

Statische Magnetfelder

Bewegte Ladungen erzeugen Magnetfelder.

Im Magnetfeld erfährt eine bewegte Ladung eine Kraft.

Elektrische Felder werden von ruhenden und bewegten Ladungen gleichermaßen erzeugt. Die Kraft durch ein elektrisches Feld auf eine Ladung ist unabhängig von ihrer Geschwindigkeit.

Elektrischer Strom bedeutet Bewegung von Ladungen.
Deshalb werden durch Ströme Magnetfelder erzeugt.

In diesem Kapitel werden Magnetfelder behandelt, deren Stärke und Richtung nicht von der Zeit abhängen.

Sie werden durch Ströme erzeugt, die ebenfalls nicht zeitabhängig sind.
Auch ruhende Permanentmagnete erzeugen statische Magnetfelder.

Magnetische Feldstärke

Wir führen ein die *magnetische Feldstärke* $\vec{B}$

Zur Bezeichnung:

Beim Magnetfeld wurde früher der Begriff „Magnetische Flussdichte“ anstelle der magnetischen Feldstärke verwendet. Der Begriff Feldstärke wurde für die Größe H verwendet. Es gilt ein ähnlicher Zusammenhang zwischen B und H wie zwischen E und D : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$

Beim elektrischen Feld sind die Ladungen Quellen des Feldes

$$\varepsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} = \rho \quad \text{Poisson-Gleichung}$$

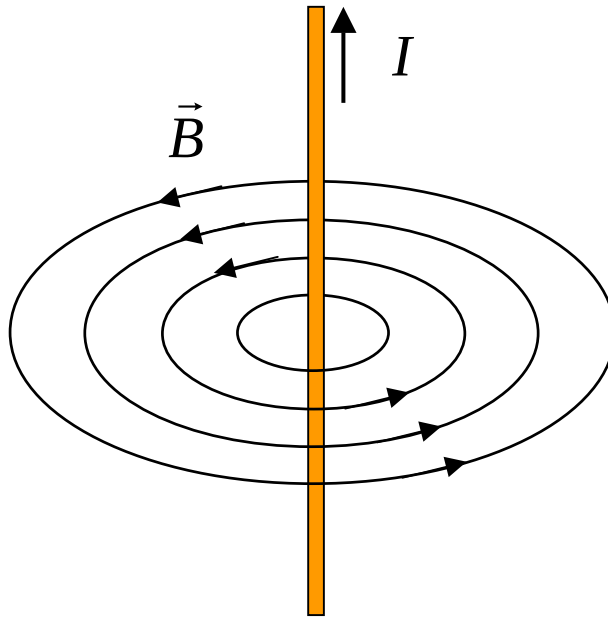
Das Magnetfeld besitzt keine Quellen (keine magnetischen Monopole).

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

Magnetfeldlinien sind daher immer in sich geschlossen.

Erzeugung von Magnetfeldern, Ampèresches Gesetz

Magnetfelder werden nicht durch Quellen erzeugt aus denen Feldlinien entspringen, sondern durch bewegte Ladungen um die herum sich ein wirbelförmiges Feld ausbildet.



Magnetfeld eines
stromdurchflossenen Leiters

Die elementare Gleichung lautet daher

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

bzw.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

Der mathematische Operator Rotation ($\text{rot } \vec{B}$) berechnet die lokale Wirbelstärke eines Vektorfeldes.

Die Richtung der Wirbelachse zeigt in Richtung der Stromdichte.

Berechnung der Rotation in kartesischen Koordinaten:

$$\text{rot } \vec{B} = \left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y} \right)$$

Die Wirbelstärke des Magnetfeldes wird durch die Stromdichte ($\vec{j}$) verursacht.

Die Konstante μ_0 heißt *Induktionskonstante* oder *magnetische Permeabilitätskonstante* und ist aufgrund der Definition des Amperes exakt:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \frac{\text{Vs}}{\text{Am}}$$

Integrale Form der Quellenfreiheit von Magnetfeldern

Anschauliche Formulierung:

Wenn in einem ganzen Volumen keine Quellen vorhanden sind, müssen durch die Oberfläche des Volumens genauso viele Feldlinien herauslaufen wie hineinlaufen.

Analogie zum Wasser:

In einem Volumen unter Wasser ist die Quellstärke im Wasser überall Null, deshalb muss genauso viel Wasser durch die Oberfläche des Volumens heraus fließen, wie hineinfließt.

Wir führen ein den *magnetischen Fluss*

Definition:

$$\Phi = \int_{\text{Fläche}} \vec{B} \cdot d\vec{A}$$

Maß dafür, wieviel Magnetfeld durch die Fläche A durchtritt.

Mit dem Gaußschen Satz

$$\int_{\text{Volumen}} \operatorname{div} \vec{f} \, dV = \int_{\text{Oberfläche}} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

lässt sich nun mathematisch präzise formulieren:

$$\int_{\text{Volumen}} \operatorname{div} \vec{B} \, dV = \oint_{\text{Oberfläche}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

d.h. da es prinzipiell keine Quellen des Magnetfeldes gibt, gibt es keine Quellen in dem Volumen. Deshalb ist der magnetische Fluss durch die geschlossene Oberfläche des Volumens gleich Null.

Quellenfreiheit des
Magnetfeldes:

differentielle Formulierung

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0$$

integrale Formulierung

$$\oint_{\text{Oberfläche}} \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$$

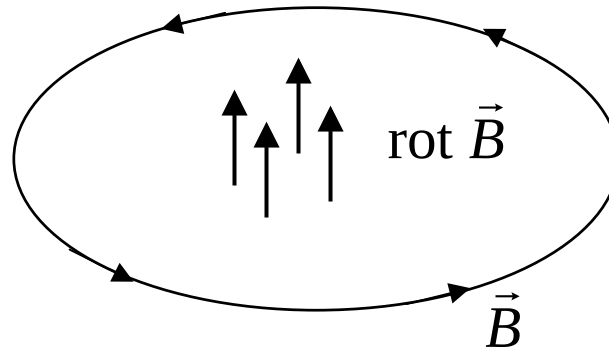
Die Äquivalenz wurde mathematisch mit dem Gaußschen Satz gezeigt.

Stokesscher Satz

Für stetig differenzierbare Vektorfelder gilt folgender Zusammenhang:

$$\int_{\text{Fläche}} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint_{\text{Randkurve}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Die Größe eines Wirbels lässt sich auf zwei Weisen erfassen:
die lokale Wirbelstärke ($\text{rot } B$) integriert über eine Fläche (linke Seite), oder
die Feldstärke B selbst, integriert entlang des Randes der Fläche, d.h. z.B.
entlang einer geschlossenen Feldlinie des Magnetfeldes (rechte Seite).



