Ladung

Elektrische Ladung ist eine Eigenschaft von vielen Elementarteilchen, die zusätzlich zu ihrer „Eigenschaft der Masse“ beobachtet wird.

Ladung ist immer mit Masse verknüpft – es gibt keine masselosen Elementarteilchen, die eine Ladung besitzen.

So wie Masse Ursprung der Gravitationswechselwirkung ist, so ist die Ladung Ursprung einer elektromagnetischen Wechselwirkung.

Masse hat gleichzeitig die Eigenschaft einer Trägheit, Ladung besitzt keine Trägheit. Die Elementarteilchen sind träge aufgrund ihrer Masse.

Es gibt zwei entgegengesetzte Sorten von Ladungen: positive und negative

Die Ladung ist „gequantelt“, d.h. sie tritt nur in ganzzahligen Vielfachen von einer Elementarladung auf.

Die Einheit der Ladung ist das Coulomb (C).

Die Elementarladung ist e = 1.602 176 53(14) x 10^{-19} C

Die in Atomen und Molekülen relevanten Elementarteilchen mit Ladung sind die Elektronen (Ladung $Q_e = -e$) und die Protonen ($Q_p = +e$).

Es ist experimentell nachgewiesen, dass sich der Betrag der Ladung von Elektron und Proton um weniger als $10^{-20}e$ unterscheidet.

Erhaltungssatz:

> Die Gesamtladung in einem abgeschlossenen System bleibt erhalten.

Paare von Ladungen (+e / -e) können erzeugt und vernichtet werden, ebenso wie Paare aus (Masse / Antimasse).
Dies geschieht z.B. bei Elektron/Positron Paarerzeugung bei der Energie in Masse/Antimasse umgewandelt wird.

<u>Kräfte zwischen Ladungen:</u>

Ladungen mit unterschiedlichem Vorzeichen zeihen sich an,

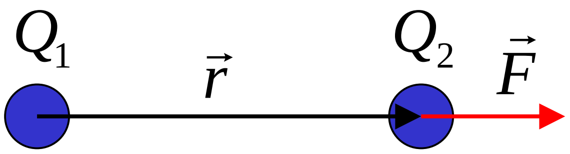
Ladungen mit gleichem Vorzeichen stoßen sich ab.

Man beobachtet, dass für die Kraft zwischen den beiden Ladungen Q_1 und Q_2 im Abstand r gilt:

$$F \propto \frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Die Kraft auf Ladung Q_2 wirkt in Richtung des Abstandsvektors $\vec{r}$, der von Ladung Q_1 auf Q_2 zeigt.

$$\vec{F} \propto \frac{Q_1 \cdot Q_2}{|\vec{r}|^2} \frac{\vec{r}}{|\vec{r}|}$$



Die Proportionalitätskonstante wird aus praktischen Gründen $1/4\pi\varepsilon_0$ genannt.

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2}$$

Coulombsches Gesetz

Die Naturkonstante ε_0 nennt man die Dielektrizitätskonstante.

$\varepsilon_0 = 8.854\ 187\ 817... \times 10^{-12}\ C^2/(Nm^2)$

Der Wert ist exakt, da die Definition der Einheit Ampere (A) und damit auch die Definition der Einheit Coulomb (C = As) letztlich auf die Definition dieser Naturkonstante zurückgeführt werden.

Erinnere: Entsprechend wurde bei der Definition der Einheit Meter vorgegangen, das über die Definition der Naturkonstanten Lichtgeschwindigkeit an die Sekunde gekoppelt wird.

Die Proportionalitätskonstante $1/4\pi\varepsilon_0$ ist im Vergleich zur Gravitationskonstanten γ sehr groß:

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 8.98 \cdot 10^9\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{C}^2 \qquad \gamma = 6.67 \cdot 10^{-11}\ \mathrm{Nm}^2/\mathrm{kg}^2$$

Zwei Kugeln aus Blei mit der Masse von je 1kg im Abstand von 1m zeihen sich mit der Kraft von $F = 6.67\ 10^{-11}$ N an.

Wäre die Ladung der Protonen in den Kugeln nicht durch Elektronen neutralisiert wäre die Kraft zwischen beiden Kugeln $F = 1.31\ 10^{25}$ N

Die Coulombkraft (Elektrostatische Kraft) zwischen Kugeln wird beobachtet, wenn die Zahl von Protonen und Elektronen in den Kugeln unterschiedlich ist und sich damit jeweils eine Nettoladung der Kugel ergibt.

Experiment: Elektroskop, Coulombsche Drehwaage

Das elektrische Feld

1. Die Wechselwirkung (Kraft) zwischen zwei Ladungen kann man sich als Fernwirkung über eine große Entfernung vorstellen.

2. Eine andere Vorstellung verwendet den Begriff des „Feldes“.

   Die eine Ladung erzeugt ein elektrisches Feld und die andere Ladung erfährt in dem Feld eine Kraft.

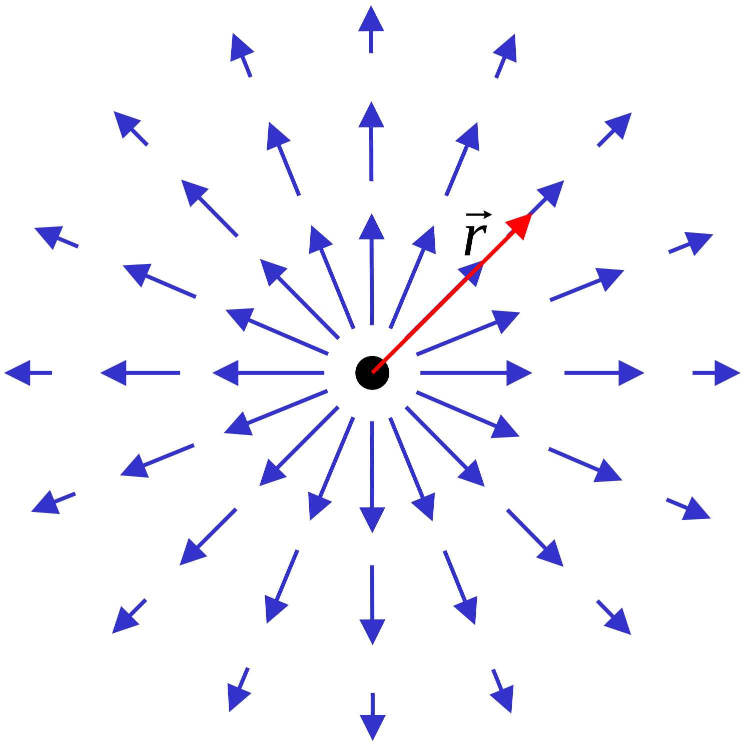
   Die Felder sind etwas Reales, da in ihnen Energie gespeichert ist.

   Es gibt Felder, die sich von der erzeugenden Ladung gelöst haben und Energie transportieren (elektromagnetische Wellen).
   Andere Ladungen können in diesen Feldern Kräfte erfahren. Dies wäre nicht mit einer Fernwirkung erklärbar.

Wir führen das elektrische Feld so ein, dass die Ladung Q in dem Feld die Kraft $\vec{F} = Q\,\vec{E}$ erfährt. $\vec{E}$ nennt man die elektrische Feldstärke.

Aus dem Coulombgesetz ergibt sich für die Kraft auf die Ladung Q_2 am Punkt $\vec{r}$ durch das Feld was von Ladung Q_1 erzeugt wird

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1 \cdot Q_2}{r^2} = E\,Q_2$$



also

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{r^2}$$

und vektoriell geschrieben:

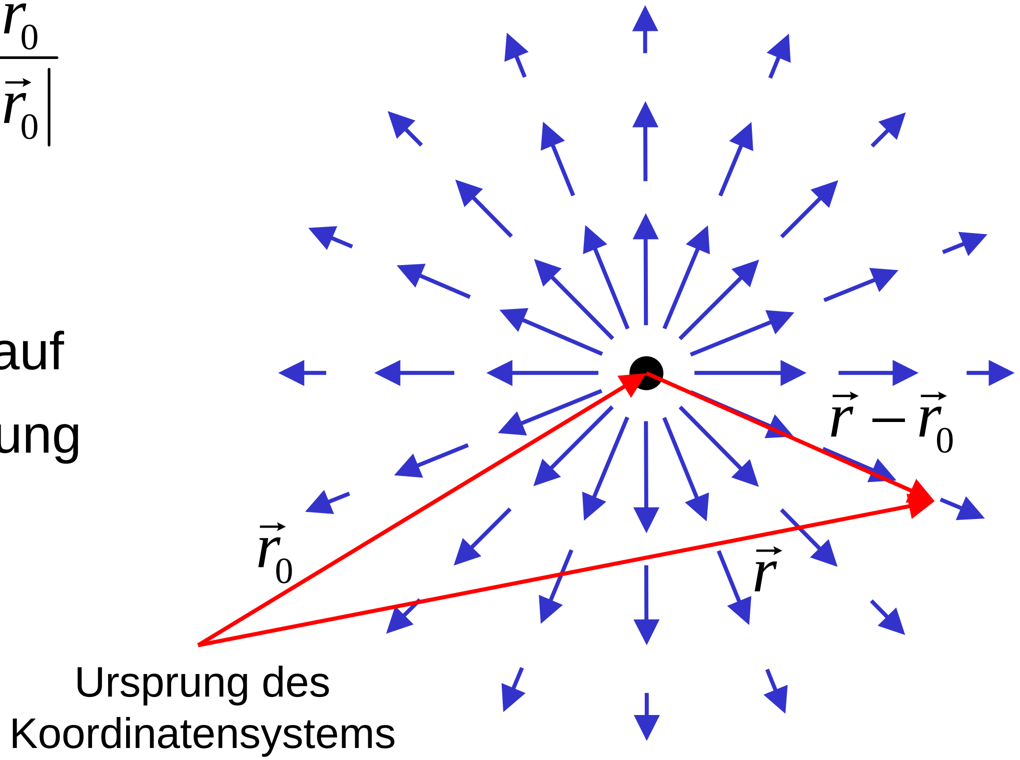
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{\left|\vec{r}\right|^2}\frac{\vec{r}}{\left|\vec{r}\right|}$$

Unter dem Feld als Ganzes versteht man die vektorwertige Funktion $\vec{E}(\vec{r})$ die die Feldstärke $\vec{E}$ an jedem Raumpunkt $\vec{r}$ angibt.

Eine Ladung Q am Ort $\vec{r}_0$ erzeugt ein elektrisches Feld der Form

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|^2} \frac{\vec{r}-\vec{r}_0}{\left|\vec{r}-\vec{r}_0\right|}$$

Die Feldstärke $\vec{E}$ am Ort $\vec{r}$ zeigt vom Ort $\vec{r}_0$ in Richtung auf den Ort $\vec{r}$, hat also die Richtung von $\vec{r}-\vec{r}_0$.



