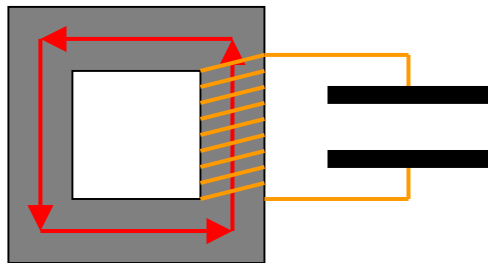


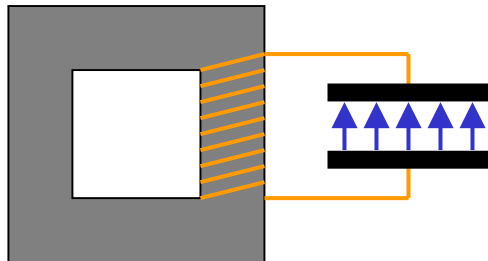
Elektromagnetische Wellen

In einem Wechselstromkreis mit Spule und Kondensator (Schwingkreis) wechselt die Energie periodisch zwischen E-Feld im Kondensator und B-Feld in der Spule.

Spule und Kondensator sind geschlossen aufgebaut, so dass die Energie immer zurück in den Stromkreis findet.



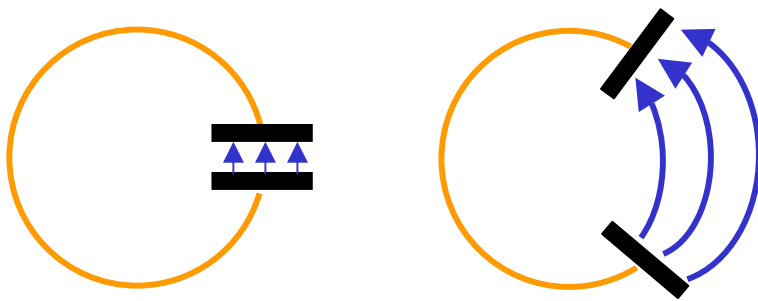
Energie im Magnetfeld der Spule



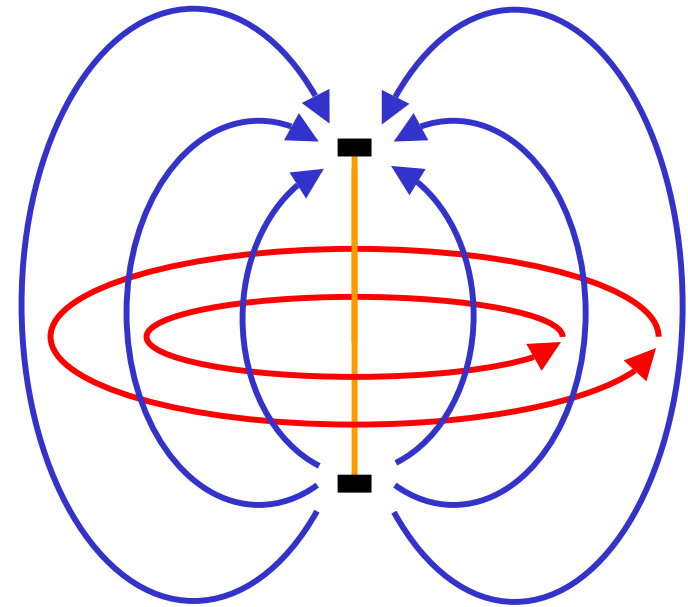
Energie im elektrischen Feld
des Kondensators

Verluste (Erzeugung von Wärme) müssen durch zugeführte Energie ausgeglichen werden.

Baut man Spule und Kondensator offen, breiten sich die Felder mit Lichtgeschwindigkeit im ganzen Raum aus.



Öffnen von Spule und Kondensator



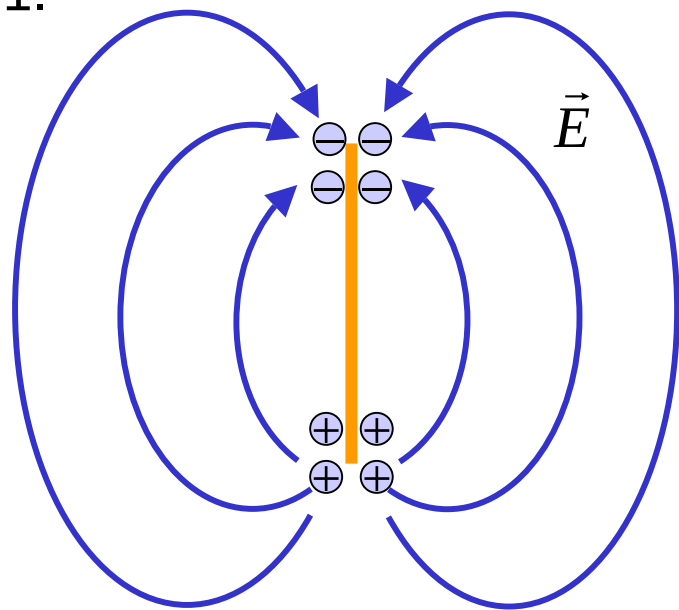
Dipol

Auch das gerade Leiterstück hat eine Induktivität und eine Kapazität.

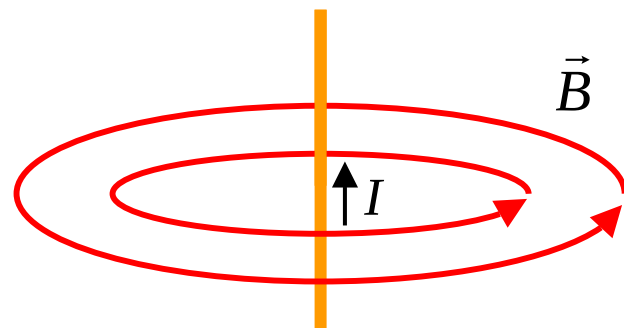
Es bildet einen „Schwingkreis“ mit einer Resonanzfrequenz.

Eine erzwungene Schwingung auf dem Leiterstück kann durch Zufuhr von Energie von außen aufrecht erhalten werden.

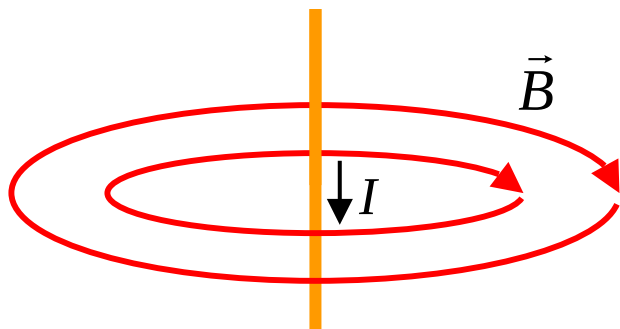
1.



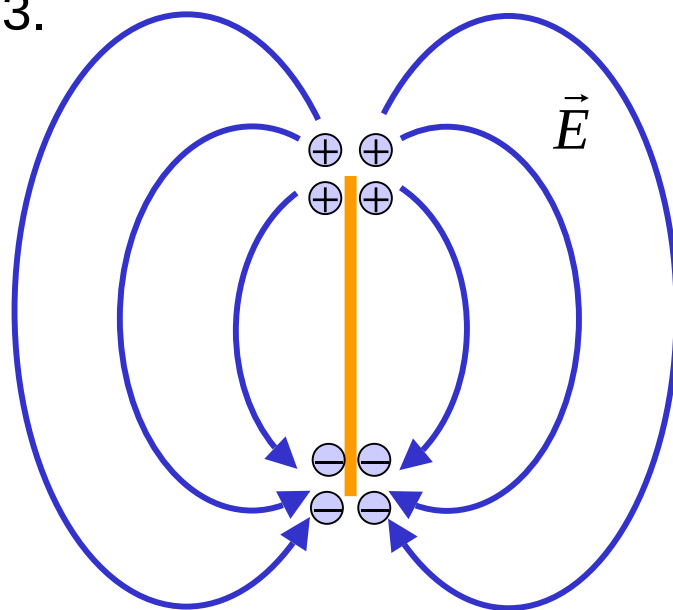
2.



4.