Integrale Form des Ampèreschen Gesetzes

Für den Strom der durch eine bestimmte Fläche tritt erhält man:

$$\mu_0 I = \mu_0 \int_{\text{Fläche}} \vec{j} \cdot d\vec{A} = \int_{\text{Fläche}} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{A} = \oint_{\text{Randkurve}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

Und damit das Ampèresche Gesetz in der integralen Form

$$\mu_0 I = \oint_{\text{Randkurve}} \vec{B} \cdot d\vec{s}$$

bzw.

$$I = \oint_{\text{Randkurve}} \vec{H} \cdot d\vec{s}$$

Erinnere: die differentielle Form lautete

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

bzw.

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{j}$$

Die Integrale Form rechnet mit Strömen durch eine ganze Fläche, die differentielle Form berechnet lokal die Wirbelstärke aus der Stromdichte.

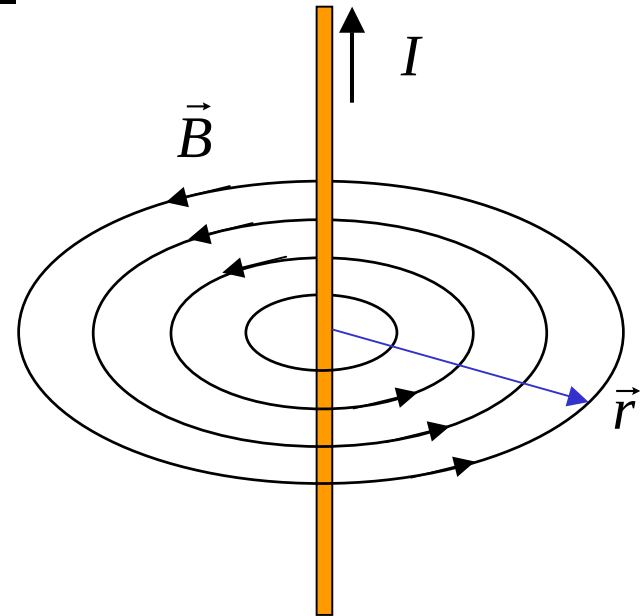
Beispiele zur Berechnung von Magnetfeldern

Magnetfeld eines geraden Leiters:

Die Feldlinien laufen kreisförmig um den Leiter. Der Betrag von B ist überall auf dem Kreis gleich, also gilt:

$$\mu_0 I = \oint_{\substack{\text{kreisförmige} \\ \text{Randkurve}}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = 2\pi r B$$

$$\Rightarrow B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}$$

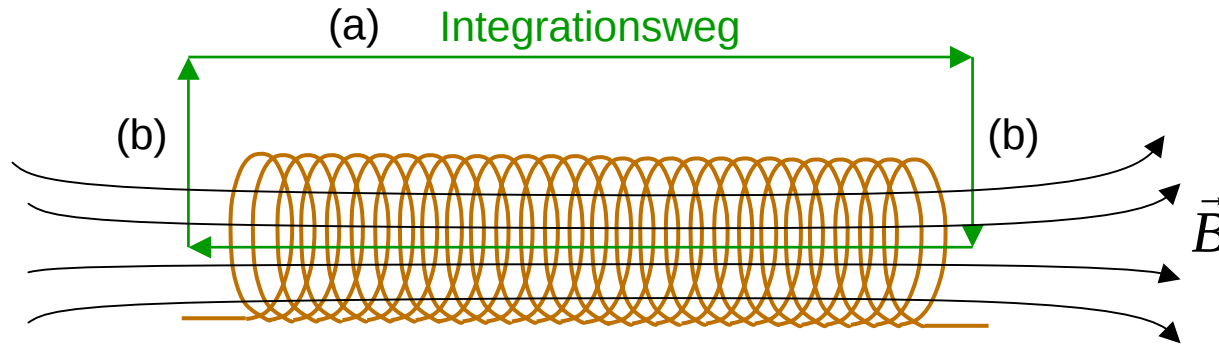


Vektoriell geschrieben, ergibt sich für einen Strom entlang der z-Achse:

$$\vec{B}(\vec{r}) = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(-y, x, 0)}{r^2} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \frac{(-y, x, 0)}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Magnetfeld einer langen, dünnen Spule

Das Feld im Innern der Spule ist näherungsweise homogen:



a) Außerhalb der Spule ist ein vergleichsweise kleines Feld,

b) Senkrecht zu den Feldlinien liefert das Linienintegral keinen Beitrag

Durch die Fläche, die vom Weg umschlossen wird, tritt n mal der Strom I .

Es ergibt sich:

$$\mu_0 I = \oint_{\text{Randkurve}} \vec{B} \cdot d\vec{s} = l B$$

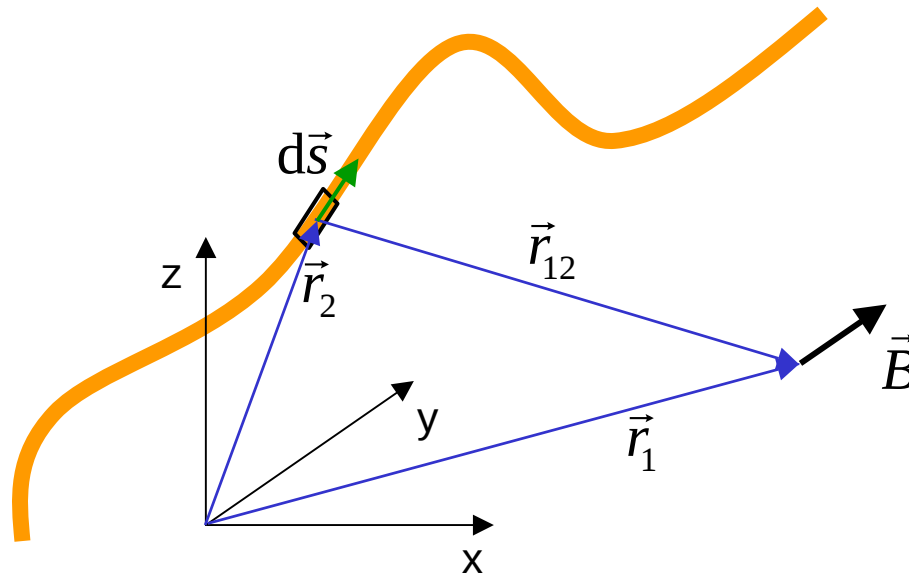
In einer Spule der Länge l mit n Windungen herrscht die Magnetfeldstärke:

$$B = \mu_0 \frac{n}{l} I$$

Biot-Savart-Gesetz

Mit diesem Gesetz kann das Magnetfeld einer beliebigen Stromverteilung berechnet werden.