Die Richtung der Feldstärke ist umgekehrt, wenn Q negativ ist.

Befinden sich mehrere Ladungen im Raum, addieren sich die Beiträge jeder Ladung zur elektrischen Feldstärke vektoriell (Superpositionsprinzip).

Die drei Ladungen Q_1, Q_2 und Q_3 an den Orten r_1, r_2 und r_3 erzeugen das Feld

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_1}{\left|\vec{r}-\vec{r}_1\right|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_2}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_2}{\left|\vec{r}-\vec{r}_2\right|} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_3}{\left|\vec{r}-\vec{r}_3\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_3}{\left|\vec{r}-\vec{r}_3\right|}$$

Für *n* Ladungen kann man allgemein schreiben

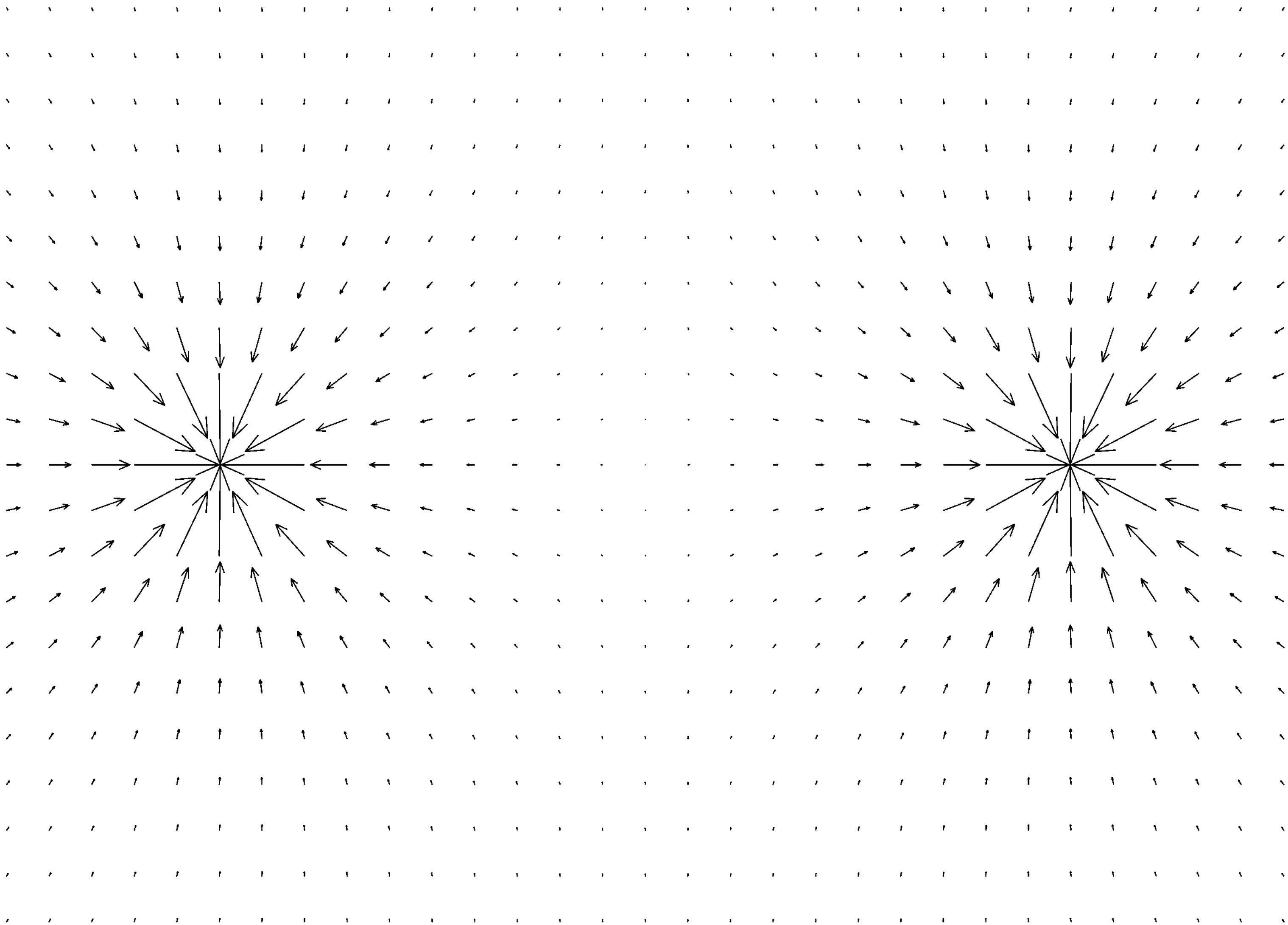
$$\vec{E}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}_i}{\left|\vec{r}-\vec{r}_i\right|}$$

Sind die Ladungen quasi kontinuierlich verteilt ergibt sich ein Integral

$$\vec{E}(\vec{r}) = \int_V \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\rho(\vec{r}\,')}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|^2}\frac{\vec{r}-\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}-\vec{r}\,'\right|}\,\mathrm{d}^3r'$$

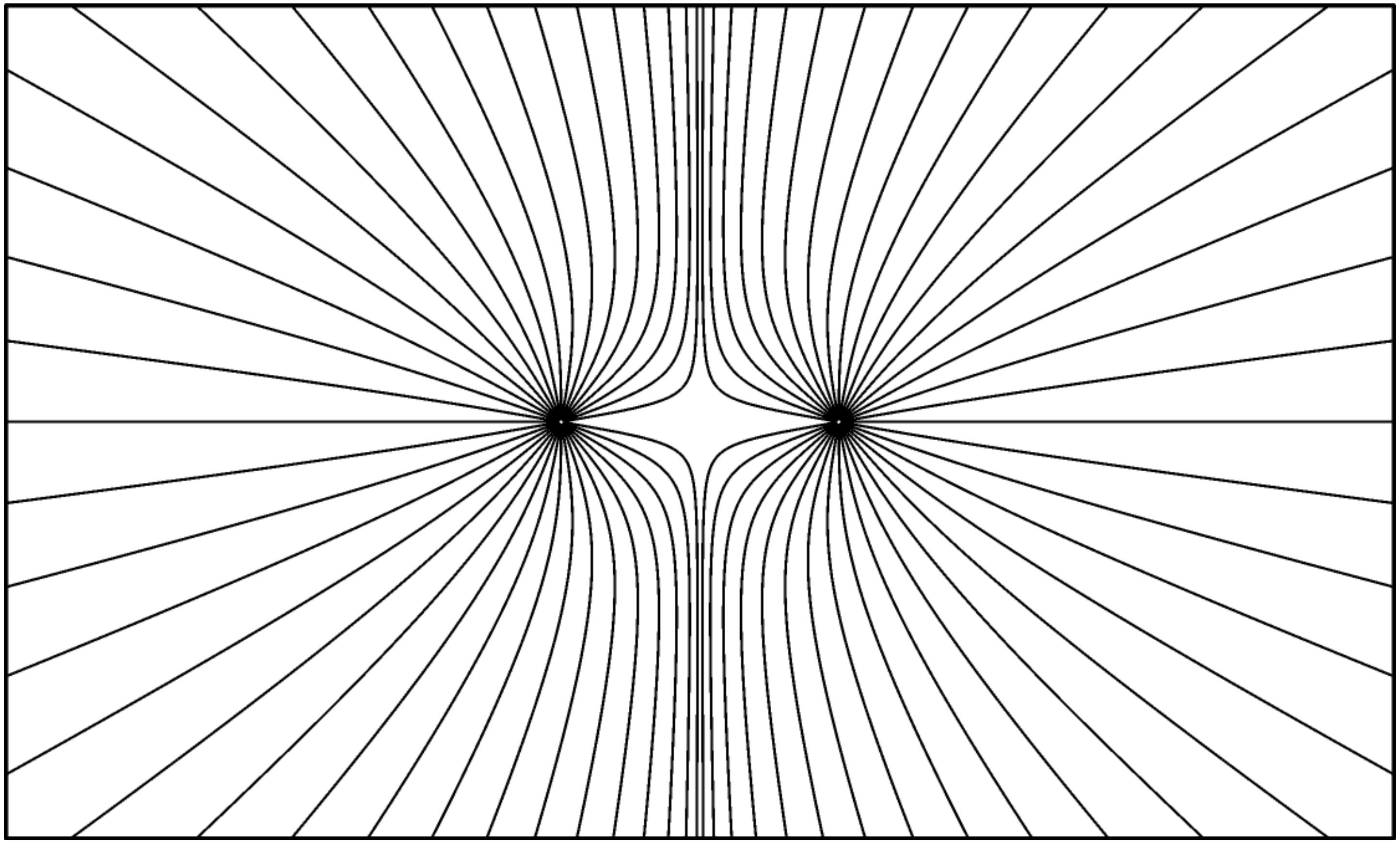
mit der Ladungsdichte $\rho(\vec{r})$

Beispiel: Feld von zwei negativen Ladungen



Feldlinien:

Beispiel: zwei positive Ladungen

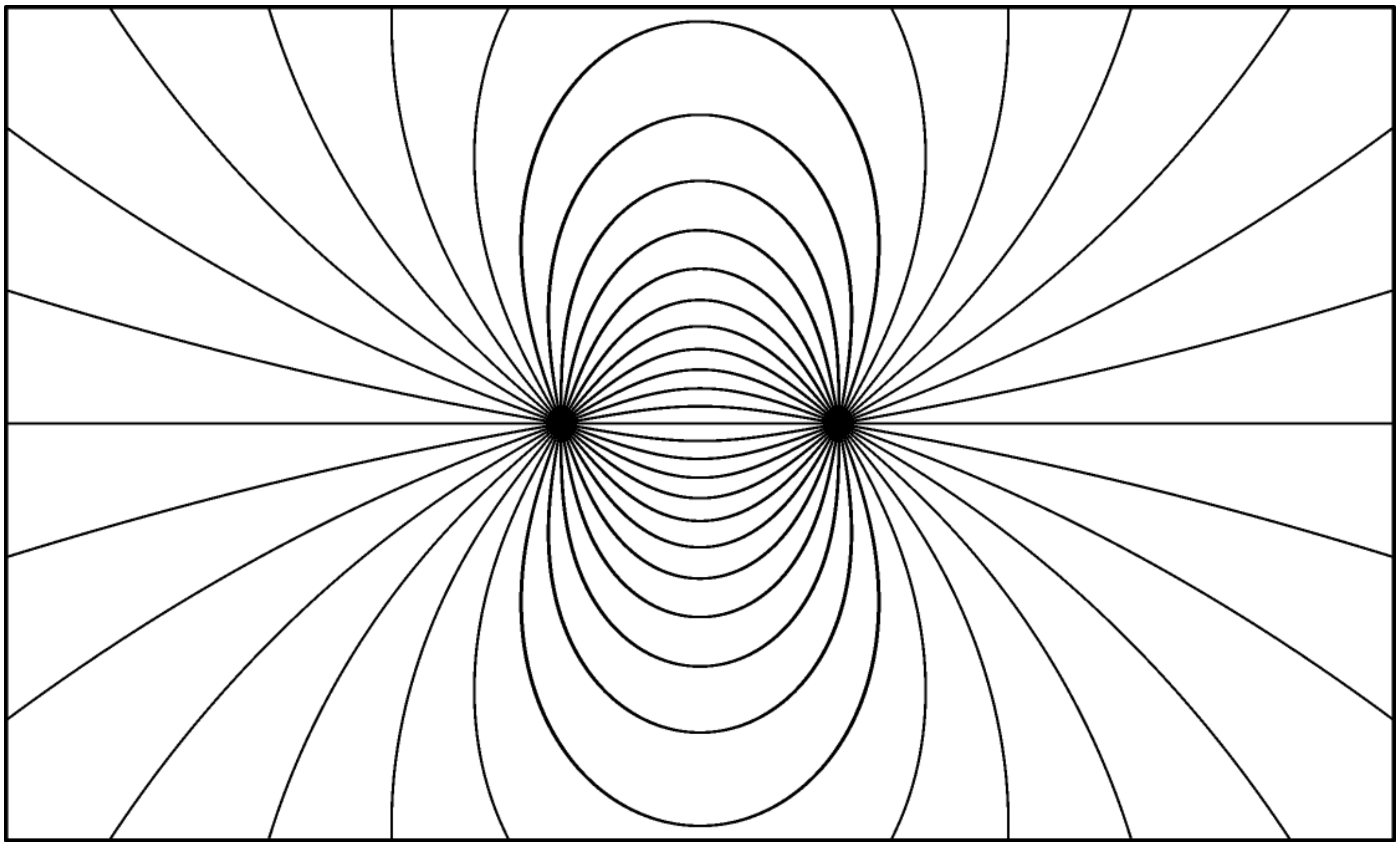


Feldlinien verlaufen in jedem Punkt in Richtung der elektrischen Feldstärke.

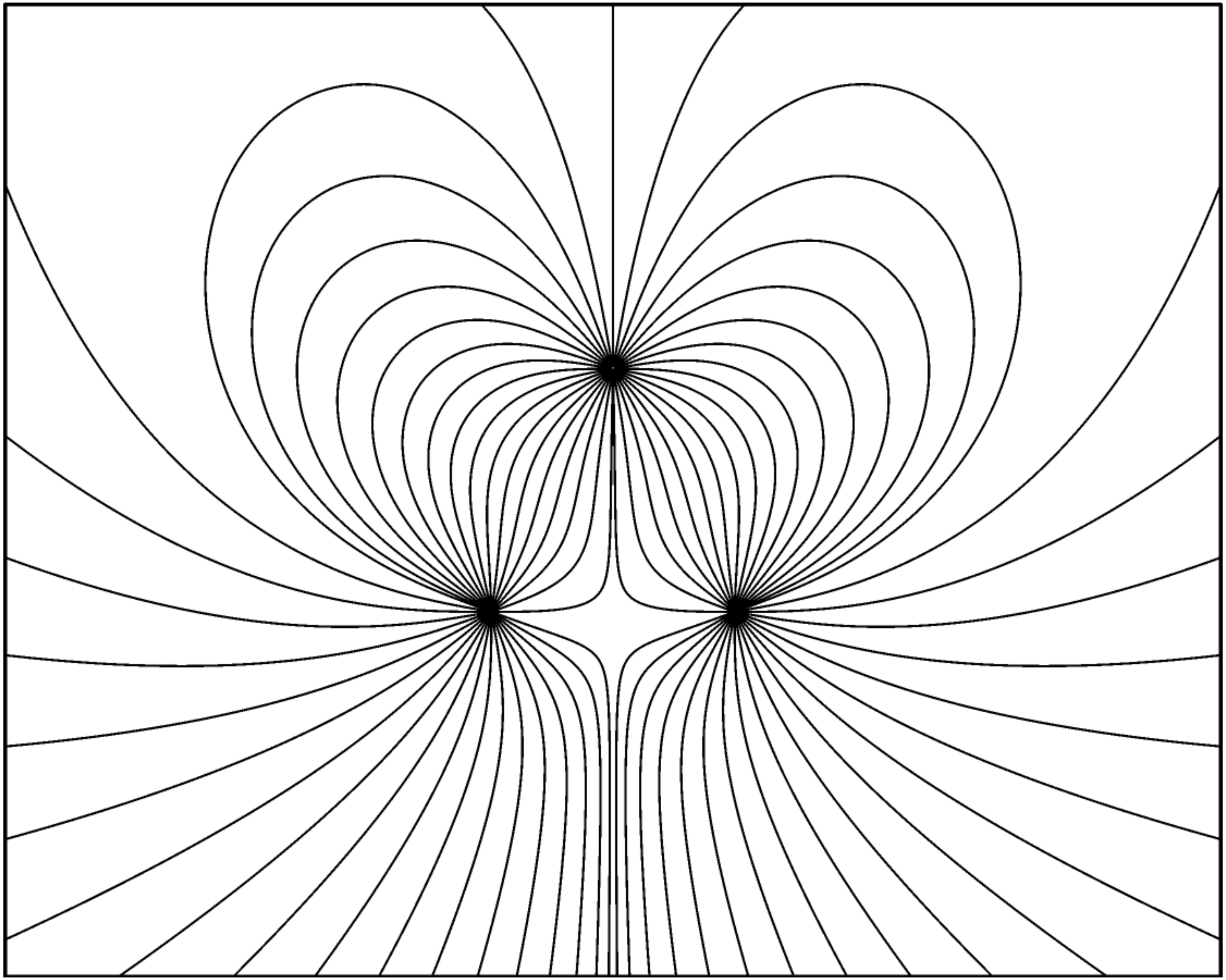
Der Betrag von der Feldstärke ist nicht direkt erkennbar.

Beispiel: eine positive und eine negative Ladung

(elektrischer Dipol)



Beispiel: eine positive (oben) und zwei negative Ladungen (unten)



Wenn gleich viele positive wie negative Ladungen vorhanden sind beginnen die Feldlinien immer in einer positiven Ladung und enden in einer negativen Ladung.

Wenn die Summe aller Ladungen ungleich Null ist, beginnen oder enden einige Feldlinien im Unendlichen.

Zum Vergleich: bei der Gravitation beginnen alle Feldlinien im Unendlichen

Großer Unterschied zur Gravitation:
Alle Massen ziehen sich gegenseitig an.
Der Fall, dass sich alle Ladungen gegenseitig anziehen existiert nicht. (für $n>2$)

Dieser kleine Unterschied im Vorzeichen der beiden Gesetze für gravitative und elektrostatische Anziehung ist entscheidend für die grundlegende Struktur des Universums!

Gravitation:

Weil alle Massen sich gegenseitig anziehen folgt:

Je mehr Massen man zu einem „Klumpen“ zusammenfügt, umso mehr Energie wird freigesetzt. $\rightarrow$ Bildung von Sternen, Galaxien und schwarzen Löchern.

Das sofortige Ineinanderstürzen wird verhindert, dadurch, dass die Himmelkörper umeinander kreisen.

Elektrostatische Anziehung:

Nur das Zusammenbringen einer positiven mit einer negativen Ladung setzt Energie frei. $\rightarrow$ Bildung von Atomen (Proton + Elektron $\rightarrow$ Wasserstoff)

Folge: fast alle Materie liegt als neutrale Atome vor.

Das sofortige Ineinanderstürzen von Elektron und Proton wird durch die Quantenmechanik verhindert.

Starke Wechselwirkung:

Beim Zusammenfügen von Protonen und Neutronen zu einem „Klumpen“ wird Energie freigesetzt. Der Klumpen darf nicht zu groß sein sonst kostet es Energie.

$\rightarrow$ Atomkerne, verschiedene Elemente (Kernfusion, Supernova Explosionen)

Energiedichte des elektrischen Feldes:

In einem elektrischen Feld ist Energie gespeichert. Die Energie wird benötigt, um das Feld aufzubauen, z.B. durch Ladungstrennung.

Die Energiedichte (= Energie pro Volumen) des elektrischen Feldes ist

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2$$

Je stärker das Feld, umso größer die gespeicherte Energie.

Die insgesamt im Feld gespeicherte Energie ergibt sich durch Integration über den gesamten felderfüllten Raum.

$$W = \int_V \tfrac{1}{2}\varepsilon_0\left|\vec{E}\right|^2 \mathrm{d}^3 r$$

Besonders gut wahrnehmbar ist die Energiedichte der elektromagnetischen Strahlung (Licht) der Sonne. Auf die Fläche A wird die Leistung P eingestrahlt:

$$P = \frac{W}{t} = \frac{wV}{t} = \frac{wAct}{t} = wAc$$

c : Lichtgeschwindigkeit
t : Zeit
V : Volumen
w : Energiedichte

Beispiel: Feldenergie des Elektrons:

Das Elektron habe den Radius r_e und seine Ladung säße auf seiner Oberfläche, dann ergibt sich für die Gesamtenergie:

$$W = \int_V \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2 \mathrm{d}^3 r \quad = \quad \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{e}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2 \int_V \frac{1}{r^4}\mathrm{d}^3 r \quad = \quad \frac{e^2}{32\pi^2\varepsilon_0}\int_{r_e}^{\infty}\frac{1}{r^4}4\pi r^2 \mathrm{d}r$$

$$= \quad \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_{r_e}^{\infty}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r \quad = \quad \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e}$$

Wäre das Elektron punktförmig, wäre seine Feldenergie unendlich groß.

Wenn die gesamte Ruhemasse als Feldenergie vorliegen würde, wäre

$$\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_e} = m_0 c^2 \qquad \rightarrow \quad r_e = 1{,}4\ 10^{-15}\mathrm{m} \quad \text{(klassischer Elektronenradius)}$$

Experimente zeigen aber, dass der wirkliche Radius kleiner sein muss ($<10^{-16}$m).

Das Model einer geladenen Kugel trifft daher für das Elektron nicht zu.

Kraft und Feldenergie:

Zur Berechnung der Kraft auf eine Ladung wird nur die Feldstärke errechnet, die von den anderen Ladungen erzeugt wird. Jede Ladung „sieht“ also ein anderes Feld. Tatsächlich gibt es aber nur EIN elektrisches Feld, das von allen Ladungen erzeugt wird.

Dieses eine Feld wird zur Berechnung der Energiedichte verwendet.