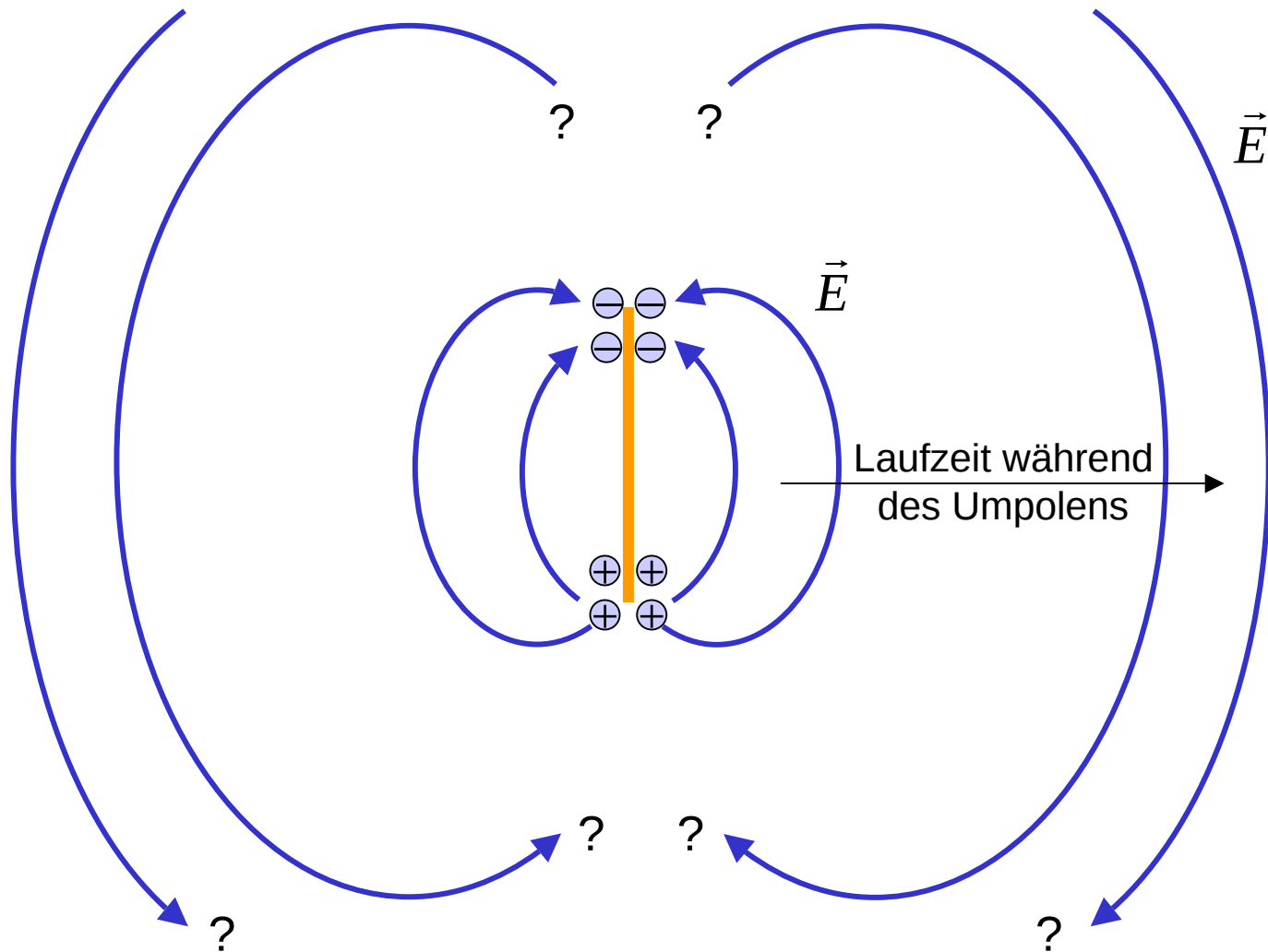


3.

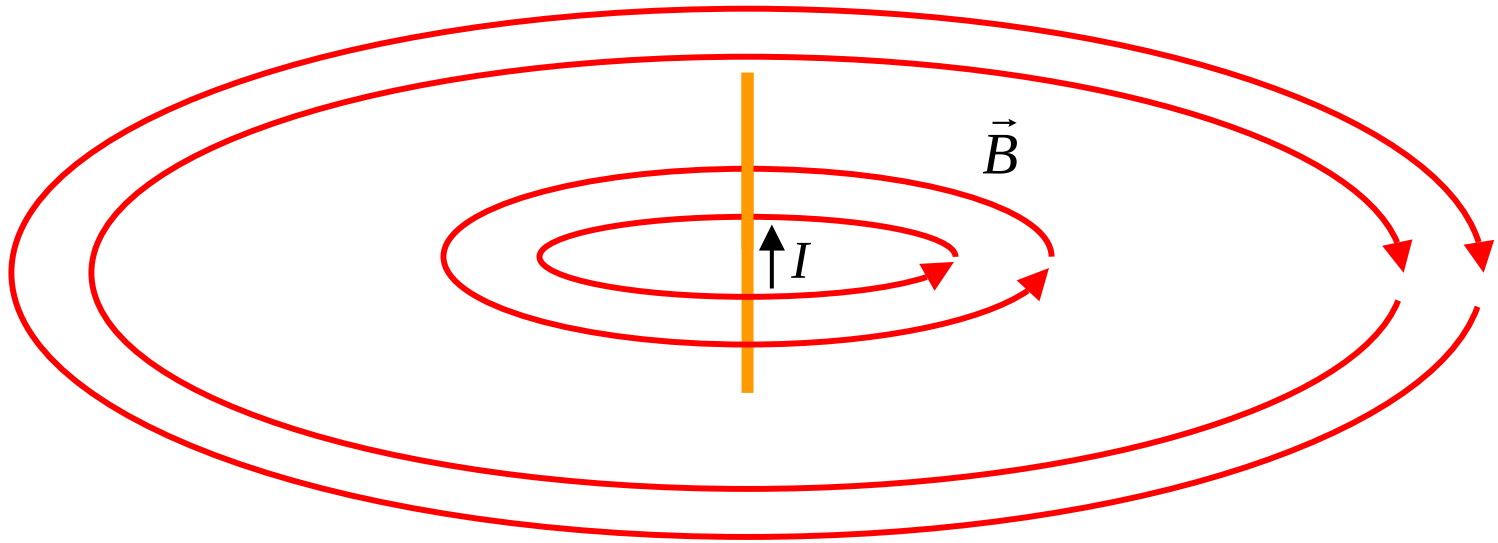


Bei kleinen Frequenzen bauen sich quasi statische Felder auf.

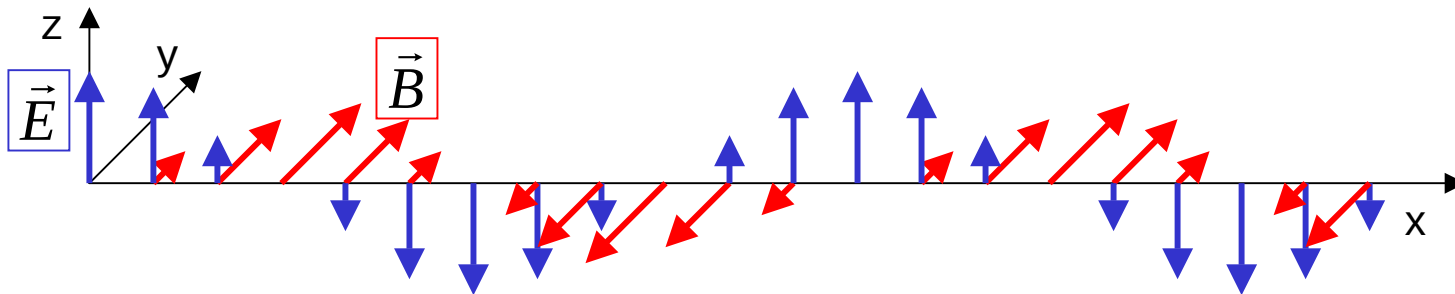
Ist aber die Frequenz so hoch, dass die Ausbreitung mit Lichtgeschwindigkeit während einer Halbwelle der Länge des Dipols entspricht, dann ist mit der zeitlichen Änderung der Felder auch eine räumliche Modulation verbunden.



Entsprechend beim Magnetfeld.



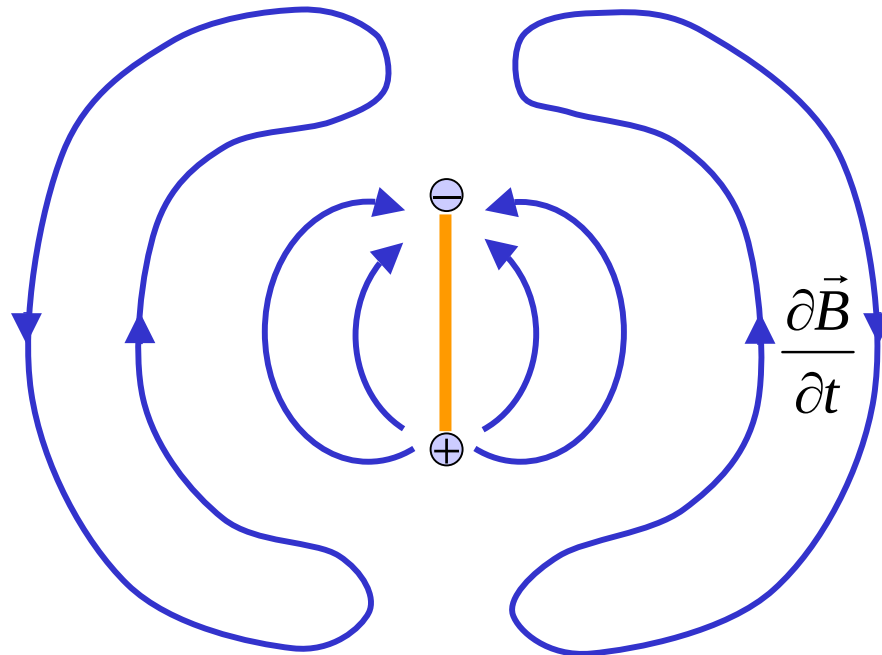
Feldstärken entlang einer Achse senkrecht zum Dipol:
(beachte: hier in der Nähe des Dipols)



Durch die zeitliche Änderung des Magnetfeldes wird ein Wirbel im elektrischen Feld erzeugt und damit die Feldlinien geschlossen.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{vgl. Maxwell-Gleichungen}$$

Auf diese Weise kann das elektrische Feld ohne Anwesenheit von Ladungen weiterexistieren und sich vom Dipol lösen.



Bei der Abstrahlung vom Dipol unterscheidet man zwischen dem *Nahfeld* und dem *Fernfeld*.

Nahfeld:

Das Nahfeld wird durch die Ladungen und Ströme mitbestimmt.

Dieser Beitrag zu den Feldstärken von E und B klingt mit $1/r^2$ bzw. $1/r^3$ ab.

Eine mathematische Formulierung wird hier nicht diskutiert (vgl. Theoretische Physik)

Fernfeld:

Im Fernfeld spielen Ladungen und Ströme keine Rolle mehr. Die Felder erzeugen sich durch ihre zeitliche Änderung gegenseitig.