Es folgt aus dem Ampèreschen Gesetz (Herleitung wird hier nicht gezeigt).



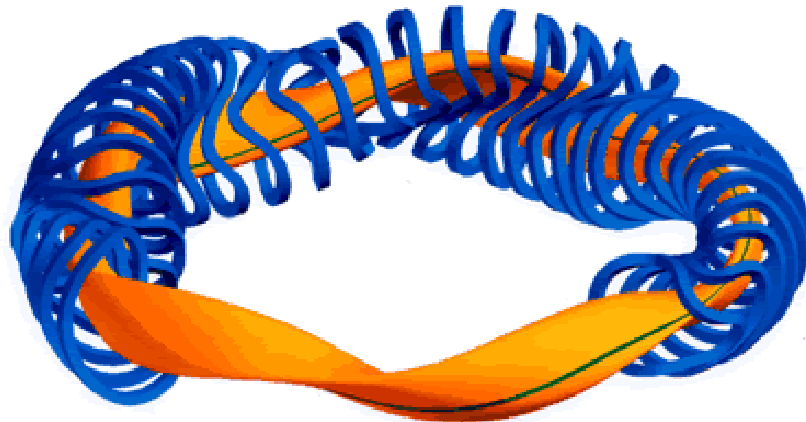
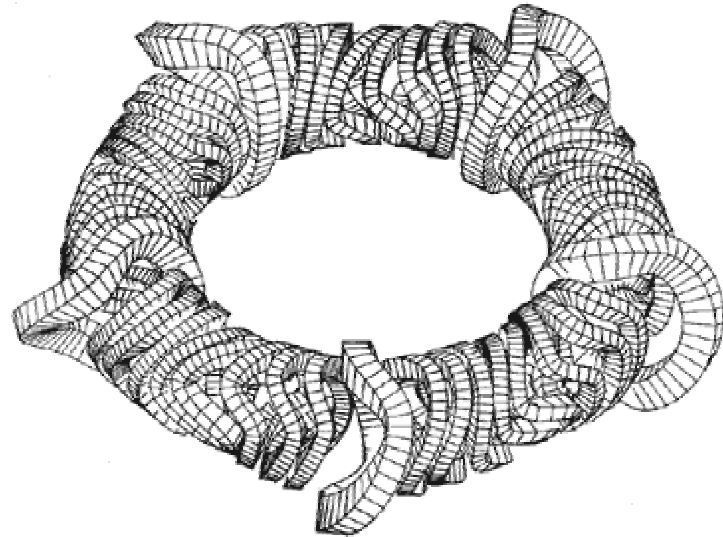
$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\text{Draht}} \frac{\vec{r}_{12} \times d\vec{s}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

Das Wegintegral läuft entlang des gesamten stromführenden Drahtes.

Jedes Drahtstück trägt zum Magnetfeld am Ort $\vec{r}_1$ bei

Mit dem Biot-Savart-Gesetz können auch komplizierte Spulen berechnet werden:
berechnet werden:

Beispiele von Spulen zum Einschluss von Plasma bei der Kernfusion



Max-Planck-Institut für Plasmaphysik

Magnetfeld einer Leiterschleife: (Anwendung des Biot-Savart-Gesetz)

Aus Symmetriegründen hat das B-Feld entlang der z-Achse nur eine z-Komponente

$$\vec{B}(\vec{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\text{Draht}} \frac{\vec{r}_{12} \times d\vec{s}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

$\vec{r}_{12}$ steht senkrecht auf $d\vec{s}$.

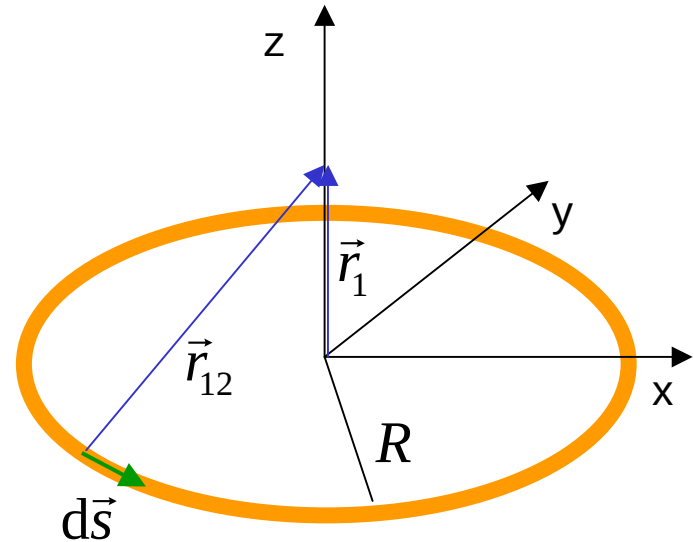
Die z-Komponente des Vektors

$\vec{r}_{12} \times d\vec{s}$ ist gleich $-R ds$

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \int_{\text{Draht}} \frac{R}{|\vec{r}_{12}|^3} ds$$

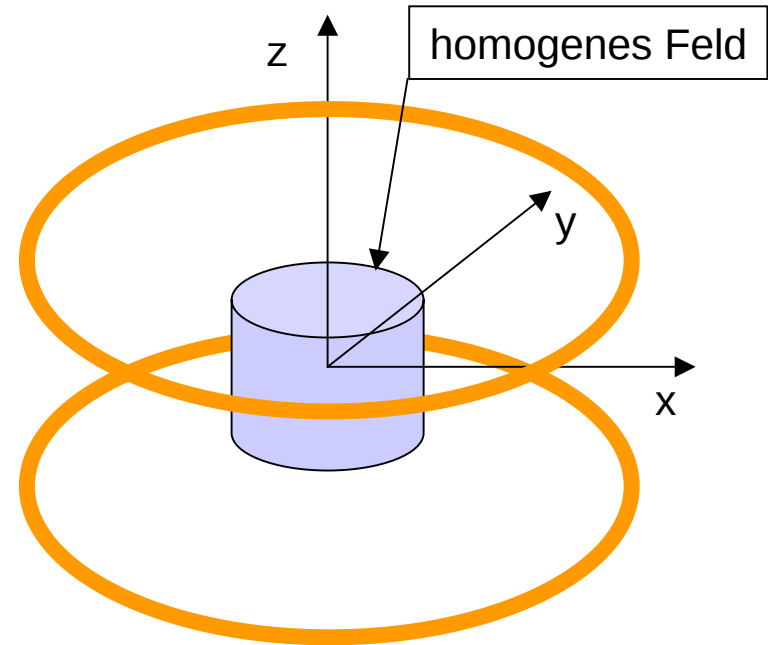
$|\vec{r}_{12}|$ ist immer gleich, also folgt

