Interferenz und Beugung

In diesem Kapitel werden die Eigenschaften von elektromagnetischen Wellen behandelt, die aus der Wellennatur des Lichtes resultieren.

Bei der Überlagerung zweier Wellen ergeben sich ortsfeste Intensitätsvariationen, die im Rahmen der geometrischen Optik nicht erklärbar sind
$\rightarrow$ *Interferenz*

Licht erreicht auch Raumbereiche, die im Rahmen der geometrischen Optik abgeschattet sind. Bei starken Änderungen der Amplitude einer Welle quer zur Ausbreitungsrichtung, beginnt die Welle sich auch in dieser Richtung auszubreiten. $\rightarrow$ *Beugung*

Interferenzeffekte sind nur im Bereich der räumlichen und zeitlichen *Kohärenz* einer Welle zu beobachten

Superpositionsprinzip und Intensität

Wegen der Linearität der Maxwellgleichungen gilt für elektromagnetische Wellen das Superpositionsprinzip, d.h die Felder E(x,y,z,t) und B(x,y,z,t) ergeben sich aus der Überlagerung (Summation) von Teilwellen.

Beobachtet wird immer die mittlere Intensität einer Welle an einem Ort.
Die Intensität ist das Quadrat der **gesamten** Feldstärke

$$I \propto E^2 = (E_1+E_2)^2$$

Die Intensität ist **nicht** die Summe der Intensitäten der Teilwellen!

$$I \neq I_1{}^2 + I_2{}^2 = E_1{}^2 + E_2{}^2$$

Die Feldstärke von beiden Teilwellen wechselt mit der Frequenz des Lichtes ihr Vorzeichen. Besitzen beide Teilwellen die selbe Frequenz und über einen längeren Zeitraum eine feste Phasenbeziehung zueinander, dann ist die beobachte mittlere Intensität abhängig von der Phase der Wellen zueinander.

Mittlere Intensität

Die Feldstärke von zwei Teilwellen mit gleich großer Amplitude am Ort (x,y,z) kann man schreiben als:

$$E_1(t) = E_0 \sin(\omega t)$$

$$E_2(t) = E_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_0 \sin(\omega t) + E_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Durch anwenden eines Additionstheorems

$$\sin(\alpha) + \sin(\beta) = 2 \sin(\frac{\alpha + \beta}{2}) \cos(\frac{\alpha - \beta}{2})$$

erhält man

$$E(t) = 2E_0 \cos(-\tfrac{1}{2}\varphi) \sin(\omega t + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

Die Intensität ist

$$I(t) \propto E^2(t) = 4E_0^2\left[\cos(\tfrac{1}{2}\varphi)\right]^2\left[\sin(\omega t + \tfrac{1}{2}\varphi)\right]^2$$

Die zeitlich gemittelte Intensität ist

$$\bar{I} \propto \frac{1}{T}\int_0^T E^2(t)\,\mathrm{d}t = 4E_0^2\left[\cos(\tfrac{1}{2}\varphi)\right]^2 \frac{1}{2}$$

T ergibt sich aus der Zeitauflösung des Auges bzw. des Messgerätes

Die Intensität hängt von der Phase φ der Wellen zueinender ab und ist proportional zu $2E_0^2$ für φ=0 bzw. ist Null für φ=180°

Die gemittelte Intensität der beiden Teilwellen ist proportional zu $\tfrac{1}{2}E_0^2$

Die beobachtete mittlere Intensität liegt also, je nach Phase, zwischen Null und der doppelten Summe der Einzelintensitäten.

Haben die Wellen verschiedene Frequenzen ω_1 und ω_2 , dann erhält man

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = E_0 \sin(\omega_1 t) + E_0 \sin(\omega_2 t + \varphi)$$

$$E(t) = 2E_0 \cos(\tfrac{1}{2}(\omega_1 - \omega_2)t - \tfrac{1}{2}\varphi) \sin(\tfrac{1}{2}(\omega_1 + \omega_2)t + \tfrac{1}{2}\varphi)$$

Es ergibt sich eine Schwebung.

Beide Faktoren sind zeitabhängig und bei einer Mittelung über einen Zeitraum der länger als die Schwebungsfrequenz ist

$$T >> \frac{4\pi}{\omega_1 - \omega_2}$$

erhält man als mittlere Intensität

$$\bar{I} \propto \frac{1}{T}\int_0^T E^2(t)\,\mathrm{d}t = 4E_0^2 \frac{1}{2}\frac{1}{2} = E_0^2$$

die Summe der beiden Teilintensitäten.

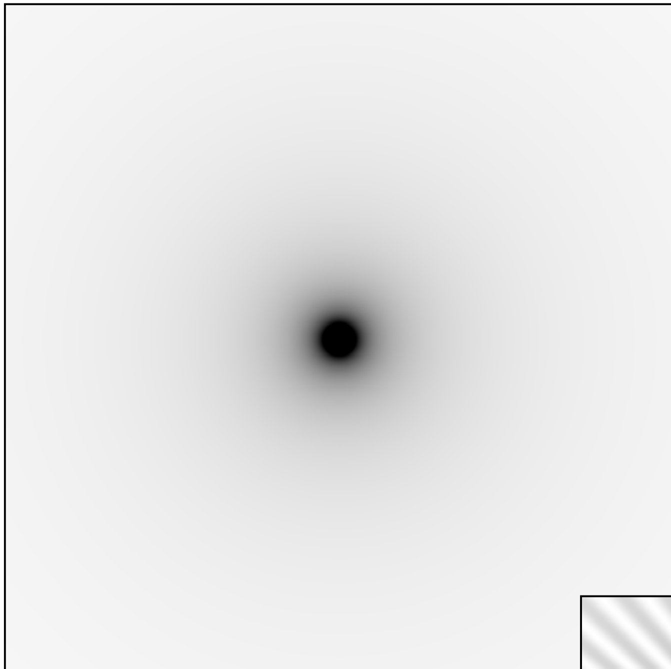
Interferenz und Kohärenz

Interferenz ist die Abweichung der beobachteten mittleren Intensität von der Summe der Teilintensitäten.
Dies beobachtet man nur dann, wenn die Teilwellen die selbe Frequenz haben und über einen längeren Zeitraum eine feste Phasenbeziehung zueinander besitzen (*zeitliche Kohärenz*).

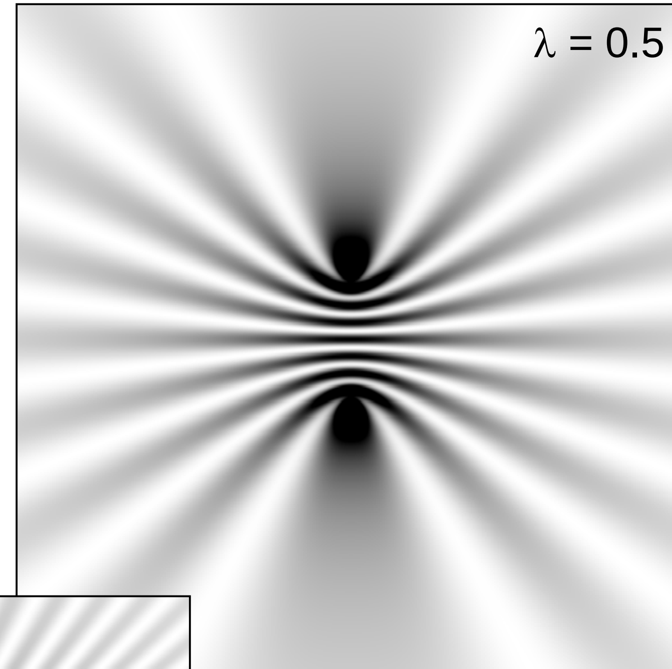
An verschiedenen Raumpunkten haben die beiden Teilwellen eine unterschiedliche Phasenbeziehung zueinander. Daher gibt es an manchen Orten erhöhte Intensität und an anderen Orten abgeschwächte Intensität.
Es ergibt sich ein *Interferenzmuster.*

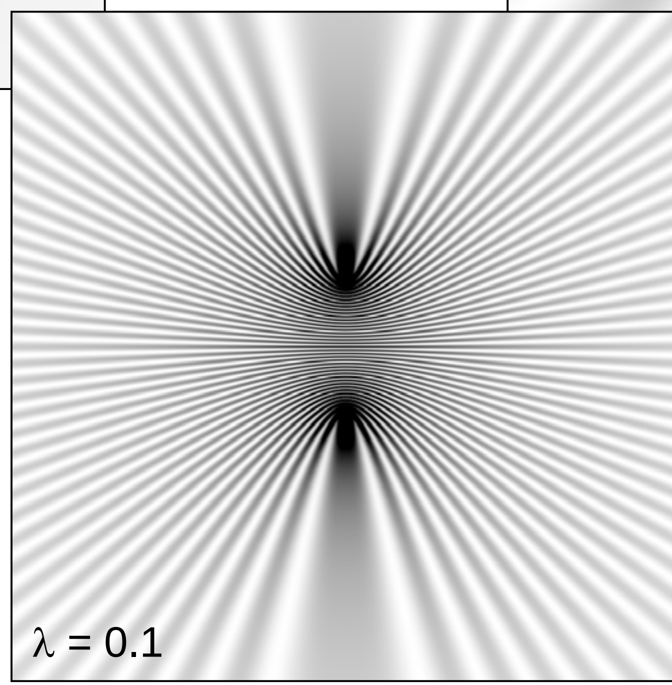
Die Länge über die die Teilwellen eine feste Phasenbeziehung zueinander haben, bezeichnet man als *Kohärenzlänge*.
Innerhalb des s.g. *Kohärenzvolumens* beobachtet man ein Interferenzmuster.