$\vec{E}(\vec{r},\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,...)$ Feldstärke am Ort *r* und Ladungen an den Orten r_1, r_2, $r_{3,}$ ...

daraus erhält man die gesamte Feldenergie

$$W(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,...)=\int_V \tfrac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\vec{E}(\vec{r},\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,...)\right|^2 \mathrm{d}^3 r$$

(sehr schwer zu berechnen)

Die Kraft auf eine Ladung kann berechnet werden durch Berechnung der Änderung von W bei Verschiebung der Ladung.

$$\vec{F}_1=-\mathrm{grad}_{r_1} W(\vec{r}_1,\vec{r}_2,\vec{r}_3,...)$$

Dies ist aber gerade gleich Ladung mal Feld der anderen Ladungen

$$\vec{F}_1=Q_1\cdot\vec{E}(\vec{r},\vec{r}_2,\vec{r}_3,...)$$

(viel einfacher zu berechnen)

Potentielle Energie einer Ladung:

Verschiebt man eine Ladung vom Punkt $\vec{r}_A$ zum Punkt $\vec{r}_B$ im Feld der anderen Ladungen benötigt man (bzw. gewinnt man) Energie.

$\rightarrow$ potentielle Energie. Potentielle Energie ist Feldenergie!

Die verrichtete Arbeit ist die Differenz zwischen Feldenergie nachher - vorher

$$\Delta W = W(\vec{r}_B, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ...) - W(\vec{r}_A, \vec{r}_2, \vec{r}_3, ...)$$ (sehr schwer zu berechnen)

Viel einfacher berechnet man aber die Arbeit, die bei der Bewegung durch das Feld der anderen Ladungen verrichtet werden muss:

$$\Delta W = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -Q \int_{r_A}^{r_B} \vec{E}(\vec{r}_2, \vec{r}_3, ...) \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Hier ist –*F* relevant, da zum Verschieben eine Kraft gegen die wirkende Kraft *F* aufgewendet werden muss, um eine Beschleunigung zu verhindern.

Wenn die anderen Ladungen (r_2,r_3,...) ruhen, ist die Arbeit unabhängig vom Weg der zwischen r_A und r_B eingeschlagen wird. $\rightarrow$ konservatives Kraftfeld.

konservatives Kraftfeld:

Wenn die verrichtete Arbeit unabhängig vom Verlauf des Weges zwischen zwei beliebigen Punkten r_A und r_B ist, nennt man das Kraftfeld konservativ.

Äquivalente Definition:

Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn die verrichtete Arbeit entlang jeder geschlossenen Kurve gleich Null ist.

$$\oint \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = 0$$

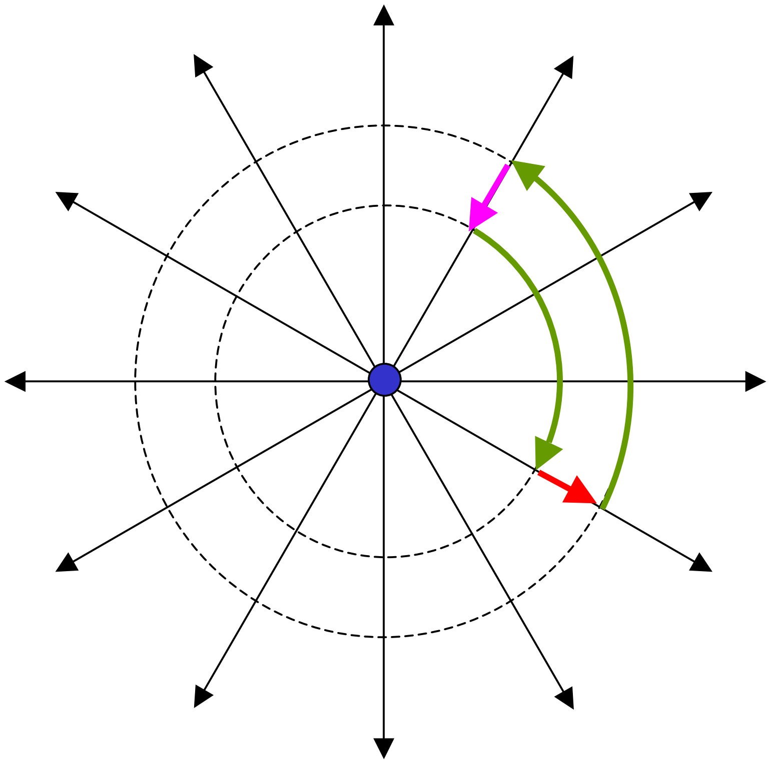
Äquivalente Definition:

Ein Kraftfeld ist konservativ, wenn in jedem Punkt die Wirbelstärke gleich Null ist.

$$\mathrm{rot}\ \vec{F} = 0$$

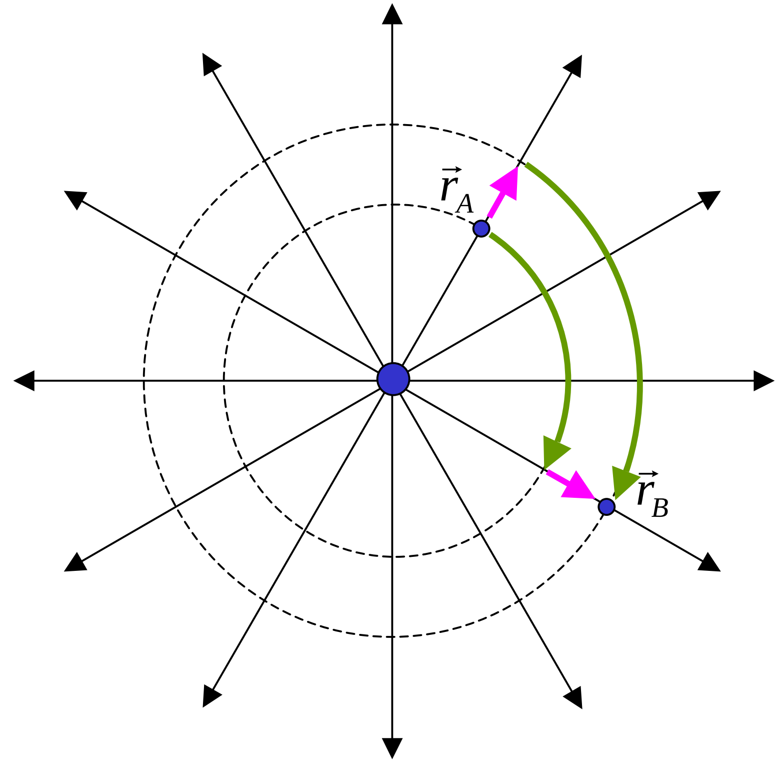
Beispiel Punktladung (positiv):

Arbeit auf geschlossenem Weg



Energiegewinn = verrichtete Arbeit

Arbeit unabhängig vom Weg



verrichtete Arbeit auf beiden Wegen gleich

grün: keine Arbeit entlang dieses Weges, da Kraft senkrecht zu Weg

rot: Energie gewonnen

violett: Arbeit verrichtet

Potential:

In einem konservativen Kraftfeld kann man für jeden Punkt die potentielle Energie angeben, die eine Ladung hätte, wenn sie dort wäre.
(weil unabhängig vom Weg wie sie dahin gekommen ist).

Ein Bezugspunkt muss festgelegt werden (z.B. im Unendlichen)

Die potentielle Energie ist immer proportional zur Ladung

Erinnere: $$\Delta W = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\vec{s} = -Q \int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Man führt deshalb zusätzlich das Potential φ ein, so dass: $\Delta W = Q\,\Delta\varphi$

Damit ergibt sich:

$$\Delta\varphi = -\int_{r_A}^{r_B} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Potential einer Punktladung:

Mit Bezugspunkt im Unendlichen ergibt sich

$$\varphi(\vec{r}) = -\int_{\infty}^{\vec{r}} \vec{E}(\vec{r}\,') \cdot \mathrm{d}\vec{s} \quad = \quad -\int_{\infty}^{\vec{r}} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{\left|\vec{r}\,'\right|^2} \frac{\vec{r}\,'}{\left|\vec{r}\,'\right|} \cdot \mathrm{d}\vec{s}$$

Für des Ergebnis ist nur der Weg entlang des Radiusvektors relevant, also

$$\varphi(r) = \int_{\infty}^{r} \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r'^2} \mathrm{d}r' \quad = \quad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \int_{\infty}^{r} \frac{1}{r'^2} \mathrm{d}r' = \quad \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}$$

$$\boxed{\varphi(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r}}$$

Potential einer Punktladung ist proportional zu 1/r

Vorzeichen: Beim Verschieben einer positive Ladung Q_A im Feld einer positiven Ladung Q_B von r_1 nach $r_2<r_1$, verrichtet man die Arbeit $\Delta W>0$:

$$\Delta W = Q_A\big(\varphi(r_2) - \varphi(r_1)\big) \quad = \quad \frac{Q_B}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right) > 0$$

Superpositionsprinzip für Potential:

Zur Berechnung des Potentials mehrerer Ladungen, addieren sich an jedem Punkt die Beiträge zum Potential von jeder einzelnen Ladung.

$$\varphi(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+\frac{Q_2}{|\vec{r}-\vec{r}_2|}+\frac{Q_3}{|\vec{r}-\vec{r}_3|}+...\right)$$

(besonders einfach zu berechnen)

Das Potential ist eine skalare Funktion, es braucht also nicht vektoriell addiert zu werden.

Jede Ladung „sieht" das Potential der anderen Ladungen. Jede Ladung sieht also ein anderes Potential.

Die potentielle Energie ist nur die Energie, die notwendig ist, um die eine zusätzliche Ladung in die vorhandene Konstellation einzubringen.
Um die Gesamtenergie der Anordnung zu berechnen, muss man eine Ladung nach der anderen einbringen und jeweils deren potentielle Energie berechen.

Elektrische Spannung:

Eine Potentialdifferenz nennt man Spannung.

Die elektrische Spannung U zwischen den Orten r_1 und r_2 ist:

$$\boxed{U = \varphi(r_1) - \varphi(r_2)}$$

Einheit der Spannung und des Potentials ist das Volt [V]. 1V = 1 J/C.

Bringt man eine Ladung von Q = 1C vom Ort mit Potential φ_1 zum Ort mit Potential φ_2, mit der Spannung $U = \varphi_1 - \varphi_2 = 1V$ zwischen den Orten, dann muss die Arbeit $W = Q \cdot U = 1J$ verrichtet werden.

Als Energieeinheit wird manchmal das Elektronenvolt [eV] verwendet:
Bringt man eine Elementarladung vom Ort mit Potential φ_1 zum Ort mit Potential φ_2, mit der Spannung $U = \varphi_1 - \varphi_2 = 1V$ zwischen den Orten, dann muss die Arbeit $W = e \cdot U = 1eV$ verrichtet werden.