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{R}{|\vec{r}_{12}|^3} 2\pi R = \frac{\mu_0}{2} I \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$



Helmholtz-Spule:

Mit einer Anordnung aus zwei kreisförmigen Spulen im Abstand von dem halben Durchmesser kann ein sehr homogenes Magnetfeld erzeugt werden.
(Abweichung <1% für $z < 0.3 \cdot R$)



$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0}{2} I \left(\frac{R^2}{\left(R^2 + \left(z + \frac{R}{2}\right)^2\right)^{3/2}} + \frac{R^2}{\left(R^2 + \left(z - \frac{R}{2}\right)^2\right)^{3/2}} \right)$$

Entwicklung in eine Potenzreihe liefert näherungsweise

$$B_z(0,0,z) = \frac{\mu_0 I}{(5R^2/4)^{3/2}} \left(1 - \frac{144}{125} \frac{z^4}{R^4} \right)$$

Kräfte auf bewegte Ladungen

Eine bewegte Ladung erfährt im Magnetfeld eine Kraft, die senkrecht zur Bewegungsrichtung und senkrecht zur Feldstärke des Magnetfeldes gerichtet ist. Die Kraft nennt man Lorentz-Kraft.

Da Kraft und Bewegungsrichtung immer senkrecht aufeinander stehen, wird durch diese Kraft keine Arbeit verrichtet.

Ist gleichzeitig ein elektrisches Feld vorhanden wirkt die Coulomb-Kraft zusätzlich zur Lorentz-Kraft in der bekannten Weise.

Die Lorentz-Kraft ist proportional zur Geschwindigkeit der Ladung v zur Ladungsmenge Q und zur magnetischen Feldstärke B .

Die Richtung der Lorentz-Kraft wird durch das Kreuzprodukt ausgedrückt:

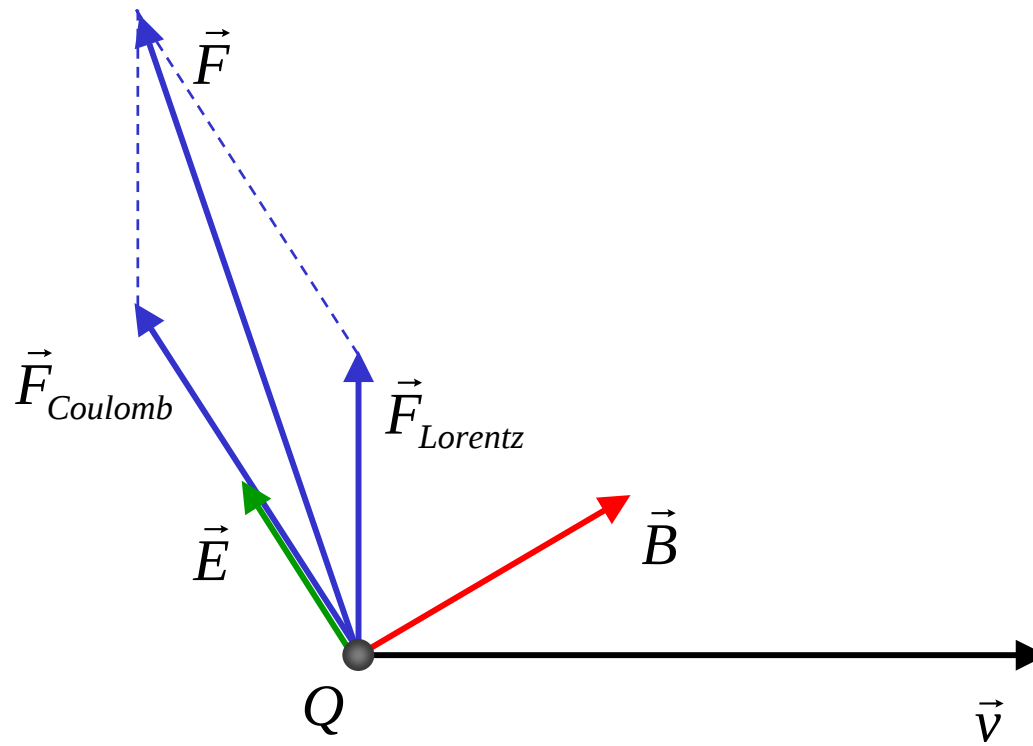
$$\vec{F} = Q (\vec{v} \times \vec{B})$$

Lorentz-Kraft

Ist elektrisches Feld und Magnetfeld gleichzeitig vorhanden, wirkt die Gesamtkraft:

$$\vec{F} = \vec{F}_{Coulomb} + \vec{F}_{Lorentz} = Q \left(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B} \right)$$

Beachte: die Coulomb-Kraft ist nicht von der Geschwindigkeit abhängig.



Einheit der magnetischen Feldstärke B:

Man hätte die Einheit für das Magnetfeld frei wählen können und dann die Lorentz-Kraft mit einer zusätzlichen Naturkonstanten K erhalten:

$$\vec{F} = K Q (\vec{v} \times \vec{B})$$

Man hat aber nicht die Einheit für das Magnetfeld definiert, sondern die Naturkonstante $K = 1$ definiert. Damit erhält man als Einheit für B :

$$[B] = \frac{\text{N}}{\text{C m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{A s m/s}} = \frac{\text{N}}{\text{A m}} = \frac{\text{Nm}}{\text{A m}^2} = \frac{\text{J}}{\text{A m}^2} = \frac{\text{Ws}}{\text{A m}^2} = \frac{\text{VA s}}{\text{A m}^2} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$$

Die Einheit der magnetischen Feldstärke ist das Tesla $\text{T} = \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2}$

Analog war man vorgegangen bei der Einheit der elektrischen Feldstärke

$$[E] = \frac{\text{N}}{\text{C}} = \frac{\text{N m}}{\text{C m}} = \frac{\text{J}}{\text{C m}} = \frac{\text{VA s}}{\text{C m}} = \frac{\text{V C}}{\text{C m}} = \frac{\text{V}}{\text{m}}$$

Energiedichte des Magnetfeldes:

Erinnere: beim elektrischen Feld ist die Energiedichte

$$w = \frac{1}{2} \varepsilon_0 E^2 = \frac{1}{2} E D$$

Ganz ähnlich ergibt sich für das Magnetfeld (siehe auch Seite 163)

$$w = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$$

Vergleich: Energiedichte E-Feld und B-Feld:

Beispiel: Energiedichte eines elektrischen Feldes mit $2 \cdot 10^6$ V/m
(maximales Feld in Luft bevor Blitz entsteht).

$$w = \frac{1}{2} 8.85 \cdot 10^{-12} \frac{(\text{As})^2}{\text{Nm}^2} \left(2 \cdot 10^6 \frac{\text{V}}{\text{m}} \right) = 17.7 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Beispiel: Energiedichte eines Magnetfeldes mit 20 Tesla
(maximales Feld das heute erzeugt werden kann).

$$w = \frac{1}{2} B H = \frac{1}{2} \frac{1}{\mu_0} B^2$$

$$w = \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi 10^{-7}} \frac{\text{Am}}{\text{Vs}} \left(20 \frac{\text{Vs}}{\text{m}^2} \right)^2 = 159\,000\,000 \frac{\text{J}}{\text{m}^3}$$

Die in einem m³ gespeicherte Feldenergie entspricht bei $E = 2 \cdot 10^6 \text{ V/m}$
17,7 J = ein Gramm Wasser um 4 Grad erwärmen
= ein Kilogramm um 1.8 m anheben

Die in einem m³ gespeicherte Feldenergie entspricht bei $B = 20 \text{ T}$
1.6 10⁸ J = 44 kWh
= 500 Liter Wasser zum Kochen bringen
= 2 Tonnen auf den Himalaja tragen

Bewegung einer Ladung im homogenen Magnetfeld:

Als Spezialfall betrachten wir eine Ladung im homogenen Magnetfeld

Eine Ladung im homogenen Magnetfeld bewegt sich auf einer Kreisbahn.

Der Betrag der Geschwindigkeit bleibt konstant, da aus dem Magnetfeld keine Energie übertragen wird.

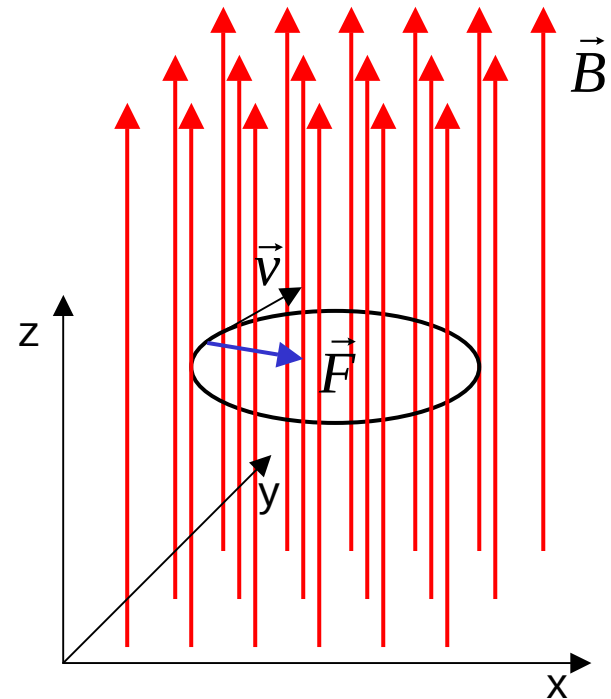
Die Lorentz-Kraft verursacht die Radialbeschleunigung:

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

$$Q v B = m \frac{v^2}{r}$$

$$r = \frac{m v}{Q B}$$

Ist Ladung, Feldstärke und Geschwindigkeit bekannt, kann das Verhältnis Q/m gemessen werden.

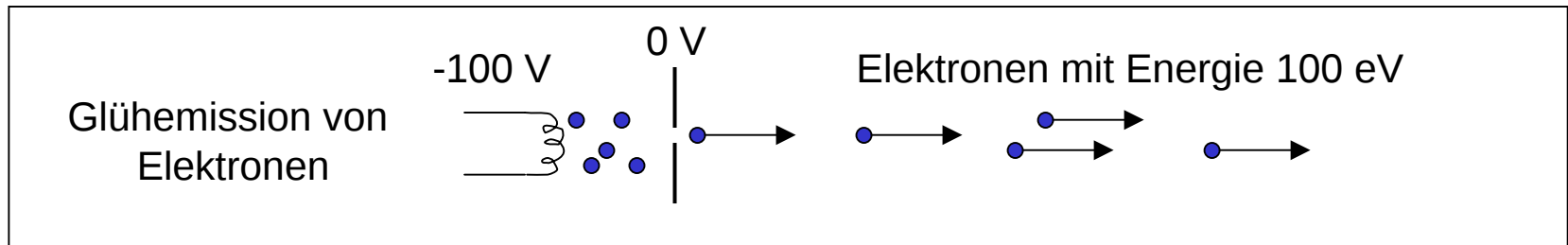


Frei fliegende Elektronen werden erzeugt, indem sie in einem elektr. Feld beschleunigt werden. Nach dem Durchlaufen der Spannung U haben sie die Energie $W = QU$

Ihre Geschwindigkeit ist dann $\frac{1}{2}mv^2 = QU \Rightarrow v = \sqrt{2\frac{Q}{m}U}$

Auch hier geht wieder das Verhältnis Q/m ein.

Aus der Bahnkurve einer Ladung kann immer nur Q/m , nicht aber Q oder m alleine bestimmt werden.

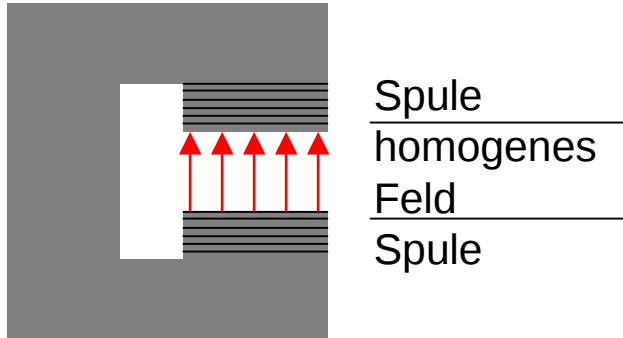


Für das Elektron ergibt sich $e/m = -1.758\,820\,12 \times 10^{11} \text{ C kg}^{-1}$
(bekannt mit einer relativen Genauigkeit von 8.6×10^{-8})

