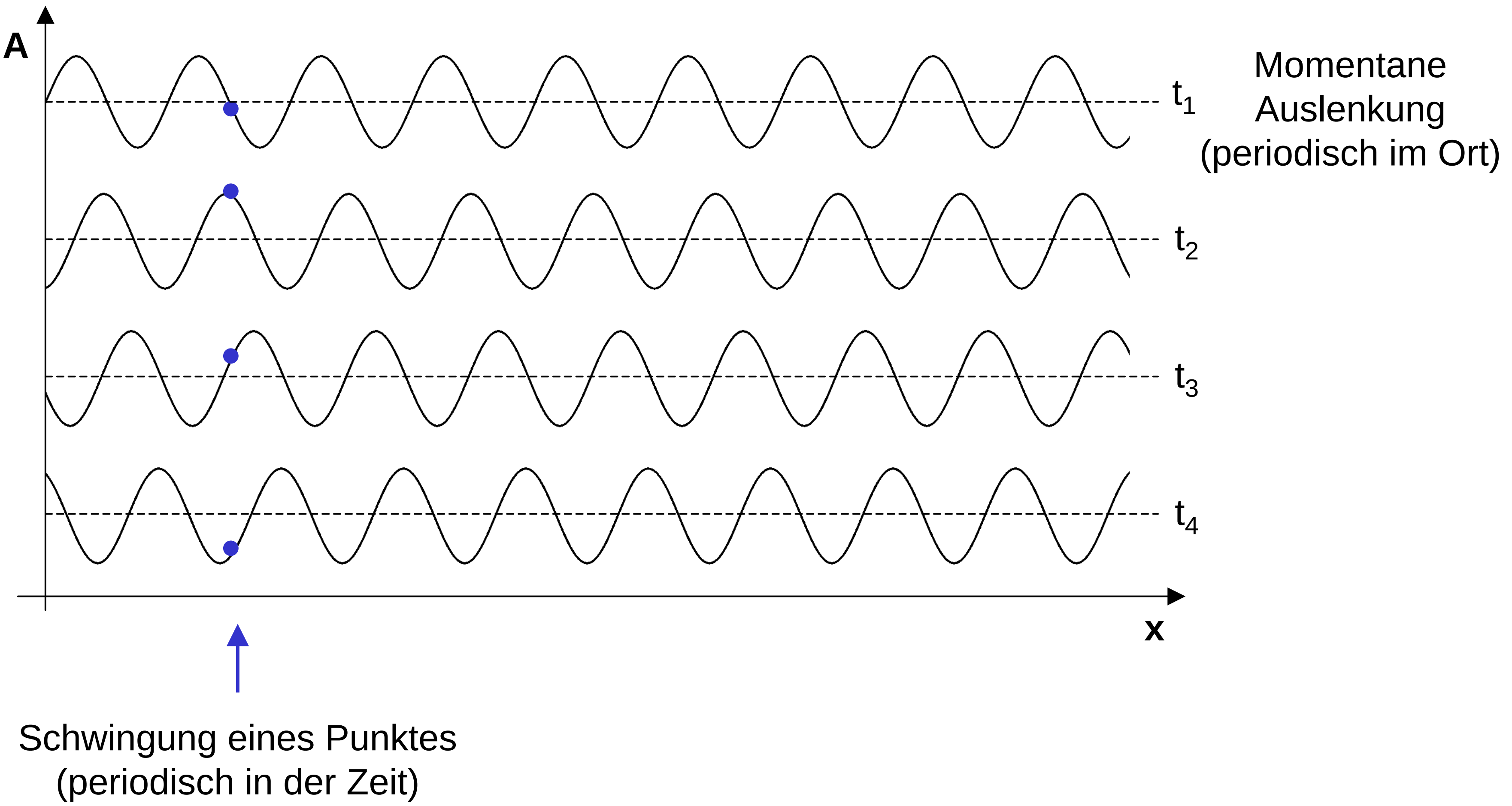
Wellen

Schwingungen sind periodisch in der Zeit.

Wellen sind periodisch in Zeit und Ort.



Ansatz für eine periodische Funktion in Ort und Zeit

$$A(t,x) = A_0 \sin(\omega t - k\,x)$$

Für festen Ort *x* periodische Schwingung: Schwingungsdauer T = $2\pi/\omega$

Für festen Zeitpunkt *t* periodisch im Ort: <u>Wellenlänge</u> $\lambda = 2\pi/k$

k ist die <u>Wellenzahl</u> (Zahl der Wellenzüge pro Meter mal 2π)

Die Welle läuft in positive x-Richtung.

Bewegung eines Punktes mit bestimmter Phase (z.B. Amplitude A=0):

$$A(t,x) = 0 = A_0 \sin(\omega t - k\,x)$$

immer, wenn

$$\omega t - k\,x = 0$$

also

$$\omega t = k\,x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k} = v$$

<u>Phasengeschwindigkeit</u> der Welle

Wellen treten als Lösung von Differentialgleichungen folgender Form auf:

<u>Wellengleichung</u> (partielle Differentialgleichung)

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

denn:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \omega \cos(\omega t - k x) \qquad \frac{\partial A}{\partial x} = -k \cos(\omega t - k x)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\omega^2 \sin(\omega t - k x) \qquad \frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -k^2 \sin(\omega t - k x)$$

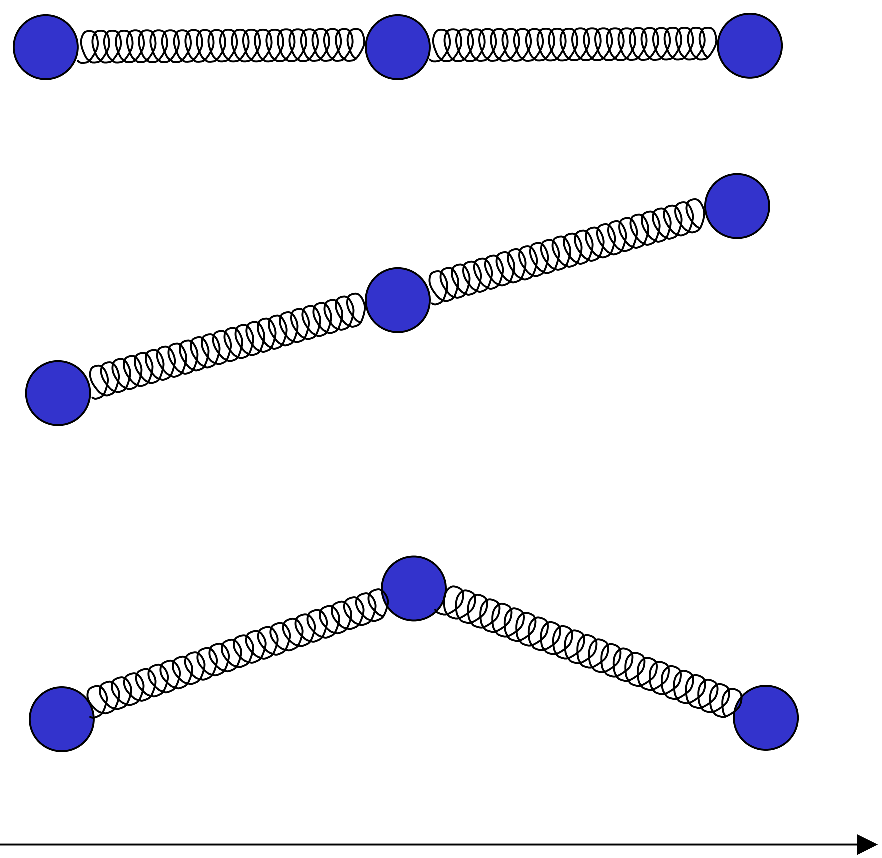
$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