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\cancel{\rho}}{\cancel{\epsilon_0}} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \cancel{\mu_0 \vec{j}} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

$$\text{div } \vec{B} = 0$$

Dieser Beitrag zu den Feldstärken von E und B klingt mit $1/r$ ab und ist deshalb für große Abstände r dominierend.

Elektromagnetische Wellen

Wir suchen Lösungen der Maxwellgleichungen im Fernfeld,
also für $\vec{j} = 0$ und $\rho = 0$

Die Maxwellgleichungen lauten dann

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{E} = 0$$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \qquad \text{div } \vec{B} = 0$$

Lösungen dieser Gleichungen sind Wellen, bei denen elektrisches Feld und Magnetfeld immer gemeinsam auftreten und deren Richtung und Phase in fester Beziehung zu einander stehen.

Beispiele:

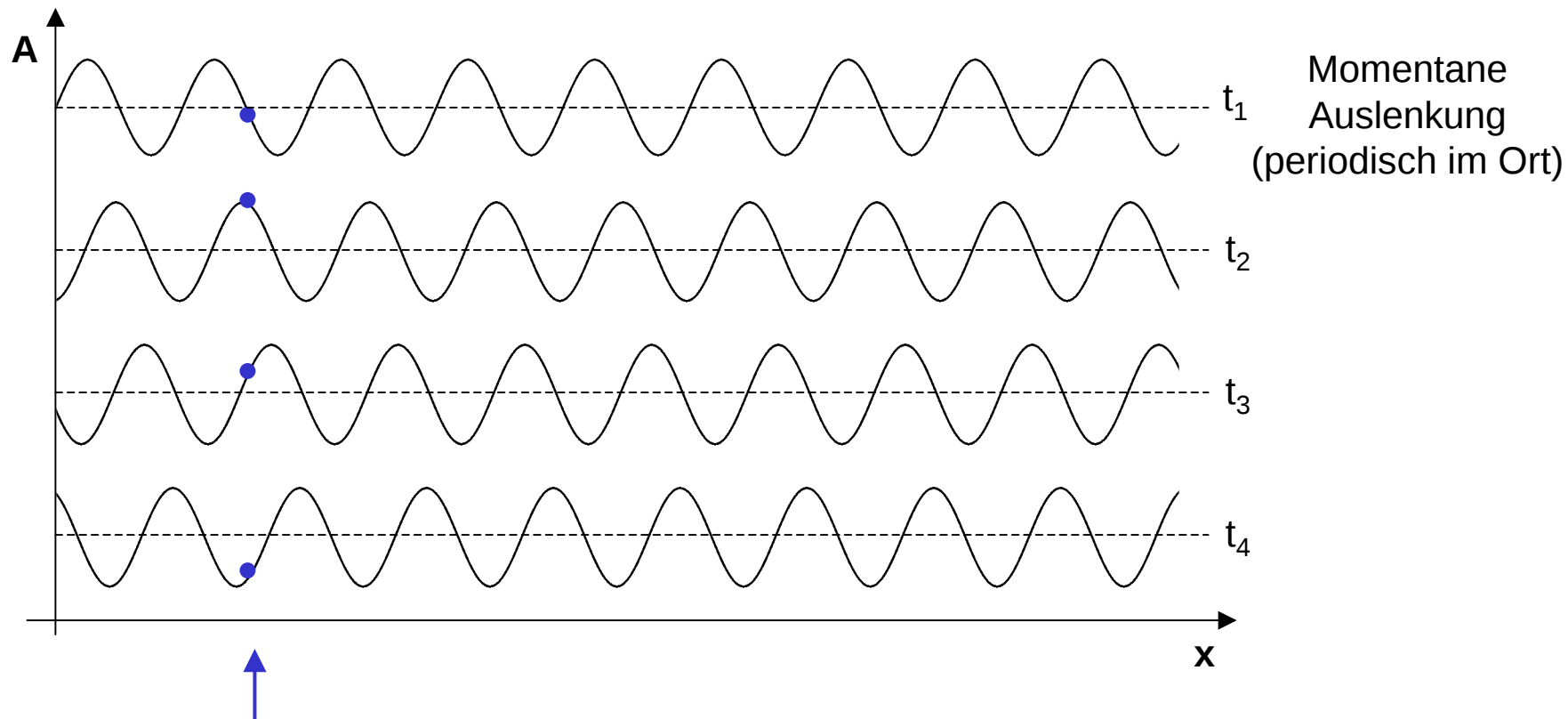
ebene Wellen, Kugelwellen, linear- bzw. zirkular polarisierte Wellen, etc.

Alle Überlagerungen einzelner Wellen sind wieder Lösung der Gleichungen.

Wellen im Allgemeinen

Schwingungen sind periodisch in der Zeit.

Wellen sind periodisch in Zeit und Ort.



Schwingung eines Punktes
(periodisch in der Zeit)

Momentane
Auslenkung
(periodisch im Ort)

Ansatz für eine periodische Funktion in Ort und Zeit (eindimensional)

$$A(x, t) = A_0 \sin(\omega t - k x)$$

Für festen Ort x periodische Schwingung: Schwingungsdauer $T = 2\pi/\omega$

Für festen Zeitpunkt t periodisch im Ort: Wellenlänge $\lambda = 2\pi/k$

k ist die Wellenzahl (Zahl der Wellenzüge pro Meter mal 2π)

Die Welle läuft in positive x -Richtung.

Bewegung eines Punktes mit bestimmter Phase (z.B. Amplitude $A=0$):

$$A(x, t) = 0 = A_0 \sin(\omega t - k x)$$

immer, wenn

$$\omega t - k x = 0$$

also

$$\omega t = k x$$

$$\Rightarrow \frac{x}{t} = \frac{\omega}{k} = v$$

Phasengeschwindigkeit der Welle

Ebene Wellen:

Die einfachste Lösung der Maxwellgleichungen ohne Ladung und Strom ist eine linear polarisierte, ebene Welle mit Ausbreitung in x-Richtung:

$$E_x(x, y, z, t) = 0$$

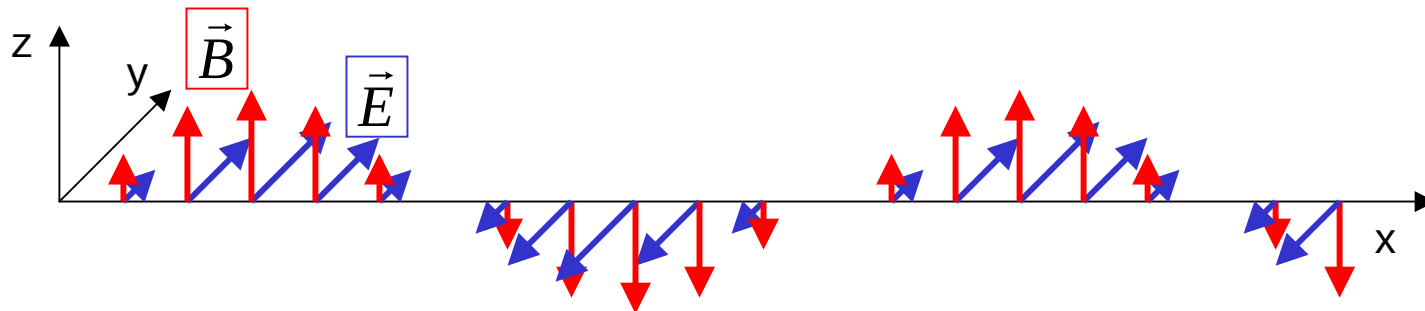
$$E_y(x, y, z, t) = E_0 \sin(\omega t - k x)$$

$$E_z(x, y, z, t) = 0$$

$$B_x(x, y, z, t) = 0$$

$$B_y(x, y, z, t) = 0$$

$$B_z(x, y, z, t) = B_0 \sin(\omega t - k x)$$



(beachte im Vergleich zu Seite 205: hier im Fernfeld)

Überprüfung ob Lösung der Maxwellgleichungen durch Einsetzen:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t} \quad 0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \quad 0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t} \quad -k E_0 \cos(\omega t - k x) = -\omega B_0 \cos(\omega t - k x)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \quad 0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t} \quad k B_0 \cos(\omega t - k x) = \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0 \cos(\omega t - k x)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t} \quad 0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 \quad 0 + 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \quad 0 + 0 + 0 = 0$$

Wenn E und B nicht senkrecht aufeinander stehen und phasenverschoben sind:

$$E_x(x, y, z, t) = 0$$

$$E_y(x, y, z, t) = E_0 \sin(\omega t - kx)$$

$$E_z(x, y, z, t) = 0$$

$$B_x(x, y, z, t) = 0$$

$$B_y(x, y, z, t) = B_{0y} \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

$$B_z(x, y, z, t) = B_{0z} \sin(\omega t - kx + \varphi)$$

folgt aus den Maxwellgleichungen, dass $B_{0y} = 0$ und $\varphi=0$ sein muss.

Überprüfung ob Lösung der Maxwellgleichungen durch Einsetzen:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} = -\frac{\partial B_x}{\partial t}$$

$$0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\frac{\partial B_y}{\partial t}$$

$$0 - 0 = -\omega B_{0y} \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial t}$$

$$-k E_0 \cos(\omega t - kx) = -\omega B_{0z} \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t}$$

$$0 - 0 = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_y}{\partial t}$$

$$k B_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) = \mu_0 \epsilon_0 \omega E_0 \cos(\omega t - kx)$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial E_z}{\partial t}$$

$$-k B_0 \cos(\omega t - kx + \varphi) - 0 = 0$$

$$\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = 0$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

$$\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} + \frac{\partial B_z}{\partial z} = 0$$

$$0 + 0 + 0 = 0$$

Für die Parameter E_0, B_0, k und ω ergeben sich also die Bedingungen:

$$k E_0 = \omega B_0$$

$$k B_0 = \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0$$

Es folgt durch Auflösen nach k und Gleichsetzen:

$$\frac{\omega B_0}{E_0} = k = \frac{\mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0}{B_0} \quad \Rightarrow \quad \frac{B_0^2}{E_0^2} = \mu_0 \varepsilon_0$$

Einsetzen in die erste Gleichung liefert:

$$\frac{\omega}{k} = \frac{E_0}{B_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Der Quotient ω/k ist immer die Phasengeschwindigkeit der Welle.