Kohärent abstrahlende punktförmige Sender



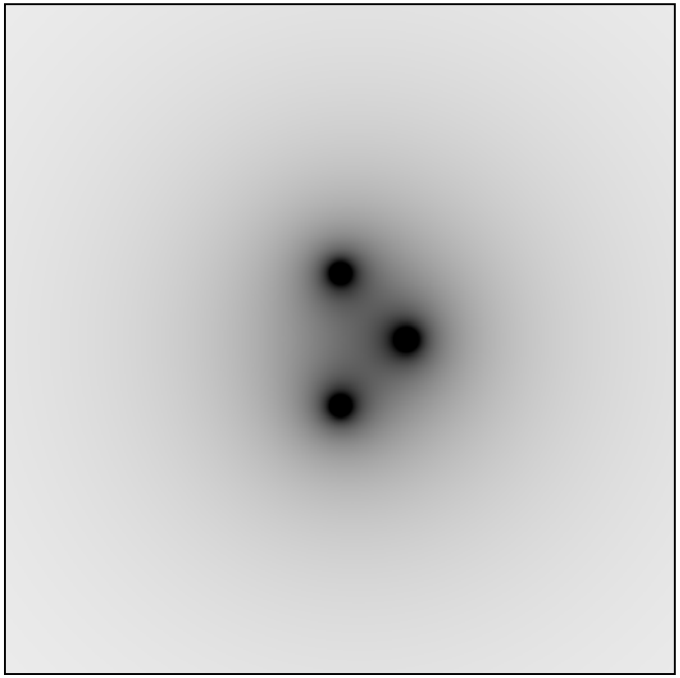
Eine Punktquelle



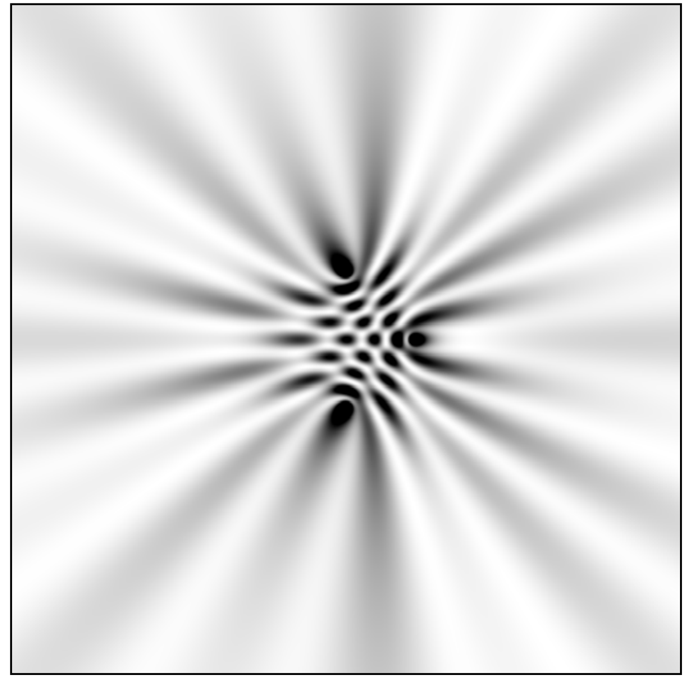


Zwei Punktquellen,
die mit gleicher Phase
abstrahlen
(Abstand d=2)

Darstellung der zeitlich
gemittelten Intensität
als Schwärzung



Drei inkohärent abstrahlende Punktquellen



Drei kohärent abstrahlende Punktquellen

Das Interferenzmuster ist über das ganze Kohärenzvolumen ausgedehnt.

Es ist eine raumfeste Intensitätsverteilung.

Kohärenz von Lichtquellen

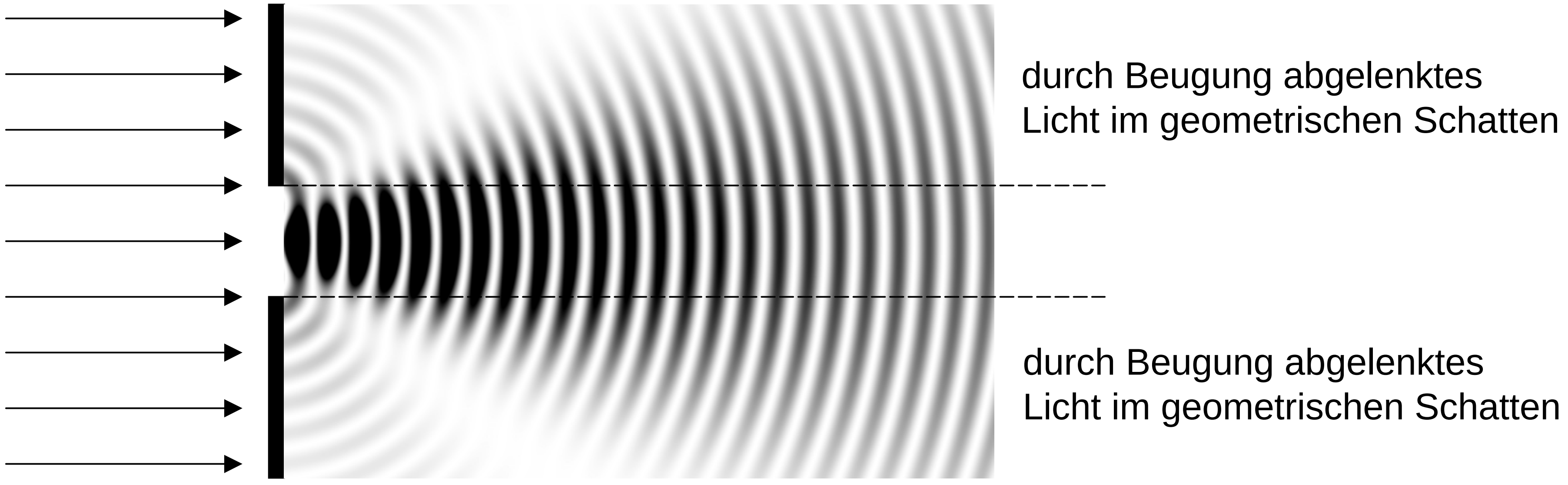
Licht wird von Atomen und Molekülen ausgesendet, wenn diese einen Übergang vom angeregten Zustand in den Grundzustand machen.

Die Übergänge der einzelnen Atome sind unkorreliert, d.h. sie haben unterschiedliche Phase zueinander. Der einzelne Übergänge dauert ca. 10^{-9} sec. Während dieser Zeit strahlt das Atom eine kohärente Welle ab. Die Kohärenzlänge beträgt daher nur $L = c\,\Delta t \approx 0.3$ m.

In Lasern werden alle angeregten Atome durch die Lichtwelle stimuliert, ihre Lichtwelle in Phase mit der vorhandenen Lichtwelle abzustrahlen. (LASER = Licht Amplification by Stimulated Emission of Radiation). Dadurch ergeben sich extrem große Kohärenzzeiten und Kohärenzlängen von vielen Kilometern. Laser emittieren nur eine Frequenz (Farbe) und erfüllen damit das zweite Kriterium für Interferenzerscheinungen.
Laser sind kohärente Lichtquellen.

Beugung

Wird ein Teil einer Welle von einer Blende absorbiert, dann entsteht eine starke Änderung der Amplitude quer zur Welle.
Entsprechen den Maxwellgleichungen und der Wellengleichung bewirkt diese Änderung der Amplitude eine Ausbreitung der Welle in Richtung der Änderung.



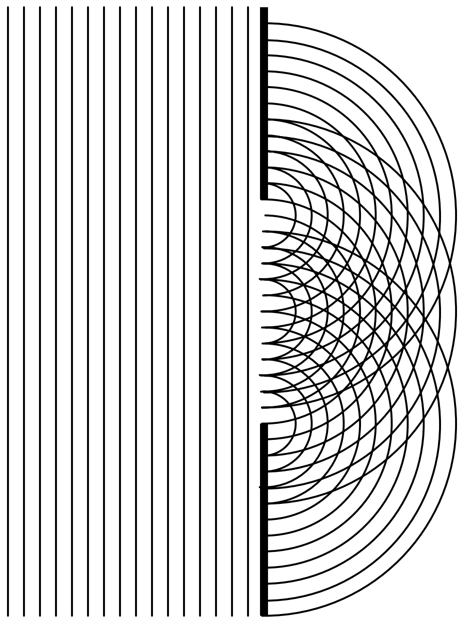
Huygensches Prinzip

Methode zur Konstruktion der Welle hinter dem Spalt:

In jedem Punkt des Spaltes wird eine Kugelwelle erzeugt.

