<u>Mehrdimensionale Bewegungen</u>

Wir wollen nun die mathematische Beschreibung der Bewegung von Körpern genauer betrachten.

Als erstes müssen wir den physikalischen Raum auf ein mathematisches Gebilde abbilden. In dem mathematischen Gebilde können wir dann Rechnungen durchführen und anschließend das Ergebnis wieder auf den physikalischen Raum abbilden.
Das mathematische Gebilde, das im nicht-relativistischen Fall den Raum am besten beschreibt, ist der *Euklidische Raum*.
Der Euklidische Raum wird mathematisch durch 5 Gruppen von Axiomen charakterisiert (vgl. D. Hilbert, Lectures on Euclidean Geometry, 1898), die bei dieser Abbildung auf den physikalischen Raum übertragen werden.

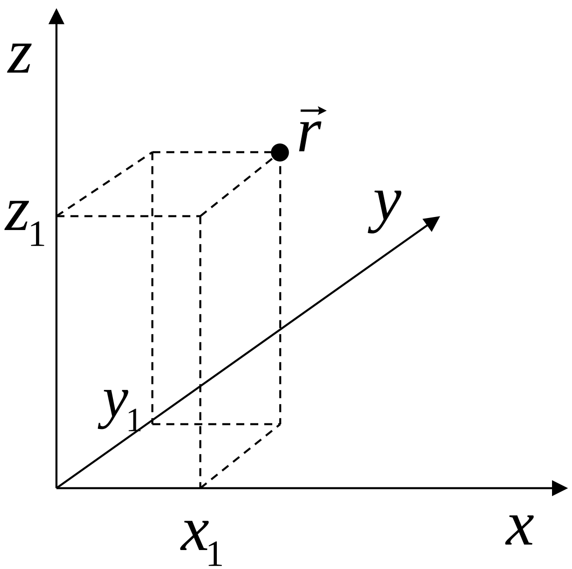
Rechnen kann man im Euklidischen Raum schlecht. Deshalb verwendet man für quantitative Berechnungen lieber eine Abbildung auf einen *Vektorraum*. Hierfür sind aber bestimmte Annahmen notwendig.

Vektorraum:

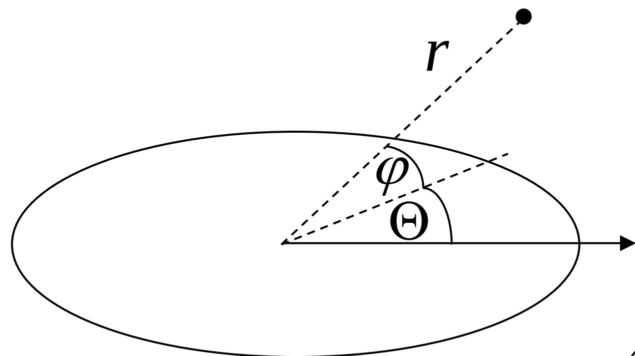
Zusätzlich zu den Eigenschaften des Euklidischen Raums besitzt der Vektorraum einen Nullpunkt. Dieser Nullpunkt kann willkürlich – muss aber gewählt werden.

Punkte im dreidimensionalen Vektorraum können durch die Angabe von drei reellen Zahlen benannt werden. Hierfür ist die Einführung eines Koordinatensystems notwendig. Die üblichen Koordinatensysteme sind:

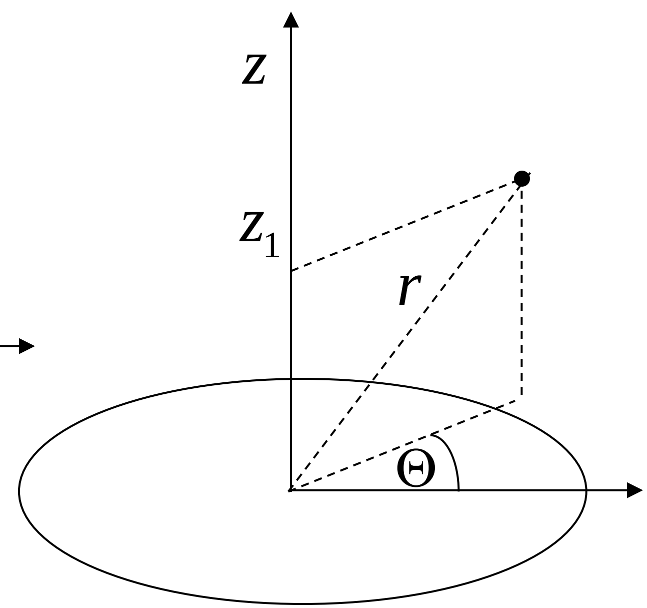
Kartesische Koordinaten



Kugelkoordinaten

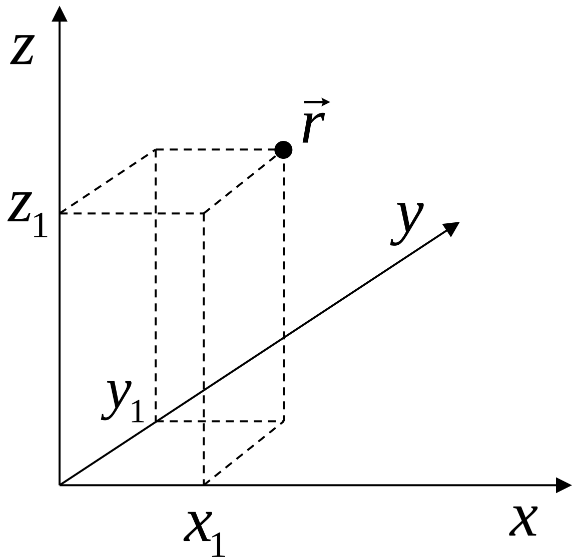


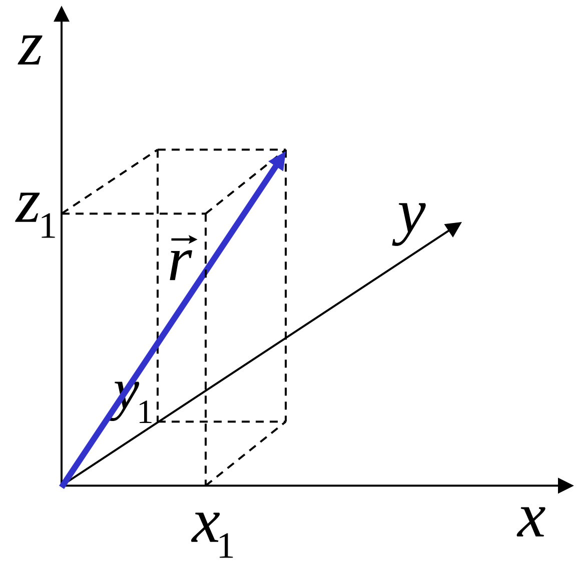
Zylinderkoordinaten



Mit der Wahl des Koordinatensystems werden bestimmte Richtungen im Raum ausgezeichnet. Insbesondere bei kartesischen Koordinaten werden die Komponenten des Vektors x_1, y_1, z_1 durch positive und negative reelle Zahlen beschrieben. Die Wahl der Achsrichtung legt das Vorzeichen der Komponenten fest.

Der Vektor als mathematisches Objekt wird durch einen Buchstaben mit Pfeil bezeichnet $\vec{r}_1$ und durch ein Tripel aus Zahlen dargestellt (x_1, y_1, z_1). Graphisch kann der Vektor als Raumpunkt oder als Pfeil vom Ursprung auf den Raumpunkt dargestellt werden.



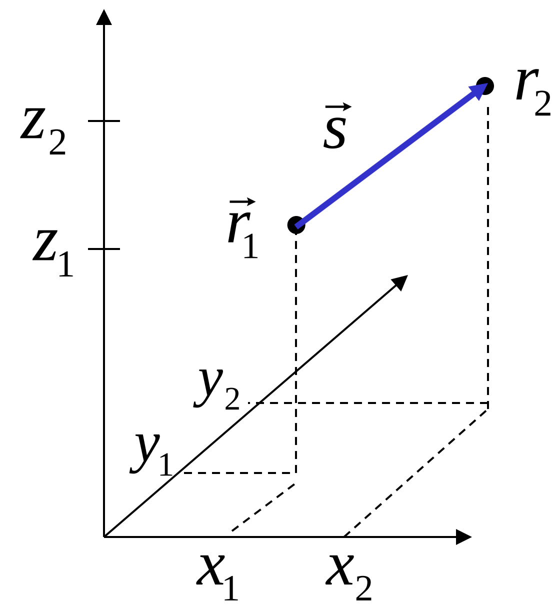


Schreibweisen:

$$\vec{r}_1 = (x_1, y_1, z_1) \qquad \text{oder} \qquad \vec{r}_1 = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$$

oder $\vec{r}_1 = x_1 \cdot \vec{e}_x + y_1 \cdot \vec{e}_y + z_1 \cdot \vec{e}_z$

mit den Einheitsvektoren $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$



Verschiebung von $\vec{r}_1$ nach $\vec{r}_2$

Die Verschiebung ist eine gerichtete Größe.

Graphische Darstellung als Pfeil.

Alle gerichteten Größen werden in der Physik durch Vektoren ausgedrückt.

In kartesischen Koordinaten:

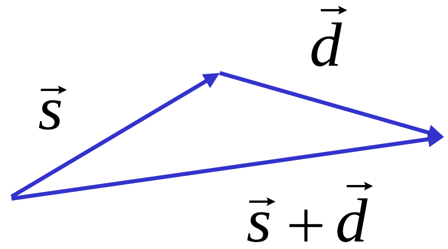
Die Verschiebung $\vec{s}$ berechnet sich als Differenz der Ortsvektoren:

$$\vec{s} = \vec{r}_2 - \vec{r}_1 = (x_2, y_2, z_2) - (x_1, y_1, z_1) = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

Zwei nacheinander ausgeführte Verschiebungen (Vektoren) addieren sich komponentenweise

$$\vec{s}+\vec{d}=(s_x,s_y,s_z)+(d_x,d_y,d_z)=(s_x+d_x,s_y+d_y,s_z+d_z)$$

Graphisch:



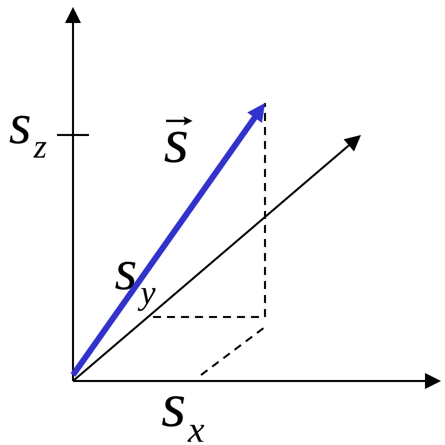
Graphische Vektoraddition

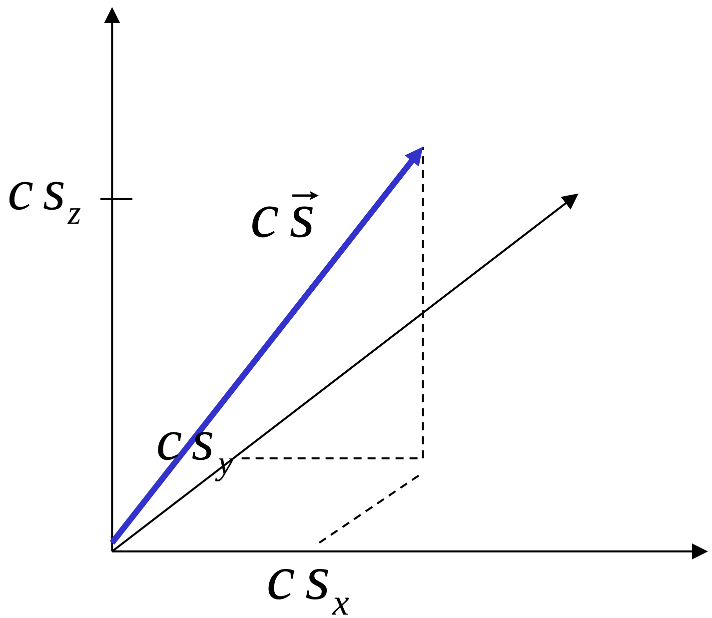
Achtung: in Kugel- und Zylinderkoordinaten ist die Addition in Komponentenschreibweise komplizierter zu berechnen. Dafür sind Drehungen einfacher zu berechnen.

