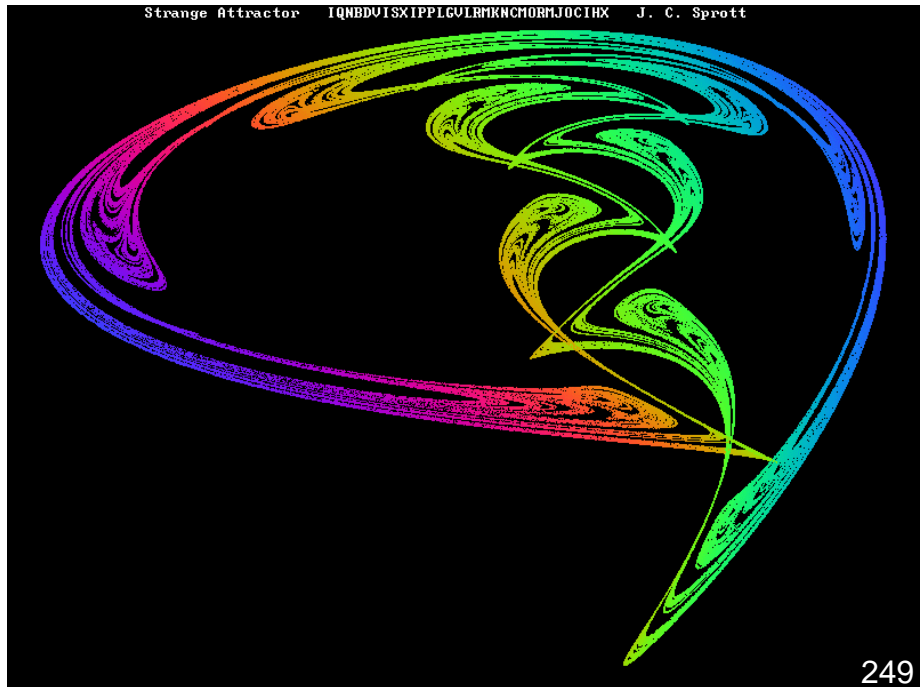
Strange Attractor IIPPSGTMPCELDIPWUPJCNQNFBCVCK J. C. Sprott

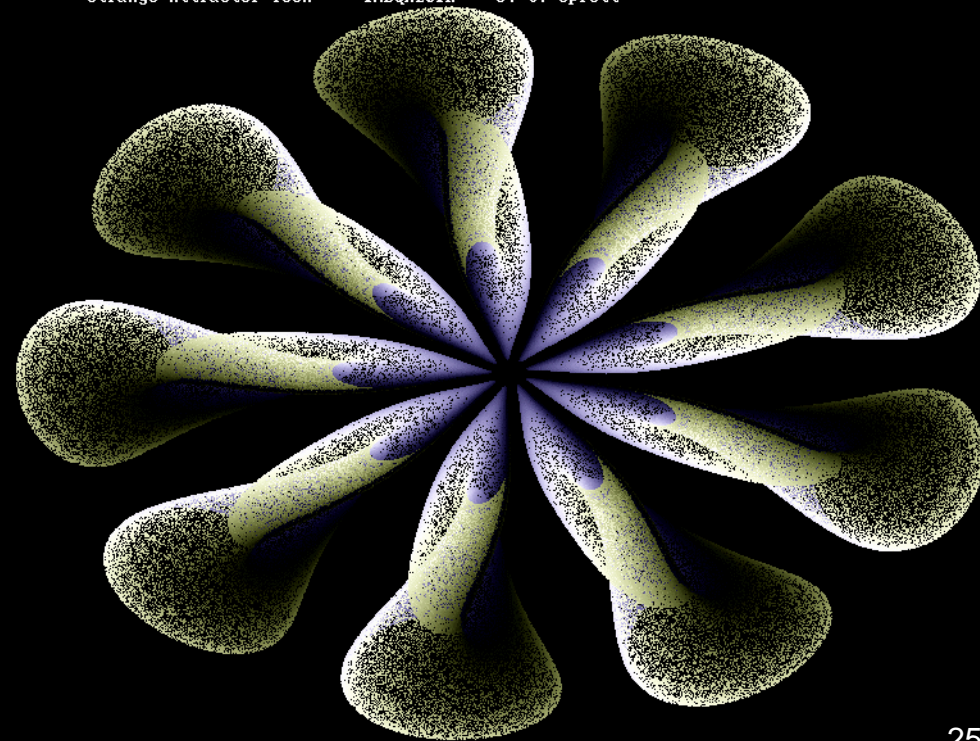
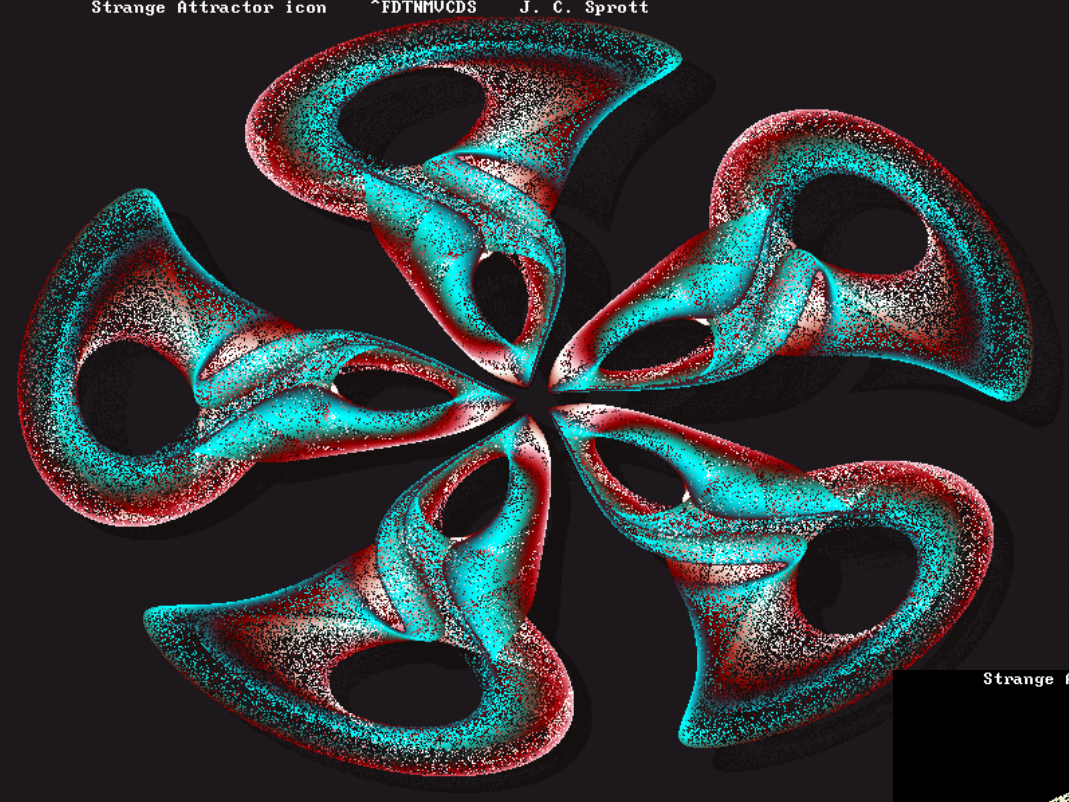