mit $\quad v^2 = \dfrac{\omega^2}{k^2}$

Physikalischer Hintergrund der Wellenausbreitung:

Auf eine schwingungsfähige Masse am Punkt x wirken Kräfte, die von der Auslenkung der benachbarten Massen abhängen.

Kräftebilanz für mittlere Masse:



Keine Kraft: $A \neq 0$

Keine Kraft: $\dfrac{\partial A}{\partial x} \neq 0$

Kraft nach unten: $\dfrac{\partial^2 A}{\partial x^2} \neq 0$

Durch die Kraft

$$F \propto \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

wird die Masse (bzw. ein Massenelement) beschleunigt:

$$ma \propto \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

Damit ergibt sich die eindimensionale Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \propto \frac{1}{m} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

In drei Dimensionen steht rechts der Laplace-Operator

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} \propto \frac{1}{m} \left(\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A}{\partial z^2} \right)$$

<u>Wellengleichung für kompressible Flüssigkeiten und Gase</u>

Aus der Eulergleichung ohne Schwerkraft

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{u} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

zusammen mit Kontinuitätsgleichung

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\rho\,\mathrm{div}\,\vec{u}$$

lässt sich die Wellengleichung herleiten, wenn Geschwindigkeiten und Druckunterschiede klein sind (Wellen mit kleiner Amplitude):

$$\frac{\partial \vec{u}}{\partial t} + \underbrace{(\vec{u} \cdot \vec{\nabla})\,\vec{u}}_{\substack{\text{klein weil} \\ u \text{ klein ist}}} = -\frac{1}{\rho}\,\mathrm{grad}\,p$$

Umschreiben der Kontinuitätsgleichung in Dgl. für den Druck:

Mit

$$\partial p = \frac{1}{\kappa}\frac{\partial\rho}{\rho}$$

folgt

$$\frac{\partial p}{\partial t} = -\frac{1}{\kappa}\operatorname{div}\vec{u} \xrightarrow{\text{Ableiten nach der Zeit}} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\kappa}\operatorname{div}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t}$$

Außerdem haben wir (Eulergleichung):

$$\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{grad} p \xrightarrow{\text{div bilden}} \operatorname{div}\frac{\partial\vec{u}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\operatorname{grad} p$$

Gleichsetzen liefert:

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\kappa}\operatorname{div}\operatorname{grad} p$$

Divergenz vom Gradienten eines Feldes entspricht der Anwendung des Laplace-Operators

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = \frac{1}{\rho\kappa}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial z^2}\right)$$

Wellengleichung für den Druck in Flüssigkeiten und Gasen.

Die Phasengeschwindigkeit der Welle ist:

$$v^2 = \frac{1}{\rho\kappa} \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}}$$

Beispiele für v :	Luft	330 m/s	
	Helium	1007 m/s	Dichte kleiner als bei Luft
	Wasser	1485 m/s	Kompressibilität kleiner und Dichte größer als bei Gasen

Schallgeschwindigkeit:

In idealen Gasen gilt: $pV = nRT$ (siehe Thermodynamik)

Die Kompressibilität ergibt sich durch Ableiten:

$$V = \frac{nRT}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}p} = -\frac{nRT}{p^2} = -\frac{V}{p} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}V}{V} = -\frac{1}{p}\mathrm{d}p = -\kappa \mathrm{d}p$$

Bliebe die Temperatur konstant, wäre die Schallgeschwindigkeit:

$$v = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}} = \sqrt{\frac{p}{\rho}} = 280\,\mathrm{m/s}$$

Da die Druckschwankungen schnell sind, erhöht sich auch die Temperatur in den komprimierten Schichten (adiabatisch). Für zweiatomige Gase (Luft) gilt:

$$v = \sqrt{\frac{7}{5}\frac{p}{\rho}} = 330\,\mathrm{m/s}$$

Bei konstanter Temperatur ist

$$p \propto \rho \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho} = const.$$

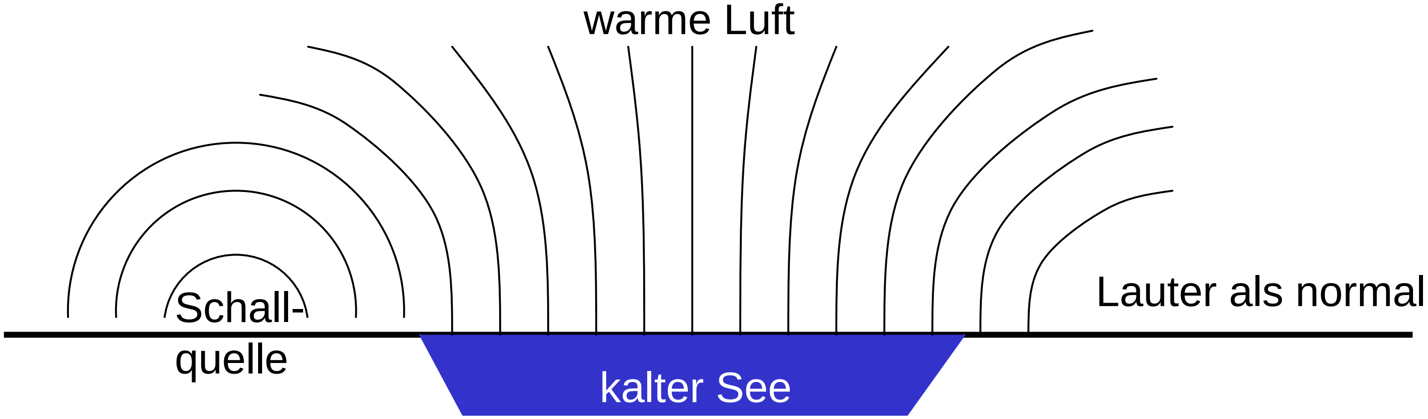
also hängt die Schallgeschwindigkeit nicht vom Luftdruck ab.