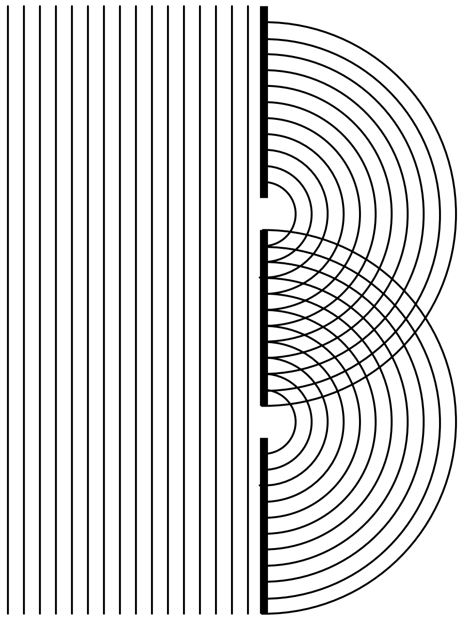
Die Abstrahlung des Raumpunktes geschieht analog zur Abstrahlung vom Dipol, da an jedem Raumpunkt die Felder oszillieren.
Die Phase der Kugelwelle entspricht der Phase der ankommenden Welle

Die Welle hinter dem Spalt ist die Überlagerung (Interferenz) aller Kugelwellen



Interferenz durch Beugung

Die an einem oder mehreren Spalten entstehende Kugelwellen stehen in fester Phasenbeziehung zueinander, wenn die ankommende Welle kohärent ist. Dadurch entsteht ein Interferenzmuster hinter einer Anordnung aus Spalten.

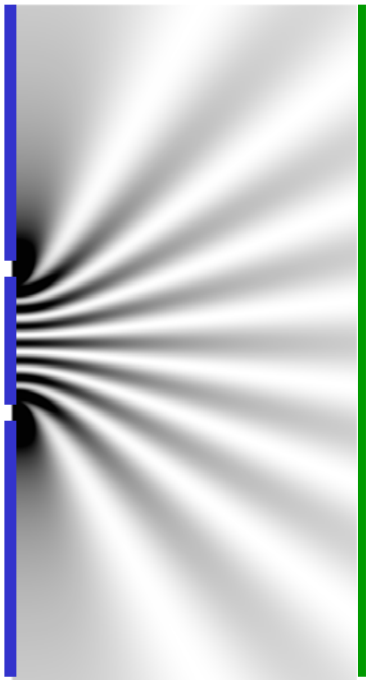


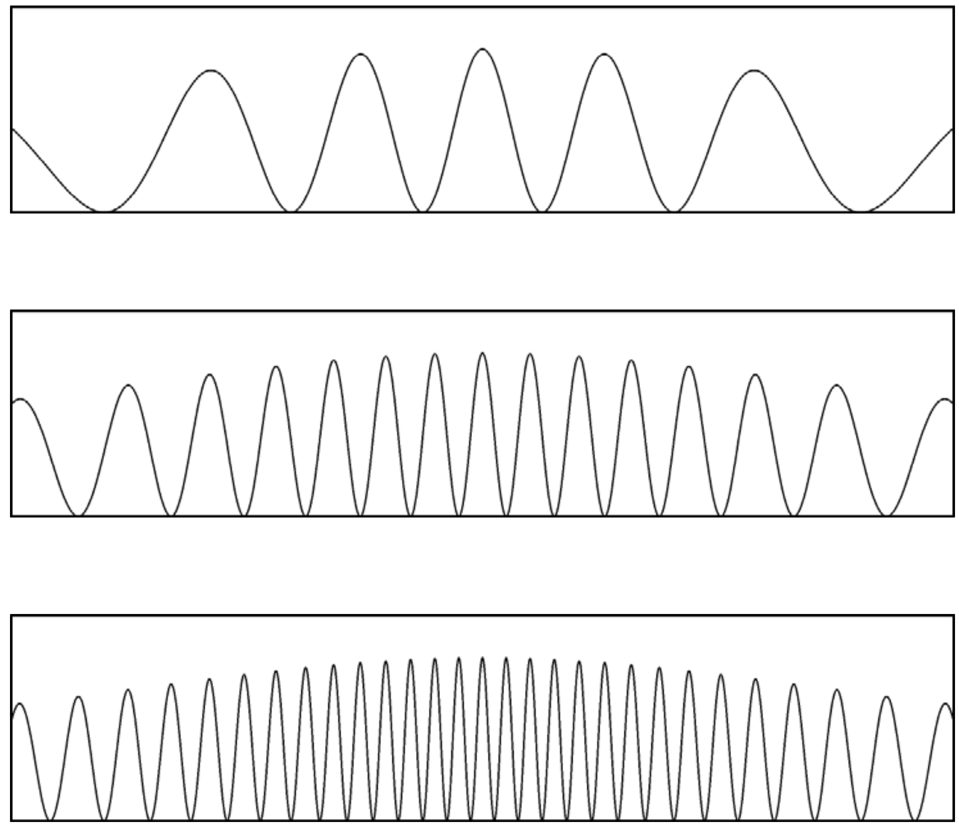
Die Spalte wirken wie zwei kohärente punktförmige Lichtquellen mit fester Phasenbeziehung zueinander.

In bestimmten Richtungen ist verstärkte Intensität (*konstruktive Interferenz*) bzw. abgeschwächte Intensität (*destruktive Interferenz*) zu beobachten.

Doppelspalt

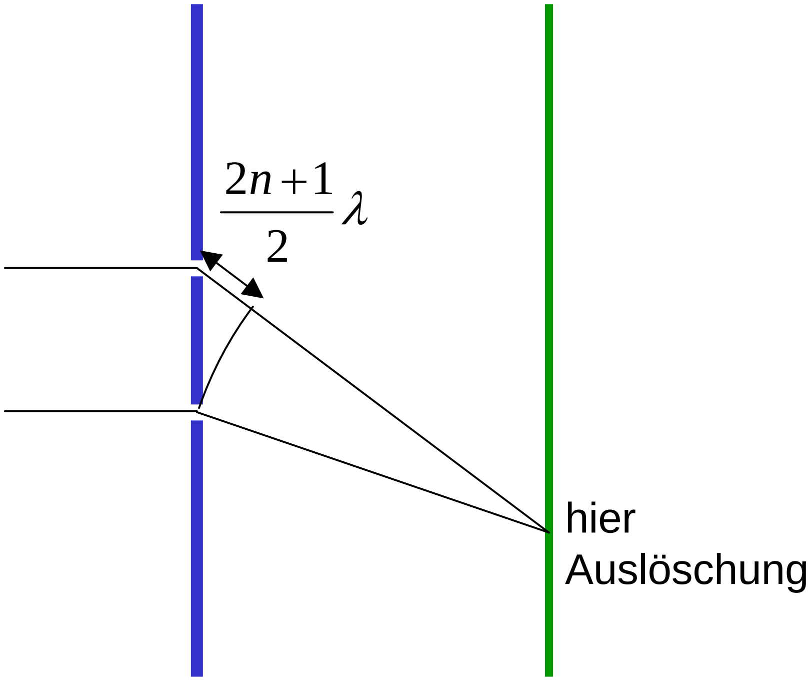
Zwei sehr schmale Spalte erzeugen ein Beugungsbild analog zu dem von zwei kohärenten Punktquellen:





Intensitätsverteilung auf dem Schirm als Funktion des Ortes

Minima in der Intensität werden dort beobachtet, wo destruktive Interferenz Auftritt.