Feld als Gradient des Potentials:

Ist das Potential bekannt, kann daraus das elektrische Feld berechnet werden:

$$\boxed{\vec{E}(\vec{r}) = -\text{grad}\,\varphi(\vec{r})}$$

Verblüffenderweise kann man aus der skalaren $\varphi(\vec{r})$ Funktion die Vektorfunktion $\vec{E}(\vec{r})$, d.h. auch die Richtung des Feldes berechnen.

Gradient in kartesischen Koordinaten:

$$\text{grad}\,\varphi(x,y,z) = \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

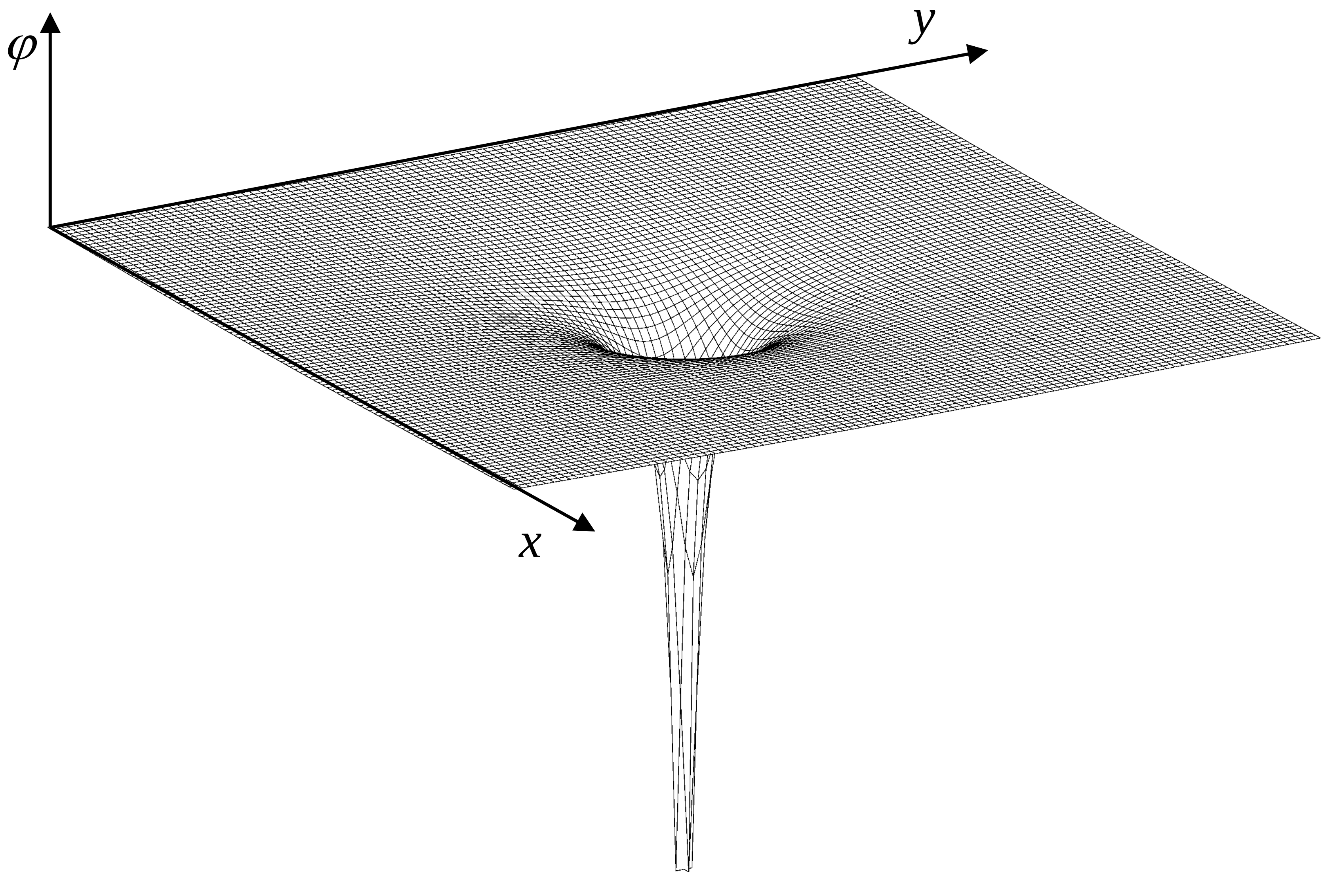
Der Gradient gibt Richtung und Betrag der Steigung eines skalaren Feldes an.

Vorstellung:

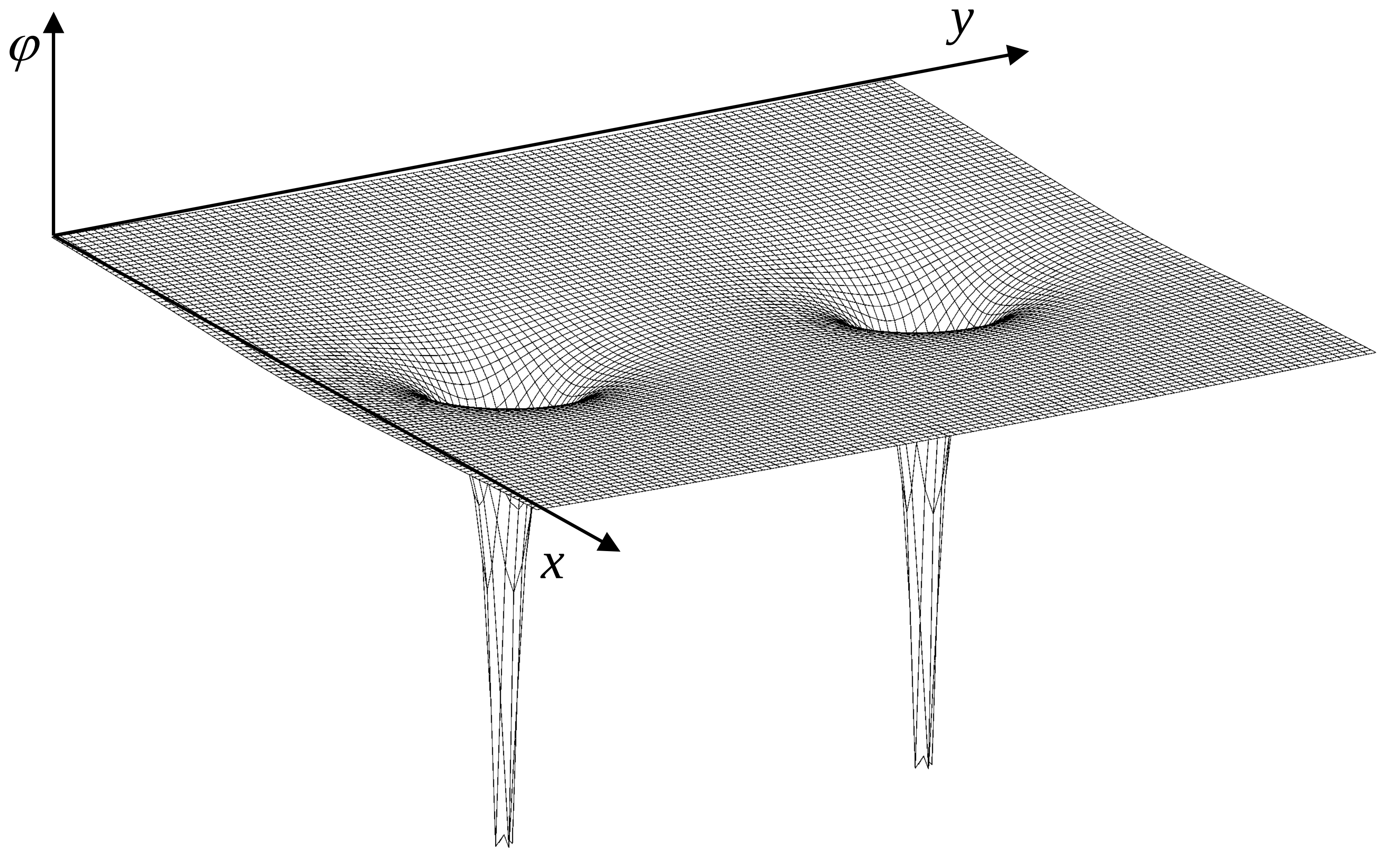
Potential = Berglandschaft $\rightarrow$ Gradient zeigt bergauf

Kraft (bzw. Feld) zeigt bergab = $-\text{grad}\,\varphi(\vec{r})$

Potential für eine negative Ladung



Potential für zwei negative Ladungen



Leiter (Metalle) im elektrischen Feld:

Elektronen sind in Metallen frei verschiebbar. Sie verschieben sich solange, bis keine Kraft mehr auf sie wirkt.

Im Gleichgewicht ist das elektrische Potential an jedem Punkt eines zusammenhängenden Leiters gleich, da sonst eine Potentialdifferenz und damit eine Kraft $F = -q \,\mathrm{grad}\varphi$ auf die Elektronen wirken würde.

$\varphi = \text{const.} \;\rightarrow\; \mathrm{grad}\varphi = 0$

Die Oberfläche eines Leiters ist eine s.g. Äquipotentialfläche (Fläche gleichen Potentials)

Die Feldlinien münden immer senkrecht auf die Leiteroberfläche (keine Feldkomponente entlang der Leiteroberfläche)

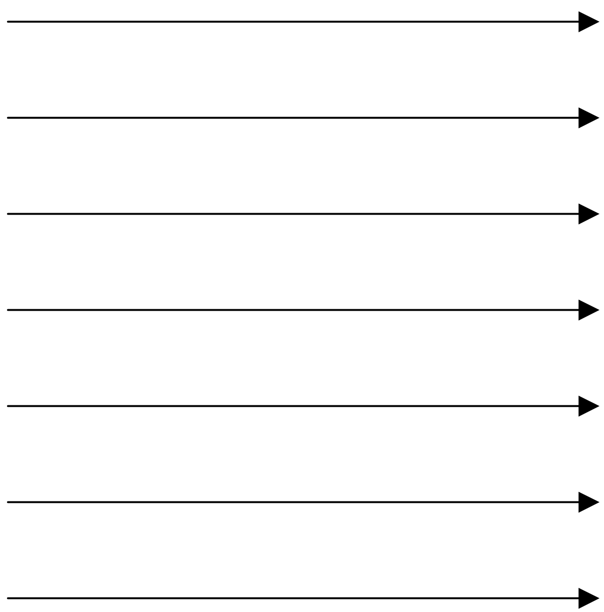
Das innere eines Leiters ist feldfrei weil $\varphi = \text{const.} \;\rightarrow\; \mathrm{grad}\varphi = 0$ also $E=0$