Bei konstantem Druck wird die Dichte mit steigender Temperatur kleiner.

$$p \propto T\rho \quad \Rightarrow \quad \frac{p}{\rho} \propto T$$

$$v = \sqrt{\frac{7}{5}\frac{p}{\rho}} \quad \Rightarrow \quad v \propto \sqrt{T}$$

In warmer Luft ist der Schall schneller.



„Akustische Fata Morgana“

Ebene Wellen

Wellen mit Flächen gleicher Phase

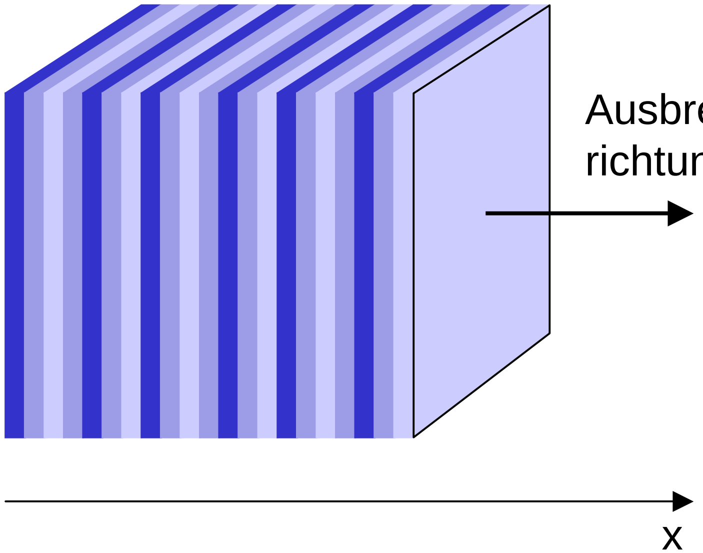
Ausbreitung senkrecht zu den Flächen gleicher Phase.

Wenn z.B.

$$p = p(t, x)$$

ergibt sich

$$\frac{\partial^2 p}{\partial t^2} = -\frac{1}{\rho\kappa}\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}$$



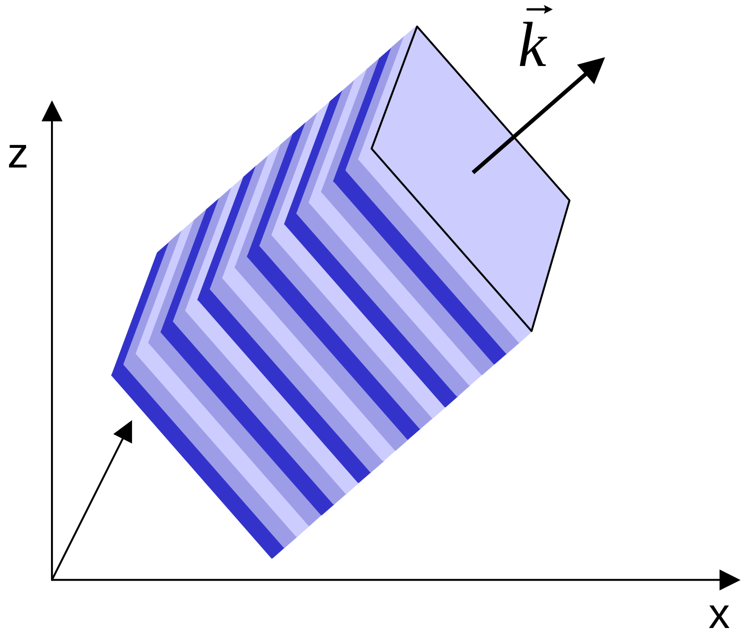
Die zeitliche Entwicklung von p innerhalb einer solchen Fläche ist gleich.

Der Druck als Funktion von Ort und Zeit lautet:

$$p(t, x) = p_0 \sin(\omega t - k x) + p_m \qquad \text{mit} \qquad \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{1}{\rho\kappa}}$$

Wenn die Ebenen schräg im Raum liegen
ergibt sich als Lösung der Wellengleichung

$$p(t,\vec{r}) = p_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + p_m$$



Mit dem Wellenzahlvektor $\vec{k}$

Ebenen die senkrecht auf $\vec{k}$ stehen
haben die gleiche Phase, weil das
Skalarprodukt den selben Wert liefert.

In kartesischen Koordinaten:

$$p(t,x,y,z) = p_0 \sin(\omega t - k_x x - k_y y - k_z z) + p_m$$

Wellenausbreitung in Richtung des Wellenzahlvektors $\vec{k}$

Intensität einer Welle

Wellen transportieren Energie und Impuls.

Bei mechanischen Wellen liegt die Energie als elastische Energie (Druckarbeit) und kinetische Energie (Bewegung der Moleküle) vor.

Die Energie wird auf Nachbarmoleküle übertragen ($\rightarrow$ Transport).

Elastische Energie:

Bei einer Schallwelle mit der Amplitude p_0 wird zur Kompression des Gases auf den Druck p_0 folgende Druckarbeit verrichtet:

$$\mathrm{d}W = -p\,\mathrm{d}V$$

mit der Definition für die Kompressibilität $\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = -\kappa\,\mathrm{d}p$ folgt

$$\mathrm{d}W = -\kappa V\,p\,\mathrm{d}p$$

Also ergibt sich für die Arbeit bei einer Halbwelle:

$$W = \kappa V \int_0^{p_0} p \,\mathrm{d}p = \kappa V \tfrac{1}{2} p^2 \Big|_0^{p_0} = \tfrac{1}{2} \kappa V p_0^2$$

Die Elastische Energie im Wellenberg ist also

$$E_{\mathrm{Wellenberg}} = \tfrac{1}{2} \kappa V p_0^2$$

Das gleiche gilt für das Wellental. Dazwischen ist die Energie Null.

Im Mittel ist die elastische Energie also

$$\overline{E}_{elast} = \tfrac{1}{4} \kappa V p_0^2$$

Die Gesamtenergie setzt sich aus pot. und kin. Energie zusammen.