Also erhalten wir für die Lichtgeschwindigkeit:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}$$

Unsere Welle ist Lösung der Maxwellgleichungen, weil

1. E und B senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen
(transversale Welle)
2. E und B senkrecht aufeinander stehen
3. die Amplituden von E und B-Feld sich verhalten wie $\frac{B_0}{E_0} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$
4. E und B-Feld in Phase zueinander sind
5. die Frequenz sich zur Wellenzahl verhält wie $\frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$

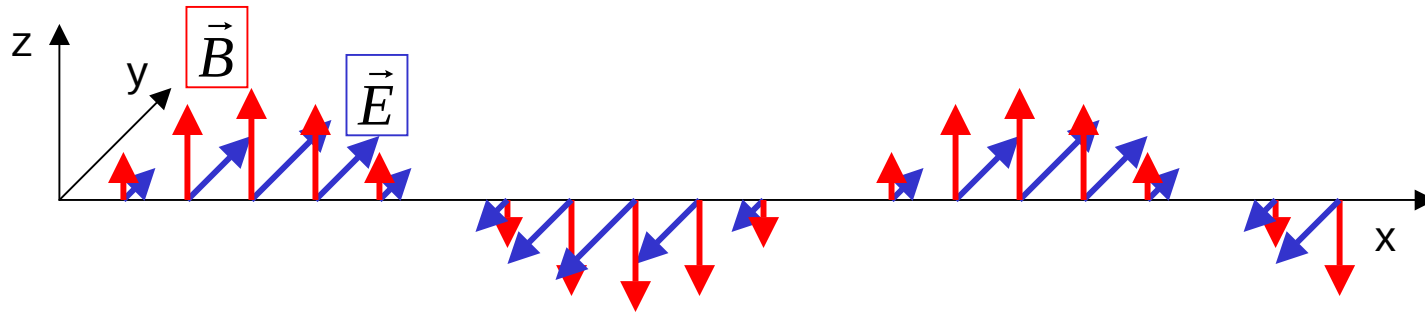
(nicht alles wurde hier vorgerechnet)

Polarisation

Die Polarisation einer Welle ist durch die Richtung der elektrischen Feldstärke definiert.

Ist die Richtung von E zeitunabhängig und folglich auch ortsunabhängig spricht man von *linearer Polarisation*

Beispiel Polarisation in y-Richtung:



Dreht sich der E-Feld Vektor in der (y,z)-Ebene als Funktion von der Zeit bleibt die Welle trotzdem transversal und man spricht von einer *zirkular polarisierten Welle*. (Auch der B-Vektor dreht sich entsprechend)

Eine Überlagerung von linear und zirkular polarisierten Wellen ergibt s.g. *elliptisch polarisierte Wellen*.

Wellengleichung

Alle Wellen (z.B. Wasserwellen) erfüllen eine Differentialgleichung der Form

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

denn:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \omega \cos(\omega t - k x)$$

$$\frac{\partial A}{\partial x} = -k \cos(\omega t - k x)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -\omega^2 \sin(\omega t - k x)$$

$$\frac{\partial^2 A}{\partial x^2} = -k^2 \sin(\omega t - k x)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = \frac{\omega^2}{k^2} \frac{\partial^2 A}{\partial x^2}$$

Mit der Phasengeschwindigkeit $v^2 = \frac{\omega^2}{k^2}$

Herleitung der Wellengleichung aus den Maxwellgleichungen

Wendet man den Operator rot auf beiden Seiten der Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

an, erhält man

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\operatorname{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t} \operatorname{rot} \vec{B}$$

Mit der Beziehung

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$$

ergibt sich

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

Es gilt die allgemeine mathematische Identität

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{E}) - \Delta \vec{E}$$

Mit dem Laplaceoperator Δ

Da keine Ladungen vorhanden sind und somit $\operatorname{div} \vec{E} = 0$ ist, folgt

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E}$$

Wir erhalten also

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{E} = -\Delta \vec{E} = -\mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}$$

und damit die Wellengleichung für den E-Feld Vektor:

$$\Delta \vec{E} = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

In Komponenten geschrieben bedeutet dies:

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 E_y}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 E_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_y}{\partial z^2} \right)$$

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial t^2} = \frac{1}{\mu_0 \epsilon_0} \left(\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial z^2} \right)$$

Aus der Wellengleichung liest man einfach ab, dass die Phasengeschwindigkeit und damit die Lichtgeschwindigkeit gegeben ist durch (Wurzel aus dem Vorfaktor)

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}}$$

Für das Magnetfeld kann ganz analog auch eine Wellengleichung hergeleitet werden:

$$\Delta \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2}$$

Beide Gleichungen liefern selbstverständlich die gleiche Lichtgeschwindigkeit

Aber in den Wellengleichungen ist nicht mehr die Kopplung zwischen E und B enthalten. Deshalb sind die wichtigen Zusammenhänge

1. E und B stehen senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung
2. E und B stehen senkrecht aufeinander
3. die Amplituden von E und B-Feld sich verhalten wie $\frac{B_0}{E_0} = \sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$
4. E und B-Feld sind in Phase zueinander

Nur aus den Maxwellgleichungen herzuleiten, aber nicht aus den einfacheren Wellengleichungen.

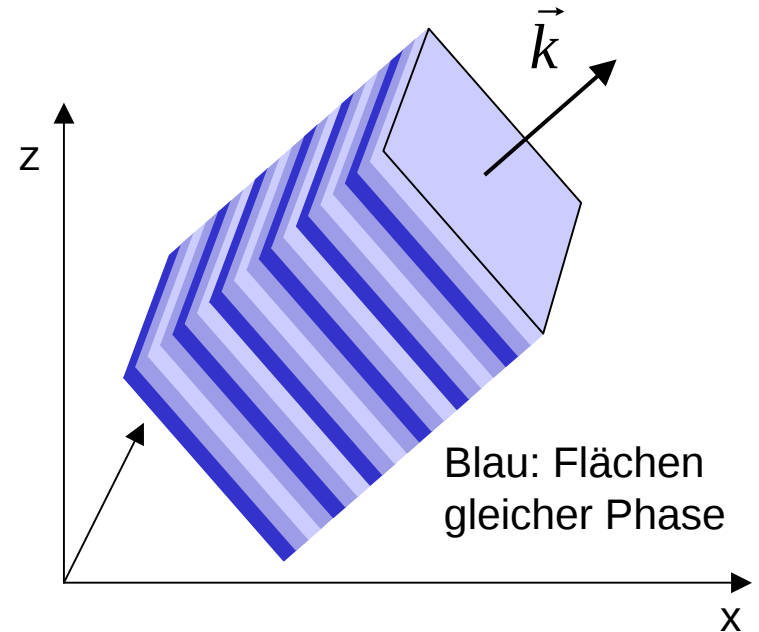
Ebene Wellen in beliebiger Richtung

Wenn eine ebene Welle nicht einfach entlang einer Koordinatenachse läuft, kann dies mathematisch durch den Wellenzahlvektor $\vec{k}$ ausgedrückt werden:

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \sin(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$$

Der Wellenzahlvektor zeigt in Richtung der Ausbreitungsgeschwindigkeit.

Das Skalarprodukt sorgt dafür, dass die Flächen gleicher Phase senkrecht auf der Ausbreitungsrichtung stehen.



Der Vektor $\vec{E}_0$ zeigt in Richtung der Polarisation.

Für das B-Feld ergibt sich aus den Maxwellgleichungen: $\vec{B} = \frac{1}{\omega} (\vec{k} \times \vec{E})$
(wird hier nicht hergeleitet)

Energiedichte einer Welle

Wellen transportieren Energie in Form von Feldenergie im E- und B-Feld.

Die Energiedichte im E-Feld ist:

$$w_E = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2$$

Die Energiedichte im B-Feld ist:

$$w_B = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$$

Die Stärke von E-Feld und B-Feld stehen bei elektromagnetischen Wellen in fester Beziehung zueinander

$$\frac{B}{E} = \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0} = \frac{1}{c}$$

Es folgt für die gesamte Energiedichte:

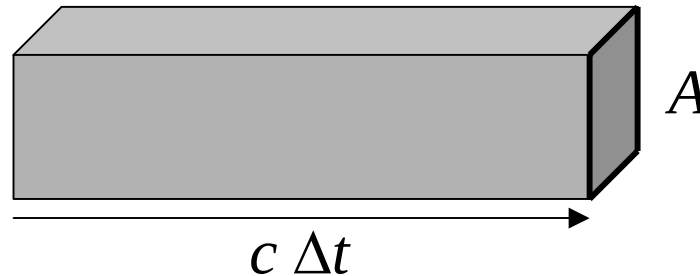
$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} \mu_0 \varepsilon_0 E^2 = \varepsilon_0 E^2$$

Intensität einer Welle

In den Wellenbergen wo E-Feld und B-Feld maximal ist findet man die meiste Feldenergie. In einer Knotenfläche ist die Energiedichte Null.

Die Welle breitet sich mit Lichtgeschwindigkeit c aus.