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

$$c\,\vec{s} = c\,(s_x, s_y, s_z) = (cs_x, cs_y, cs_z)$$

Beispiel Verschiebung $\vec{s}$:





Multiplikation mit einem Skalar ändert den Betrag des Vektors, aber nicht die Richtung

Betrag eines Vektors:

$$|\vec{s}| = \sqrt{s_x^{\,2} + s_y^{\,2} + s_z^{\,2}}$$

Die Abbildung des physikalischen Raums auf einen Euklidischen Raum bzw. Vektorraum erlaubt es von sich aus noch nicht, Punkte zu unterschiedlichen Zeiten in Verbindung mit einander zu bringen. Stellt man sich den leeren Raum zu zwei verschiedenen Zeitpunkten vor, gibt es keinen Anhaltspunkt, um diese Räume in Verbindung zueinander zu bringen.

Hierfür wird ein *Beobachter* benötigt. Position und Orientierung des Beobachters liefern den notwendigen Bezug. Der Beobachter wird mit der Zeit vom früheren Raum in den späteren Raum getragen.

Der Beobachter wird auch *Bezugssystem* genannt, da der Ursprung des Vektorraums als Position des Beobachters und die Orientierung des Koordinatensystems als Orientierung des Beobachters genutzt werden kann.

Newton zeichnet mit seinem ersten Axiom eine besondere Klasse von Bezugssystemen (Beobachtern) aus, die *Inertialsysteme*. Das zweite und dritte Axiom und Folgerungen daraus gelten nur in Inertialsystemen. Sie müssen in anderen Fällen modifiziert werden (vgl. spätere Kapitel).

Zeit

Die Zeit ist von Natur aus orientiert und verläuft von der Vergangenheit in die Zukunft. Ein Nullpunkt ist nicht ausgezeichnet und muss daher festgelegt werden. Nach Wahl des Nullpunktes wird die Zeit zusammen mit ihrer Einheit (Sekunde) auf die reellen Zahlen abgebildet. Positive Zahlen bezeichnen Zeitpunkte nach dem Nullpunkt.
Im nicht-relativistischen Fall verläuft die Zeit an allen Raumpunkten gleich schnell. Gleichzeitigkeit kann festgestellt werden und der Nullpunkt ist an allen Raumpunkten der Gleiche.

Einheiten

Bei der Abbildung physikalischer Größen auf mathematische Objekte werden die Einheiten verwendet. Das mathematische Objekt, mit dem gerechnet wird (Zahl, Vektor, Funktion, etc.), trägt dann eigentlich keine Einheit mehr. Erst bei der Abbildung des Ergebnisses zurück auf die physikalische Größen wird wieder eine Einheit benötigt und dazugeschrieben. Oft verwenden Physiker die Einheiten trotzdem in der Rechnung.

Geschwindigkeit eindimensional:

In einer Dimension war die Geschwindigkeit zu einem bestimmten Zeitpunkt gegeben durch

$$v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$$

Dies kann für alle Zeitpunkte auch geschrieben werden als Funktionen

$$v(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\, x(t)$$

mit dem Differentialoperator d/d*t.*

Der Wert der Geschwindigkeit hängt vom Beobachter d.h. vom Bezugssystem ab (unterschiedlich bewegte Beobachter beobachten unterschiedliche Geschwindigkeiten).

Das Vorzeichen der Geschwindigkeit hängt von der Wahl der x-Koordinate ab (Orientierung des Bezugssystems). x als reelle Zahl muss somit als Komponente eines eindimensionalen Vektors verstanden werden, der mit einer Koordinatenachse dargestellt wird.

Geschwindigkeit dreidimensional:

Die Geschwindigkeit ist eine gerichtete Größe und wird daher mathematisch durch einen Vektor beschrieben.

In drei Dimensionen ist die Geschwindigkeit eines Massepunktes die Ableitung seines Ortsvektors nach der Zeit.

Für einen Zeitpunkt schreibt man

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r} = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right) = (v_x, v_y, v_z)$$

In kartesischen Koordinaten werden Vektoren komponentenweise abgeleitet!

Die Geschwindigkeit als Vektorfunktion $\vec{v}(t)$ berechnet sich aus der Bahnkurve $\vec{r}(t)$

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{r}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(x(t), y(t), z(t)\big) = (v_x(t), v_y(t), v_z(t))$$

<u>Beschleunigung</u>

Auch die Beschleunigung ist eine gerichtete Größe.

Für einen Zeitpunkt gilt

$$\vec{a} = \left(\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} \right) = (a_x, a_y, a_z)$$

Zur Berechnung der Komponenten des Beschleunigungsvektors bildet man die Ableitungen der Komponenten der Geschwindigkeit nach der Zeit

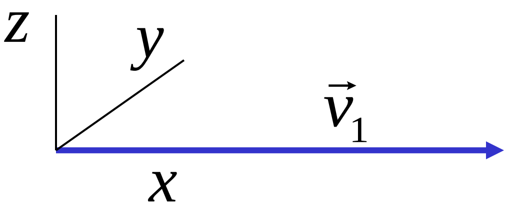
$$a_x = \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_y = \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} \qquad a_z = \frac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$$

Die Vektorfunktion $\vec{a}(t)$ wird berechnet aus

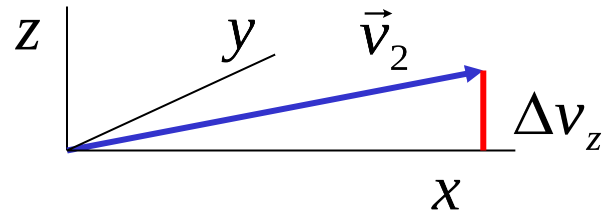
$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big(v_x(t), v_y(t), v_z(t)\big) = (a_x(t), a_y(t), a_z(t))$$