Strange Attractor INKRCPBNOMEMUQQSKVEIJOCQWEYOFPP J. C. Sprott



Strange Attractor IQNBDOISXIPPLGULRMKNCHORMJOCIRX J. C. Sprott

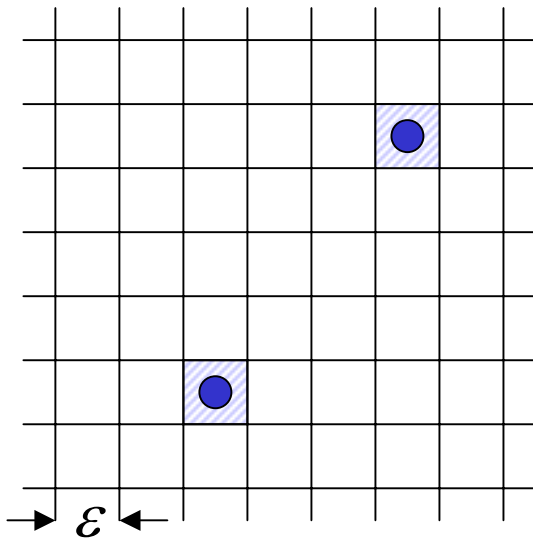




# Fraktale Dimension

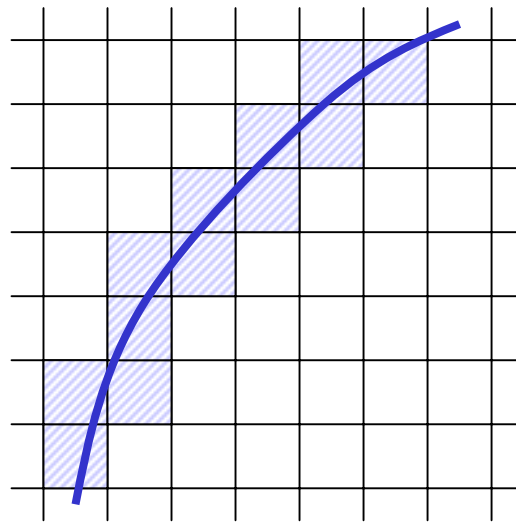
Definition einer Dimension

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$



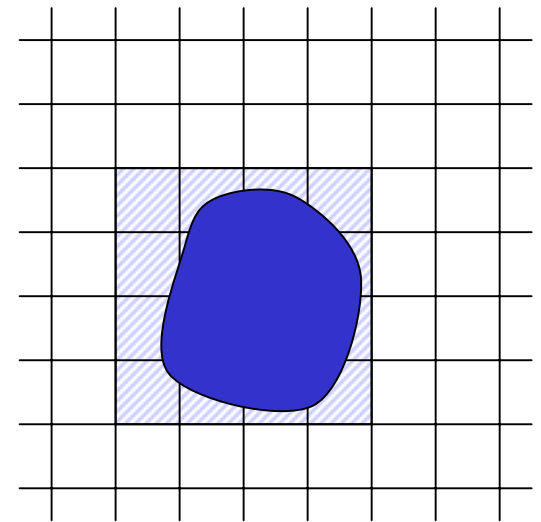
$$N = 2$$

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln 2}{\ln(1/\varepsilon)} = 0$$



$$N \propto 1/\varepsilon$$

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1/\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = 1$$



$$N \propto 1/\varepsilon^2$$

$$D = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(1/\varepsilon^2)}{\ln(1/\varepsilon)} = 2$$

Bei fraktalen Dimensionen ist der Grenzwert D keine ganze Zahl

## Einzugsgebiet von Attraktoren

### Beispiel: Pendel über Magneten

Es gibt 3 stabile Fixpunkte über den Magneten (Attraktoren).