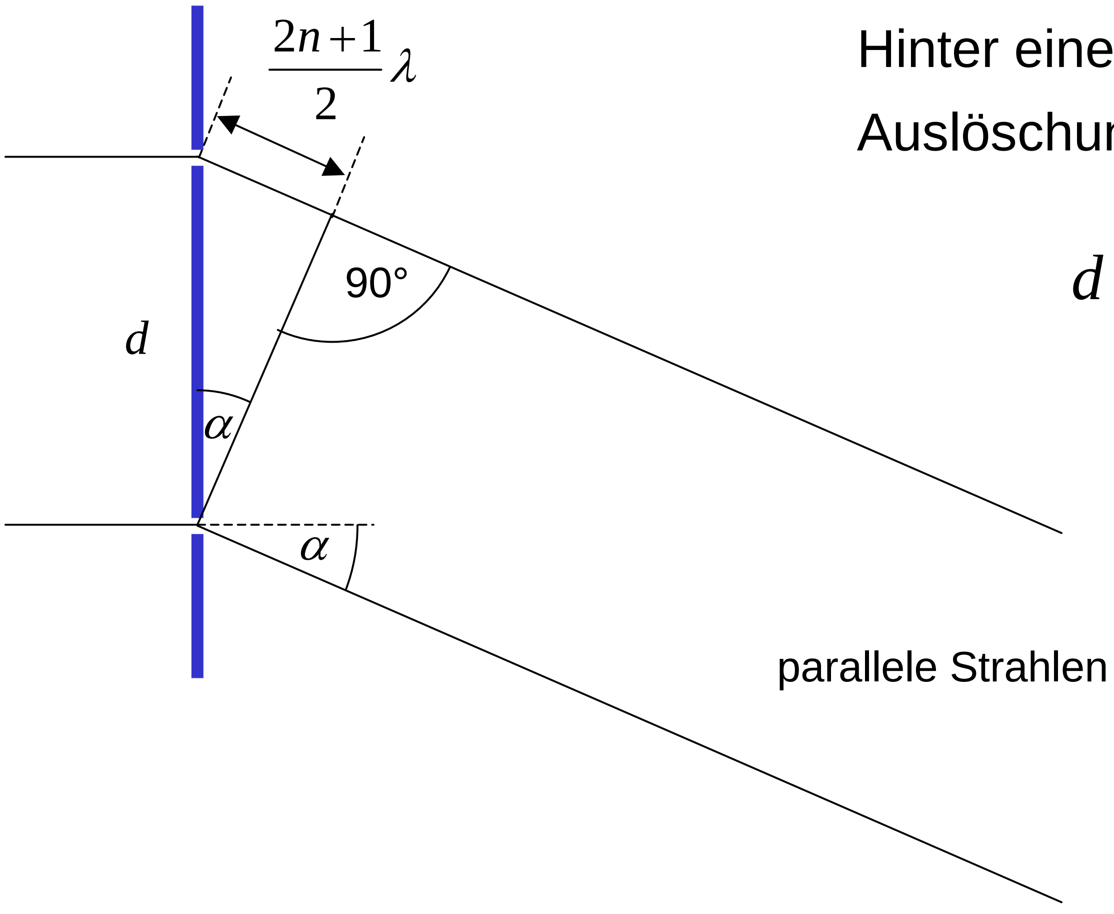
Wenn beide Strahlen einen Gangunterschied von $\lambda/2$ haben, tritt Auslöschung ein.

Erhöht sich der Gangunterschied um ganze Wellenlängen tritt auch Auslöschung ein:

$$\text{Gangunterschied} = \frac{2n+1}{2}\lambda$$

Normalerweise betrachtet man einen Schirm der sehr weit vom Doppelspalt entfernt ist (Entfernung sehr groß gegen Abstand der Spalte)

Bei einem Schirm im Unendlichen verlaufen die interferierenden Strahlen parallel zueinander $\rightarrow$*Frauenhofer-Beugung*



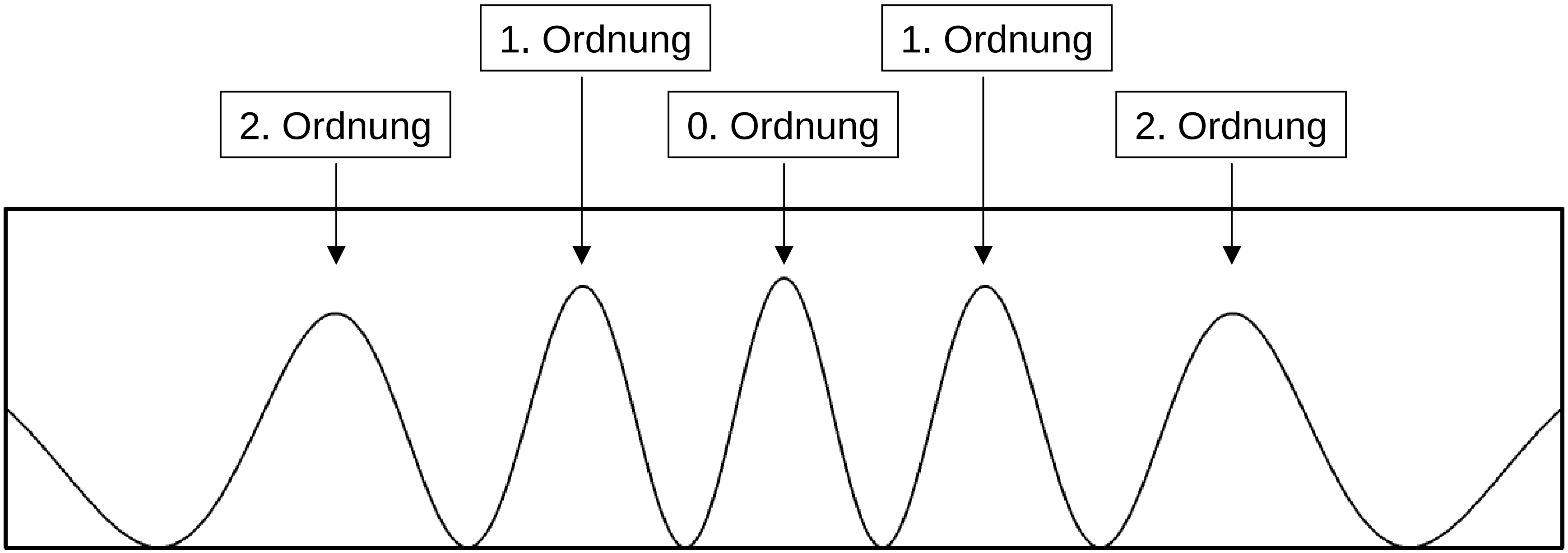
Hinter einem Doppelspalt wird Auslöschung beobachtet, wenn

$$d \sin\alpha = \frac{2n+1}{2}\lambda$$

Beugungsordnung

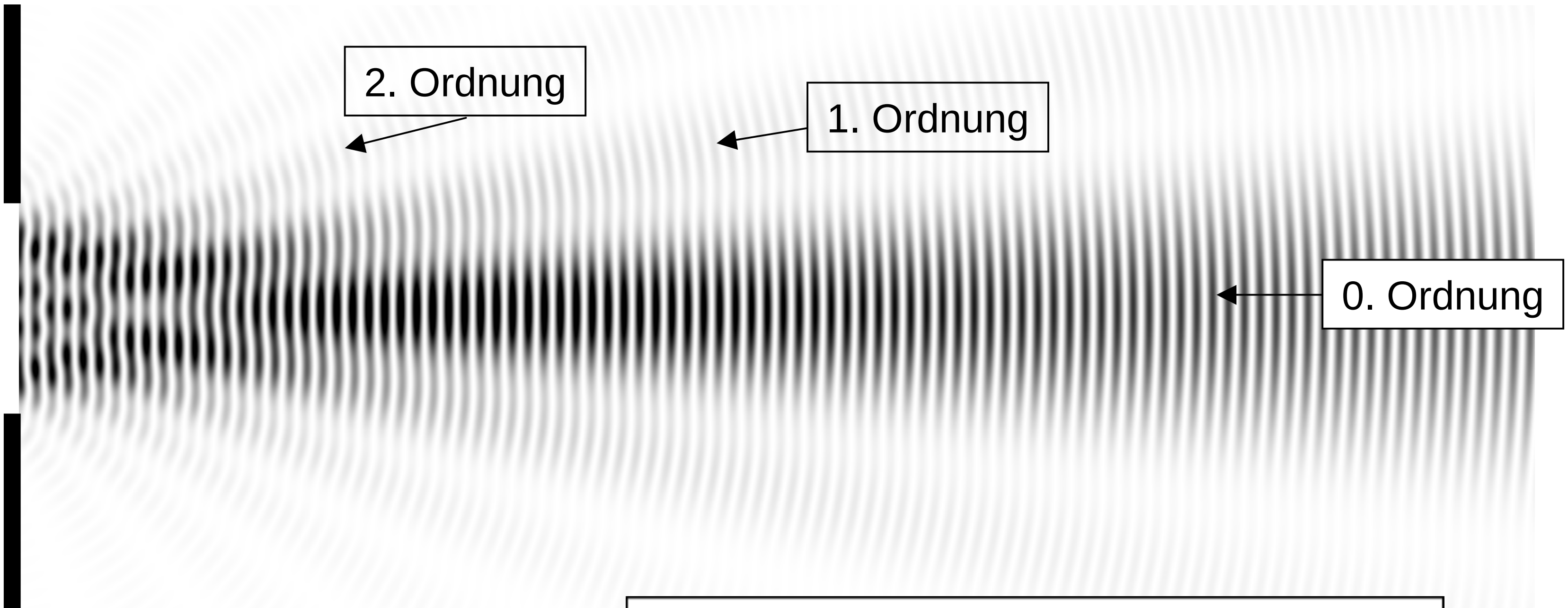
Das zentrale Maximum nennt man *Maximum 0. Ordnung.*

Die weiteren Maxima werden durchnummeriert:

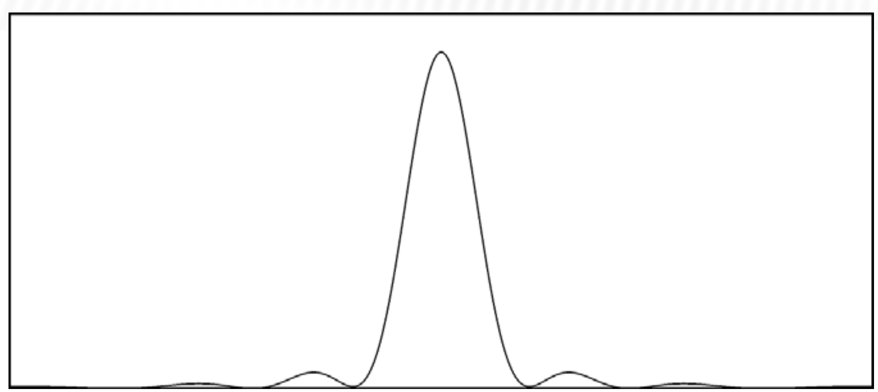


Einzelspalt

Innerhalb des Einzelspaltes werden nach dem Huygenschen Prinzip an jedem Raumpunkt Kugelwellen erzeugt, die miteinander interferieren.