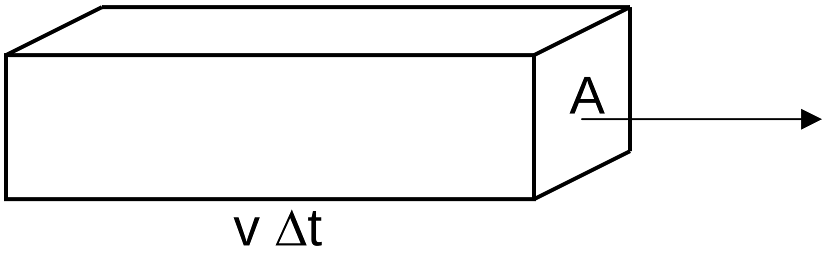
Die mittlere potentielle Energie ist gleich der mittleren kinetischen Energie

$$\overline{E}_{ges} = \overline{E}_{elast} + \overline{E}_{kin} = \tfrac{1}{2} \kappa V p_0^2$$

Die Energiedichte der Welle ist

$$\frac{\overline{E}_{ges}}{V} = \varepsilon = \tfrac{1}{2} \kappa p_0^2$$

<u>Definition:</u> Intensität ist die Energie, die pro Zeiteinheit durch eine Einheitsfläche tritt.



Die Energie im Volumen V ist:

$$\overline{E}_{ges} = \tfrac{1}{2}\kappa V p_0^2 = \tfrac{1}{2}\kappa v \Delta t A p_0^2$$

Sie tritt in der Zeit Δt durch die Fläche A

$$I = \frac{\Delta E}{\Delta t A} = \tfrac{1}{2}\kappa v p_0^2$$

Die Intensität einer Welle ist im Allgemeinen proportional zum Amplitudenquadrat.

Kugelwellen

Wellen, die von einer Punktquelle ausgehen.
Druckschwankungen an einem Punkt $\vec{r}_0$ breiten sich als Welle in alle Raumrichtungen gleichermaßen aus.

Am Punkt $\vec{r}_0$ wird die Leistung P (Druckarbeit pro Zeiteinheit) verrichtet und als Welle abgestrahlt.
Mit zunehmendem Abstand von der Quelle verteilt sich die Energie auf eine immer größer werdende Fläche

$$P = I(r)\, 4\pi r^2$$

$$\Rightarrow \quad I(r) = \frac{P}{4\pi r^2}$$

Berechnung der Amplitude als Funktion vom Abstand

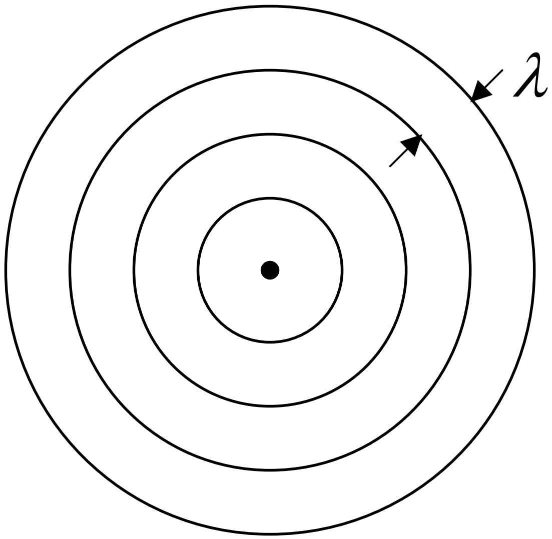
$$\frac{P}{4\pi r^2} = v \tfrac{1}{2} \kappa\, p_0^2(r) \quad \Rightarrow \quad p_0(r) \propto \frac{1}{r}$$

Ansatzfunktion für eine harmonische Kugelwelle:

$$p(t,\vec{r}) = \frac{p_0}{r}\sin(\omega t - kr) + p_m$$

Die Wellenzahl ist hierbei ein Skalar und wird mit dem Betrag von r multipliziert (kein Skalarprodukt).

Flächen gleicher Phase sind Kugelflächen.

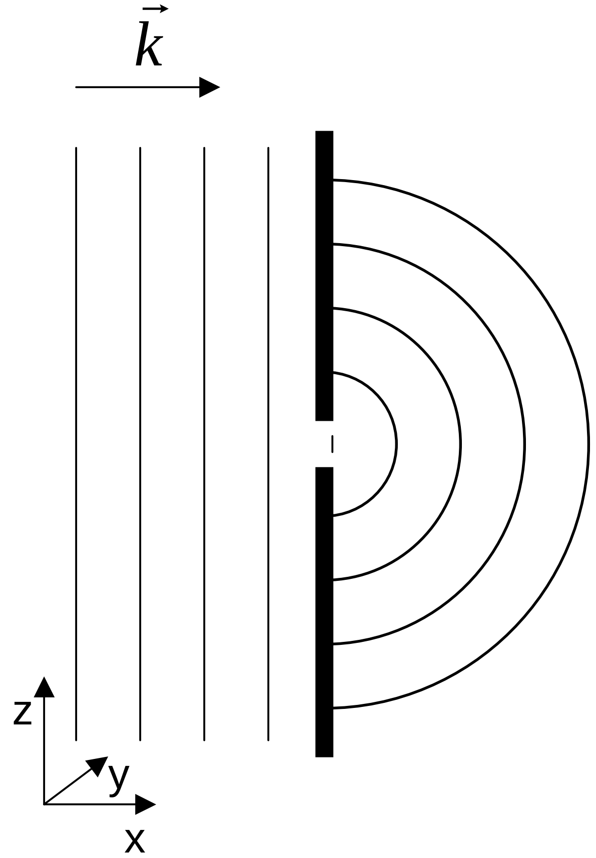


Huygensches Prinzip

Ebene Welle erzeugt am Loch

periodische Druckschwankungen.

Davon geht eine Kugelwelle aus.



Links:

Druckschwankungen sind in der ganzen

yz-Ebene in Phase. $\rightarrow$ ebene Welle

$$\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = 0 \qquad \frac{\partial^2 p}{\partial z^2} = 0$$

Rechts:

Druckschwankungen seitlich des Loches werden von der Wand

ausgeblendet. Dadurch Ausbreitung in alle Richtungen. $\rightarrow$ Kugelwelle

Reflexion

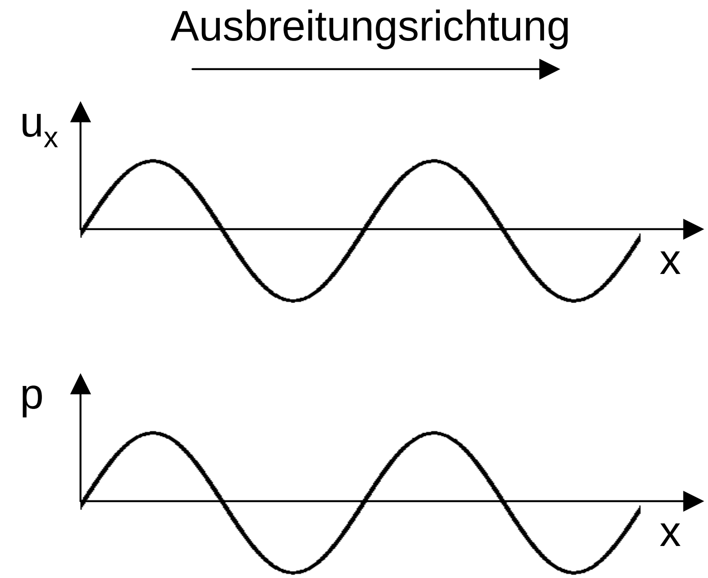
Beim Auftreffen auf die Wand ist

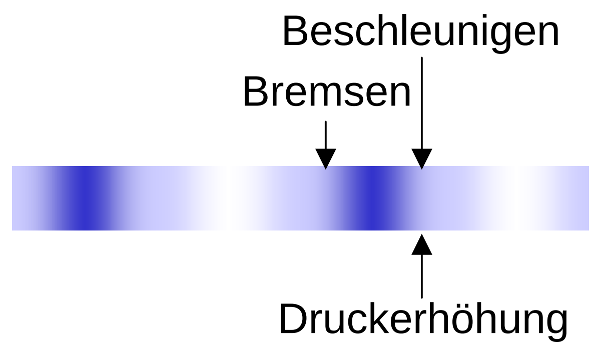
$$u_x(t)\big|_{Wand} \equiv 0$$

(Randbedingung)

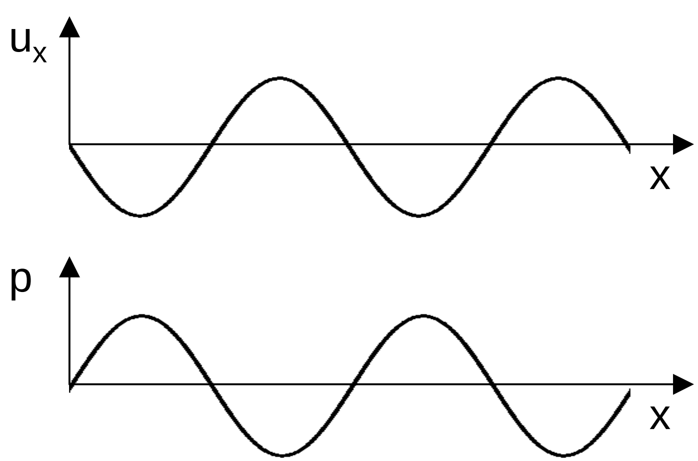
Hoher Druck vor der Wand kann nur nach hinten ausweichen (-x – Richtung)

$\rightarrow$ Reflexion





Umgekehrte Laufrichtung:

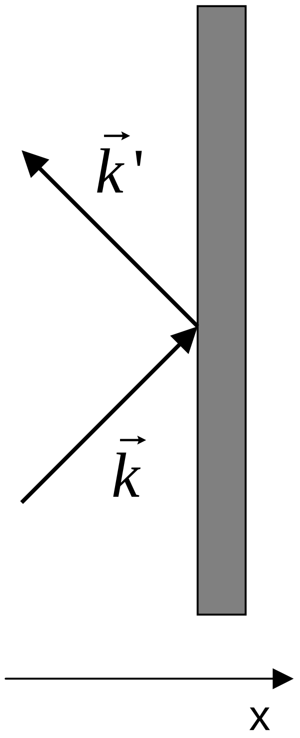


Schräger Einfall bei Reflexion:

Parallel zur Wand keine Behinderung der Ausbreitung.

Die Komponente des Wellenzahlvektors senkrecht zur Wand kehrt sich um.

Wellenzahlvektor parallel zur Oberfläche Bleibt erhalten.

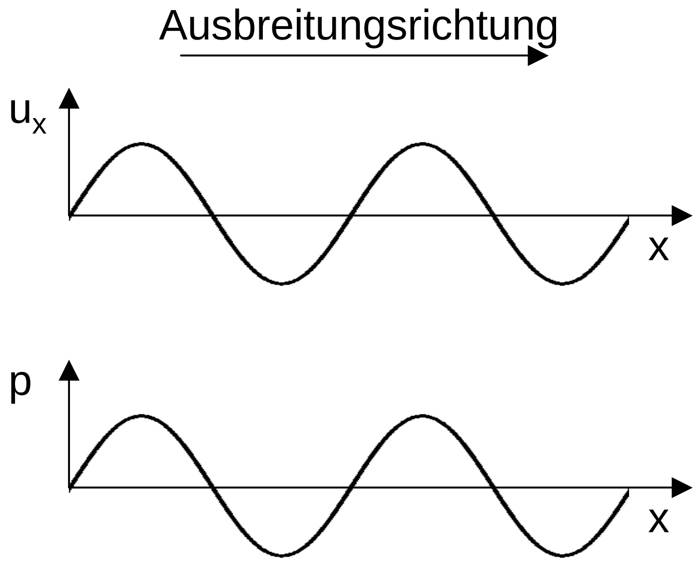


Einfallende Welle $\vec{k} = (k_x, k_y, k_z)$

Ausfallende Welle $\vec{k}' = (-k_x, k_y, k_z)$

Einfallswinkel = Ausfallswinkel

Stehende Wellen



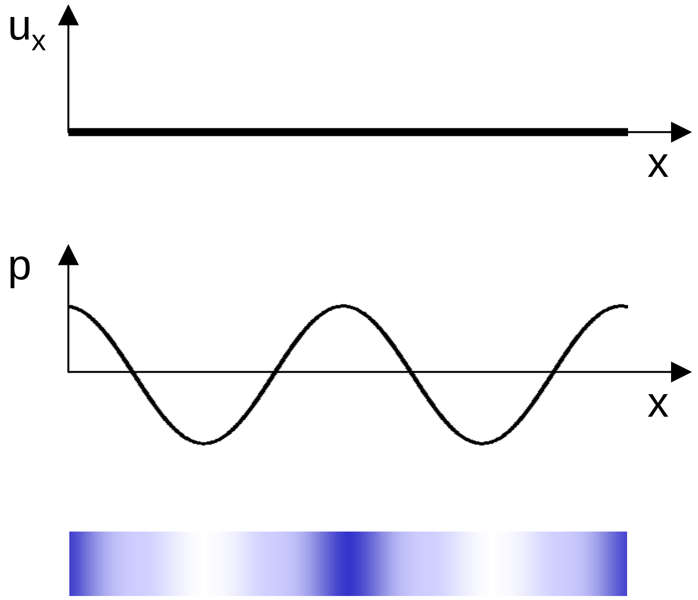
1. Laufende Schallwellen:

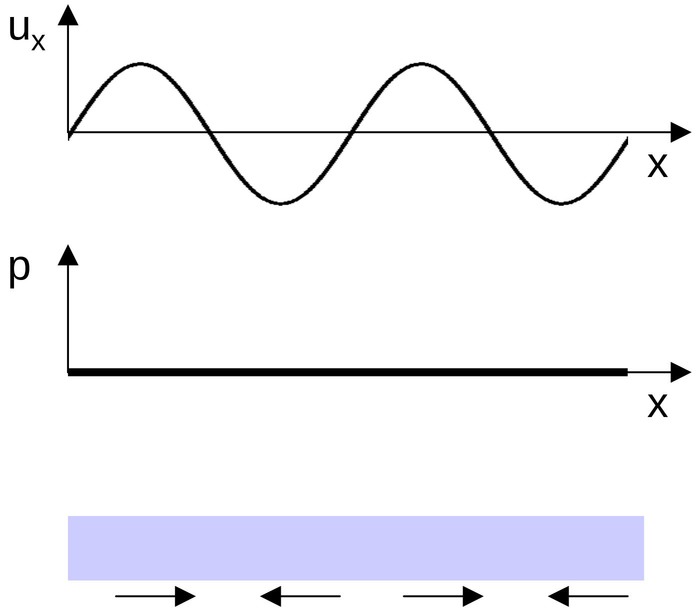
   Phase zwischen p und u_x bei

   Ausbreitung nach rechts: 0°

   Ausbreitung nach links: 180°

2. Stehende Schallwellen:





Stehende Wellen sind zusammengesetzt aus entgegengesetzt laufenden Wellen:

$$p(t,\vec{r}) = p_0 \sin(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r}) + p_0 \sin(\omega t + \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi) + p_m$$

$$p(t,\vec{r}) = 2 p_0 \sin(\omega t + \tfrac{\varphi}{2}) \cos(-\vec{k}\cdot\vec{r} - \tfrac{\varphi}{2}) + p_m$$

Stehende Wellen bilden sich z.B.

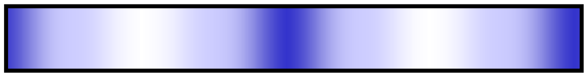
vor einer reflektierenden Wand aus.

In Hohlräumen können nur stehende Wellen

bestimmter Frequenzen angeregt werden

(alle Randbedingungen müssen erfüllt sein).

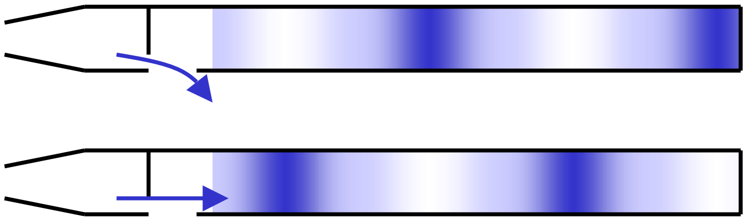
$\rightarrow$ Eigenschwingung.



Eigenschwingungen können

In Resonanz angeregt werden.

Beispiel: Orgelpfeife



Überlagerung von Wellen

Weil die Wellengleichung linear ist, gilt das Superpositionsprinzip für Wellen.

Mehrere Wellen überlagern sich, ohne sich gegenseitig zu beeinflussen.
Dabei addieren sich an jedem Ort die Amplituden jeder einzelnen Wellen.

Es gibt insgesamt aber nur ein Wellenfeld, das durch die Funktion $p(t,\vec{r})$ beschrieben wird. Es enthält die „Information“ über alle beteiligten Teilwellen.
Vgl. z.B. das elektromagnetische Feld um uns herum enthält die Information aller gesendeter Radio- und Fernsehsender gleichzeitig.

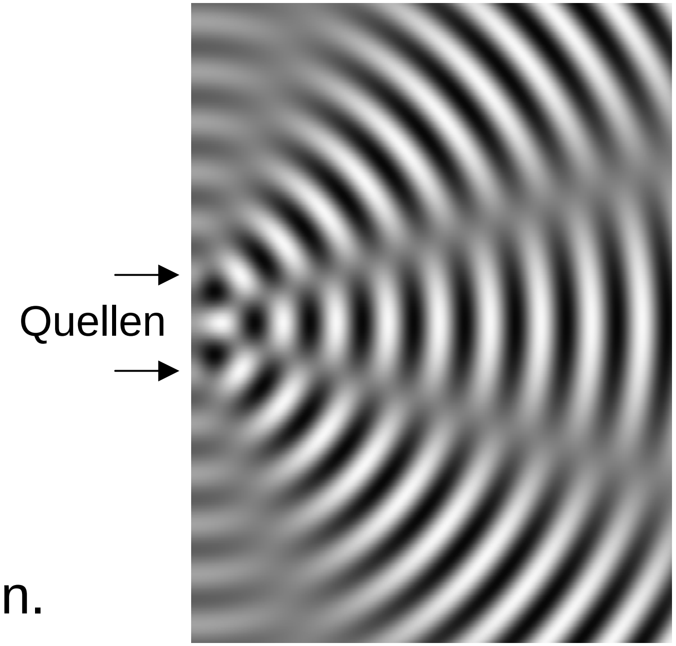
$\rightarrow$ Wellen, werden **nicht** an anderen Wellen gestreut.

Das Superpositionsprinzip gilt nicht mehr, wenn nichtlineare Effekte eine Rolle spielen. (z.B. sehr starke Laserpulse in Materie)

Bei der Überlagerung treten Effekte durch Interferenz auf.

Interferenz

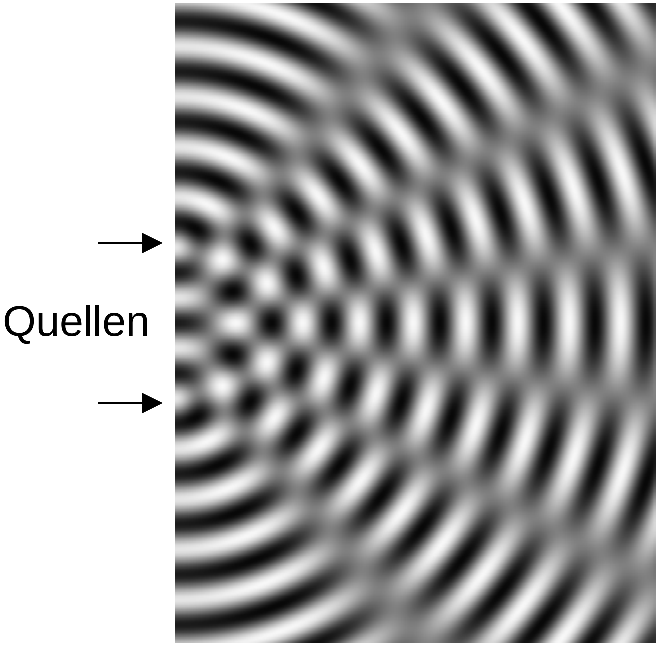
Überlagern sich zwei Wellen mit gleicher Wellenlänge, gibt es Bereiche in denen sich Wellenberge und Wellentäler gegenseitig aufheben.