Beispiele für Beschleunigungen

vorher



nachher

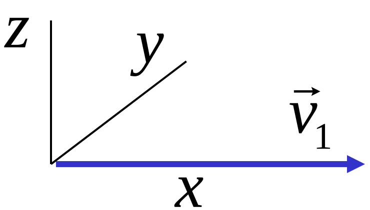


$$\vec{v}_1 = (v_x, 0, 0) \qquad \vec{v}_2 = (v_x, 0, \Delta v_z)$$

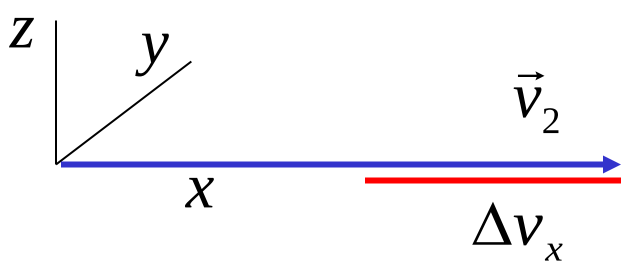
Änderung der Geschwindigkeit nur in z-Richtung

$$\vec{a} = (0,0,a_z) \approx (0,0,\frac{\Delta v_z}{\Delta t})$$

vorher



nachher



$$\vec{v}_1 = (v_x, 0, 0) \qquad \vec{v}_2 = (v_x + \Delta v_x, 0, 0)$$

Änderung nur in x-Richtung $\rightarrow \vec{a} = (a_x, 0, 0) \approx \left(\frac{\Delta v_x}{\Delta t}, 0, 0 \right)$

Newtons Aktionsprinzip in drei Dimensionen

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

> LAW II.
>
> *The alteration of motion is ever proportional to the motive force impreſs'd; and is made in the direction of the right line in which that force is impreſs'd.*

Auch Kräfte sind gerichtet Größen.

Sie werden daher mathematisch durch einen Vektor beschrieben.

Die Beschleunigung einer Masse erfolgt in Richtung der Kraft.

Die Masse ist ein Skalar, sie hat keine Richtung.

Aktionsprinzip in kartesischen Koordinaten:

$$\vec{F} = (F_x, F_y, F_z) = (ma_x, ma_y, ma_z) = m(a_x, a_y, a_z) = m\vec{a}$$

Wenn die Kraft **konstant** ist, zerfällt das Gesetz in drei unabhängige Gleichungen:

$$F_x = m \cdot a_x \,, \qquad F_y = m \cdot a_y \,, \qquad F_z = m \cdot a_z$$

Die Bewegungen in die 3 Raumrichtungen sind dann unabhängig voneinander.

Beispiel Bewegungen im Gravitationsfeld an der Erdoberfläche

$$\vec{F} = m\vec{g} \qquad \text{mit} \qquad \vec{g} = \text{const.}$$

Im allgemeinen Fall ist die Kraft abhängig vom Ort und die Bewegung in allen Raumrichtungen muss gleichzeitig berücksichtig werden, um den Ort und damit die aktuelle Kraft auf den Körper berechnen zu können.

Beispiel schräger Wurf:

$$\vec{F} = (0, 0, -mg)$$

Konstante Kraft in negativer z-Richtung

Mit dem Aktionsprinzip folgt:

$$\vec{F} = (0, 0, -mg) = (ma_x, ma_y, ma_z)$$

also

$$\vec{a} = (0, 0, -g)$$

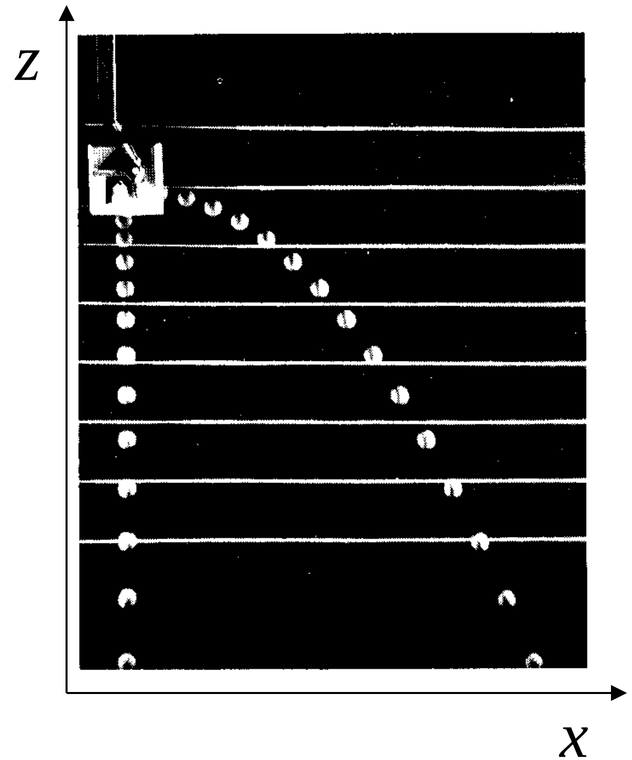
Zerlegung der Bewegung in eine

gradlinig gleichförmige horizontale Bewegung

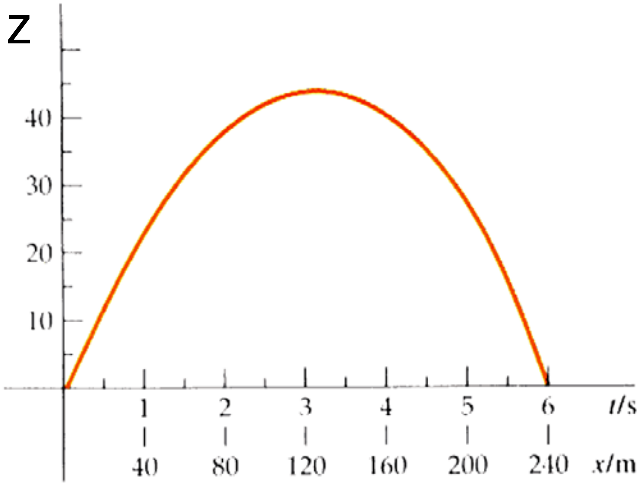
$$F_x = m \cdot a_x = 0$$

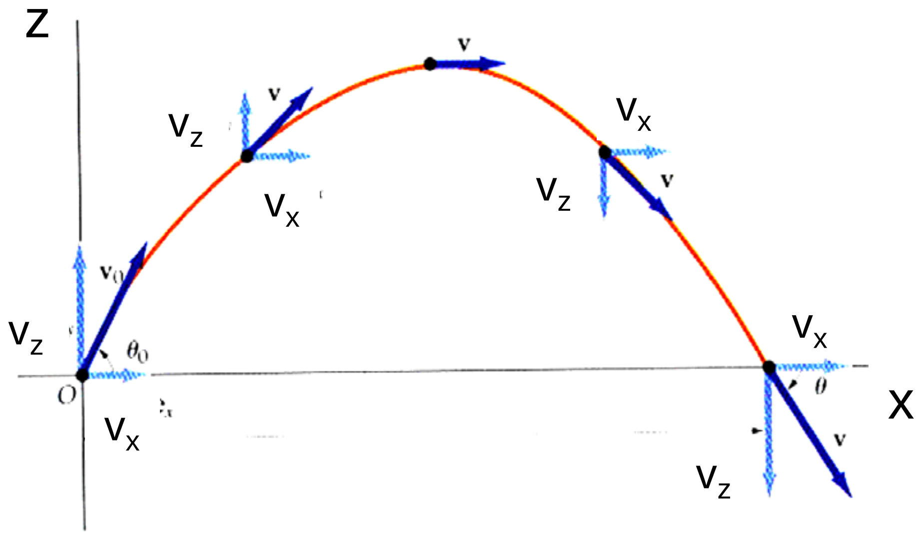
und eine beschleunigte senkrechte Bewegung

$$F_z = m \cdot a_z = -mg$$



Wurfparabel (Versuch: Puck auf Luftkissentisch)





Die Geschwindigkeitskomponente v_x bleibt gleich

Die Geschwindigkeitskomponente v_z ändert sich aufgrund der Beschleunigung

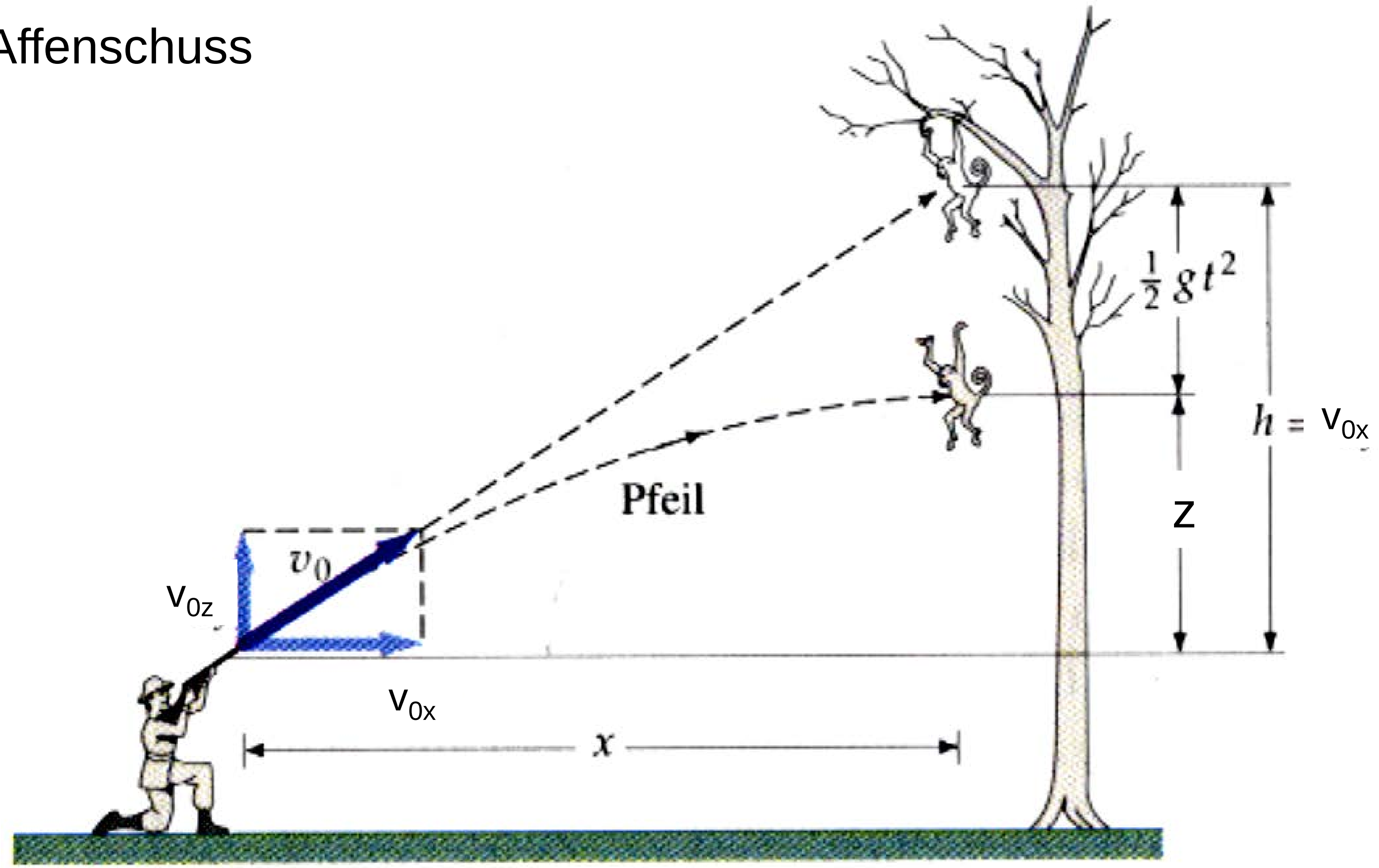
$$\vec{v}(t) = \vec{v}_0 + \vec{a} \cdot t$$

$$\vec{v}(t) = (v_{0x}, 0, v_{0z}) + (0, 0, -g) \cdot t$$

In Komponenten:

$$v_x(t) = v_{0x}, \qquad v_y(t) = 0, \qquad v_z(t) = v_{0z} - g \cdot t$$

Versuch: Affenschuss



Im Moment des Abschusses lässt der Affe sich fallen.