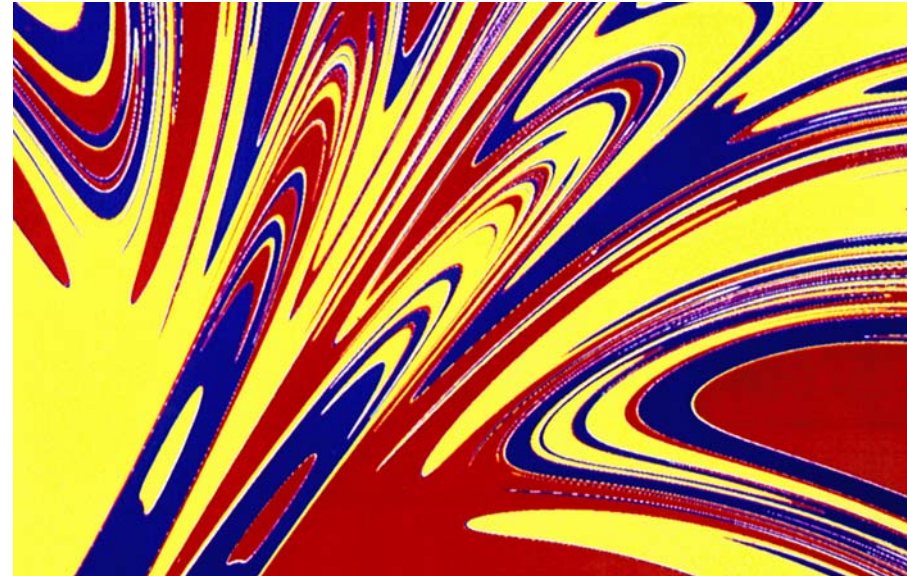
Das Einzugsgebiet ist jeweils eine 2-dimensionale Fläche.

Bahnen zu Anfangsbedingungen innerhalb des Gebietes enden am Fixpunkt.

Die Grenze zwischen den Einzugsgebieten hat eine fraktale Dimension.

Die drei Einzugsgebiete der 3 Fixpunkte  
(rot, gelb, blau)

Ausschnitt

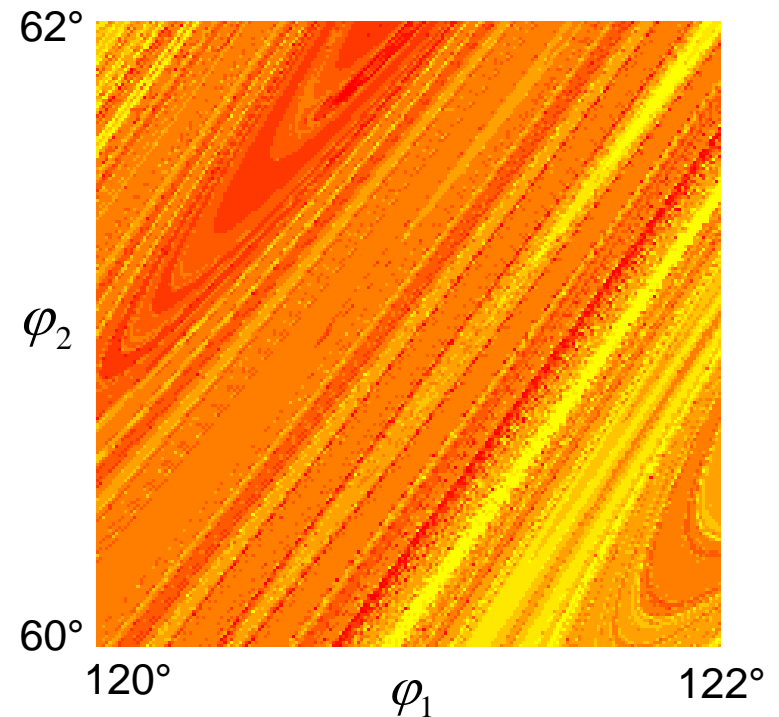
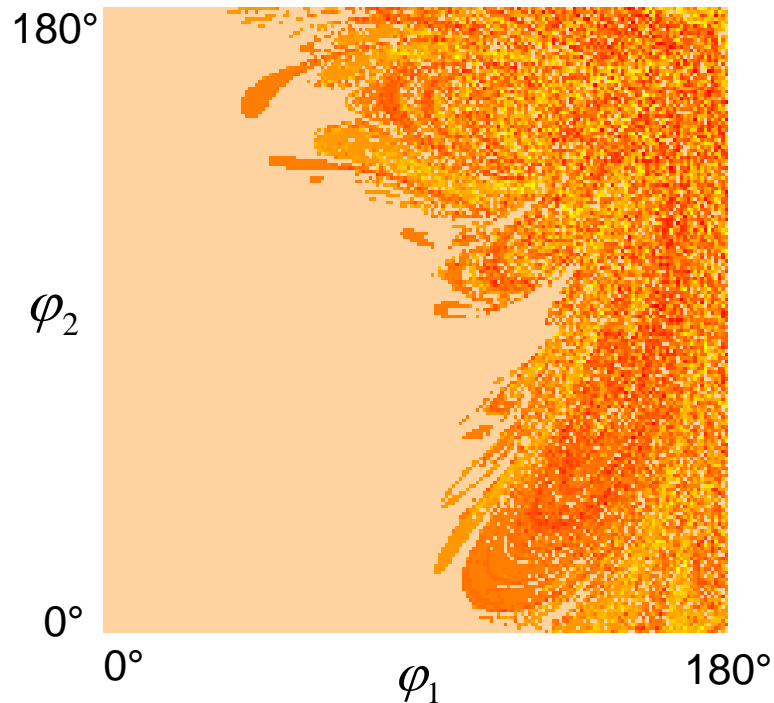
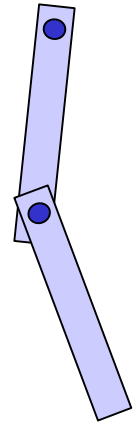


