# Elektromagnetische Wellen in Materie

Die Ausbreitung von elektromagnetischen Wellen in Materie kann ähnlich zur Ausbreitung im Vakuum formuliert werden, indem man die Eigenschaften der Materie pauschal mit den Konstanten $\varepsilon$ und $\mu$ in den Maxwellgleichungen berücksichtigt.

$\varepsilon$ und $\mu$ ändern die Ausbreitungsgeschwindigkeit und Wellenlänge.

Aufgrund der atomaren Struktur der Materie werden $\varepsilon$ und $\mu$ frequenzabhängig.

Beim Übergang einer Welle durch die Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichen Konstanten tritt Reflexion und Brechung auf.

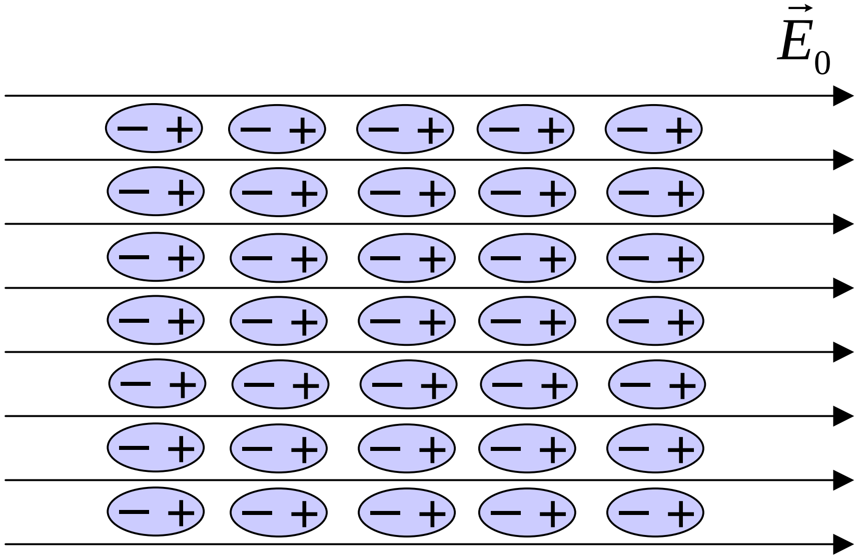
Man verwendet üblicherweise den Brechungsindex $n = \sqrt{\varepsilon\mu}$ anstatt von $\varepsilon$ und $\mu$. Der Brechungsindex ist auch frequenzabhängig ($\rightarrow$ Dispersion).

Zusätzlich kann Absorption stattfinden.

## Atomares Modell für ε

Die dielektrische Verschiebungsdichte D in Materie setzt sich zusammen aus der äußeren Feldstärke $E_0$ und der Polarisation P

$$\vec{D} = \varepsilon\,\varepsilon_0\,\vec{E} = \varepsilon_0\,\vec{E}_0 + \vec{P}$$




Jedes Atom ist ein Dipol mit einer Eigenfrequenz.

Bei langsamen Änderungen von E folgt es der äußeren Feldstärke.

Bei Frequenzen nahe der Eigenfrequenz ändert sich die Phase der erzwungenen Schwingung von 0° auf –180°.

Jedes Atom emittiert wieder eine Welle, die zur äußeren Welle wegen der Phasenverschiebung verzögert ist.

Dies führt zur Verlangsamung der Welle beim Durchgang durch Materie

Wegen der Frequenzabhängigkeit nennt man $\varepsilon$ auch *Dielektrische Funktion* $\varepsilon(\omega)$.

Die Frequenzabhängigkeit wird erst im Bereich der Lichtfrequenzen relevant.

Durch die Kopplung der Welle an die gedämpften Schwingungen der Dipole geht der Welle Energie verloren $\rightarrow$ Absorption

Dieser Effekt kann durch einen zusätzlichen Imaginärteil bei $\varepsilon(\omega)$ berücksichtigt werden.

Bei komplexem $\varepsilon$ ist E-Feld und B-Feld nicht mehr in Phase zueinander

Die Atome besitzen mehrere Eigenfrequenzen, sodass die Dielektrische Funktion im Allgemeinen eine komplizierte Frequenzabhängigkeit besitzt

## Phasengeschwindigkeit im Medium

In einem Material mit den Materialkonstante $\varepsilon$ und $\mu$ erhält man aus den Maxwellgleichungen

$$\operatorname{rot}\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\vec{E} = 0$$

$$\operatorname{rot}\vec{B} = \mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \qquad \operatorname{div}\vec{B} = 0$$

die Phasengeschwindigkeit

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu\mu_0\varepsilon\varepsilon_0}}$$

d.h. die Lichtgeschwindigkeit ist um den Faktor $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$ langsamer als im Vakuum ($c_0$):

$$c = \frac{c_0}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$$

## Brechungsindex

Außer bei ferromagnetischen Materialien ist $\mu \approx 1$. Es spielt daher für den Brechungsindex keine wichtige Rolle. (Ferromagnetische Materialien sind metallisch und daher i.A. undurchsichtig).