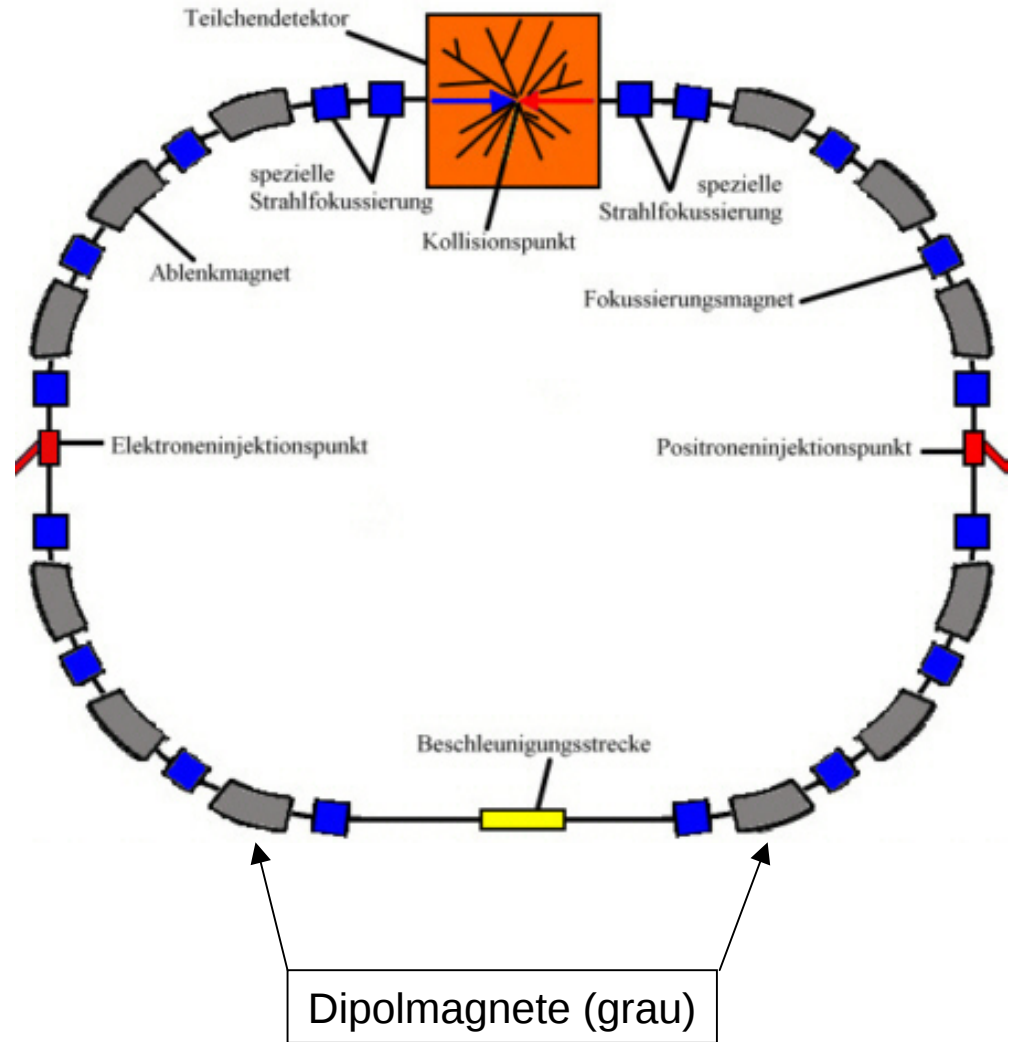
Versuch: e/m nach Busch

Bewegung von Elektronen in Teilchenbeschleunigern:

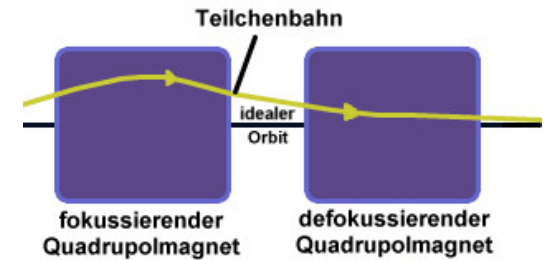
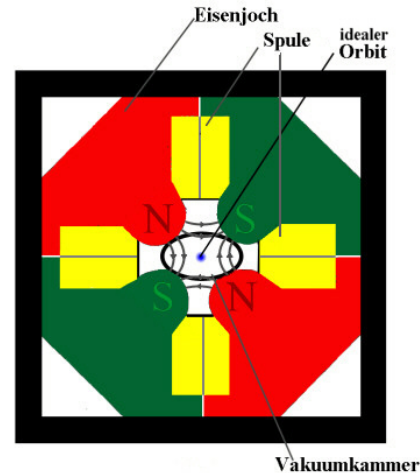
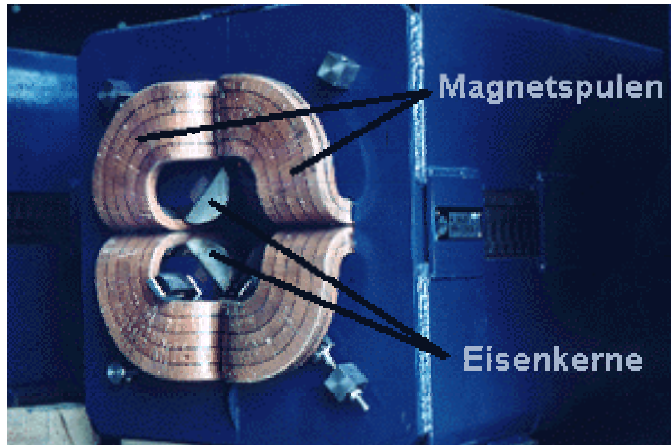
Ablenkung der Elektronen erfolgt
in Dipolmagneten.



Im homogenen Feld werden
die Elektronen durch die
Lorentz-Kraft seitlich abgelenkt.



Zur Fokussierung des Strahls verwendet man die Kombination von zwei Quadrupolmagneten. Ein Quadrupolmagnet fokussiert in einer Richtung und defokussiert in der anderen Richtung.



Elektronen unterschiedlicher Energie laufen auf verschiedenen Bahnen (chromatische Aberration). Dies wird mit Sextupol-Magneten kompensiert.



Kräfte auf stromdurchflossene Leiter:

Auf die bewegten Elektronen in einem stromdurchflossenen Leiter wirkt im Magnetfeld die Lorentz-Kraft.

Obwohl sich die Elektronen im Leiter sehr langsam mit der Driftgeschwindigkeit v_D (einige cm / Minute) bewegen, ergibt sich durch die hohe Anzahl von Elektronen eine starke Kraft (Bsp. Elektromotor).