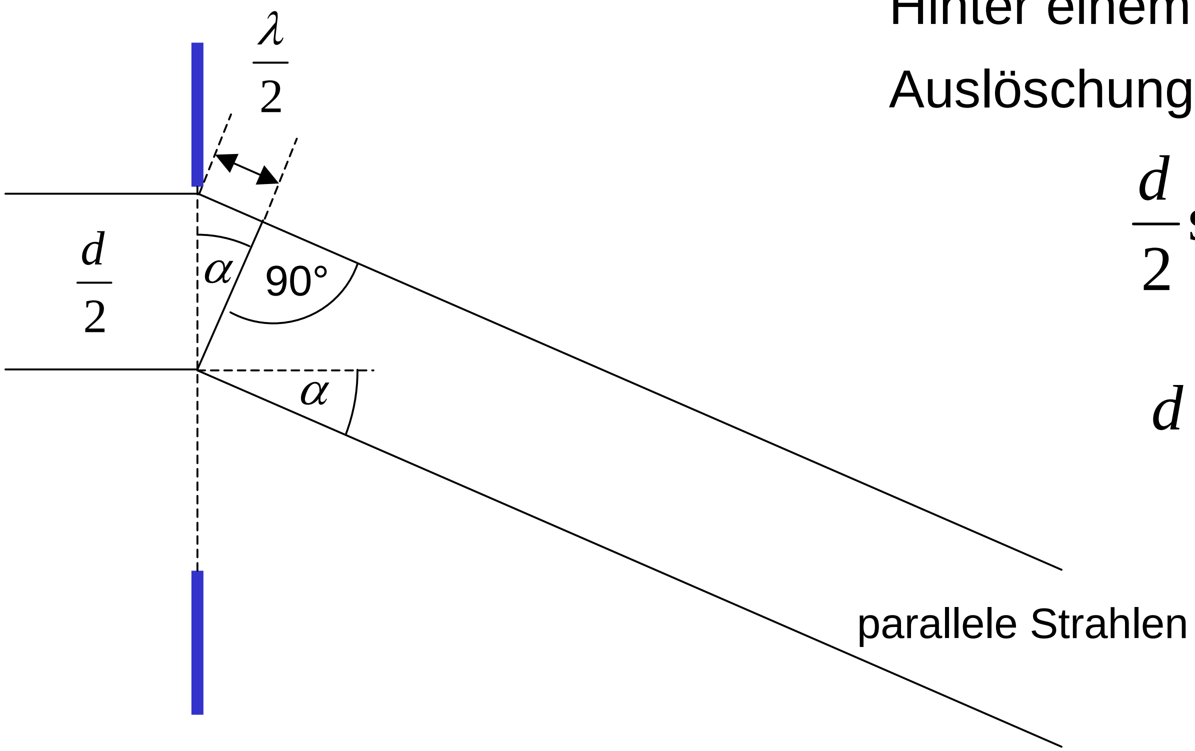


Intensität auf einem Schirm



Beachte beim Einzelspalt: Für die Konstruktion der Maxima und Minima dürfen nicht nur die Randstrahlen betrachtet werden!

Beim Einzelspalt findet man Paare von Strahlen, die sich jeweils gegenseitig auslöschen.

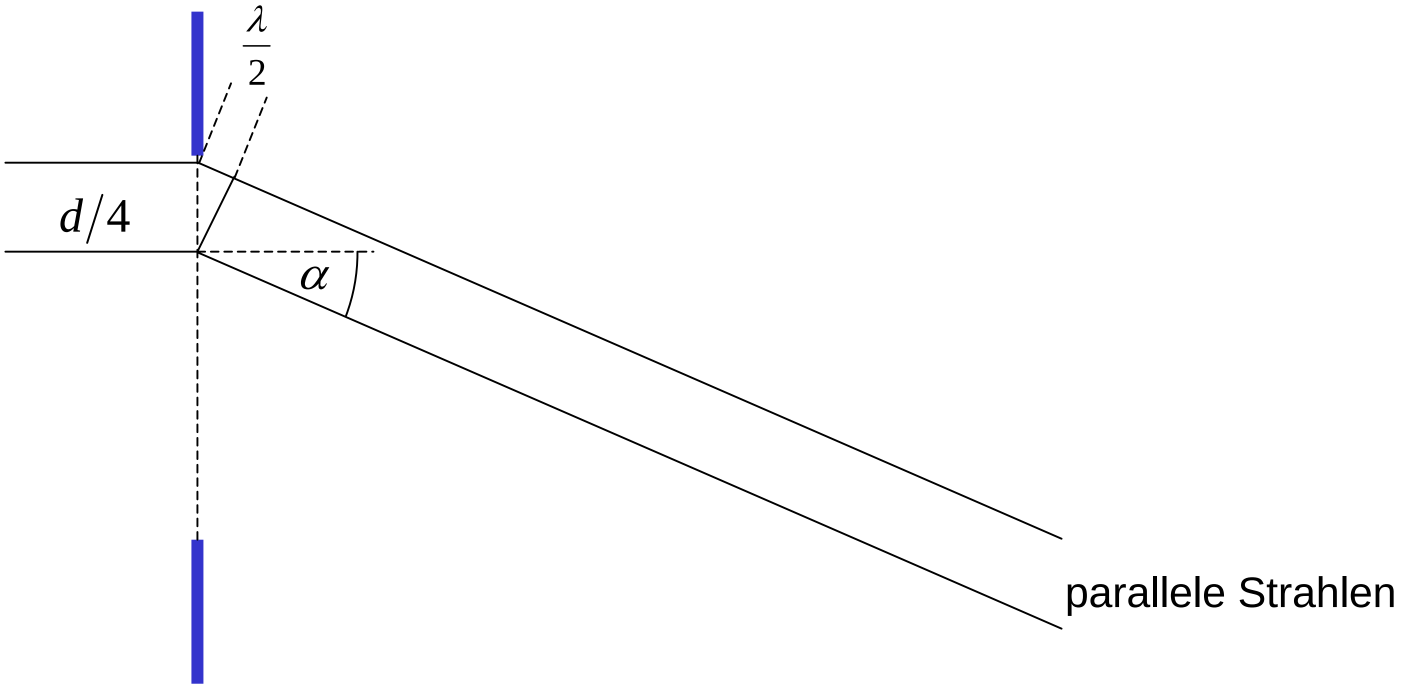


Hinter einem Einzelspalt wird Auslöschung beobachtet, wenn

$$\frac{d}{2}\sin\alpha = \frac{\lambda}{2}$$

$$d\sin\alpha = \lambda$$

Weitere Minima findet man, wenn man den Spalt in eine geradzahlige Anzahl von Abschnitten aufteilt.