Die senkrechte Bewegung (Fallbeschleunigung) von Affe und Pfeil sind gleich

Unabhängig davon hat der Pfeil eine Horizontalgeschwindigkeit, der Affe nicht.

Daher Treffer, wenn direkt auf Affen gezielt wird.

Mehrere Kräfte, die auf einen Körper wirken

Auf einen Körper können mehrere Kräfte gleichzeitig wirken. Dies können Oberflächen und Volumenkräfte sein.

Wirken die Kräfte an unterschiedlichen Orten des Körpers, führt dies zu *mechanischen Spannungen* im Körper und zu einer Verformung des Körpers. Behandlung im Kapitel Elastizität.

Je nach Angriffspunkt und Richtung der Kräfte kann der Körper in Rotation versetzt werden. Behandlung im Kapitel Rotation starrer Körper.

Im Alltag kommen oft Bewegungen auf Schienen o.ä. vor. Hierbei treten *Zwangskräfte* auf. Sie können aus der mathematischen Beschreibung eleminiert werden indem man *generalisierte Koordinaten* einführt. Generalisierte Koordinaten können auch gebogenen Schienen folgen oder über Umlenkrollen verlaufen. Dreidimensionale Bewegungen werden dadurch auf ein- oder zweidimensionale Bewegungen eingeschränkt.
Korrekte Behandlung in der theoretischen Mechanik.

Punktmechanik

In der Punktmechanik werden Körper betrachtet, die keine Ausdehnung haben, so dass alle Kräfte auf einen Körper am selben Punkt angreifen.

Wir werden später zeigen, dass die Bewegung des Schwerpunktes eines ausgedehnten Körpers der Bewegung einer Punktmasse entspricht, an der die selben Kräfte angreifen wie an dem ausgedehnten Körper.

Interessiert man sich ausschließlich für die Bewegung des Schwerpunktes, dann kann man ausgedehnte Körper mit der Punktmechanik beschreiben.

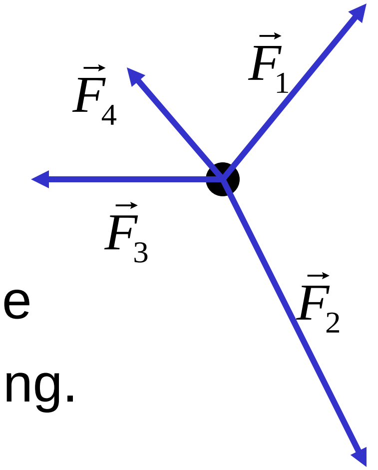
Viele Alltagsphänomene und insbesondere die Wahrnehmung von Kräften durch die Sinne unseres Körpers ist im Rahmen der Punktmechanik nicht beschreibbar. Die Punktmechanik kann daher nur für eine sehr begrenzte Auswahl von physikalischen Phänomenen eingesetzt werden.

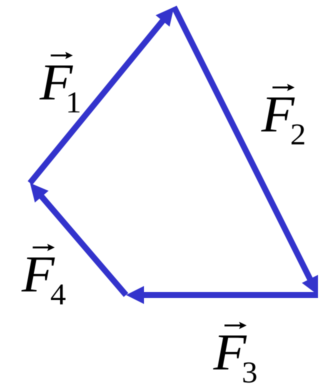
Addition von Kräften:

Greifen an einer Punktmasse mehrere Kräfte an, gibt es zwei mögliche Fälle:

Die vektorielle Summe der Kräfte ist null

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = 0$$





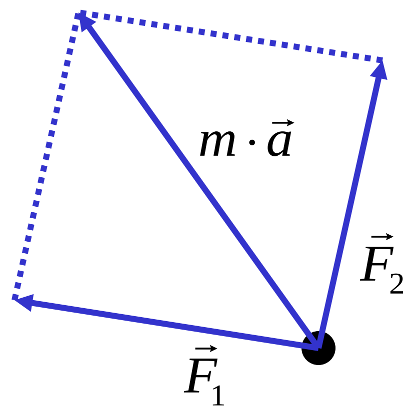
dann verharrt die Punktmasse in Ruhe

oder gradlinig gleichförmiger Bewegung.