Die Kraft F auf ein Leiterstück der Länge dL in dem der Strom I fließt ergibt sich zu:

$$\vec{F} = Q (\vec{v} \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = \rho A dL (\vec{v}_D \times \vec{B})$$

$$\Rightarrow \vec{F} = j A (d\vec{L} \times \vec{B})$$

$$\text{mit } \vec{j} = \rho \vec{v}_D$$

und dL in Richtung von v_D folgt

$$\vec{F} = I (d\vec{L} \times \vec{B})$$

Lorentz-Kraft auf ein Leiterstück dL

Experiment:

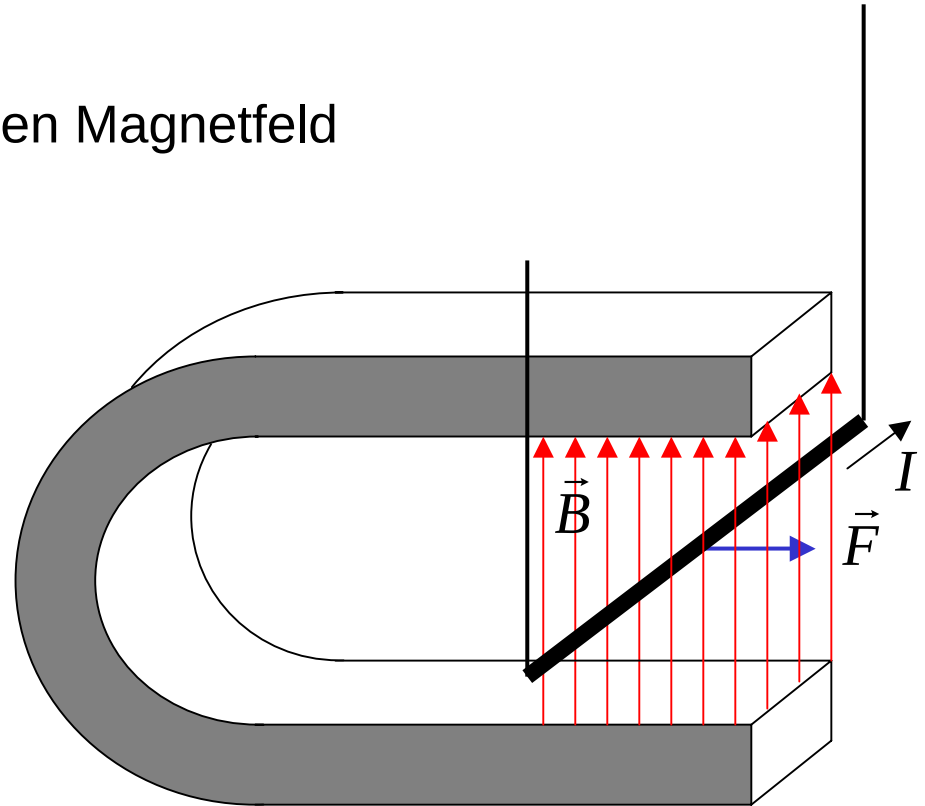
Kraft auf Leiterstück im homogenen Magnetfeld

Die Kraft auf ein Leiterstück von 10 cm Länge, das in einem Magnetfeld von 1T von einem Strom $I = 1\text{A}$ durchflossen wird, beträgt

$$\vec{F} = I \left(d\vec{L} \times \vec{B} \right)$$

$$F = I L B \quad (\text{da alle Vektoren senkrecht aufeinander stehen})$$

$F = 0.1 \text{ Newton.}$



Messung von Magnetfeldern, Halleffekt:

Zur Messung der magnetischen Feldstärke wird meistens der Halleffekt ausgenutzt:

In einem stromdurchflossenen Leiter werden die Elektronen zur einen Seite abgelenkt, bis sich quer zum Leiter ein kompensierendes elektrisches Feld aufgebaut hat.

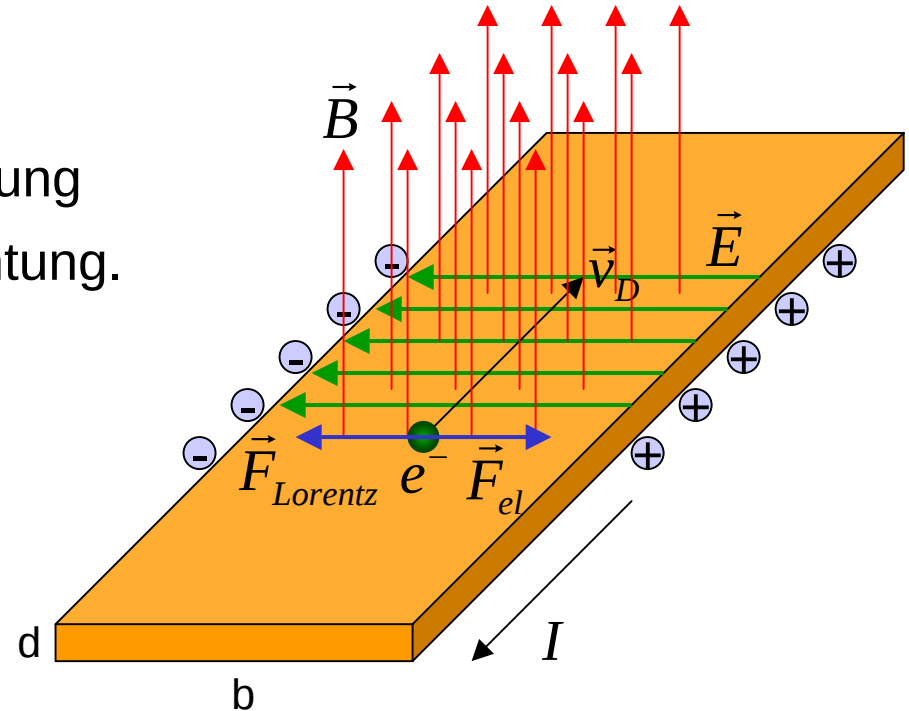
$$Q \vec{E} = -Q (\vec{v} \times \vec{B})$$

Dieses Feld verursacht eine Spannung (Hall-Spannung) quer zur Stromrichtung.