Stichwort: Farady-Käfig

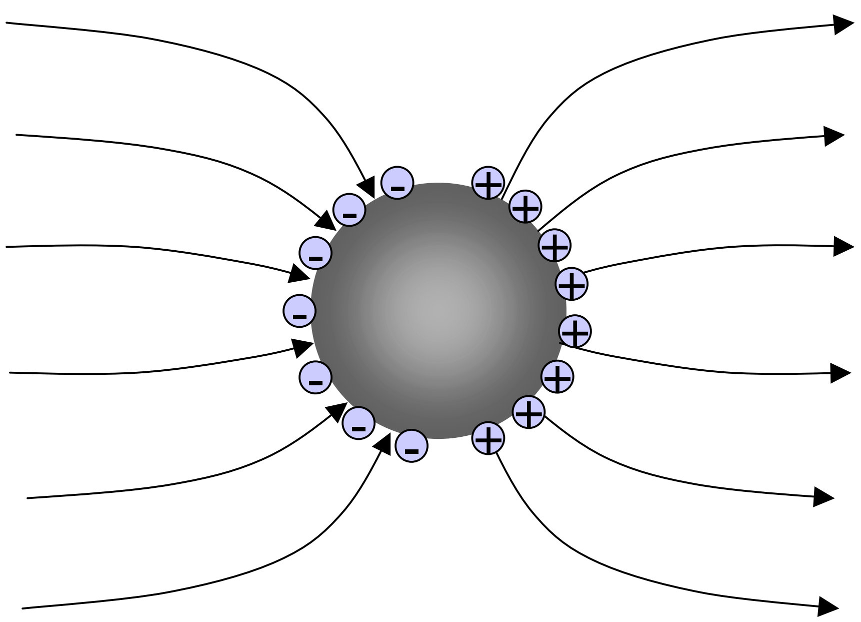
Influenz:

Bringt man einen Leiter in ein elektrisches Feld verschieben sich die Ladungen im Leiter. → Influenz

Die neue Ladungsverteilung kompensiert das Feld im Innern des Leiters und verbiegt die Feldlinien so, dass sie senkrecht auf die Oberfläche münden



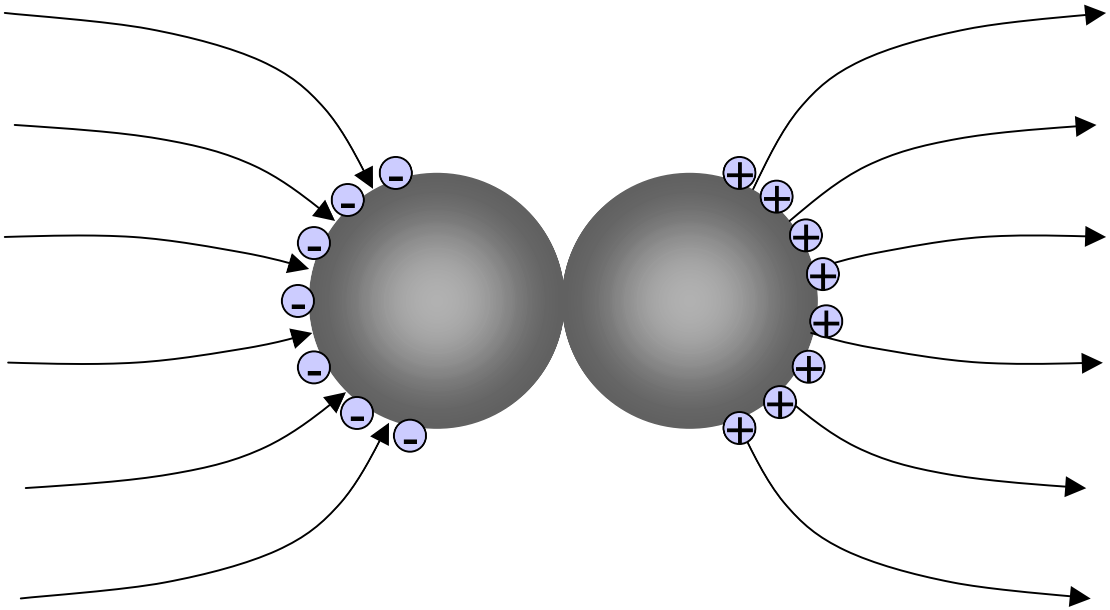
elektrisches Feld ohne Leiter



elektrisches Feld mit leitender Kugel

Experiment zur Influenz:

Zwei ungeladenen Kugeln werden ins elektrischen Feld gebracht und dort getrennt. Beide Kugeln sind danach gegengesetzt geladen.

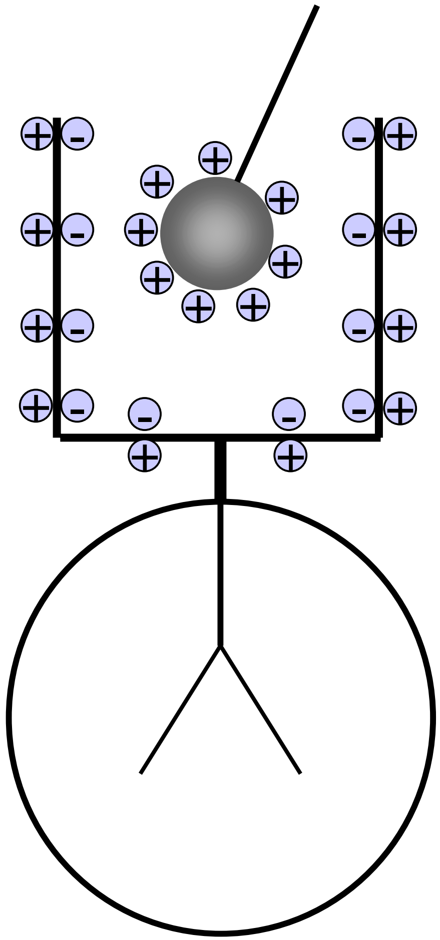


elektrisches Feld mit zwei leitenden Kugeln

Die Ladung der Kugeln wird mit dem Elektroskop nachgewiesen

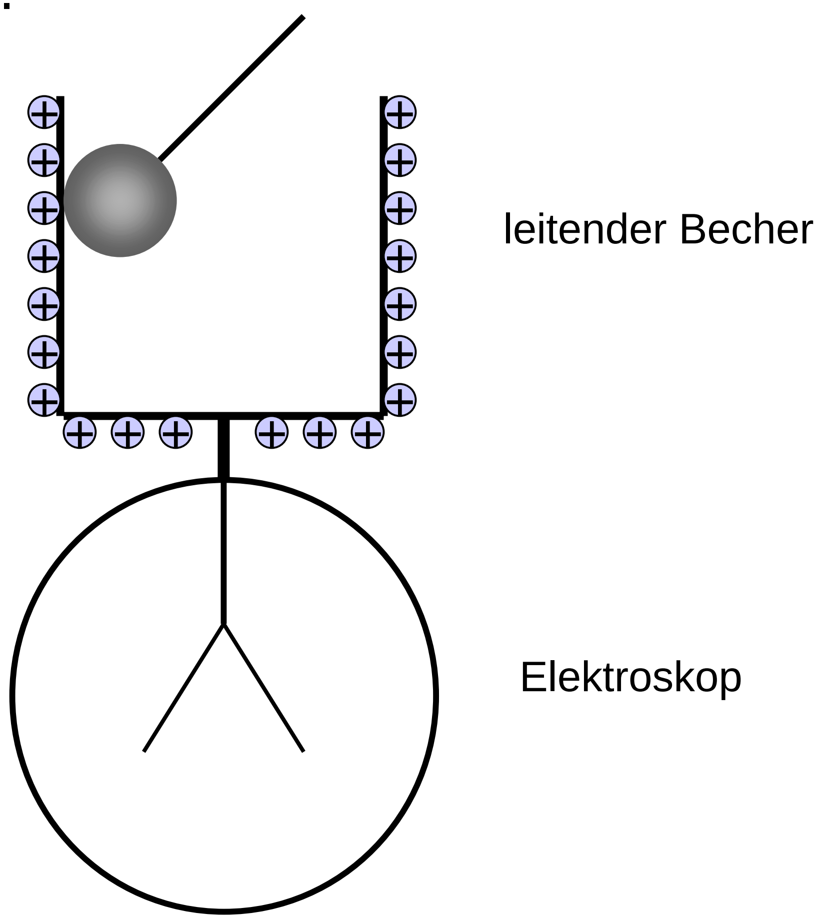
Experiment zur Influenz:

Eine geladene Kugel wird ins Innere eines leitenden, neutralen Bechers gebracht. Durch Influenz werden an der Oberfläche des Bechers Ladungen getrennt



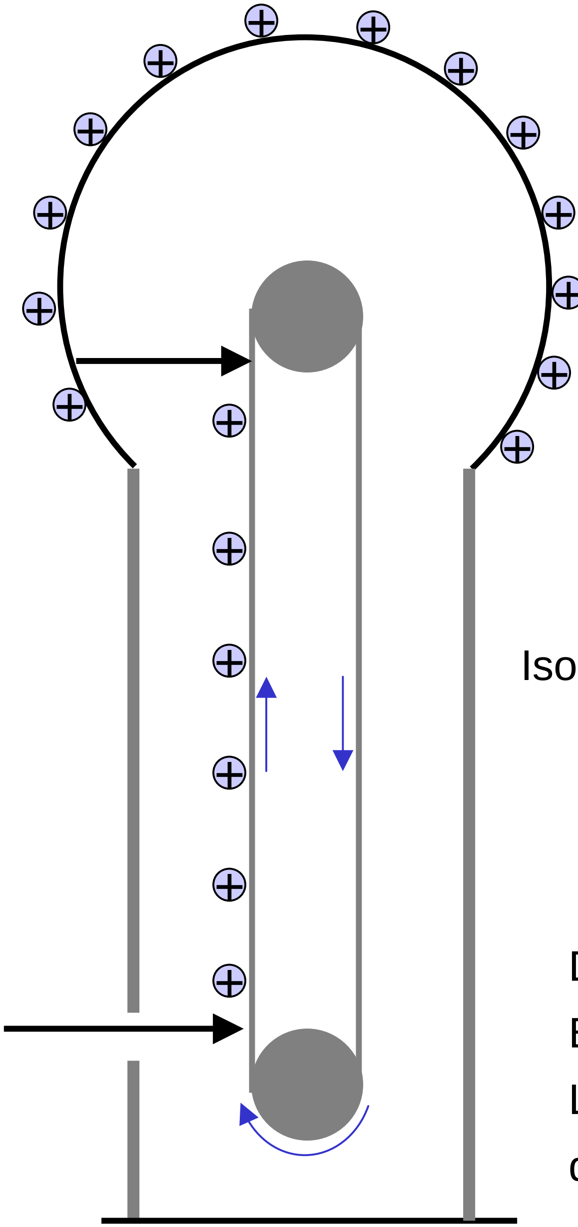
Experiment zur Influenz:

Ladungen bewegen sich vom Innern eines leitenden Bechers auf dessen Oberfläche. Eine geladene Kugel wird vollständig entladen, wenn sie das Innere des Becher berührt.