Der Brechungsindex ist definiert als

$$\boxed{n = \sqrt{\mu\varepsilon} \approx \sqrt{\varepsilon}}$$

Die Phasengeschwindigkeit von Licht in Material mit dem Brechungsindex *n* ist

$$\boxed{c = \frac{c_0}{n}}$$

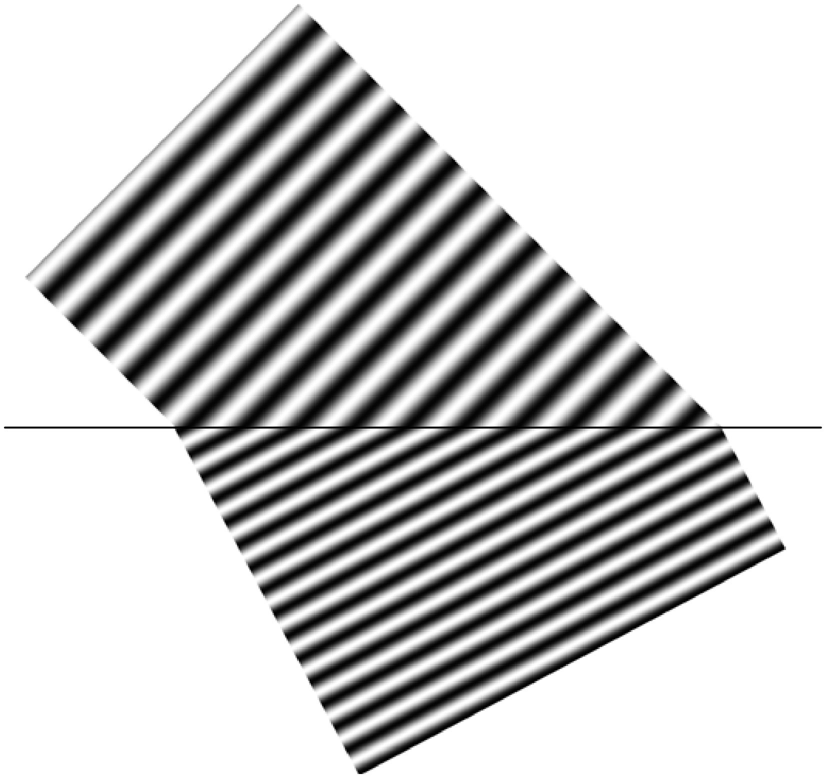
Da die Phasengeschwindigkeit gleich dem Verhältnis aus $\omega$ und k ist, verkürzt sich die Wellenlänge im Medium

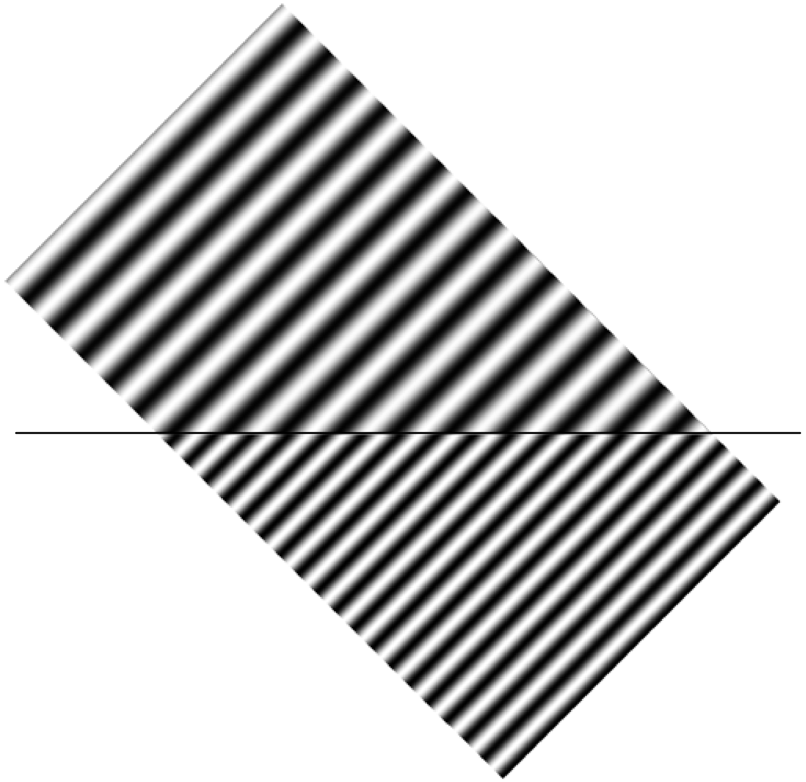
$$c = \frac{c_0}{n} = \frac{\omega}{k} \qquad \Rightarrow \qquad \lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi\, c}{\omega} = \frac{2\pi\, c_0}{\omega}\frac{1}{n} = \lambda_0 \frac{1}{n}$$

# Wellen an Grenzflächen

Trifft eine Welle auf eine Grenzfläche zwischen zwei Medien mit unterschiedlichem Brechungsindex, wird sie teilweise reflektiert und teilweise gebrochen.

Der Brechungswinkel ergibt sich wegen der Änderung der Wellenlänge:



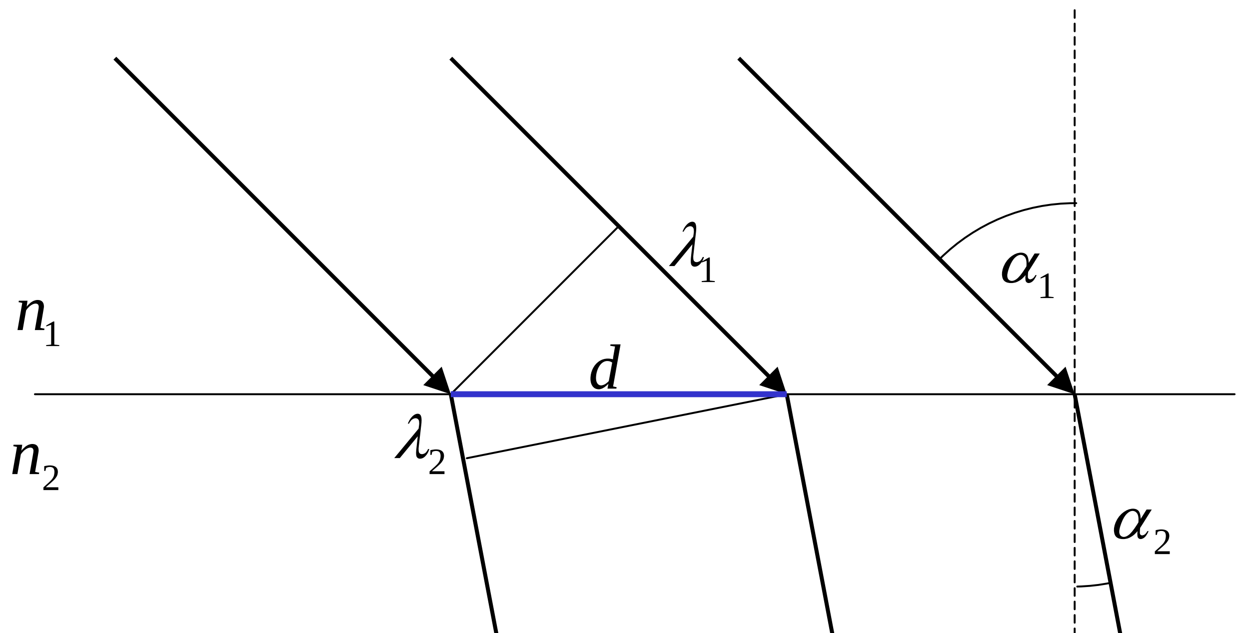


Ohne Brechung passen die Phasen an der Grenzfläche nicht.

Die atomaren Dipole an der Grenzfläche werden von der einfallenden Welle mit der Frequenz $\omega$ angeregt und schwingen mit dieser Frequenz mit.

Sie strahlen nach innen (Brechung) und außen (Reflektion) mit der gleichen Frequenz $\omega$ ab.

Innen ist die Wellenlänge kürzer. Die Überlagerung aller abgestrahlten Wellen ergibt eine ebene Welle in anderer Richtung.




$$\boxed{d \sin \alpha_1 = \lambda_1}$$

$$\boxed{d \sin \alpha_2 = \lambda_2}$$

$$\boxed{\lambda_2 \sin \alpha_1 = \lambda_1 \sin \alpha_2}$$

Die Phasen der äußeren und inneren Welle passen also an der Grenzfläche nur dann zusammen, wenn

$$\lambda_2 \sin \alpha_1 = \lambda_1 \sin \alpha_2$$

$$\frac{\lambda_0}{n_2} \sin \alpha_1 = \frac{\lambda_0}{n_1} \sin \alpha_2$$

Mit der Wellenlänge $\lambda_0$ im Vakuum.

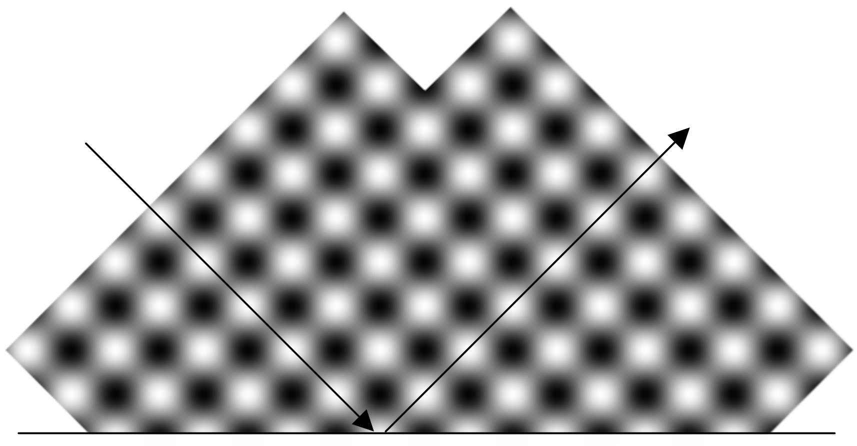
Für die Winkel folgt

$$\boxed{\frac{n_1}{n_2} = \frac{\sin \alpha_2}{\sin \alpha_1}}$$

Snelliussches Brechungsgesetz

Beim Übergang in ein Medium mit höherem Brechungsindex, ändert sich die Ausbreitungsrichtung zum Lot hin ($\alpha$ wird kleiner, wenn n größer wird.)

Auch die reflektierte Welle muss an der Grenzfläche die passenden Phasen zur einfallenden Welle haben