Durch die Fläche A tritt also pro Zeit Δt die Energie W



$$W = V \bar{w} = Ac\Delta t \bar{w}$$

Mit der mittleren Energiedichte

$$\bar{w} = \frac{1}{T} \int_0^T w dt = \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

$$W = Ac\Delta t \frac{1}{2} \epsilon_0 E_0^2$$

Als *Intensität* bezeichnet man die Energie, die pro Zeit und Fläche durch die Fläche hindurchtritt. Wir erhalten:

$$I = \frac{Ac\Delta t \frac{1}{2} \varepsilon_0 E_0^2}{A\Delta t} = \frac{1}{2} c \varepsilon_0 E_0^2$$

Einheit der Intensität ist Watt pro Quadratmeter 1 W/m².

Beispiel:

Die Intensität der Sonne beträgt 970 W/m² an der Erdoberfläche.

Im zeitlichen Mittel herrschen im Licht also elektrische Feldstärken von

$$E_0 = \sqrt{\frac{2I}{c\varepsilon_0}} = 856 \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

gleichzeitig sind Magnetfelder vorhanden mit

$$B_0 = \frac{1}{c} E_0 = 2.8 \cdot 10^{-6} \text{ T}$$

Poynting Vektor

Man definiert einen Vektor, der Stärke und Richtung des Energiestroms angibt.

$$\vec{S} = \varepsilon_0 c^2 \vec{E} \times \vec{B}$$

Der Betrag des Poynting Vektors ist gleich der Intensität, denn

$$|\vec{S}| = \varepsilon_0 c^2 E B = \varepsilon_0 c E^2 = I$$

Für eine ebene elektromagnetische Welle stehen E-Feld und B-Feld senkrecht auf dem Wellenzahlvektor k . Deshalb zeigt in diesem Falle der Poynting Vektor in die Richtung von k .

Kugelwellen

Wellen, die radial von einem Punkt ausgehen und in jeder Richtung die gleiche Amplitude haben werden mathematisch durch die Funktion

$$E(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{r} \sin(\omega t - k r)$$

beschrieben. (Kein Skalarprodukt, da k immer in Richtung von r zeigt d.h. Ausbreitung in radialer Richtung)

Begründung für die Radiusabhängigkeit $1/r$:

Der Energiestrom ist unabhängig vom Abstand und die Fläche nimmt quadratisch mit dem Abstand zu.

Also nimmt die Intensität wie $1/r^2$ mit dem Abstand ab.

Da die Intensität proportional zum Quadrat der Amplitude ist, nimmt die Feldstärke wie $1/r$ ab.

$$P = \text{const} = \frac{W}{\Delta t} = I \cdot 4\pi r^2 = \epsilon_0 c \frac{E_0^2}{r^2} \cdot 4\pi r^2$$

Impuls einer elektromagnetischen Welle

Eine Welle transportiert auch Impuls und kann dadurch eine Kraft ausüben.

Die Impulsdichte g für eine ebene Welle ist gegeben durch (hier ohne Herleitung)

$$\vec{g} = \frac{1}{c^2} \vec{S}$$

Der Betrag von g ist folglich $g = \frac{1}{c^2} I$

Aus der Mechanik ist bekannt, dass eine Kraft gleich der Impulsänderung pro Zeit ist (bzw. Impulsübertrag pro Zeiteinheit).

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} \approx \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

Eine schwarze Fläche absorbiert die Intensität I und erhält dabei pro Zeiteinheit den Impulsübertrag

$$g = \frac{1}{c^2} I$$

Auf die Fläche wird dadurch die Kraft

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t} = \frac{\vec{g} V}{\Delta t} = \frac{\vec{g} A c \Delta t}{\Delta t} = \vec{g} A c$$

ausgeübt. Besser berechnet man die Kraft pro Fläche

$$\frac{F}{A} = g c = \frac{I}{c}$$

Und erhält so den *Strahlungsdruck* durch eine elektromagnetische Welle.

Bei der Reflexion einer Welle ist der Strahlungsdruck doppelt so groß, weil die Impulsänderung doppelt so groß ist.

Beispiel: Im Sonnenlicht erfährt eine schwarze Fläche den Strahlungsdruck:

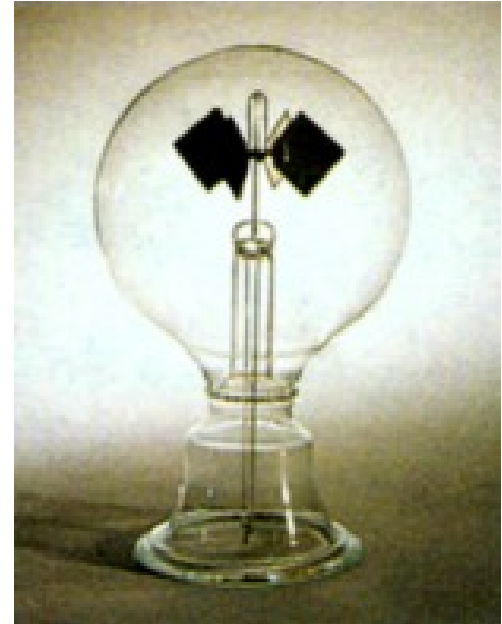
$$\frac{F}{A} = \frac{I}{c} = \frac{970 \text{ W}}{3 \cdot 10^8 \text{ m/s}} = 3.2 \mu\text{Pa} = 3.2 \cdot 10^{-6} \frac{\text{N}}{\text{m}^2}$$

Beispiel: Lichtmühle

Bei einer Lichtmühle sind die Seiten eines Flügelrades auf der einen Seite schwarz und auf der anderen Seite reflektierend.

Auf die reflektierende Seite wird der doppelte Strahlungsdruck ausgeübt.

Dadurch dreht sich das Rad im Licht.



Ein anderer Effekt ist aber bei den kommerziellen Lichtmühlen größer: An der wärmeren, schwarzen Seite werden Luftmoleküle erwärmt und verlassen die Seite mit höherer Geschwindigkeit als die ankommenden. Dieser Impulsübertrag (Rückstoß) ist größer als der Strahlungsdruck und lässt das Rad andersherum drehen.

Ist der Luftdruck im Glaskolben sehr klein, lässt sich auch der Strahlungsdruck beobachten.

Beispiel: Strahlungsdruck auf Nanoteilchen im Sonnenlicht

Teilchen in unserem Sonnensystem erfahren die Gravitationskraft der Sonne und den Strahlungsdruck des Sonnenlichtes.

Für eine schwarze Kugel mit Dichte ρ und Radius r gilt im Abstand R von der Sonne:

$$F_g = -\gamma \frac{m_s m}{R^2} = -\gamma m_s \frac{4\pi}{3} \frac{\rho r^3}{R^2} = 5.6 \cdot 10^{20} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}} \frac{\rho r^3}{R^2}$$

$$F_s = A \frac{I}{c} = \pi r^2 \frac{I_0}{R^2 c} = 3.3 \cdot 10^{17} \text{ N} \frac{r^2}{R^2}$$

Das Verhältnis aus Gravitationskraft und Kraft durch Strahlungsdruck hängt nur von der Dichte und dem Radius der Teilchen ab, aber nicht vom Abstand zur Sonne

$$\frac{F_g}{F_s} = 1700 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}} \rho r$$

Bei einer Dichte von 1000 Kg/m^3 (Wasser) ergibt sich

$$\frac{F_g}{F_s} = 1.7 \cdot 10^6 \frac{1}{\text{m}} r$$

Für Teilchen mit $r < 588 \text{ nm}$ ist der Strahlungsdruck in unserem Sonnensystem größer als die Gravitation der Sonne. Sie werden aus dem Sonnensystem „herausgepustet“.

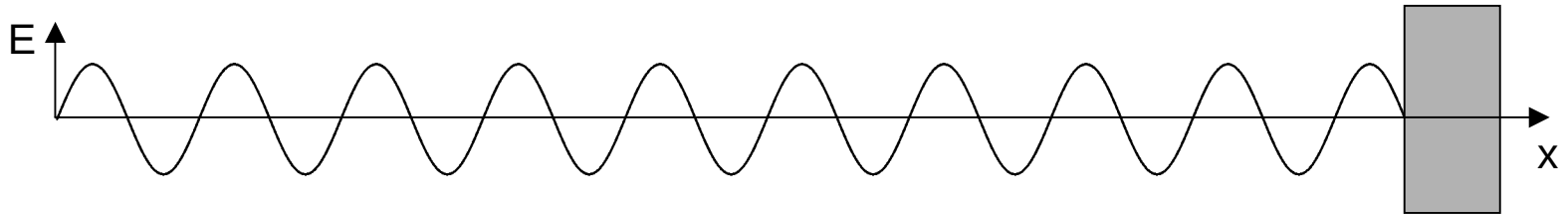
Ein Teilchen mit $r = 100 \text{ nm}$ fliegt in 6 Tagen von der Sonne zur Erde und in einem halben Jahr zum Pluto. (Lösung erfordert längere Rechnung)



Strahlungsdruck auf Staub im Kometenschweif

Stehende elektromagnetische Wellen

Bei der Reflexion an einer Metalloberfläche werden im Metall Ströme erzeugt und Ladungen verschoben, so dass kein E-Feld parallel zur Metalloberfläche vorhanden ist.



Bei vollständiger Reflexion überlagern sich die einfallende

$$E_y(x, y, z, t) = E_0 \sin(\omega t - k x)$$

$$B_z(x, y, z, t) = B_0 \sin(\omega t - k x)$$

und die reflektierte Welle:

$$E_y(x, y, z, t) = E_r \sin(\omega t + k x)$$

$$B_z(x, y, z, t) = B_r \sin(\omega t + k x)$$

Wählt man das Koordinatensystem so, dass $x=0$ an die Metalloberfläche liegt, muss für alle Zeiten gelten

$$E_0 \sin(\omega t - k x) + E_r \sin(\omega t + k x) = 0$$

Für $E_r = -E_0$ ergibt sich

$$E_0 \sin(\omega t - k x) - E_0 \sin(\omega t + k x) = -2E_0 \cos(\omega t) \sin(k x) = 0$$

das die geforderte Bedingung für alle Zeiten erfüllt.