Voraussetzung ist die Kohärenz der beiden Wellen.

Beide Quellen müssen die gleiche Frequenz und eine feste Phasenbeziehung zueinander haben.

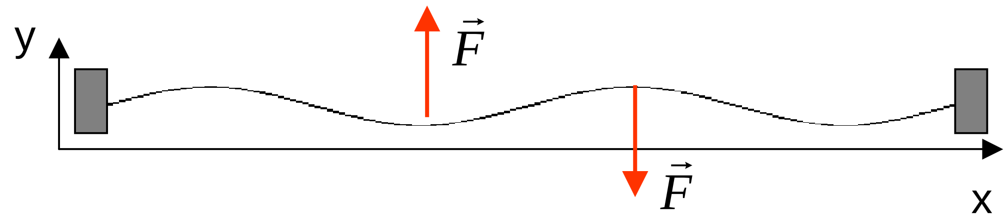
Nach der Ausbreitung im Raum bleibt die Phasenbeziehung zur Quelle zeitlich konstant
→ räumliche Kohärenz



Länge über die das gilt heißt Kohärenzlänge

Transversale Wellen

Entlang einer gespannten Saite



Die rücktreibende Kraft F auf ein kurzes Drahtstück der Länge dx zeigt in y-Richtung. Der Vektor $\vec{A}(x,t)$ beschreibe die Auslenkung des Elementes

$$F_y \propto \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}$$

Die Proportionalitätskonstante ist die Kraft mit der die Saite gespannt ist F_0dx.

$$F_y = F_0 \mathrm{d}x \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} \qquad \text{vektoriell:} \qquad m\vec{a} = \vec{F} = F_0 \mathrm{d}x \frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial x^2}$$

Das Massenelement m = μdx der Saite wird in y-Richtung beschleunigt.

Für die y-Komponente der Vektoren ergibt sich:

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = \frac{F_0}{\mu} \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}$$

μ: Massendichte pro Länge

Der Vektor $\vec{A}(x,t)$ zeigt in die Richtung der Auslenkung.

Wenn er senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung der Welle steht, spricht man von <u>transversalen Wellen</u>

Zeigt $\vec{A}(x,t)$ in Ausbreitungsrichtung spricht man von <u>longitudinalen Wellen</u>

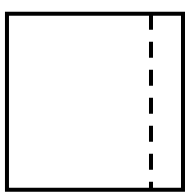
Bei transversalen Wellen sind verschiedene Richtungen von $\vec{A}(x,t)$ möglich
Bei Ausbreitung in x-Richtung kann $\vec{A}(x,t)$ z.B. in y- oder z-Richtung zeigen.
Man spricht von unterschiedlicher <u>Polarisation</u> der Welle.

In elastischen Festkörpern treten longitudinale und transversale Wellen auf

Longitudinal

$F_x \propto E$

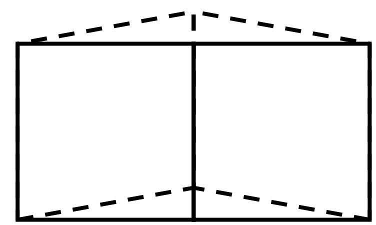
Elastizitätsmodul



transversal

$F_y \propto G$

Schermodul



Aufstellen der Kräftebilanz und Aktionsprinzip liefert die Wellengleichungen

1. Longitudinale Welle in x-Richtung:

$$\frac{\partial^2 A_x}{\partial t^2} = \frac{E}{\rho}\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}$$

Phasengeschwindigkeit: $v = \sqrt{E/\rho}$

2. Transversale Welle in x-Richtung Polarisation in y-Richtung:

$$\frac{\partial^2 A_y}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}$$

Phasengeschwindigkeit: $v = \sqrt{G/\rho}$

3. Transversale Welle in x-Richtung Polarisation in z-Richtung:

$$\frac{\partial^2 A_z}{\partial t^2} = \frac{G}{\rho}\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}$$

Phasengeschwindigkeit: $v = \sqrt{G/\rho}$

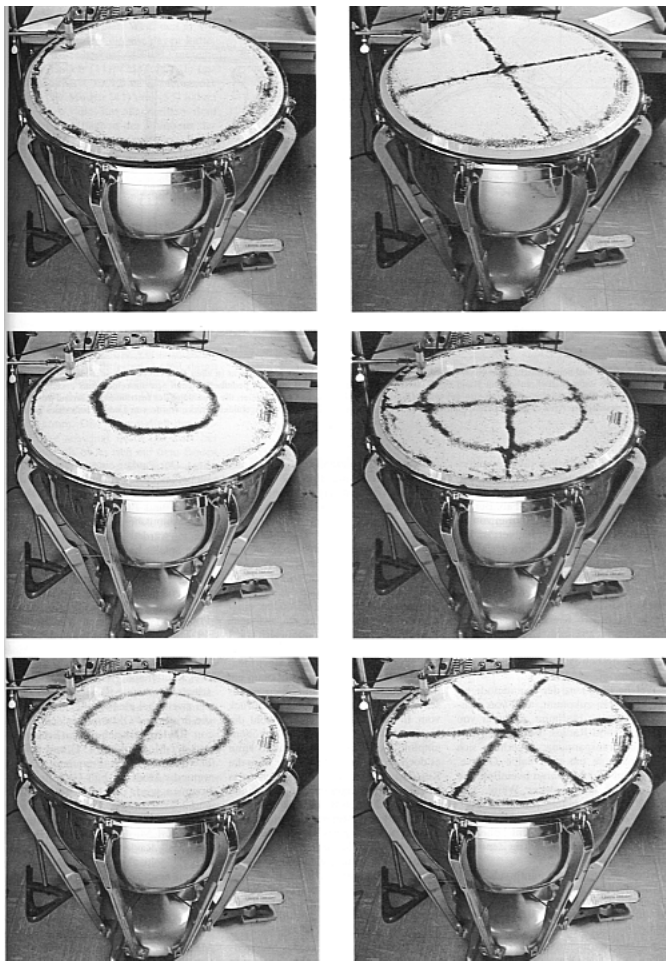
Beispiele für Phasengeschwindigkeiten elastischer Wellen:

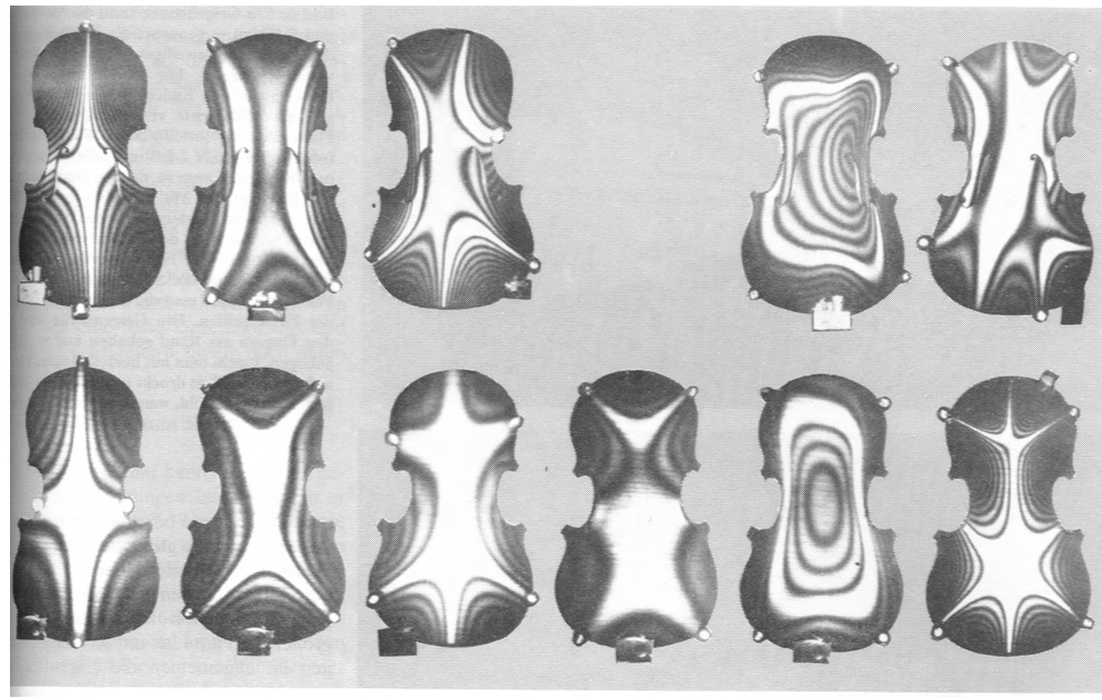
Aluminium:	longitudinal 6420 m/s	transversal: 3040 m/s
Eisen:	5950 m/s	3240 m/s
Glas:	3980 m/s	2380 m/s

Stehende Wellen in 2- und 3-dimensionalen Körpern

In einer eingespannten Membran bilden sich stehende transversale Wellen.

Fasst man die einzelnen Volumenelemente als gekoppelte Pendel auf, sind die stehenden Wellen die Eigenschwingungen der gekoppelten Pendel

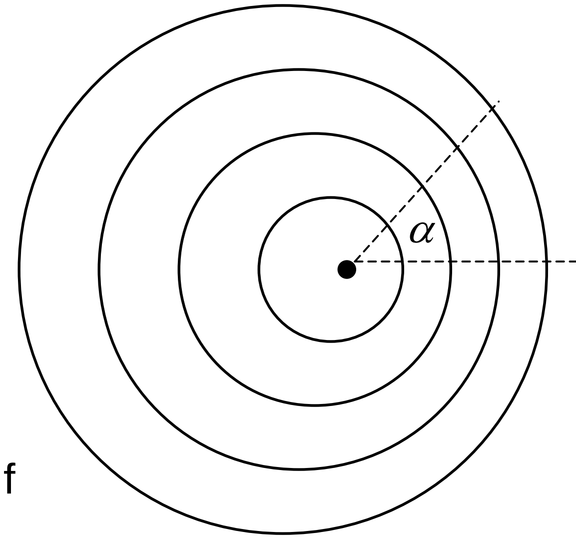




Holographische Aufnahme der Eigenschwingungen einer Violinplatte (Decke oben, Boden unten)

Links: Pauke. Pulver bleibt an Knotenlinien liegen

Dopplereffekt:



Schall der von bewegten Quellen ausgesendet wird.

Ausbreitungsgeschwindigkeit in alle Richtungen gleich.

Wellenlänge wird verkürzt bzw. verlängert.

Geschwindigkeit der Quelle: u, Phasengeschwindigkeit: v, Frequenz: f

$$\lambda = \frac{1}{f}(v - u\cos\alpha)$$

Dadurch ergibt sich eine Frequenzänderung am Empfänger

$$f' = \frac{v}{\lambda} = \frac{v\,f}{v - u\cos\alpha} = \frac{f}{1 - \frac{u}{v}\cos\alpha}$$

Die relative Frequenzänderung ergibt sich durch umformen:

$$\frac{\Delta f}{f'} = \frac{u}{v}\cos\alpha$$

Machscher Kegel

Bewegt sich eine Schallquelle mit Überschallgeschwindigkeit, addieren sich die Wellenberge auf einem Kegel → Machscher Kegel

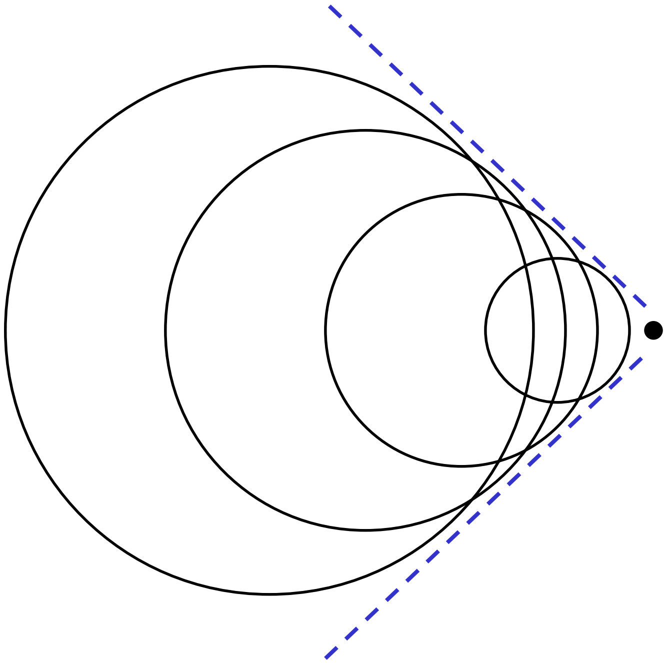


Foto: US Navy

Der Öffnungswinkel des Kegels ist

$$\sin\beta = \frac{v}{u} = \frac{1}{M}$$

M: Machzahl