Verbleibt eine resultierende Kraft $\vec{F}_R$

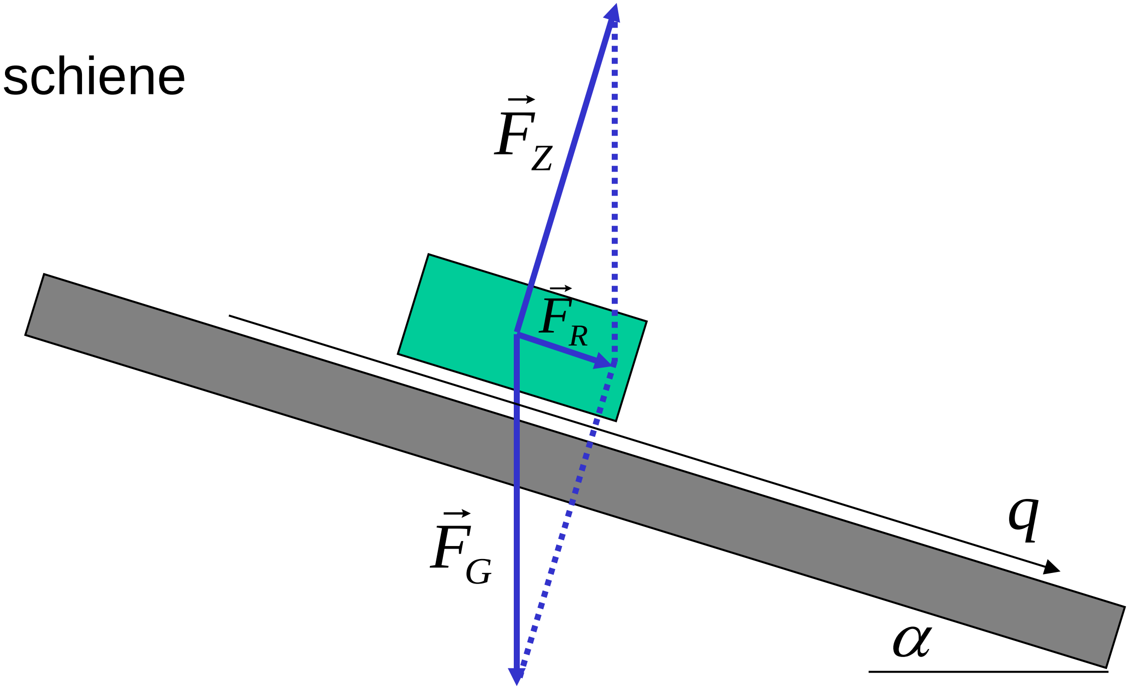
$$\sum_{i=1}^{n} \vec{F}_i = \vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$$

dann beschleunigt diese die Punktmasse.



Versuch: geneigte Luftkissenschiene

(Beispiel für Zwangskräfte)



Die Gewichtskraft ist

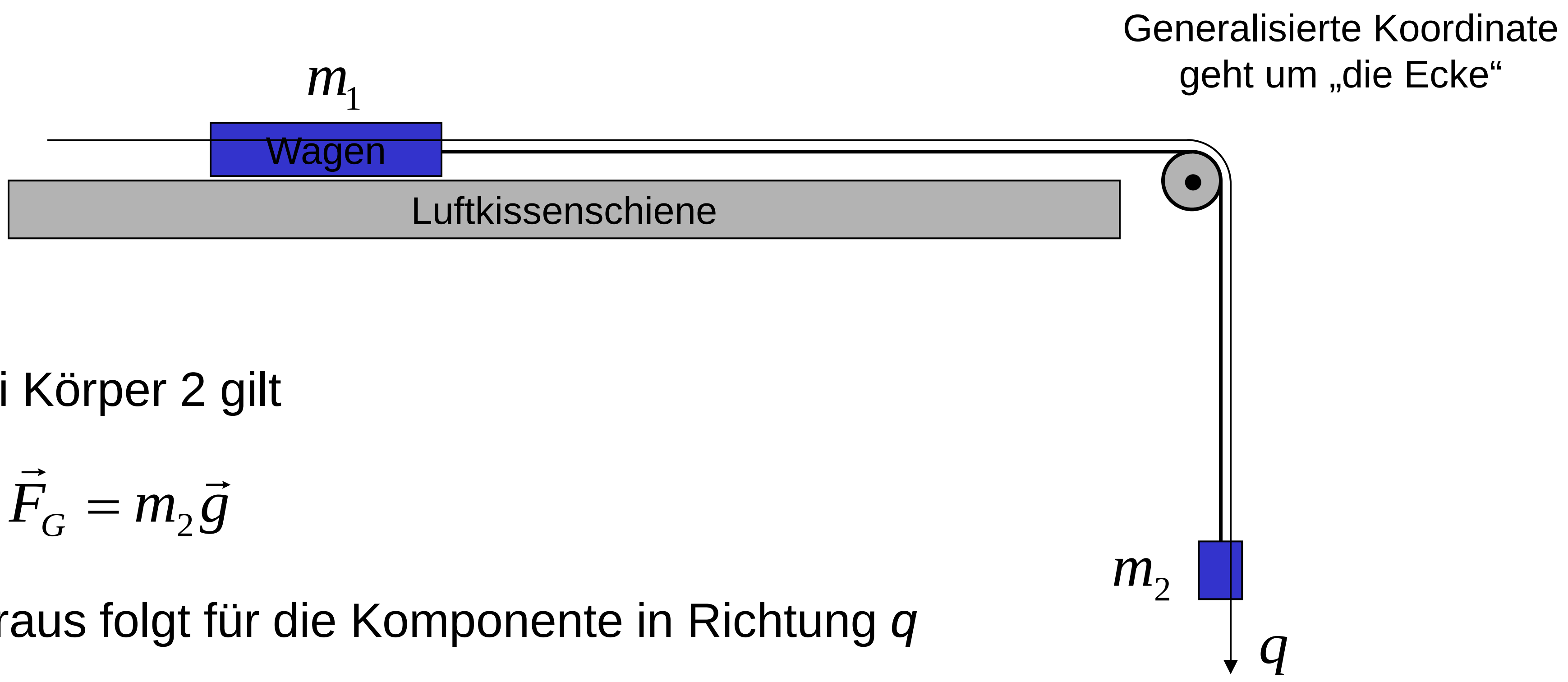
$$\vec{F}_G = m\vec{g}$$

Die Zwangskraft $\vec{F}_Z$ ist immer senkrecht zur Schiene gerichtet und gerade so groß, dass der Körper auf der Schiene bleibt. Sie kompensiert die Komponente der Gewichtskraft in dieser Richtung.