Aus den Maxwellgleichungen ergibt sich für das B-Feld der reflektierten

Welle: $B_r = B_0$ Man erhält also insgesamt:

$$E_y(x, y, z, t) = E_0 \sin(\omega t - k x) - E_0 \sin(\omega t + k x)$$

$$B_z(x, y, z, t) = B_0 \sin(\omega t - k x) + B_0 \sin(\omega t + k x)$$

Und mit den Additionstheoremen:

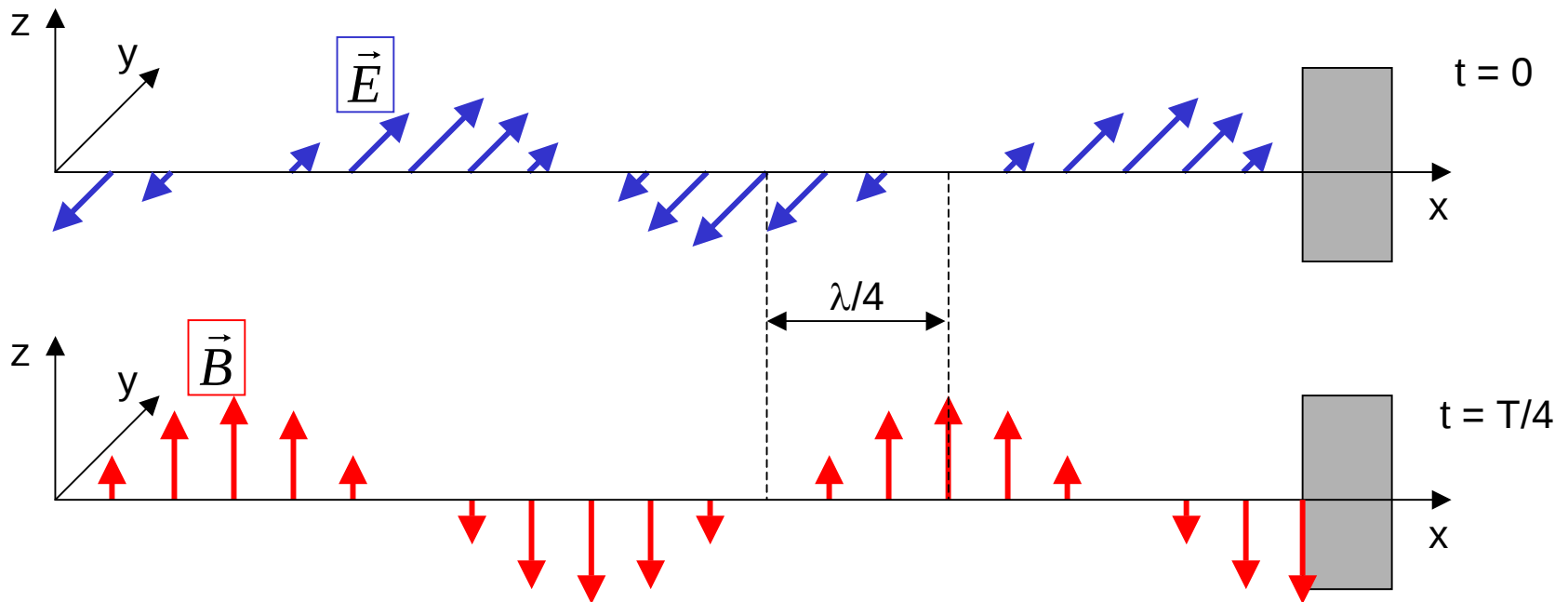
$$E_y(x, y, z, t) = -2E_0 \cos(\omega t) \sin(k x)$$

$$B_z(x, y, z, t) = 2B_0 \sin(\omega t) \cos(k x)$$

Zeitabhängigkeit und Ortsabhängigkeit stehen nun in verschiedenen Faktoren. Dadurch schreitet die Welle nicht voran, sondern es gibt Orte an denen Die Amplitude immer Null ist (*Schwingungsknoten*) und andere, an denen die Amplitude maximal mit der Zeit variiert (*Schwingungsbäuche*).

→ *Stehende Welle*

Die Knoten des E-Feldes sind um 90° phasenverschoben zu den Knoten des B-Feldes. Zeitlich wechseln sich Maximum von E-Feld und B-Feld ab.



Zeitliche und räumliche Phasenverschiebung um $T/4$ und $\lambda/4$

Vor einer ebenen Metalloberfläche (Spiegel) bildet sich eine stehende Welle aus.

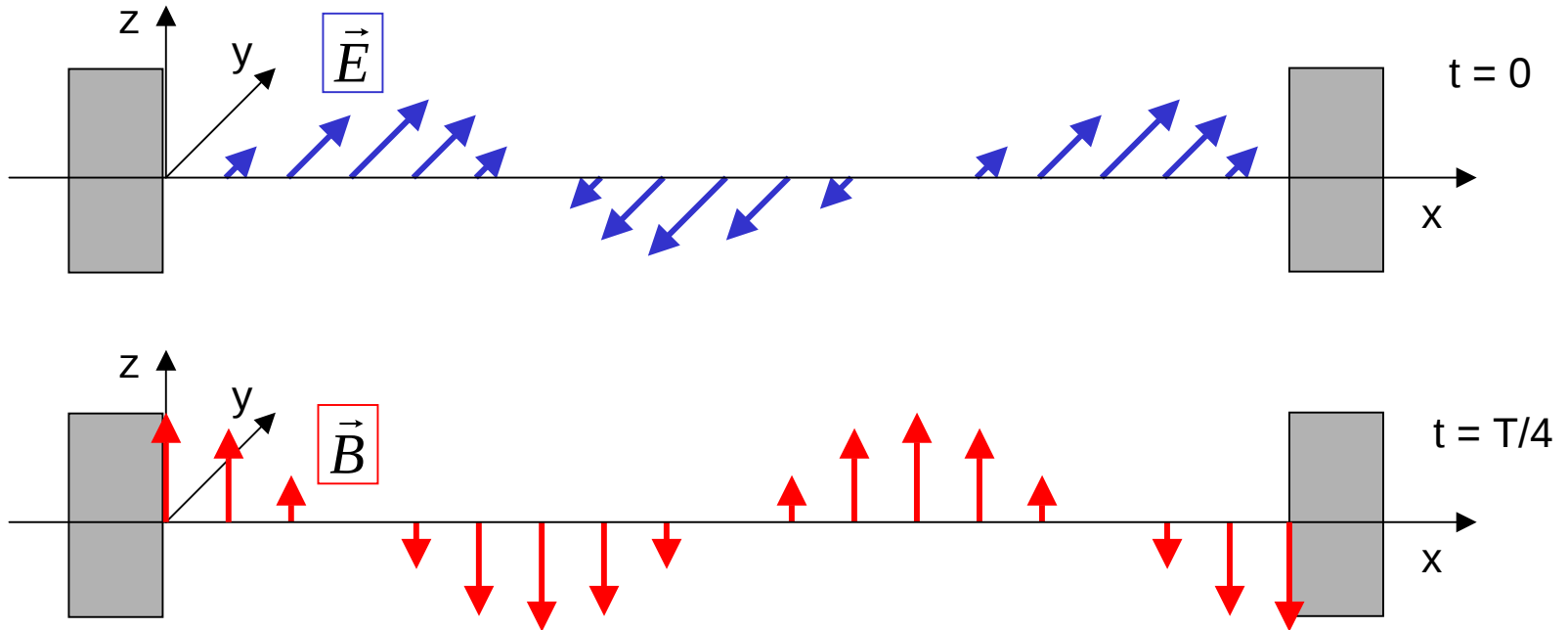
Es gibt Knotenflächen parallel zum Spiegel in denen das E-Feld oder B-Feld immer Null ist.

Die Feldenergie des E-Feldes wird während einer $1/4$ Schwingung in Feldenergie des B-Feldes umgewandelt. Analogie zur mechanischen Schwingung, bei der potentielle in kinetische Energie umgewandelt wird.

Die gesamte Feldenergie bleibt in der stehenden Welle erhalten.

Hohlraumresonator

Zwischen zwei gegenüberliegenden Spiegeln kann eine stehende Welle eingesperrt sein.



Da jetzt das E-Feld auf beiden Seiten am Spiegel gleich Null sein muss, passen nur noch bestimmte Wellenlängen dazwischen.

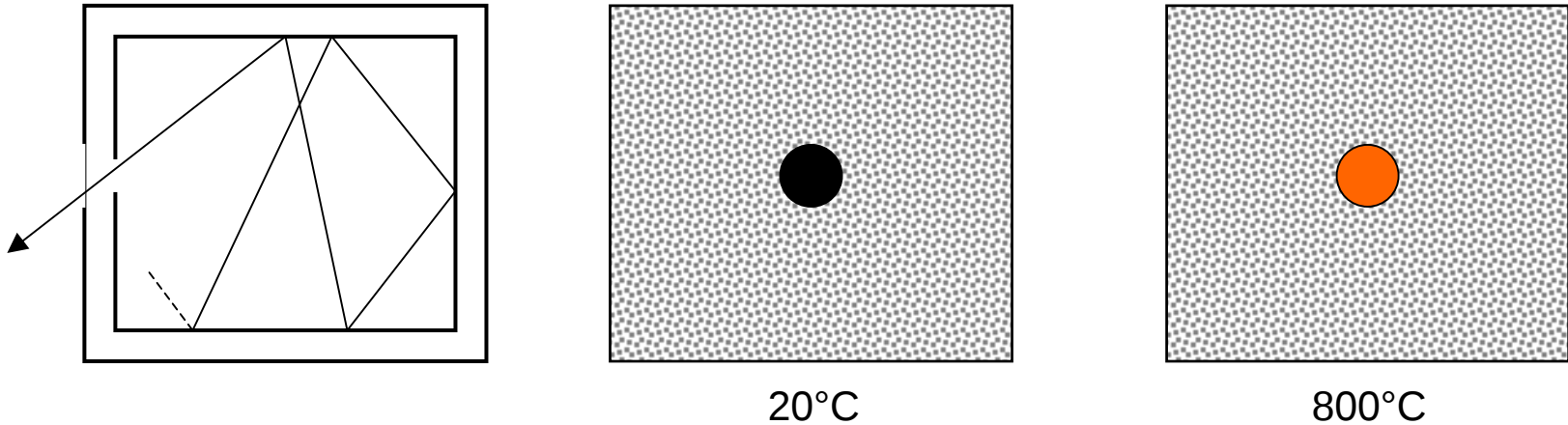
Es muss die Bedingung gelten

$$n \frac{\lambda}{2} = L$$

Wärmestrahlung

Eine Fläche, die bei allen Frequenzen Wärmestrahlung vollständig absorbiert und damit auch maximal abstrahlt bezeichnet man als schwarzen Strahler.