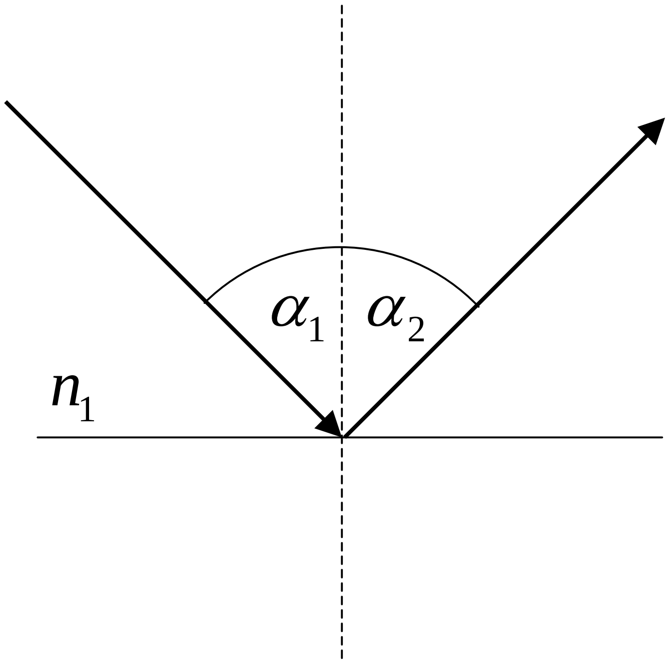


Wegen

$$\lambda_1 \sin \alpha_1 = \lambda_1 \sin \alpha_2$$

ergibt sich „Einfallswinkel gleich Ausfallswinkel“

$$\alpha_1 = \alpha_2$$



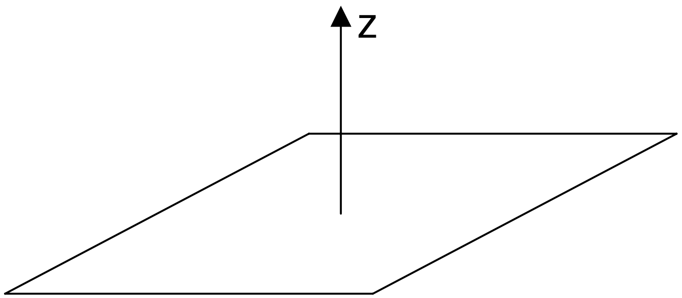
# Stetigkeitsbedingungen an der Grenzfläche für E und B

Die Maxwellgleichungen in Materie besagen, dass

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho$$

An der Grenzfläche ist keine Ladung vorhanden, so dass die Ableitung in der Richtung senkrecht zur Oberfläche gleich Null ist.

$$\frac{\partial D_z}{\partial z} = 0$$




Also ändert sich $D_z$ nicht beim Durchtritt durch die Grenzfläche.

Da sich $\varepsilon$ sprunghaft ändert, muss sich $E_z$ ebenfalls sprunghaft ändern

$$D_z = \varepsilon\varepsilon_0 E_z = const$$

$$\varepsilon_1 E_{z1} = \varepsilon_2 E_{z2}$$

Die Komponente des elektrischen Feldes senkrecht zur Oberfläche $E_\perp$ ist unstetig.

Aus der Maxwell-Gleichung

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

lässt sich herleiten, dass die Komponente des elektrischen Feldes parallel zur Grenzfläche $E_{||}$ stetig ist.

<u>Beim Magnetfeld ist es umgekehrt:</u>

Aus der Maxwell-Gleichung

$$\mathrm{div}\,\vec{B} = 0$$

leitet man ganz analog her, dass die Komponente $B_\perp$ stetig sein muss.

$$\frac{\partial B_z}{\partial z} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad B_z = const.$$

Aus der Maxwell-Gleichung

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

folgt, dass die Komponente von H parallel zur Grenzfläche $H_{||}$ stetig sein muss.

Da B mit H über die Beziehung

$$B_z = \mu\mu_0 H_z = const$$

verknüpft ist, muss $B_{||}$ einen Sprung an der Grenzfläche machen, um den Sprung von $\mu$ auszugleichen.

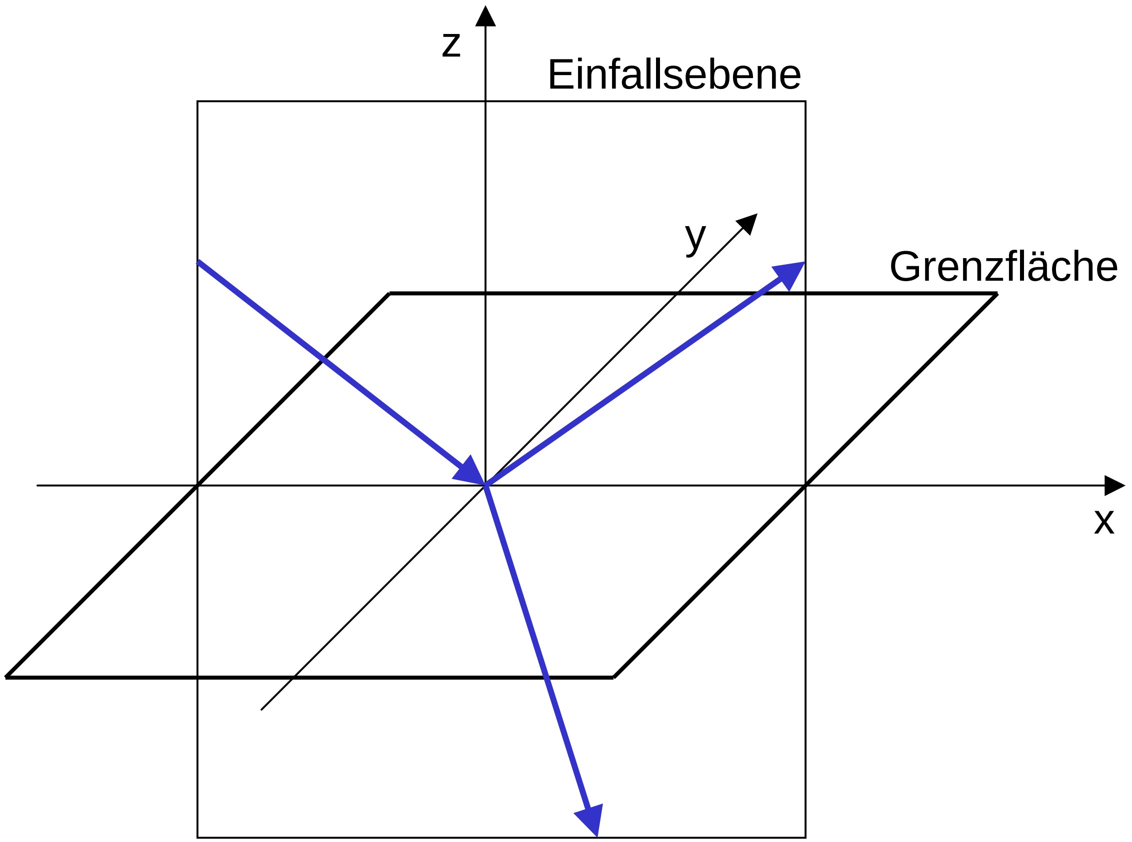
Zusammenfassung:

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| stetig: | $D_\perp$ | $E_{\|\|}$ | $B_\perp$ | $H_{\|\|}$ |
| unstetig: | $E_\perp$ | $D_{\|\|}$ | $H_\perp$ | $B_{\|\|}$ |

## Amplituden der reflektierten und gebrochenen Wellen

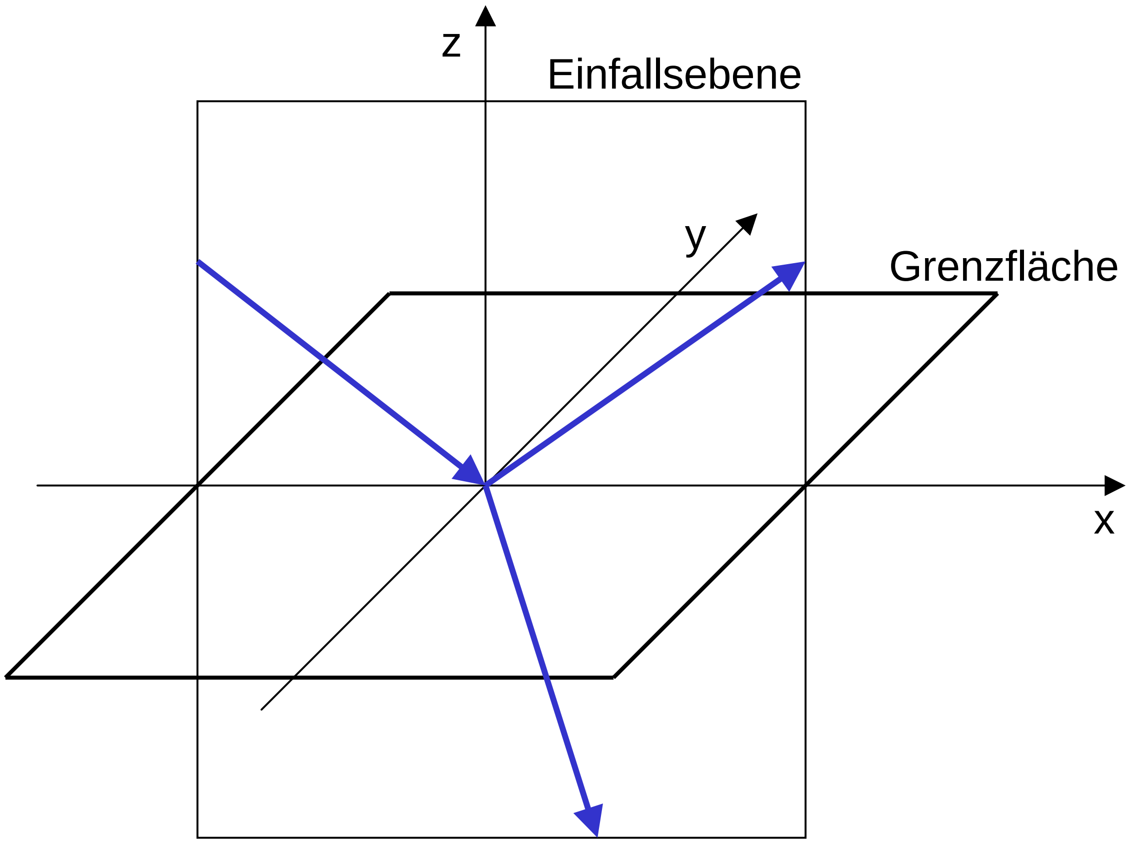
Aus den Stetigkeitsbedingungen können nun die Amplituden der reflektierten und der gebrochenen Wellen hergeleitet werden.

Daraus erhält man die Reflexions- und Transmissionskoeffizienten (Fresnel'schen Formeln).



# Parallel- und senkrecht polarisiertes Licht

Licht mit Polarisation parallel zur Einfallsebene $\vec{E} = (E_x, 0, E_z)$
und solches mit Polarisation senkrecht zur Einfallsebene $\vec{E} = (0, E_y, 0)$
beeinflussen sich nicht gegenseitig an der Grenzfläche. Man kann also jede beliebig polarisierte Welle in diese zwei Anteile zerlegen und diese separat berechnen.



Schreibt man die elektrische und magnetische Feldstärke des Wellenfeldes als Summe aus einfallender, reflektierter und gebrochener Welle,

$$\vec{E} = \vec{A}_e e^{i(\omega t - \vec{k}_e \cdot \vec{r})} + \vec{A}_r e^{i(\omega t - \vec{k}_r \cdot \vec{r})} + \vec{A}_g e^{i(\omega t - \vec{k}_g \cdot \vec{r})}$$

dann müssen für die Feldstärken an der Grenzfläche die Stetigkeits-bedingungen erfüllt sein.

$$E_{ex} + E_{rx} = E_{gx} \qquad H_{ex} + H_{rx} = H_{gx}$$

$$E_{ey} + E_{ry} = E_{gy} \qquad H_{ey} + H_{ry} = H_{gy}$$

Unter Verwendung des Brechungsgesetzes lassen sich aus diesen Bedingungen (nach längerer Rechnung) die Fresnelschen Formeln herleiten: Man bezeichnet das Amplitudenverhältnis von einfallender zu reflektierten Welle als Reflexionskoeffizent r und das Amplitudenverhältnis von einfallender zu gebrochener Welle als Transmissionskoeffizienten t.