## Beispiel: gedämpftes Doppelpendel

Pendel hängt nach unten: stabiler Fixpunkt

Die Punkte  $\varphi_1 = n_1 \cdot 2\pi$  und  $\varphi_2 = n_2 \cdot 2\pi$  sind Attraktoren.

Einzugsgebiete dieser Fixpunkte haben fraktale Begrenzung.

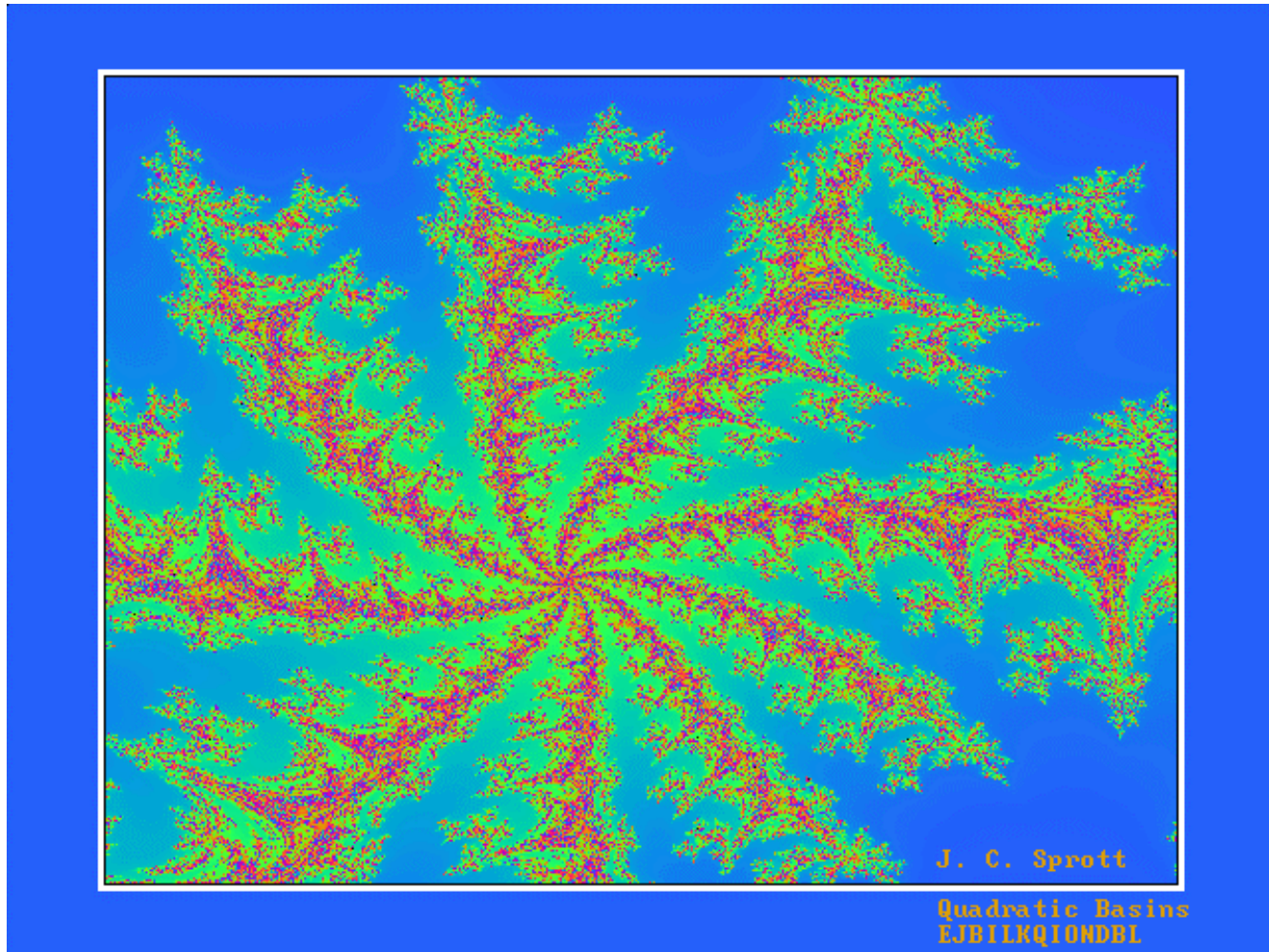


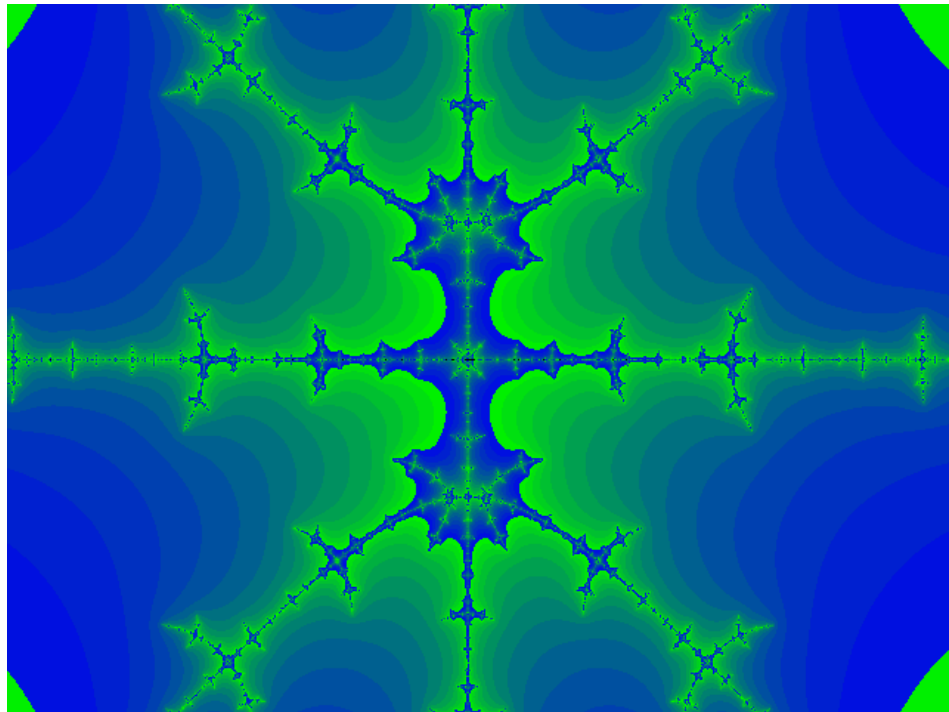
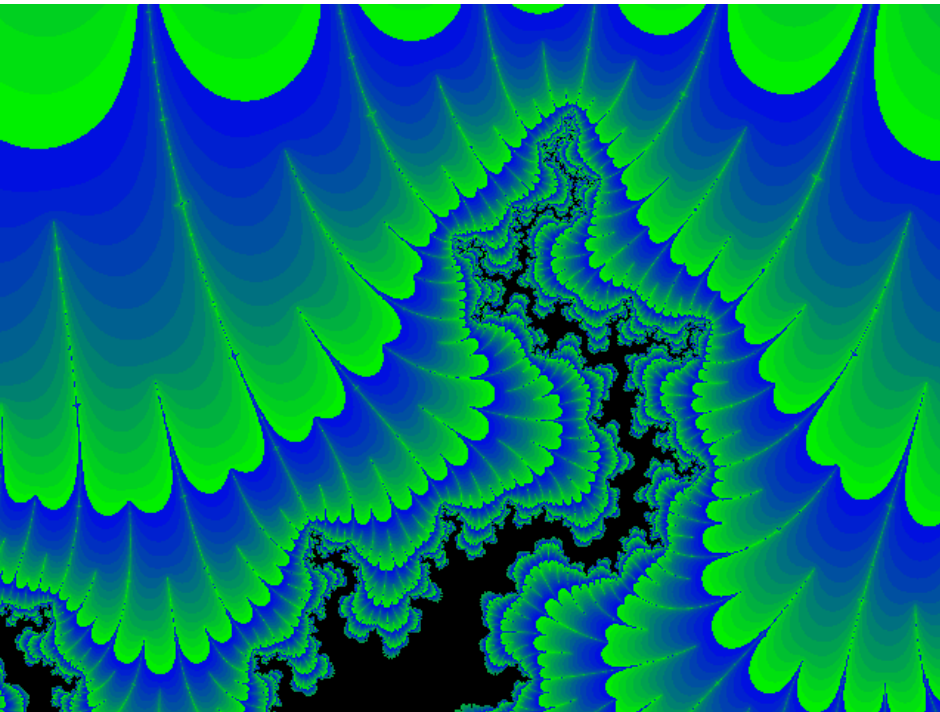
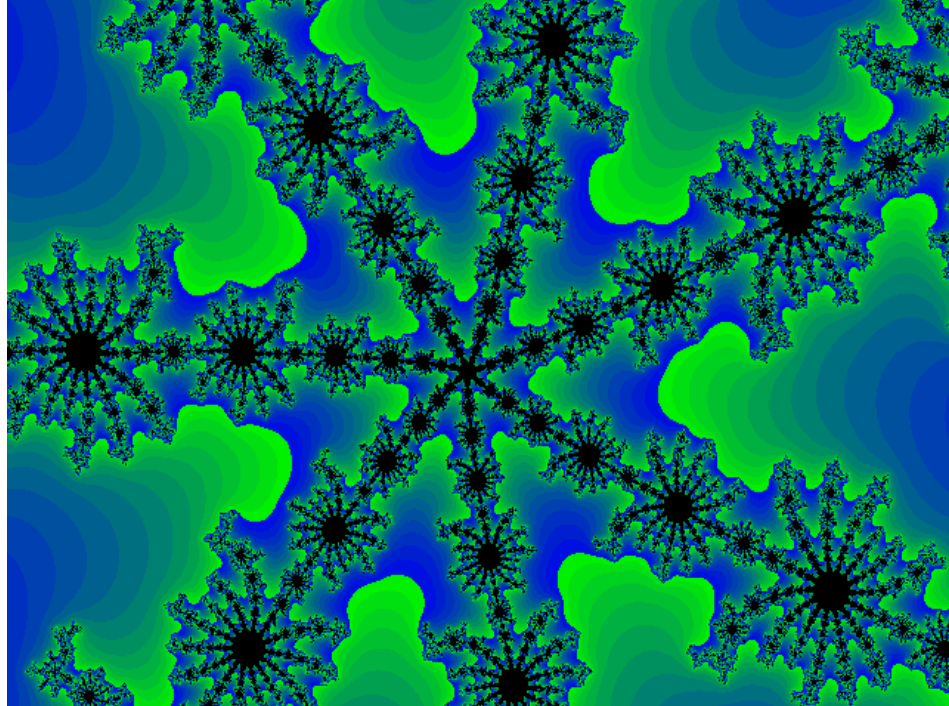
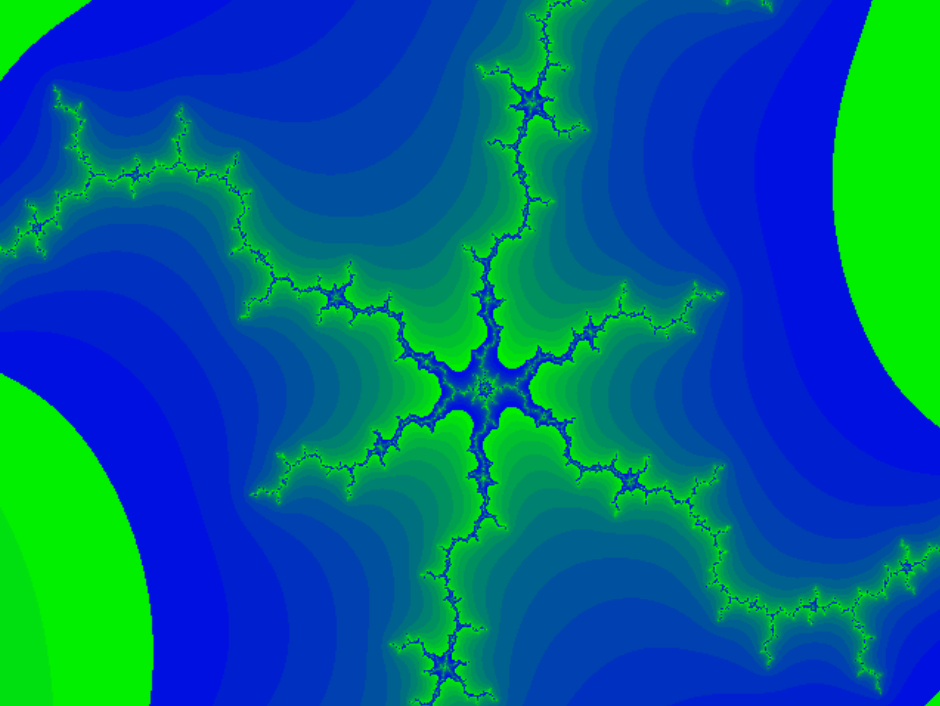
## Selbstähnlichkeit