Übliche Realisierung als schwarzer Hohlraum mit Austrittsloch.



Der s.g. Hohlraumresonator eignet sich besonders für die Berechnung des Spektrums der emittierten Strahlung.

Die Erklärung der Wärmestrahlung durch Planck (1900) war die Geburtsstunde der Quantenmechanik.

Elektromagnetische Wellen (Infrarot, Licht, ..) werden durch die thermische Energie angeregt.

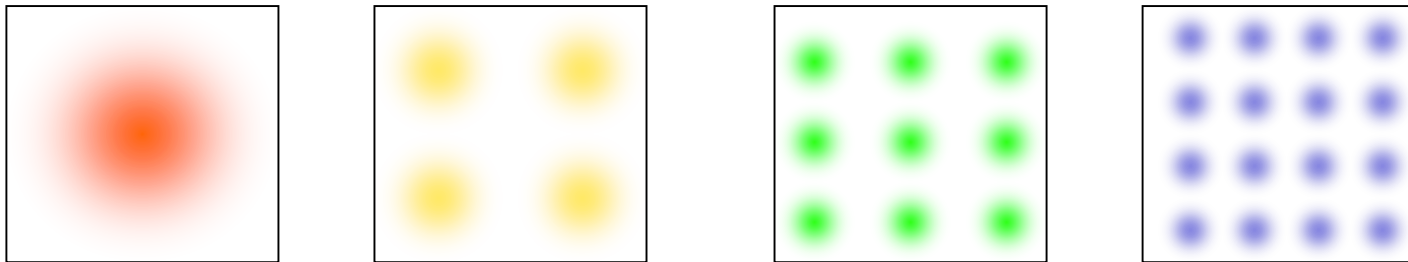
Bei hohen Temperaturen ($>700^{\circ}\text{C}$) steht genügend Energie zur Verfügung, um merklich im sichtbaren Bereich zu emittieren (Rotglut).

Je heißer die Oberfläche wird, umso gelber – weißer – blauer wird das Licht.

Frage: 1. Wieviel Licht wird bei einer bestimmten Frequenz emittiert
2. Wieviel Lichtenergie wird insgesamt abgestrahlt.

Betrachtung der Wellen in dem Hohlraumresonator:

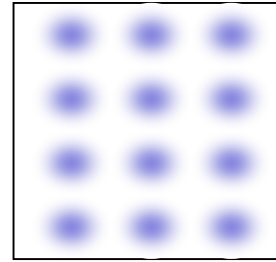
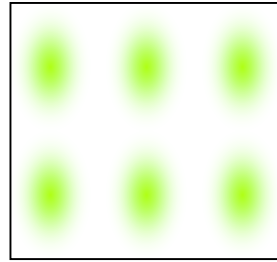
Ausbildung stehender elektromagnetischer Wellen



je kürzer die Wellenlänge umso höher die Frequenz

Farbe des Lichtes ändert sich von rot über gelb, grün nach blau

Es sind auch solche stehenden Wellen möglich:



Die Wellenzahl in x-, y- und z-Richtung ist: $k_x = n_x \frac{2\pi}{L}$

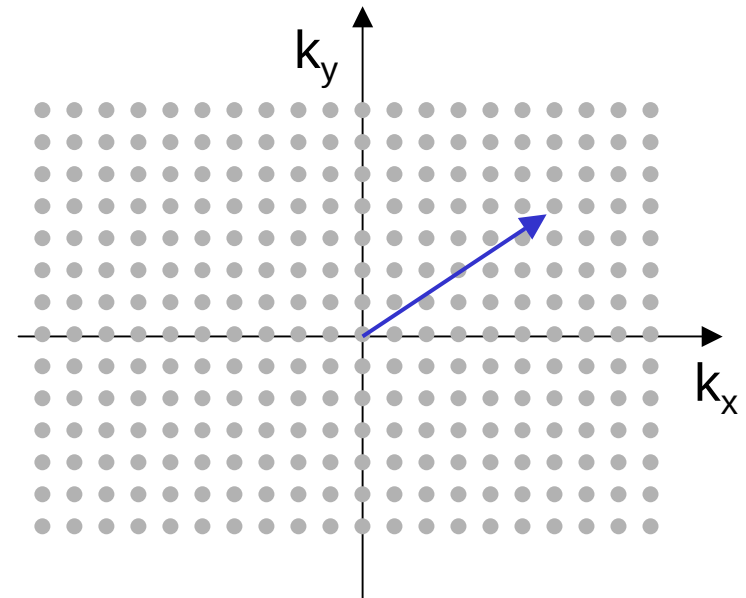
$$k_y = n_y \frac{2\pi}{L}$$

$$k_z = n_z \frac{2\pi}{L}$$

Die Wellenzahlvektoren für alle möglichen stehenden Wellen sind rechts schematisch eingetragen.

Die Frequenz (Farbe) der Welle ist proportional zum Betrag vom Wellenzahlvektor.

$$\nu = \frac{c}{2\pi} |\vec{k}|$$

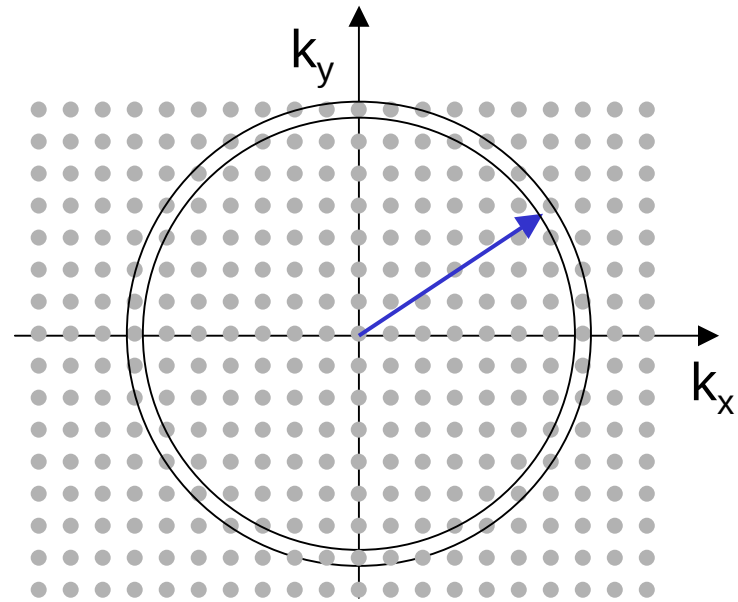


Alle k -Vektoren zu einem Frequenzintervall ν bis $\nu+d\nu$ liegen in einer Kugelschale.

Die Anzahl der k -Vektoren in der Kugelschale steigt quadratisch mit dem Radius, d.h. quadratisch mit der Frequenz.

Im thermischen Gleichgewicht wird auf jede stehende Welle im Mittel gleich viel Energie verteilt $k_B T$. Jede Welle stellt einen Freiheitsgrad (des Lichtfeldes) dar.

Die in dem Frequenzintervall ν bis $\nu+d\nu$ gespeicherte Energiedichte steigt also quadratisch mit der Frequenz an.



$$\rho(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} k_B T d\nu$$

Rayleigh – Jeans Gesetz

Dieses aus der klassischen Physik hergeleitete Gesetz würde zur s.g. Ultraviolett Katastrophe führen: die Intensität würde mit zunehmender Frequenz (... blau, violett, ultraviolett ...) ins unendliche ansteigen.

Ein bis dahin unbekanntes Phänomen verhindert die Anregung der Wellen mit hoher Frequenz.

Planck führte das Energiequant ein und leitete daraus das richtige Spektrum eines schwarzen Strahlers her.