Van-de-Graaff-Generator:

Abbürsten der Ladungen vom Band. Die Ladungen verschieben sich sofort auf die Oberfläche der Kugel.



Aufsprühen von Ladungen auf ein isolierendes Band von einer scharfen Spitze bei hoher Spannung.

Das motorgetriebene Band transportiert die Ladungen in das Innere der Kugel.

Ladungen als Quellen des elektrischen Feldes (Poisson-Gleichung):

Die Feldlinien entspringen an den positiven Ladungen.
Stellt man sich die Ladung als Wasserquelle vor, entspricht die Strömungsgeschwindigkeit des Wassers $\vec{v}$ der elektrischen Feldstärke.

Die Quellstärke des Strömungsfeldes wird durch den Operator „Divergenz" berechnet (vgl. Strömungsmechanik, Kontinuitätsgleichung).

$$\operatorname{div} \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

Für das elektrische Feld gilt, dass positive Ladungen Quellen des Feldes sind, negative Ladungen sind Senken.

$$\boxed{\rho = \varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E}}$$

Poisson-Gleichung

Ladungsdichte ist Dielektrizitätskonstante mal Divergenz des Feldes.

Mit der Beziehung

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r})$$

erhält man

$$\rho = -\varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\mathrm{grad}\,\varphi$$

Die beiden Operatoren div und grad nacheinander angewendet nennt man Laplaceoperator

$$\Delta\,\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

Die Poisson-Gleichung mit dem Potential geschrieben lautet also

$$\boxed{\rho = -\varepsilon_0\,\Delta\varphi}$$

Poisson-Gleichung

Die Poisson-Gleichung ist eine partielle Differentialgleichung.

Anwendung der Poissongleichung:

Kennt man die Ladungsverteilung, kann man mit dem Coulomb-Gesetz direkt das elektrische Feld ausrechnen.

Sind aber Metalle (d.h. Leiter) vorhanden, so sind die Ladungen frei verschiebbar und man kennt die Ladungsverteilung nicht.

Das Potential auf der Metalloberfläche ist aber bekannt und auf dem ganzen Leiter gleich.

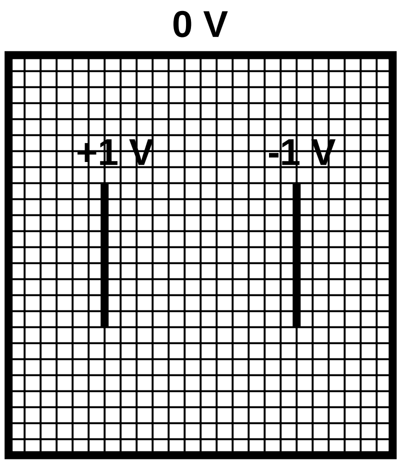
Man löst daher die Poission-Gleichung für den Raum zwischen den Metalloberflächen mit den Potentialen der Metalloberflächen als Randbedingung.

Befinden sich keine weiteren Ladungen im freien Raum gilt dort

$$\Delta\varphi = 0 \qquad \text{(Laplace-Gleichung)}$$

Numerische Lösung der Laplacegleichung:

Berechnung des Potentials für eine Anordnung von zwei Metallplatten in einer Metallkiste.



Start:

Man teile den Raum in ein Raster ein und setze das Potential an den Randpunkten auf den vorgegebenen Wert. Bei allen anderen Punkten starte man mit dem Wert Null.

Iterationsschritt:

Berechne für jeden Punkt den Mittelwert aus den vier benachbarten Punkten. Dies wird der neue Wert. Die Randpunkte werden nicht verändert.

Konvergenz:

Nach sehr vielen Iterationsschritten konvergiert das Verfahren gegen die Lösung der Laplace-Gleichung, d.h. gegen das Potential für alle Punkte.

Feldstärke:

Ist das Potential an jedem Punkt bekannt, kann numerisch aus benachbarten Punkten die Feldstärke berechnet werden:

$$\vec{E}(\vec{r}) = -\mathrm{grad}\,\varphi(\vec{r})$$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \frac{\partial\varphi}{\partial y}, \frac{\partial\varphi}{\partial z}\right)$$

in Komponenten:

$$E_x = -\frac{\partial\varphi}{\partial x}, \qquad E_y = -\frac{\partial\varphi}{\partial y}, \qquad E_z = -\frac{\partial\varphi}{\partial z}$$

Näherungsweise gilt für benachbarte Punkte

$$E_x = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}, \qquad E_y = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}, \qquad E_z = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}$$

Beispiele am Computer (2-dimensional):

Der Rand des Bildes ist immer eine geerdete Metallhülle $\varphi = 0$ V

Potential eines Quadrates $\varphi = 1$ V:

$\rightarrow$ konstantes Potential im Innern, feldfrei im Innern, hohe Feldstärke an den Ecken

Potential eines Kreises $\varphi = 1$ V:

$\rightarrow$ Keine Spitzeneffekte

Potential eines Plattenkondensators $\varphi_1 = -1$ V, $\varphi_2 = +1$ V :

$\rightarrow$ Homogenes Feld im Innern, Randfelder, hohe Feldstärke an den Ecken

Spitze vor einer Platte $\varphi_1 = -1$ V, $\varphi_2 = +1$ V :

$\rightarrow$ hohe Feldstärke an der Spitze

Elektrischer Dipol und Quadrupol

Beispiele am Computer (2-dimensional):

Influenz: Metallblock ($\varphi = 0$ V) im Plattenkondensator:

$\rightarrow$ Feldfrei im Innern, Ladungen auf Oberfläche, Ladungstrennung durch Influenz

Faradayscher Käfig $\varphi = 0$ V im Plattenkondensator o.ä.:

$\rightarrow$ konstantes Potential im Innern, feldfrei im Innern

Gewitter und Blitzableiter: Haus $\varphi_1 = 0$ V, Wolke $\varphi_2 = 1$ V

$\rightarrow$ Spitzeneffekt

Kondensatoren:

Eine Anordnung von zwei Metalloberflächen auf unterschiedlichem Potential nennt man Kondensator.

Die Anordnung der Metalloberflächen ist meistens so, dass das elektrische Feld weitgehend im Innern eingeschlossen ist.
Bei einer geschlossenen Anordnung entweichen keine Feldlinien ins Unendliche. Deshalb befindet sich auf der einen Oberfläche genau soviel negative Ladung (-Q) wie positive Ladung auf der andern Oberfläche (+Q).

Die Ladung Q ist proportional zur Spannung zwischen den Oberflächen

$$\boxed{Q = C\,U}$$

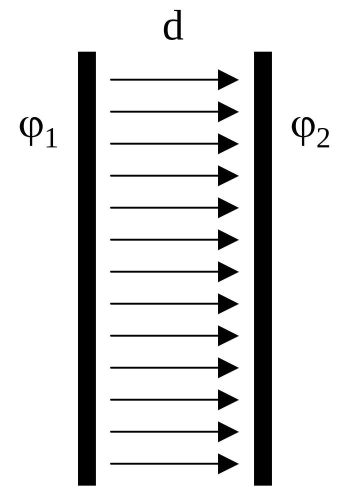
Die Konstante C nennt man die Kapazität des Kondensators.
Die Kapazität hängt von der Geometrie des Kondensators ab.
Die Einheit der Kapazität ist das Farad [F]. 1 F = 1 C/V

Plattenkondensator (einfachste Geometrie eines Kondensators):

Zwischen den Platten befindet sich keine Ladung

also gilt dort die Laplace-Gleichung $\Delta\varphi = 0$

und aus Symmetriegründen ergibt sich daraus



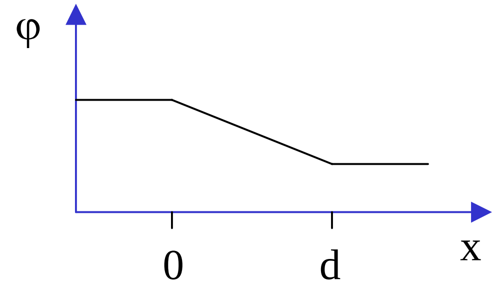
$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} = 0$$

Integration liefert $\varphi(x) = a\,x + b$

Das Potential ändert sich also linear im

Zwischenraum zwischen den Platten.

Aus den Randbedingung



$$\varphi(0) = \varphi_1$$
$$\varphi(d) = \varphi_2$$

bestimmt man die Konstanten a und b

$$a = \frac{\varphi_2 - \varphi_1}{d} = -\frac{U}{d} \qquad b = \varphi_1$$

Aus dem Potential

$$\varphi(x) = \varphi_1 - \frac{U}{d}x$$

Berechnet man die Feldstärke mit $\vec{E} = -\mathrm{grad}\,\varphi$

$$\vec{E} = -\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dy}}, \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{dz}}\right) = \left(\frac{U}{d}, 0, 0\right)$$

Der Feldstärkevektor zeigt also in positive x-Richtung.

Der Betrag der Feldstärke im Plattenkondensator ist

$$\boxed{E = \frac{U}{d}}$$

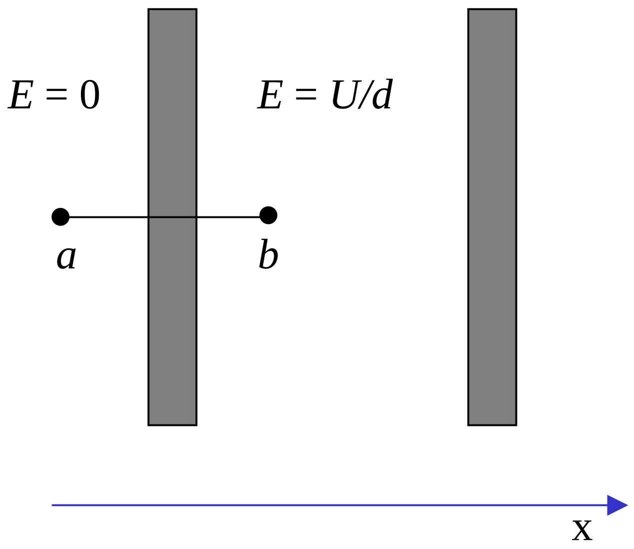
Die Feldstärke ist überall im Zwischenraum gleich.

Man nennt dies ein <u>homogenes Feld</u>.