Vergrößerung eines kleinen Ausschnitts einer fraktalen Struktur

Kleine Details sind ähnlich zu größeren Strukturen.

Details der Details sind wieder ähnlich ....





## Weg ins Chaos

Praktisch ist es von großer Bedeutung zu wissen, wann ein System von periodischem Verhalten in chaotisches Verhalten übergeht.

Beispiel Herzkammerflimmern:

Herzschlag = periodisch, Flimmern = chaotisch

Übergang passiert bei Änderung eines Systemparameters

Beispiel Pendel: Parameter  $\gamma$ ,  $K$ ,  $\omega_A$

Anzeichen für die Nähe zum Chaos ist Periodenverdopplung

→ Bifurkation

Demonstration am Computer:

Parameteränderung beim Pendel  $\gamma = 0.2$ ,  $K = 3.0$ ,  $\omega_A = 1.2 \dots 1.05$



## Beispiel: Vermehrung von Heuschrecken

Bei ausreichendem Futterangebot wächst eine Population  $N$  Heuschrecken im Jahr  $n$  auf eine Population im nächsten Jahr  $N_{n+1} = AN_n$

Ist das Futterangebot jedes Jahr gleich, stirbt vor der Ei-Ablage ein gewisser Anteil der Heuschrecken wegen Futtermangels aus.