# Fresnelsche Formeln

Für senkrecht polarisiertes Licht ergibt sich

$$r = \frac{A_r}{A_e} = \frac{n_1 \cos\alpha_1 - n_2 \cos\alpha_2}{n_1 \cos\alpha_1 + n_2 \cos\alpha_2} = -\frac{\sin(\alpha_1 - \alpha_2)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$t = \frac{A_t}{A_e} = \frac{2n_1 \cos\alpha_1}{n_1 \cos\alpha_1 + n_2 \cos\alpha_2} = \frac{2\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

Für parallel polarisiertes Licht ergibt sich

$$r = \frac{A_r}{A_e} = \frac{n_2 \cos\alpha_1 - n_1 \cos\alpha_2}{n_2 \cos\alpha_1 + n_1 \cos\alpha_2} = -\frac{\tan(\alpha_1 - \alpha_2)}{\tan(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

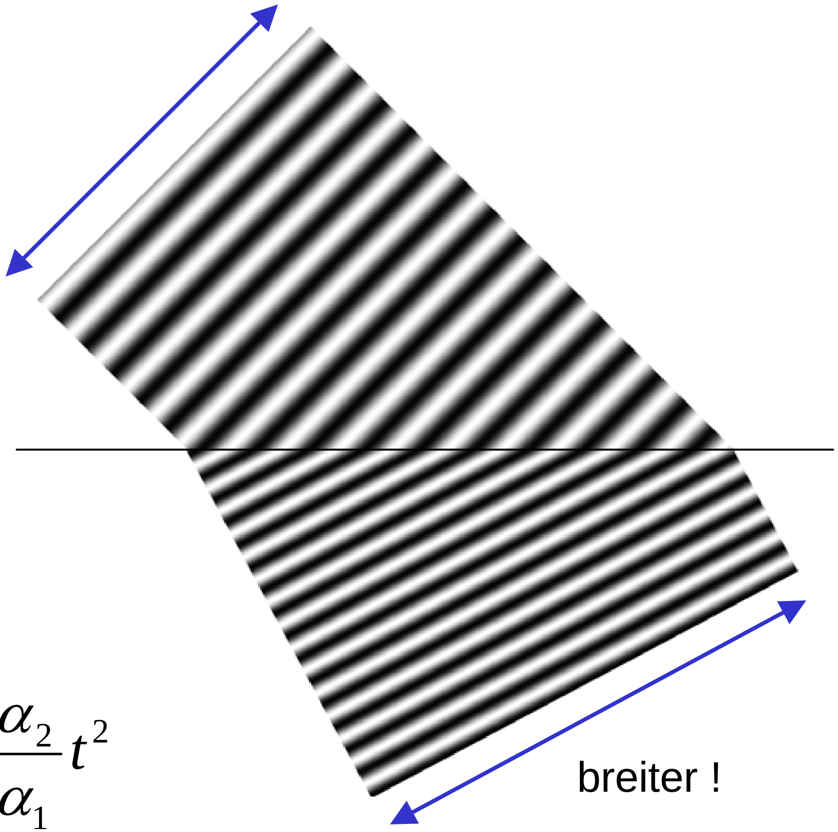
$$t = \frac{A_t}{A_e} = \frac{2n_1 \cos\alpha_1}{n_2 \cos\alpha_1 + n_1 \cos\alpha_2} = \frac{2\sin(\alpha_2)\cos(\alpha_1)}{\sin(\alpha_1 + \alpha_2)\cos(\alpha_1 - \alpha_2)}$$

## Reflexions- und Transmissionsvermögen

Die Amplitudenverhältnisse r und t geben nicht den Anteil der reflektierten bzw. transmittierten Intensität an.

Das Intensitätsverhältnis aus reflektierter zu einfallender Intensität ist das Reflexionsvermögen R