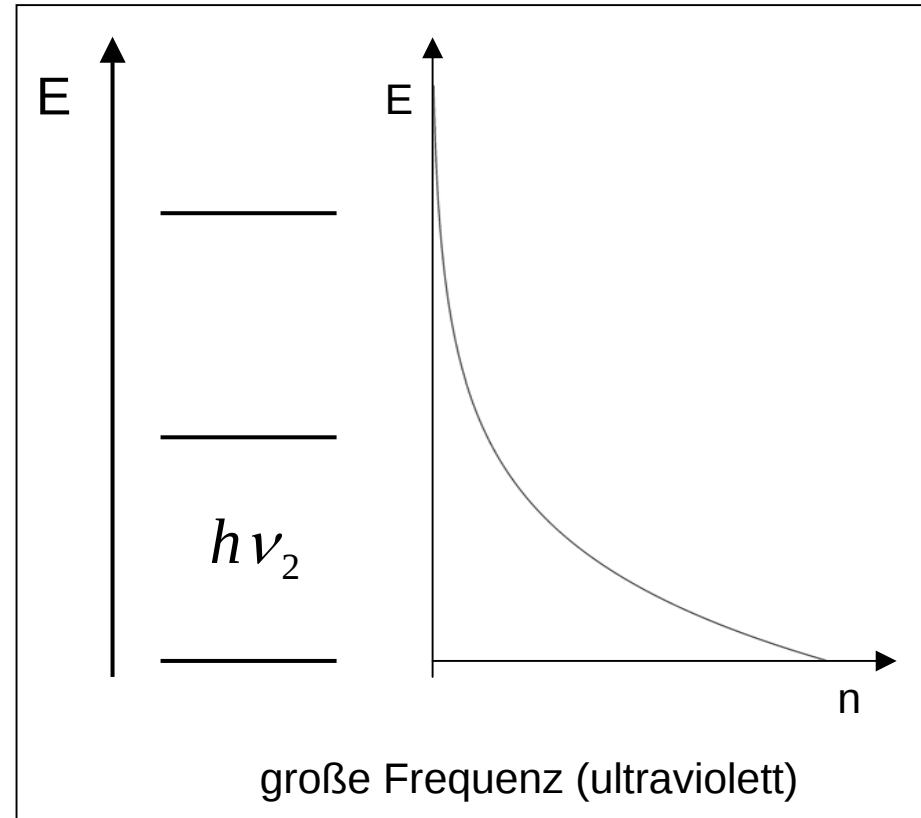
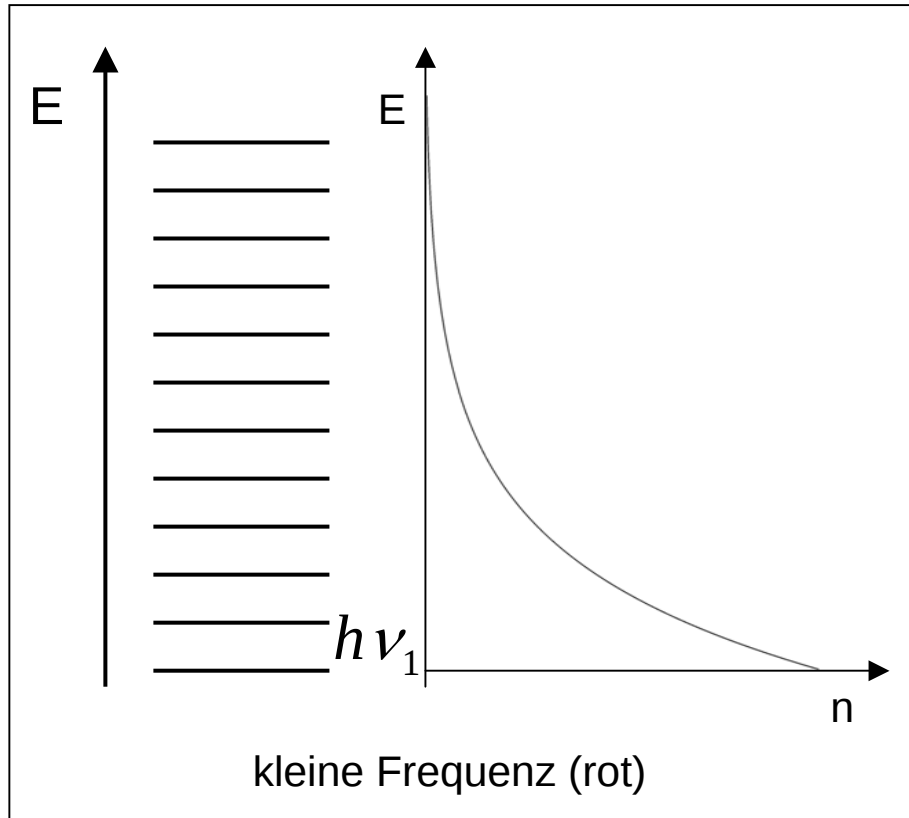
Jede Welle kann Energie nur in festen Portionen d.h. Quanten aufnehmen, die Photonen.

Die Energie eines Quants ist proportional zur Frequenz:

$$E = h \nu$$

h: Planck'sches Wirkungsquantum $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$

Bei hohen Frequenzen ist die Energie eines Energiequants (Photon) hoch und damit wird die thermische Anregung sehr unwahrscheinlich.



Die mittlere, in einer stehenden Welle gespeicherte Energie ist:

$$\langle E \rangle = \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1}$$

(Ergibt sich nach kurzer Rechnung)

Die Energiedichte im Hohlraum ist Anzahl der stehenden Wellen im Frequenzintervall multipliziert mit der mittleren Energie darin

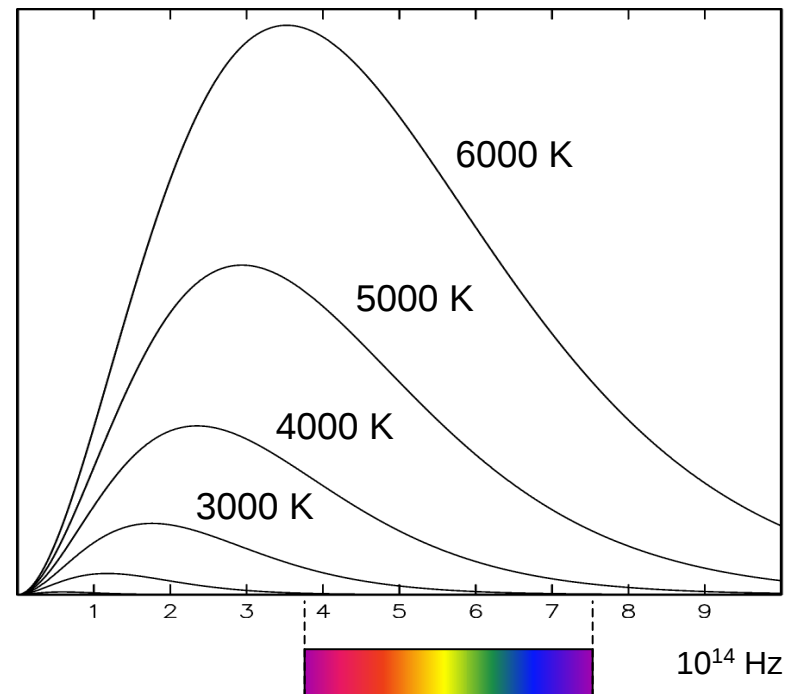
$$\rho(\nu) d\nu = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \frac{h\nu}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} d\nu$$

Planck'sches Strahlungsgesetz

Die emittierte Strahlungsleistung in dem Frequenzintervall hat bis auf einen Vorfaktor die gleiche Form.

Bei kleinen Frequenzen ist dieses Gesetz gut genährt durch das Rayleigh-Jeans Gesetz.

Bei hohen Frequenzen nimmt die Energiedichte exponentiell mit der Frequenz ab.



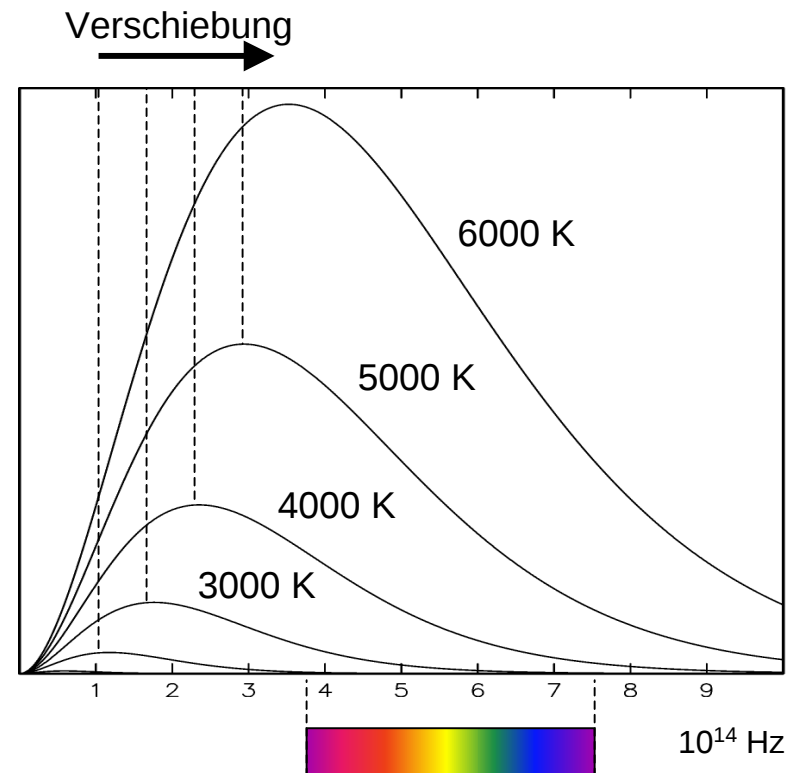
Emissionsmaximum:

Das Maximum der emittierten Strahlung verschiebt sich mit steigender Temperatur zu höheren Frequenzen (ins Blaue).

Berechnet man das Maximum der Kurve aus dem Planck'schen Gesetz erhält man das Wien'sche Verschiebungsgesetz.

$$\nu_{\max} = 5.88 \cdot 10^{10} \frac{\text{Hz}}{\text{K}} T$$

Das Maximum verschiebt sich proportional zur Temperatur.



Gesamtemission des schwarzen Strahlers:

Mit steigender Temperatur nimmt die Fläche unter der Kurve im Planck'schen Strahlungsgesetz stark zu. Integriert man über alle Frequenzen erhält man:

$$\frac{P}{A} = 5.67 \cdot 10^{-8} \frac{\text{W}}{\text{m}^2 \text{K}^4} T^4$$

Stefan-Boltzmann Gesetz

Die insgesamt abgestrahlte Leistung nimmt mit 4. Potenz der Temperatur zu.