Futtermangel ist proportional zur aktuellen Population:

$$N_{n+1} = AN_n (1 - bN_n)$$

Setze  $x = bN \leq 1$ :

$$x_{n+1} = Ax_n (1 - x_n)$$

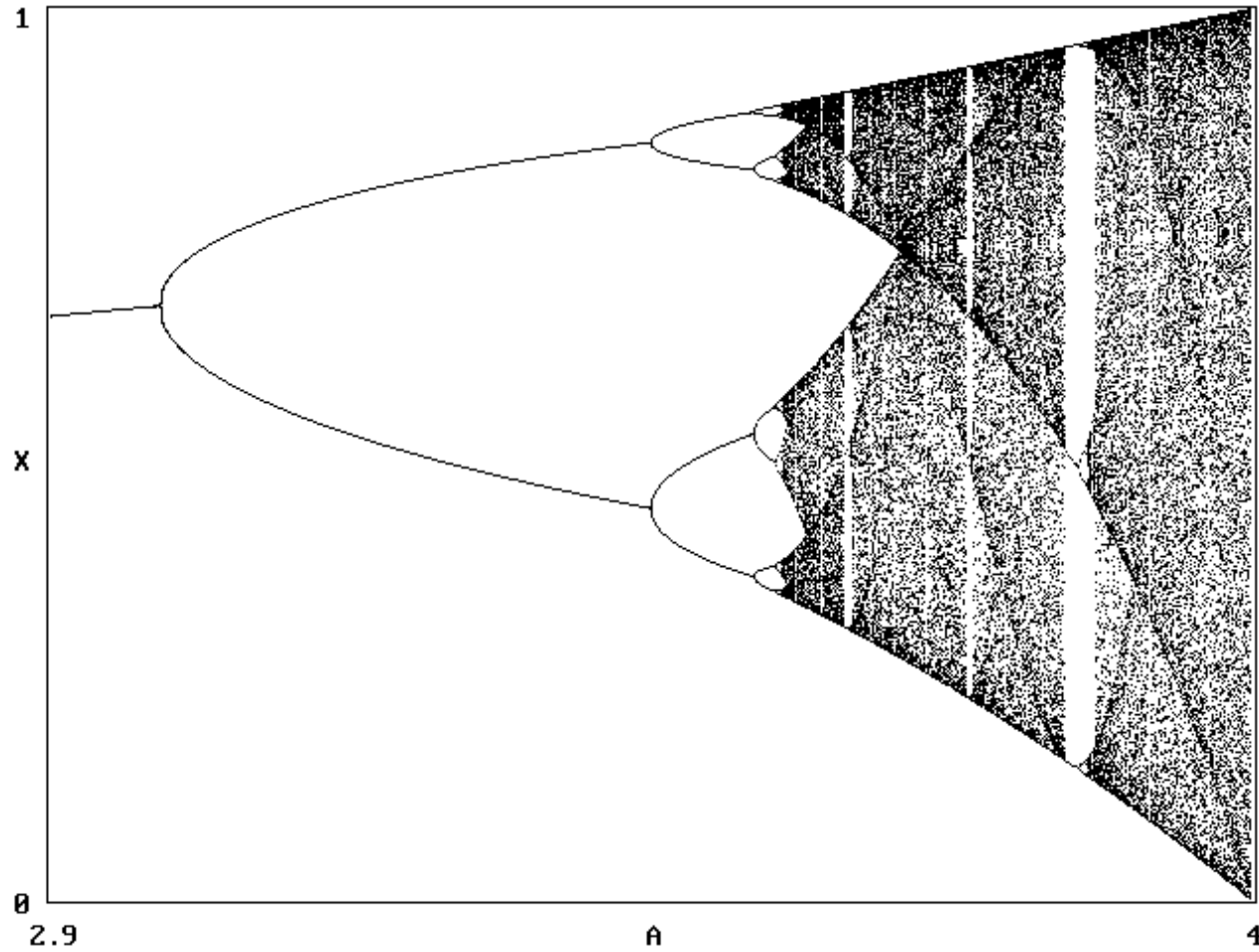
Das System besitzt nur einen Parameter:  $A$

Kleines  $A$ : stabiles Gleichgewicht bei bestimmter Population

größeres  $A$ : periodische Schwankungen: gute Jahre – schlechte Jahre

großes  $A$ : Chaotische Schwankungen in der Population

# Vermehrung von Heuschrecken



Feigenbaum-Diagramm

## Beispiel: tropfender Wasserhahn

Bei kleinem Wasserfluss periodisches Tropfen.  
Mit zunehmendem Fluss Periodenverdopplung  
(Bifurkation), dann chaotisches Verhalten.