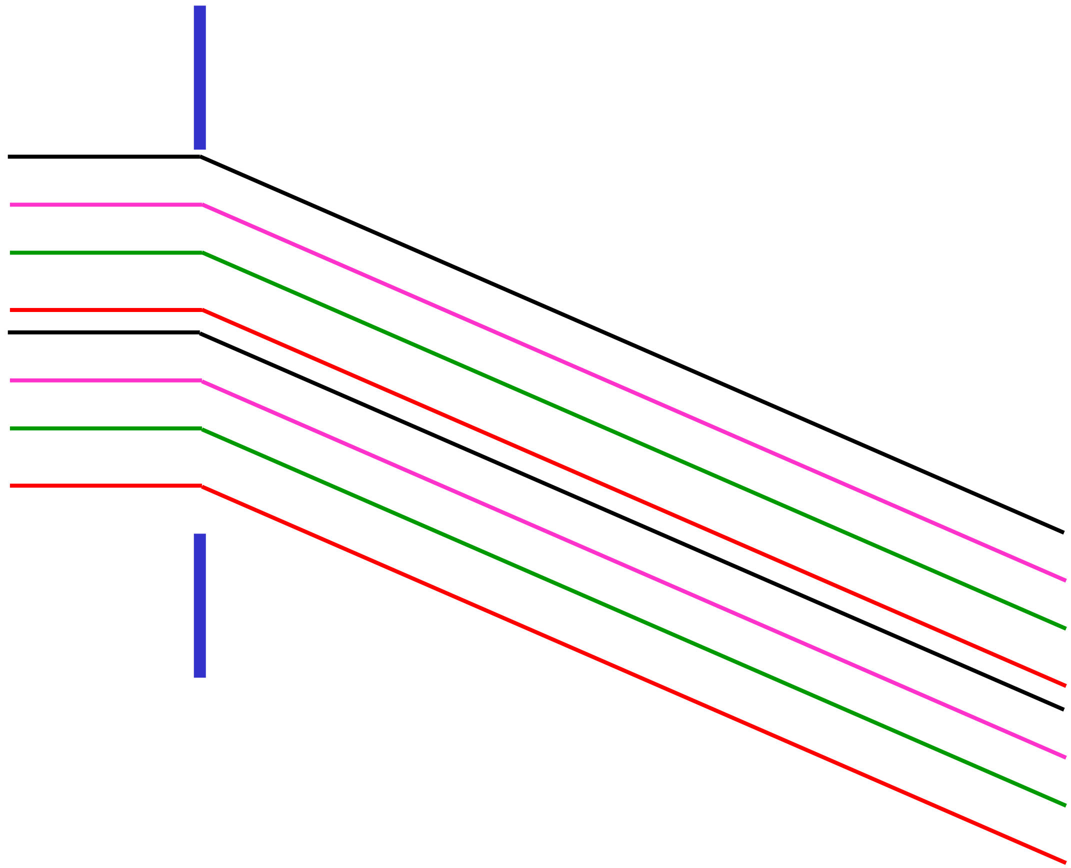


Damit ergibt sich für die Lage der Minima:

$$\frac{d}{2n}\sin\alpha = \frac{\lambda}{2}$$

$$d\sin\alpha = n\lambda \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

Darstellung der Paare von Strahlen, die sie jeweils gegenseitig auslöschen:



Die Strahlenpaare haben alle den gleich Gangunterschied.

Die Intensität als Funktion vom Winkel ist:

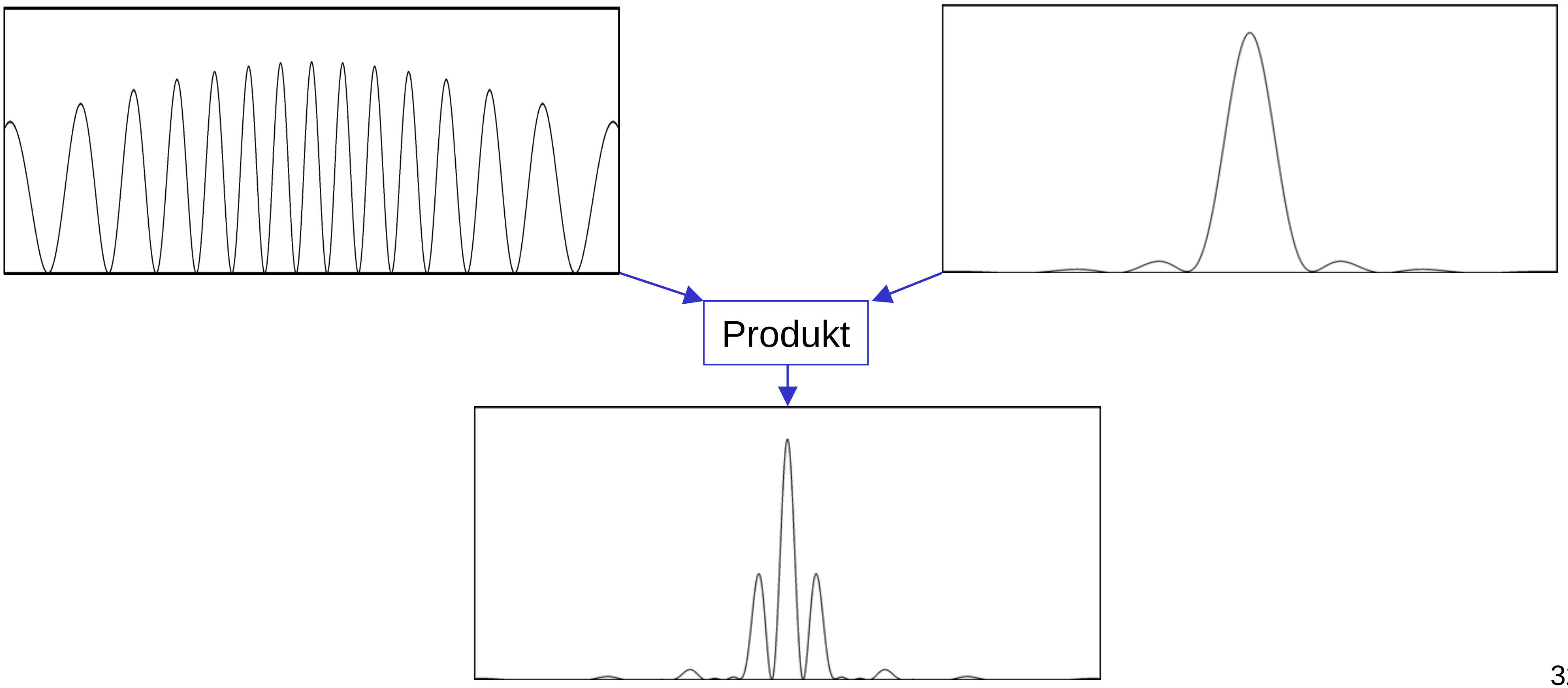
(hier ohne Herleitung)

$$I(\alpha) = I_0 \frac{\sin^2\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\alpha\right)}{\left(\pi \frac{d}{\lambda} \sin\alpha\right)^2}$$

Doppelspalt mit zwei gleichen endlich großen Spalten

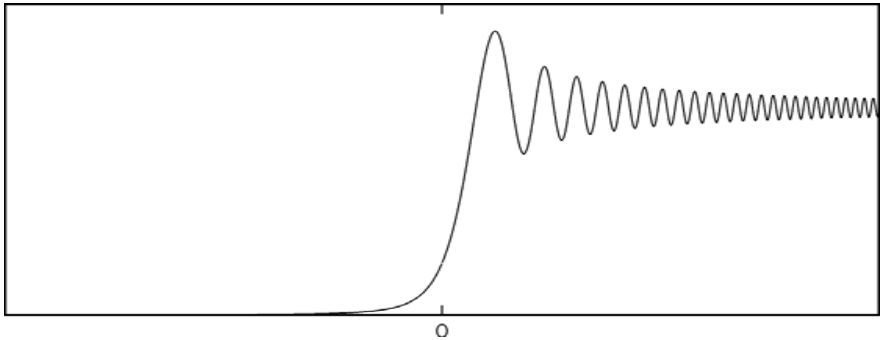
Hinter jedem einzelnen Spalt gibt es Richtungen in die kein Licht fällt.
In diesen Richtungen fällt auch kein Licht hinter dem Doppelspalt.

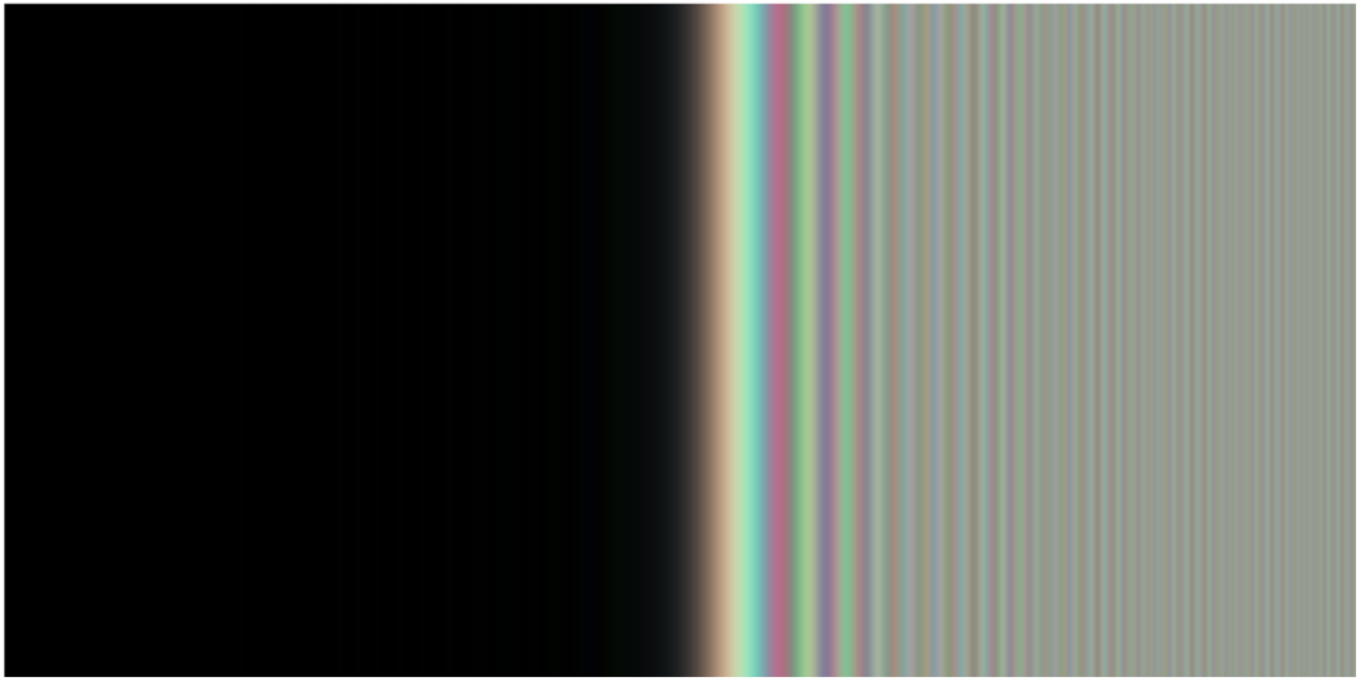
Man kann zeigen, dass das Interferenzbild hinter dem Doppelspalt das Produkt aus der Intensitätsverteilung des Einzelspaltes und der Intensitätsverteilung des Doppelspaltes mit dünnen Spalten ist.