$$U_{Hall} = E b = (\vec{v}_D \times \vec{B}) b$$

Mit $\vec{j} = \rho \vec{v}_D$ folgt

$$U_{Hall} = \frac{j B b}{\rho} = \frac{I B}{\rho d}$$

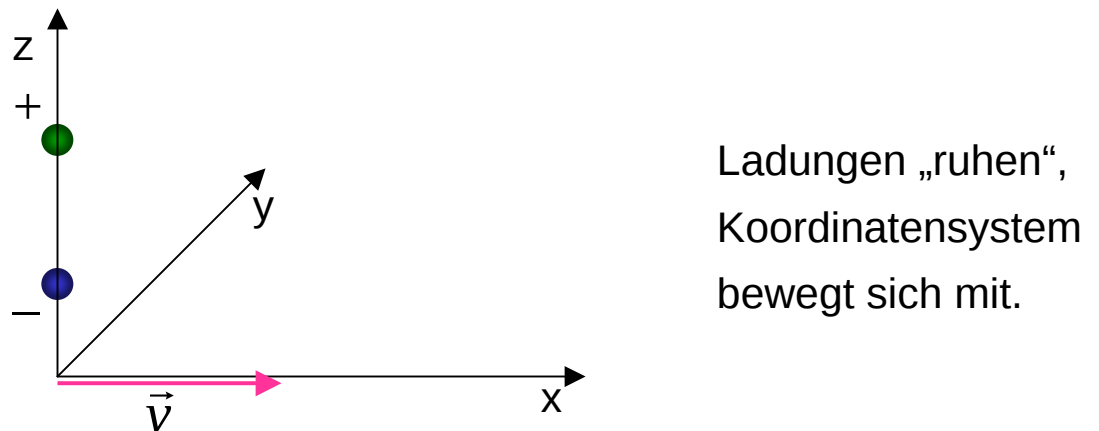
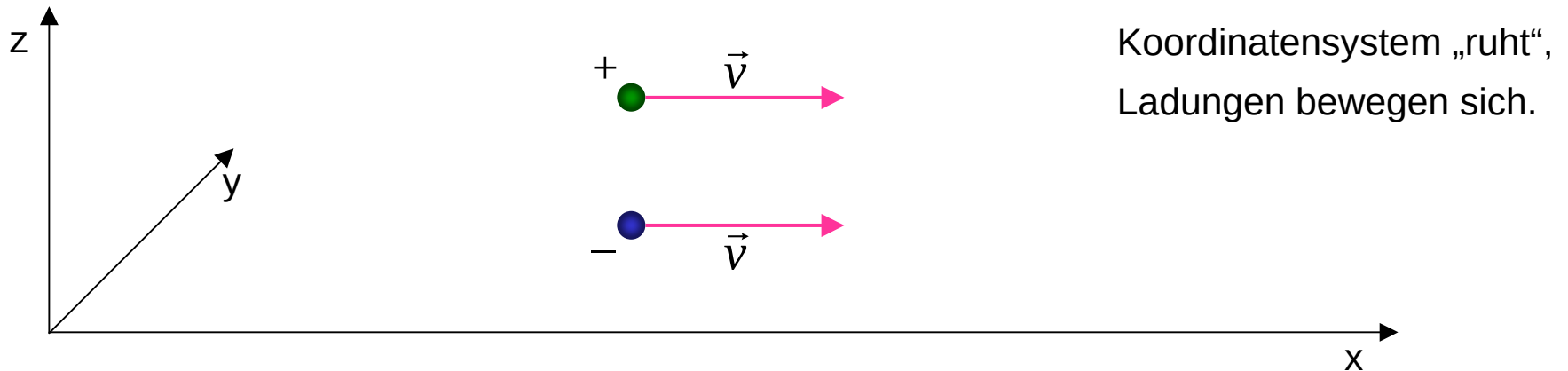


Halbleiter mit sehr geringer Ladungsdichte zeigen hohe Hallspannungen.

Zusammenhang elektrisches und magnetisches Feld:

Physikalische Experimente liefern in jedem Inertialsystem die gleichen Physikalischen Gesetze.

Gedankenexperiment: zwei Teilchen mit Ladung $+Q$, $-Q$ und Masse m



In der *Klassischen Physik* erhält man ein unterschiedliches Ergebnis

Bei ruhenden Ladungen wirkt nur die Coulombkraft und Newtons Aktionsprinzip liefert:

oberes Teilchen (Index 2)

$$m\ddot{z}_2 = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(z_2 - z_1)^2}$$

unteres Teilchen (Index 1)

$$m\ddot{z}_1 = +\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(z_1 - z_2)^2}$$

Bei ruhendem Koordinatensystem erzeugen die bewegten Ladungen zusätzlich ein Magnetfeld

$$\vec{B}(\vec{r}_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} Q \frac{\vec{r}_{12} \times \vec{v}}{|\vec{r}_{12}|^3}$$

Umgeformtes Gesetz von Biot-Savart

$$\Rightarrow B_y(z_2) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q v}{(z_2 - z_1)^2}$$

(andere Ladung analog)

Auf die obere Ladung wirkt die Lorentzkraft im Magnetfeld der unteren Ladung:

$$\vec{F} = Q (\vec{v} \times \vec{B})$$

Es ergibt sich eine Kraft nach oben auf die obere Ladung

$$F_z = Q v B_y = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q^2 v^2}{(z_2 - z_1)^2}$$

Beide Kräfte zusammen ergeben

$$F_z = F_{Coulomb} + F_{Lorentz} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(z_2 - z_1)^2} + \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{Q^2 v^2}{(z_2 - z_1)^2}$$

$$F_z = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(z_2 - z_1)^2} (1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2)$$

$$m\ddot{z} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{(z_2 - z_1)^2} (1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2)$$

Die Beschleunigung der Ladung ist hier um den Faktor $1 - \epsilon_0 \mu_0 v^2$ kleiner

Ferner gibt es den Zusammenhang zwischen ε_0 , μ_0 und der Lichtgeschwindigkeit c (siehe weiter hinten bei elektromagnetischen Wellen).

$$\varepsilon_0 \mu_0 = \frac{1}{c^2}$$

Die Beschleunigung ist also um den Faktor $\left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$ kleiner.

Dieser Faktor erinnert sofort an die relativistische Mechanik!

In der *relativistischen Beschreibung* laufen die Experimente in beiden Inertialsystemen gleich ab.

Beim Übergang von einem in das andere Koordinatensystem muss die relativistische Lorentz-Transformation verwendet werden. Beim Übergang ändern sich Masse, Zeit, Längen, Geschwindigkeiten, Beschleunigungen und die Felder. Alles zusammen ergibt eine konsistente Beschreibung.

Bei der Transformation werden elektrische und magnetische Kräfte ineinander umgewandelt. Man spricht daher von „elektromagnetischen Kräften“.