Berechnung der Ladung auf den Platten und der Kapazität:

Die Poissiongleichung besagt:

$$\rho = \varepsilon_0 \,\mathrm{div}\, \vec{E} = \varepsilon_0 \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right)$$



Die Flächenladungsdichte auf der Platte ist

$$\sigma = \varepsilon_0 \int_a^b \frac{\partial E_x}{\partial x} \,\mathrm{d}x \quad = \varepsilon_0 \int_a^b \mathrm{d}E_x$$

$$\sigma = \varepsilon_0 \left(E_x(b) - E_x(a) \right) = \varepsilon_0 \, \frac{U}{d}$$

Haben die Platten eine Fläche A, dann ist die Gesamtladung

$$Q = \sigma A = \varepsilon_0 \; A \frac{U}{d}$$

Die Kapazität C=Q/U des Plattenkondensators ist also $\boxed{C = \varepsilon_0 \, \frac{A}{d}}$

Im Kondensator gespeicherte Energie:

Die Energie W ist als Feldenergie gespeichert.

Die Gesamtenergie ist Energiedichte (w) mal Volumen (V).

$$w = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left|\vec{E}\right|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2$$

$$V = A\,d$$

Es folgt:

$$W = wV = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{U}{d}\right)^2 A\,d = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{A}{d} U^2 = \frac{1}{2} C U^2$$

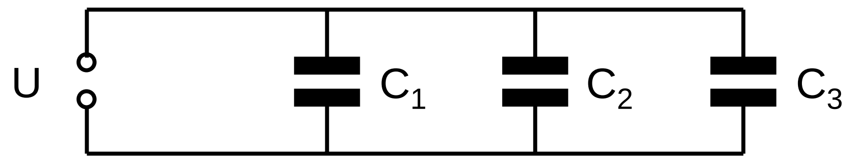
Der Zusammenhang $\boxed{W = \frac{1}{2} C U^2}$ gilt für jeden Kondensator

---

Experimente mit Plattenkondensatoren

Reihenschaltung und Parallelschaltung von Kondensatoren:

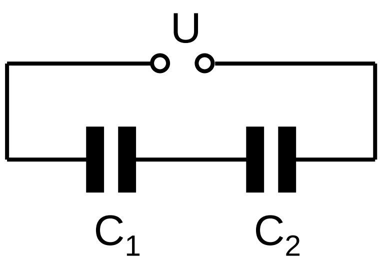
Schaltet man Kondensatoren parallel durch leitende Verbindung der Platten, addieren sich die Ladungen, während die Spannung an allen Kondensatoren gleich ist:



$$C_{ges}U = Q_{ges} = Q_1 + Q_2 + Q_3 = C_1U + C_2U + C_3U = (C_1 + C_2 + C_3)U$$

$$\boxed{C_{ges} = C_1 + C_2 + C_3}$$

Schaltet man Kondensatoren in Reihe addieren sich die Spannungen



$$U = U_1 + U_2$$

Während die Ladung auf allen Platten gleich ist

$$\frac{Q}{C_{ges}} = U = (U_1 + U_2) = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} = Q\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) \Rightarrow \boxed{\frac{1}{C_{ges}} = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)}$$

Integrale Form der Poissongleichung:

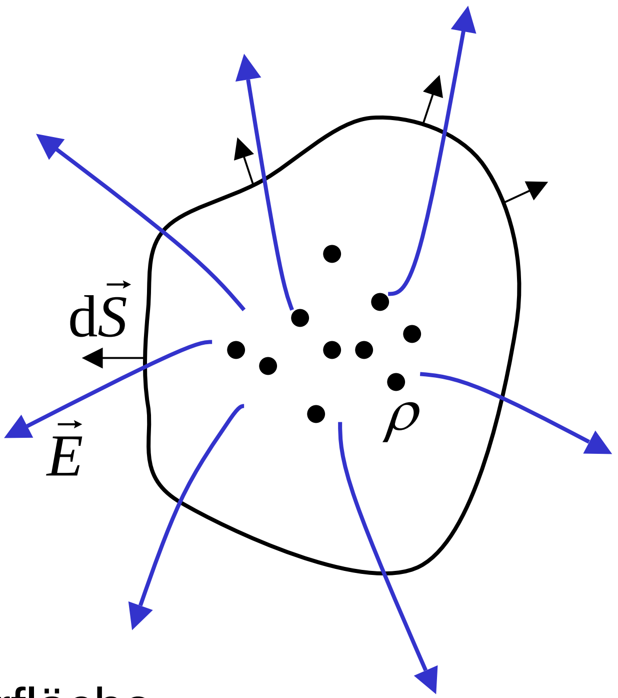
Die Poisson-Gleichung kann auch mit zwei Integralen formuliert werden:

Erinnere: Die Ladungen sind die Quellen des Feldes.

Als Folgerung kann man formulieren:

Alle Ladungen in einem Volumen zusammen sind die Quellen des Feldes, das durch die Oberfläche des Volumens hindurchtritt.

$$\boxed{\int\limits_{\textit{Volumen}} \rho \, \mathrm{d}V = \varepsilon_0 \oint\limits_{\textit{Oberfläche}} \vec{E} \cdot \mathrm{d}\vec{S}}$$



Skalarprodukt beachten!

Integration immer über geschlossene Oberfläche und eingeschlossenes Volumen.

$\vec{S}$ ist der Normalenvektor auf der Oberfläche.

Gaußscher Satz:

Mathematisch lässt sich beweisen, dass für stetig differenzierbare Vektorfunktionen f gilt:

$$\int\limits_{Volumen} \mathrm{div}\vec{f}\,\mathrm{d}V \quad = \quad \oint\limits_{Oberfläche} \vec{f}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$ Gaußscher Satz

mit der Poissongleichung

$$\rho = \varepsilon_0\,\mathrm{div}\,\vec{E}$$

gilt für das elektrische Feld:

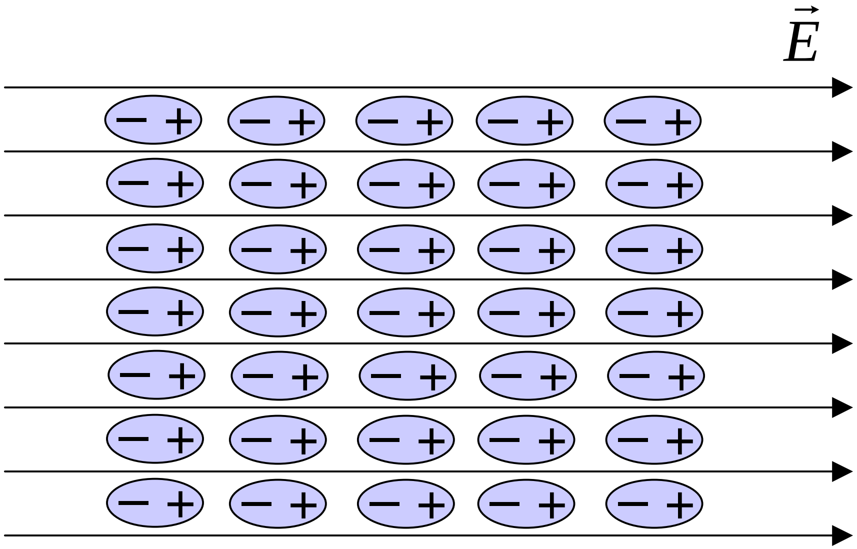
$$\int\limits_{Volumen} \rho\,\mathrm{d}V \quad = \quad \varepsilon_0 \int\limits_{Volumen} \mathrm{div}\vec{E}\,\mathrm{d}V \quad = \quad \varepsilon_0 \oint\limits_{Oberfläche} \vec{E}\cdot\mathrm{d}\vec{S}$$

Mit dem Gaussschen Satz wird die mathematische Äquivalenz der differenziellen und integralen Formulierung der Poissongleichung bewiesen.

Nichtleiter im elektrischen Feld (Dielektrika):

In Metallen können Ladungen (Elektronen) frei verschoben werden.
In Isolatoren (Dielektrika) können die Elektronen der Atome nur ganz wenig gegenüber dem Atomkern verschoben werden $\rightarrow$ Polarisation.

Äußere Felder führen zur Polarisation eines Dielektrikums



Das elektrische Feld im Innern des Materials ist sehr kompliziert durch die vielen Ladungen (bzw. Diplole)

Dielektrische Verschiebungsdichte:

Man führt neue Größen ein, um die Eigenschaften der Materie pauschal in die kontinuierliche Theorie einzufügen.

Definition:

$$\boxed{\vec{D} = \varepsilon\, \varepsilon_0\, \vec{E}}$$

Dielektrische Verschiebungsdichte

Mit der dimensionslosen Materialkonstanten

ε : relative Dielektrizitätskonstante

Im Vakuum gilt $\varepsilon = 1$ also $\vec{D} = \varepsilon_0\, \vec{E}$

Mit den neuen Größen können die Gleichungen der Elektrodynamik in Materie ähnlich zu den Gleichungen fürs Vakuum geschrieben werden.

Die Poissongleichung in Materie und Vakuum läst sich einheitlich schreiben:

$$\rho = \operatorname{div} \vec{D}$$

Poisson-Gleichung

Die Energiedichte in Materie ist größer als im Vakuum, da Energie zum Aufbau der Polarisation erforderlich ist.

$$w = \frac{1}{2} E\, D$$

Energiedichte

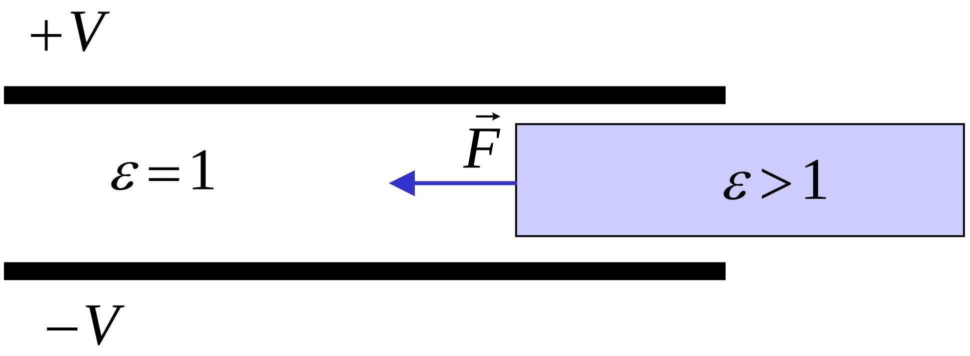
Die Kapazität eines Kondensators mit Dielektrikum ist größer, da bei gleicher Spannung mehr Ladung auf die Platten fließt: $C_{\mathrm{Diel}} = \varepsilon\, C_{\mathrm{Vak}}$

$$C = \varepsilon\, \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

Kapazität Plattenkondensator

Experiment:

Dielektrika werden in einen Kondensator hineingezogen.



Dielektrikum	**Relative (statische) Dielektrizitätskonstante**
Glas	$\varepsilon = 4$
TiO_2	$\varepsilon = 80$
$CaTiO_3$	$\varepsilon = 160$
$(SrBi)TiO_3$	$\varepsilon = 1000$
Wasser	$\varepsilon = 81$
Alkohol	$\varepsilon = 25$