Beugung hinter einer Kante

Die Intensitätsverteilung durch Beugung hinter einer Kante zeigt „Schwankungen in der Helligkeit auf der hellen Seite“



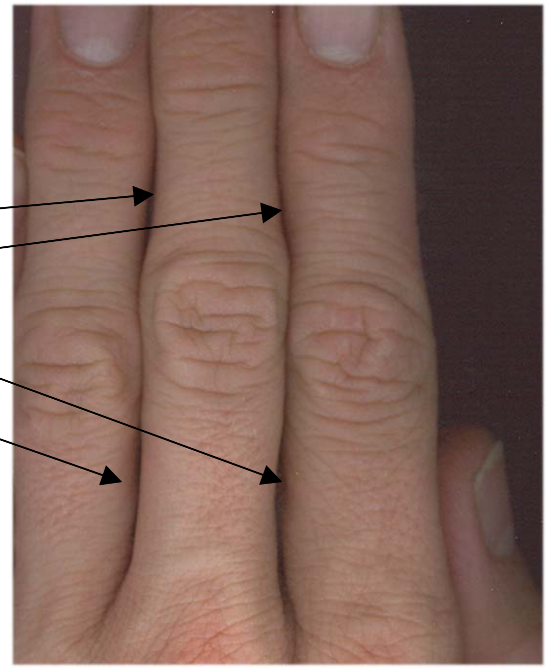


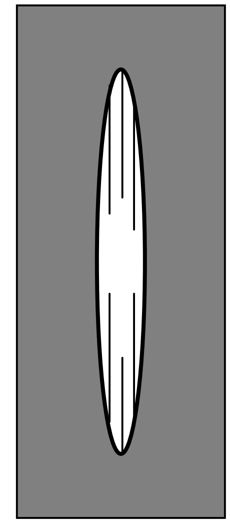
Beugungsexperimente mit den eigenen Fingern

Man halte die Hand dicht vor die Augen und fokussiere die Augen auf unendlich.

In den Zwischenräumen der Finger sieht man senkrechte Linien.

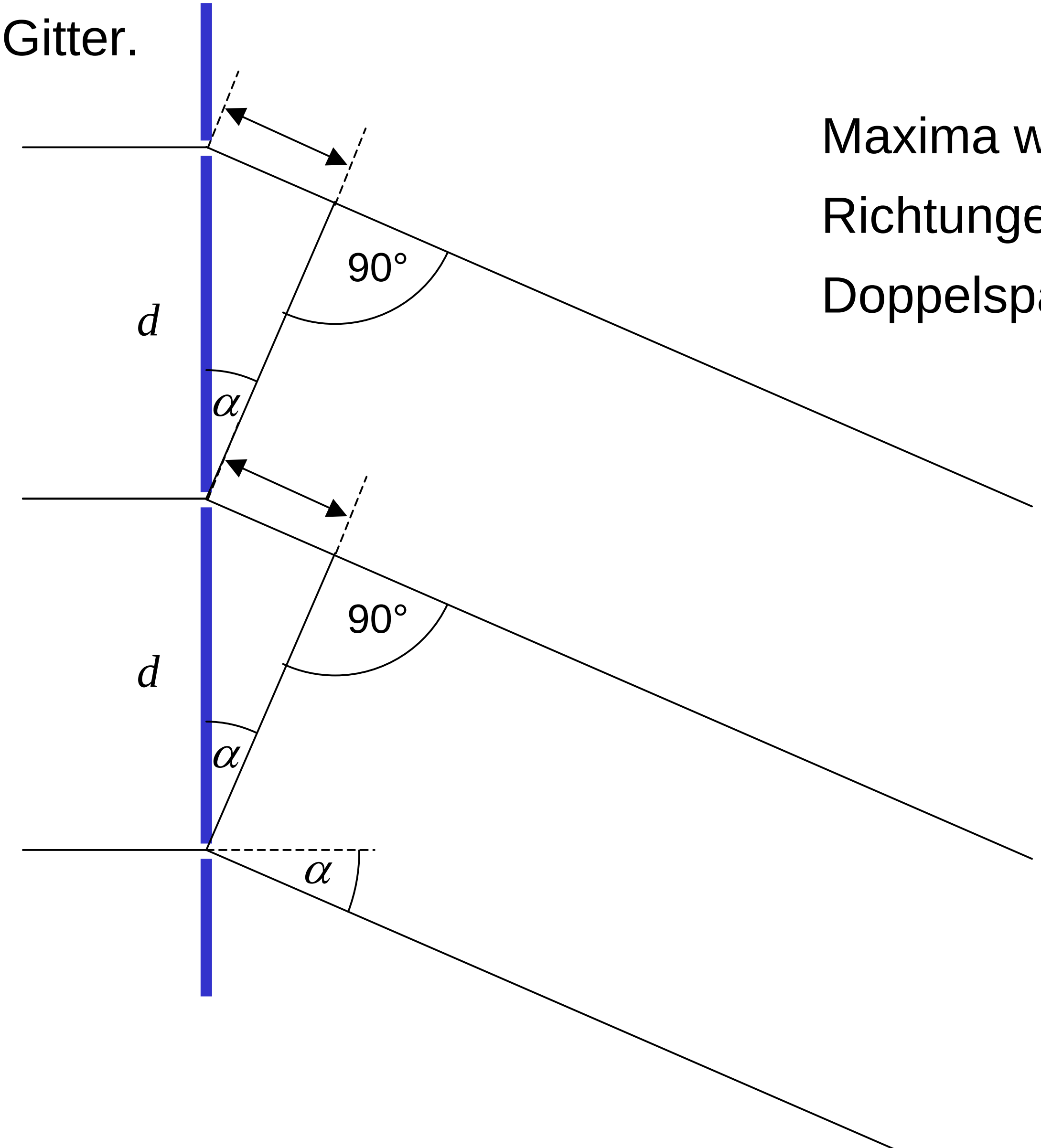
→ Beugungsminima (Beugung am Spalt)





<u>Beugungsgitter</u>

Eine Anordnung aus vielen gleichen Spalten in regelmäßigem Abstand nennt man Gitter.



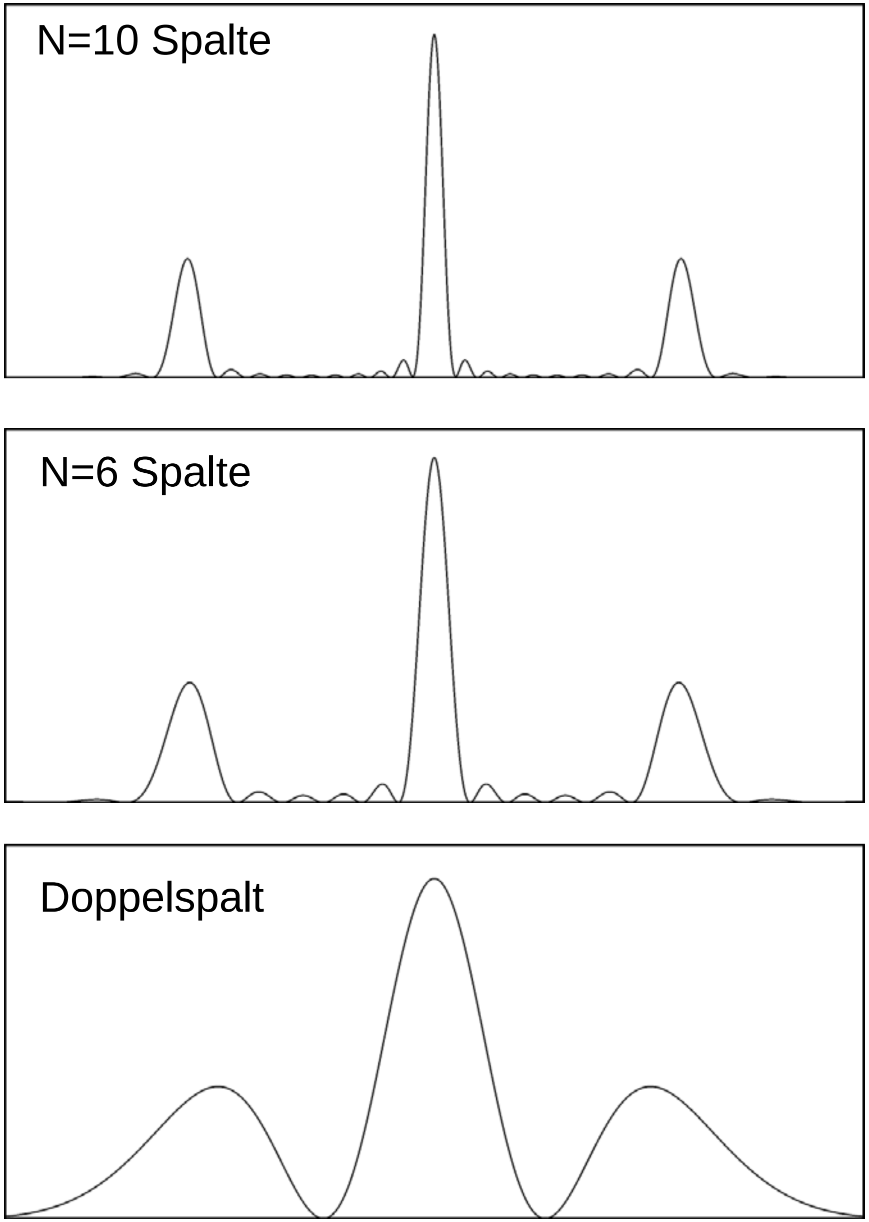
Maxima werden in den gleichen Richtungen beobachtet wie beim Doppelspalt.