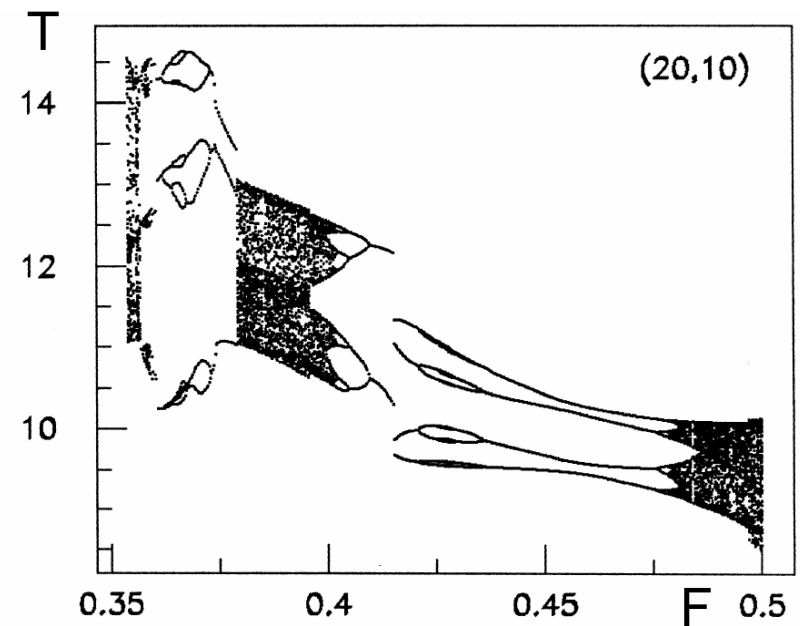
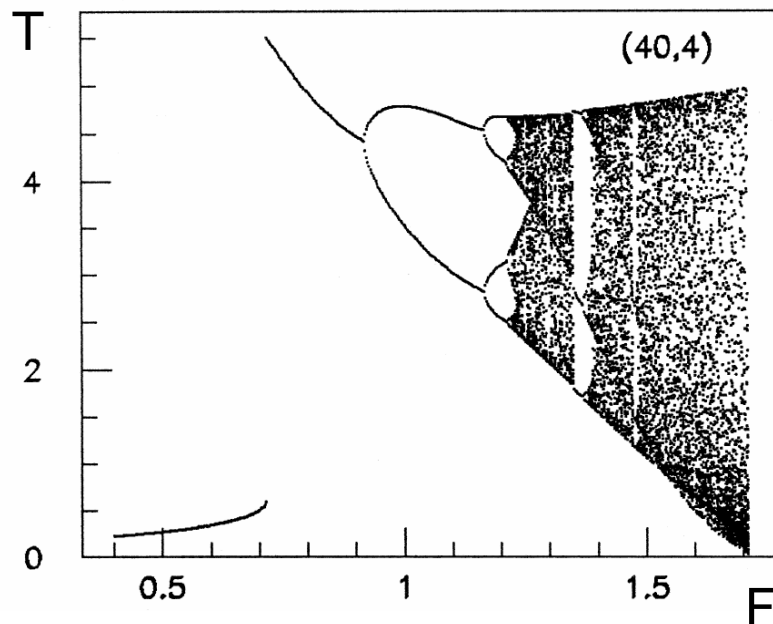


Fig. 2. A large drop separating from the nozzle.



Fig. 3. Necking of recoiling water into multiple drops.

Diagramm Zeit zwischen zwei Tropfen als Funktion des Wasserflusses:



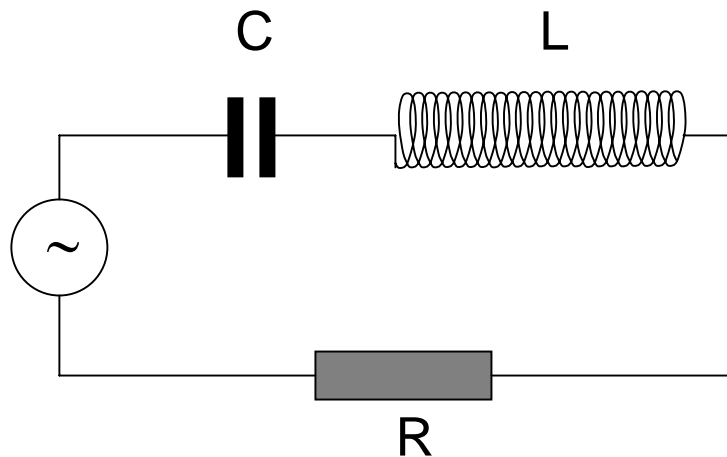
Verblüffende Ähnlichkeit zum Feigenbaum-Diagramm

## Beispiel: Elektrischer Schwingkreis

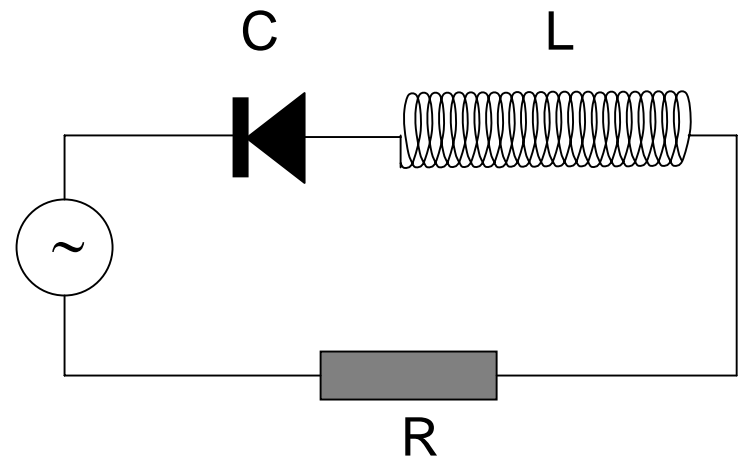
Schwingung der Energie zwischen Feldenergie im Magnetfeld der Spule und Feldenergie im elektrischen Feld des Kondensators.

Äußere Energie wird durch periodische Anregung mit Wechselspannung zugeführt. Gleichzeitig Dissipation von Energie im elektrischen Widerstand.

Nichtlinearität durch eine spannungsabhängige Kapazität (Kapazitätsdiode).



linear



nichtlinear