Die resultierenden Kraft $\vec{F}_R$ parallel zur Schiene führt zu einer Beschleunigung entlang der Schiene. Die Kraftkomponente bezogen auf die generalisierte Koordinate *q* ist gegeben durch

$$F_q = m\, g \sin\alpha$$

Anordnungen mit Fäden und Umlenkrollen



Bei Körper 2 gilt

$$\vec{F}_G = m_2 \vec{g}$$

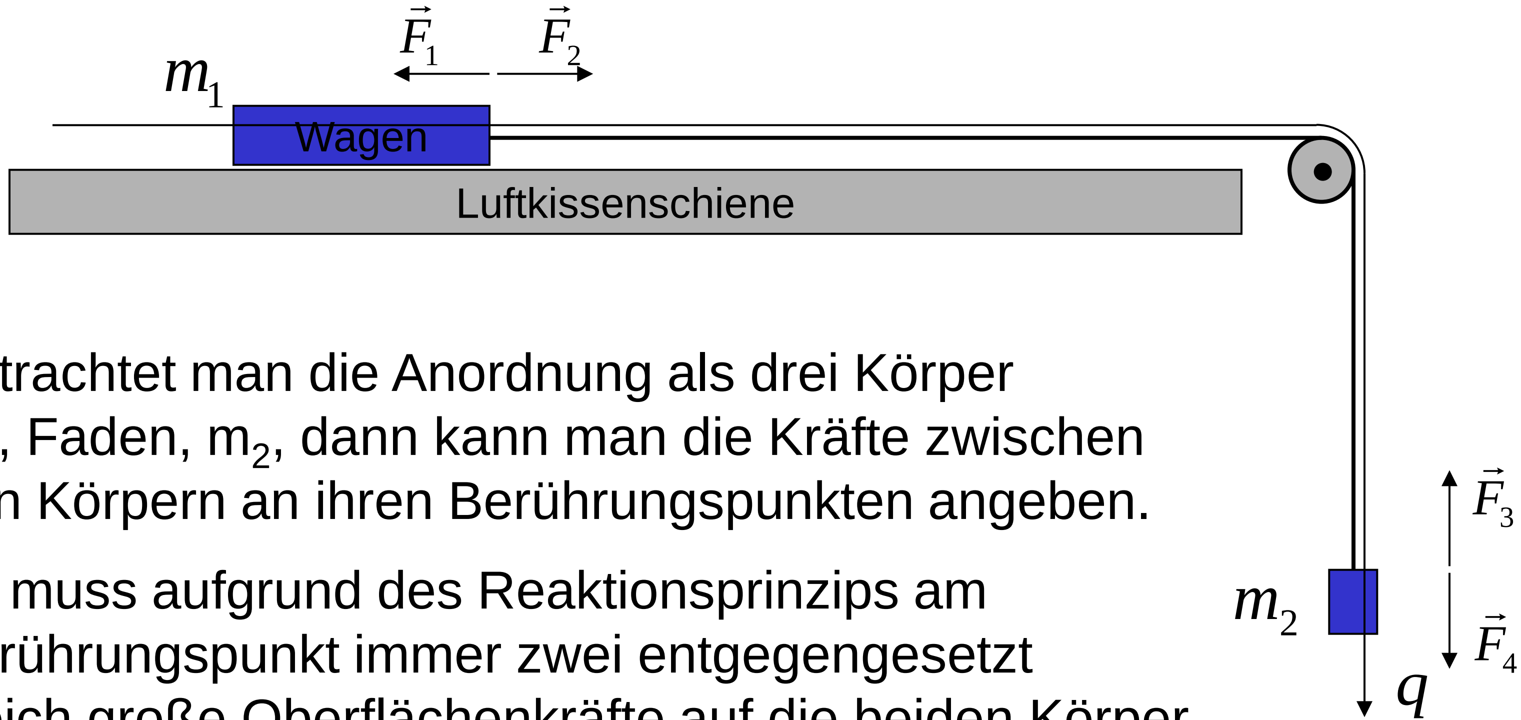
daraus folgt für die Komponente in Richtung *q*

$$F_q = m_2 g$$

Das Aktionsprinzip entlang der generalisierten Koordinate liefert dann

$$(m_1 + m_2)\, a_q = m_2 g$$

Mit der Komponente der Beschleunigung a_q in Richtung von *q.*



Betrachtet man die Anordnung als drei Körper m_1, Faden, m_2, dann kann man die Kräfte zwischen den Körpern an ihren Berührungspunkten angeben.

Es muss aufgrund des Reaktionsprinzips am Berührungspunkt immer zwei entgegengesetzt gleich große Oberflächenkräfte auf die beiden Körper geben.

Die Summe aller Oberflächen- und Volumenkräfte auf jeden Körper muss seine aktuelle Beschleunigung ergeben.

Körper 1: $F_{q1} = m_1\, a_q$ (F_{q1} ist negativ)

Faden: $F_{q1} + F_{q4} = 0$ (Faden ist masselos, F_{q1} ist negativ)

Körper 2: $m_2 g + F_{q3} = m_2 a_q$ (F_{q3} ist negativ)

Erkenntnistheorie

In der Physik werden Modelle verwendet, um die Natur zu beschreiben und Vorhersagen zu machen. Modell und Natur sind zwei verschiedene Dinge. Zwischen Modell und Natur gibt es wechselseitige Abbildungsvorschriften.

Experimente

Experimente beobachten das Verhalten der Natur mit einer gewissen Genauigkeit. Sie können niemals exakt sein. Mit Experimenten können Modelle falsifiziert werden aber nicht abschießend bestätigt werden[1]. Experimente können auch Hinweise auf neue Effekte liefern und erlauben die Messung von Naturkonstanten und Materialkonstanten.

Richtig und Falsch

Modelle können Experimente richtig oder falsch vorhersagen. Innerhalb eines Modells können Schlussfolgerungen, Herleitungen, etc. richtig oder falsch im mathematischen Sinne sein.

[1] Karl Popper, Logik der Forschung, 1934

Für einen Kreis von Phänomenen gibt es oft mehrere Modelle, die z.T. nur eine Teilmenge der Phänomene beschreiben oder Näherungen machen. Interessiert man sich für bestimmte Phänomene mit einer bestimmten Genauigkeit verwendet man das dafür besonders geeignete Modell.

In der Mechanik gibt es z.B. die Punktmechanik, die Mechanik starrer Körper, die Kontinuumsmechanik, die relativistische Mechanik, die Quantenmechanik, die relativistische Quantenmechanik, etc..

Aussagen sind z.T. in einem Modell richtig und im anderen Modell falsch. Experimente werden von den verschiedenen Modellen mit unterschiedlicher Genauigkeit vorhergesagt. Manche experimentell beobachteten Effekte werden von bestimmten Modellen gar nicht erfasst.