$$R = \frac{I_r}{I_e} = \frac{A_r^2}{A_e^2} = r^2$$

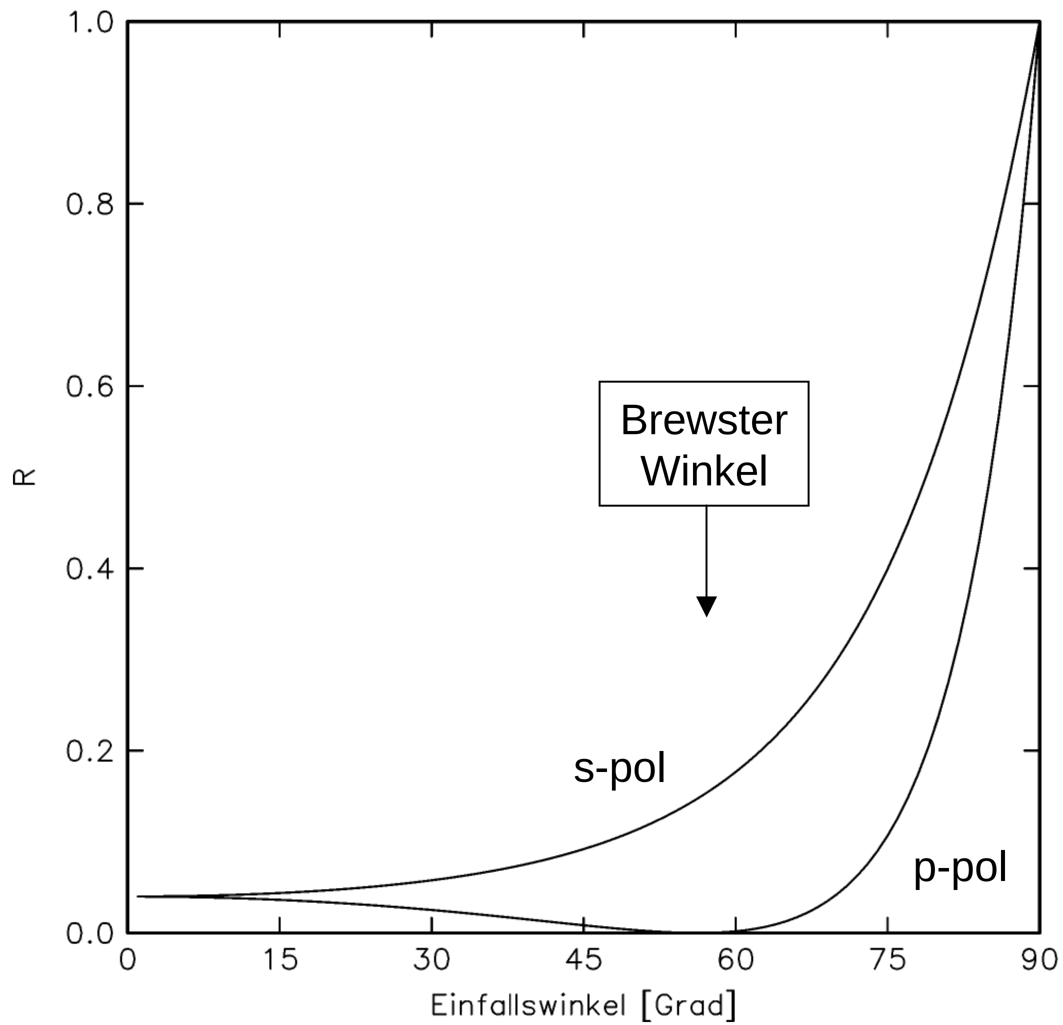



Beim Transmissionsvermögen muss berücksichtigt werden, dass der gebrochene Strahl eine größere Fläche beleuchtet. Man erhält:

$$T = \frac{I_g \cos\alpha_2}{I_e \cos\alpha_1} = \frac{n_2 \cos\alpha_2 A_g^2}{n_1 \cos\alpha_1 A_e^2} = \frac{n_2 \cos\alpha_2}{n_1 \cos\alpha_1} t^2$$

# Reflexionsvermögen

Beispiel Grenzfläche zwischen Luft ($n_1$=1) und Glas ($n_2$=1.5)

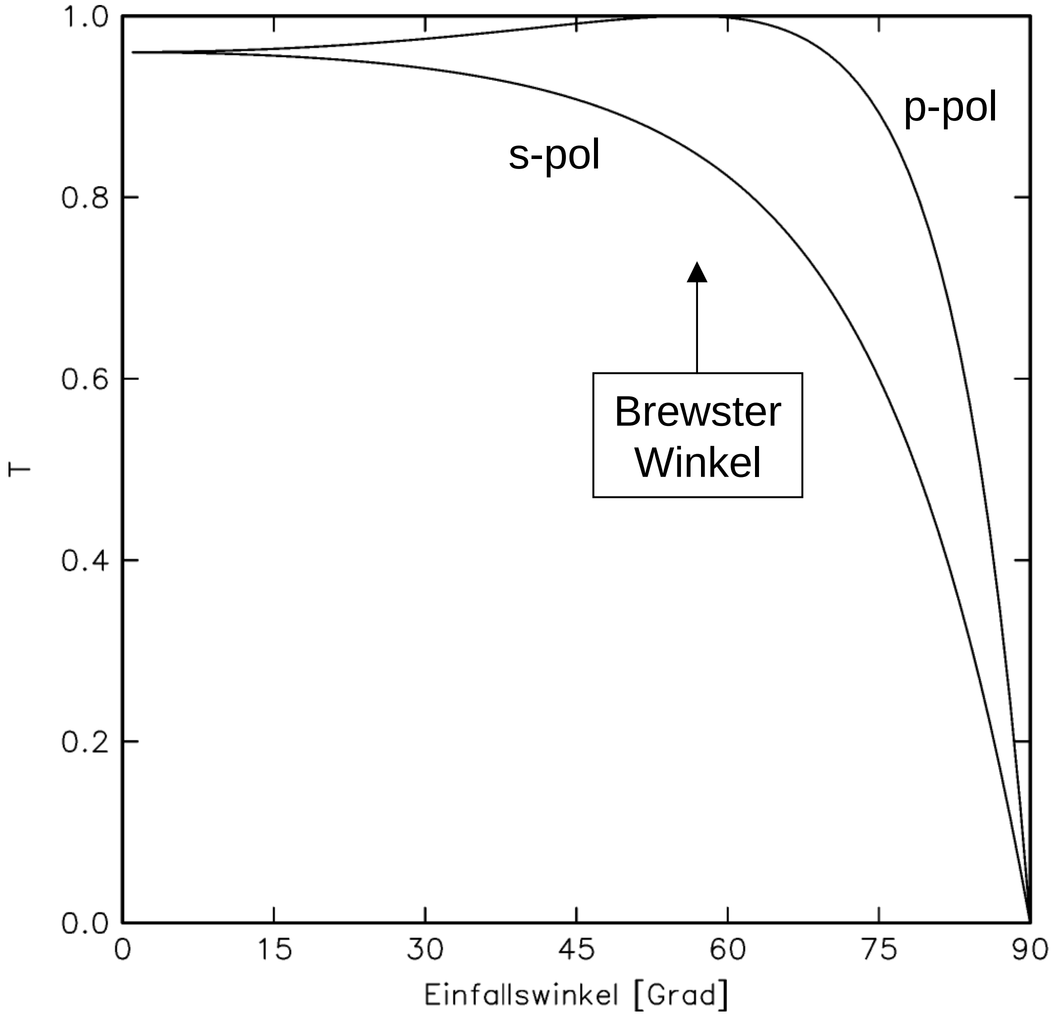



senkrechter Einfall

streifender Einfall

# Transmissionsvermögen

Beispiel Grenzfläche zwischen Luft ($n_1$=1) und Glas ($n_2$=1.5)




senkrechter Einfall

streifender Einfall

Senkrechter Einfall:

Bei senkrechtem Einfall ist parallel und senkrecht polarisiertes Licht äquivalent.