Die Maxima sind beim Gitter viel schärfer als beim Doppelspalt:

Bei N Gitterlinien ist die Breite der Maxima ist proportional zu 1/N

Zwischen den Maxima gibt es N-2 Nebenmaxima.

Die Intensität der Nebenmaxima ist proportional zu $1/N^2$



Intensitätsverteilung hinter Gitter mit 11 Spalten

Fresnel-Kirchhoffsches Beugungsintegrel:

Die Intensitätsverteilung auf einem Schirm hinter Blenden beliebiger Form kann mit dem Huygenschen Prinzip berechnet werden.

Jedes Flächenelement dσ der Öffnung strahlt mit Amplitude E_0 und Phase φ der einfallenden Welle eine Kugelwellen ab.

$$E(r) = \frac{E_0(x_b, y_b, z_b)}{r} \sin(\omega t - kr + \varphi(x_b, y_b, z_b))$$

An einem Punkt auf dem Schirm wird die Summe aller Amplituden der einfallenden Kugelwellen als Intensität beobachtet.

$$E(x_s, y_s, z_s) = \iint \frac{E_0(x_b, y_b, z_b)}{r} \sin(\omega t - kr + \varphi(x_b, y_b, z_b))\, \mathrm{d}\sigma$$

mit $\quad r = \sqrt{\left(x_s - x_b\right)^2 + \left(y_s - y_b\right)^2 + \left(z_s - z_b\right)^2}$

Die zeitlich gemittelte Intensität kann am einfachsten berechnet werden, indem man zwei um 90° phasenverschobene Wellen ohne Zeitabhängigkeit berechnet:

$$E_1(x_s, y_s, z_s) = \iint \frac{E_0(x_b, y_b, z_b)}{r} \sin(-kr + \varphi(x_b, y_b, z_b))\, \mathrm{d}\sigma$$

$$E_2(x_s, y_s, z_s) = \iint \frac{E_0(x_b, y_b, z_b)}{r} \cos(-kr + \varphi(x_b, y_b, z_b))\, \mathrm{d}\sigma$$

Die mittlere Intensität ist dann:

$$\bar{I} = E_1^2 + E_2^2$$

Das selbe Ergebnis erhält man, wenn man komplex rechnet

$$E(x_s, y_s, z_s) = \iint \frac{E_0(x_b, y_b, z_b)}{r} e^{i(\omega t - kr + \varphi(x_b, y_b, z_b))}\, \mathrm{d}\sigma$$

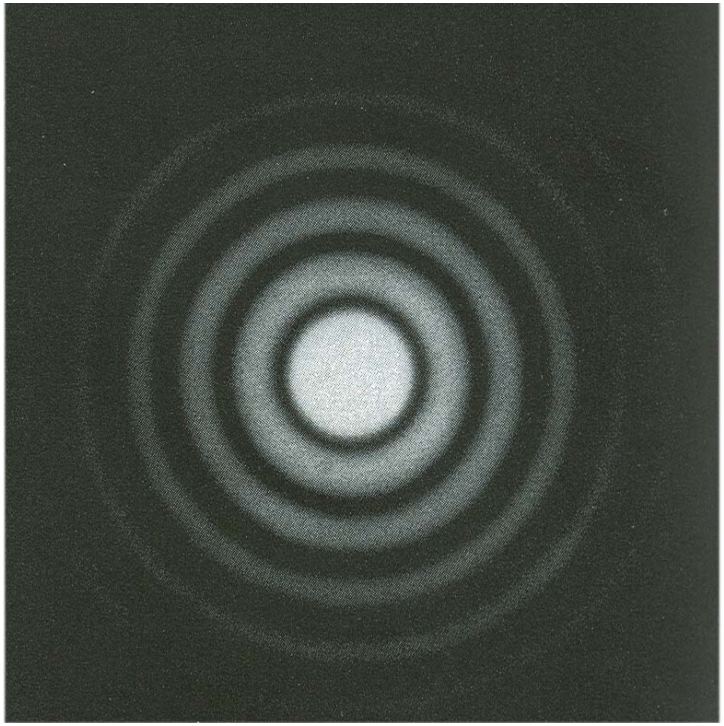
$\bar{I} = |E|^2$ Hierbei sind Realteil und Imaginärteil um 90° phasenverschoben

Beugung hinter einer kreisförmigen Blende

Das erste Minimum wird unter dem Winkel

$$\frac{d}{\lambda}\sin\theta = 1.22$$

(Herleitung benötigt Besselfunktionen)

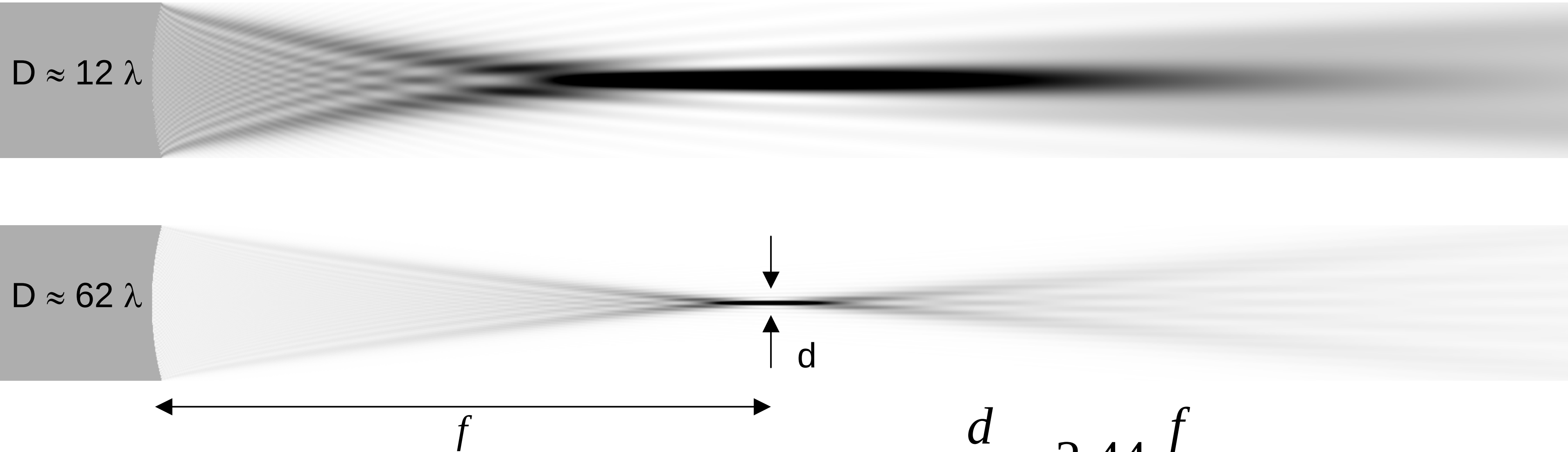


Intensitätsverteilung hinter kreisförmiger Lochblende

Wenn der Durchmesser kleiner als 1.22 λ ist, wird kein Minimum beobachtet sondern eine kugelförmige Intensitätsverteilung mit abnehmender Intensität für große Winkel.

Beugungsbegrenzung der Auflösung

Der minimale Durchmesser eines Fokus hinter einer Linse ist limitiert durch die Beugung an der kreisförmigen Linsenöffnung



$$\frac{d}{\lambda} = 2.44 \frac{f}{D}$$

Für unser Auge ergibt sich mit f=24mm, D=4mm und λ=600nm/1.33 = 450nm ein Beugungsscheibchen mit d = 7μm. Dies entspricht dem Abstand der Lichtrezeptoren (Zäpfchen). Das Winkelauflösungsvermögen $\sin \Delta\alpha = d / f$ ist damit 0.016°