Das Reflexionsvermögen ist

$$R = \left( \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Bei Übergang von Luft (n = 1.0) in Glas (n = 1.5) ist R = 0.04.

Es werden 4% der Intensität reflektiert.

Beim Übergang von Glas in Luft ergibt sich der selbe Wert.

Licht das senkrecht durch eine Glasscheibe fällt wird zu jeweils 4% an der Vorderseite und Rückseite der Glasscheibe reflektiert.

Streifender Einfall:

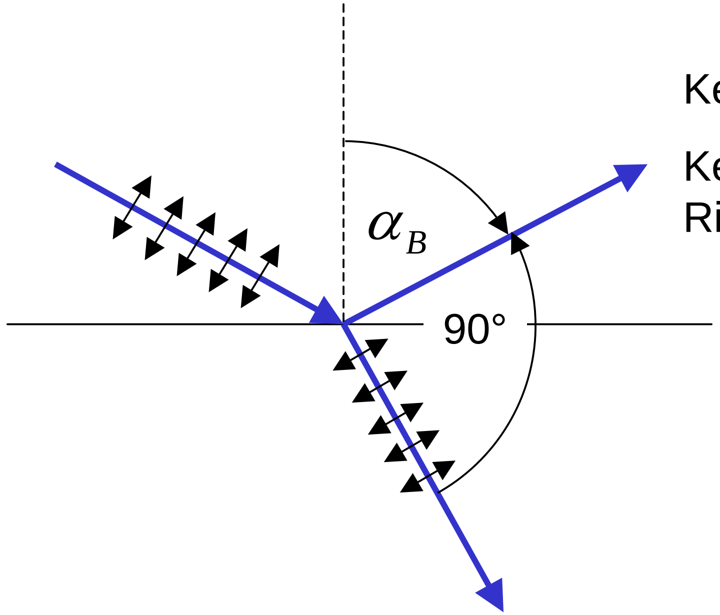
Bei extrem streifendem Einfall werden 100% der Intensität reflektiert.

## Brewsterwinkel:

Für parallel polarisiertes Licht gibt es einen Winkel, bei dem kein Licht reflektiert wird, den *Brewsterwinkel*.

$$\alpha_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$$

Die an der Oberfläche schwingenden atomaren Dipole emittieren nicht entlang ihrer Achse:



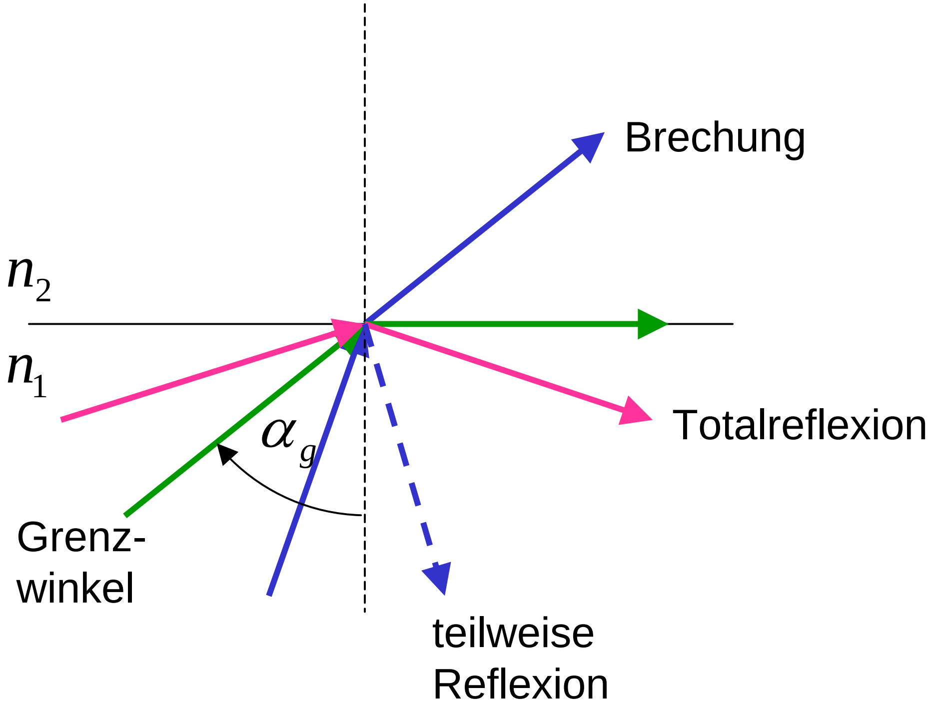

Keine longitudinale Welle möglich.

Keine Emission der Dipole in diese Richtung

## Totalreflexion:

Fällt Licht aus einem optisch dichteren ($n_1$) in ein optisch dünneres Medium ($n_2<n_1$), dann gibt es einen Winkel $\alpha_g$ so dass für Winkel $\alpha_1>\alpha_g$ das Licht vollständig in das dichtere Medium zurückreflektiert wird.

Wegen $\sin\alpha_1 = \frac{n_2}{n_1}\sin\alpha_2 < \frac{n_2}{n_1}\cdot 1 = \sin\alpha_g$ folgt $\alpha_g = \arcsin\frac{n_2}{n_1}$



## Reflexion an Metalloberflächen:

Metalle sind in der Regel stark absorbierend für sichtbares Licht.

Die Absorption beschreibt man durch einen komplexen Brechungsindex

$$\tilde{n} = n + i\kappa$$

Für das Reflexionsvermögen bei senkrechtem Einfall von Luft (n=1) in Metall gilt analog

$$R = \left|\frac{1-\tilde{n}}{1+\tilde{n}}\right|^2 = \left|\frac{1-(n+i\kappa)}{1+(n+i\kappa)}\right|^2 = \frac{(1-n)^2+\kappa^2}{(1+n)^2+\kappa^2}$$

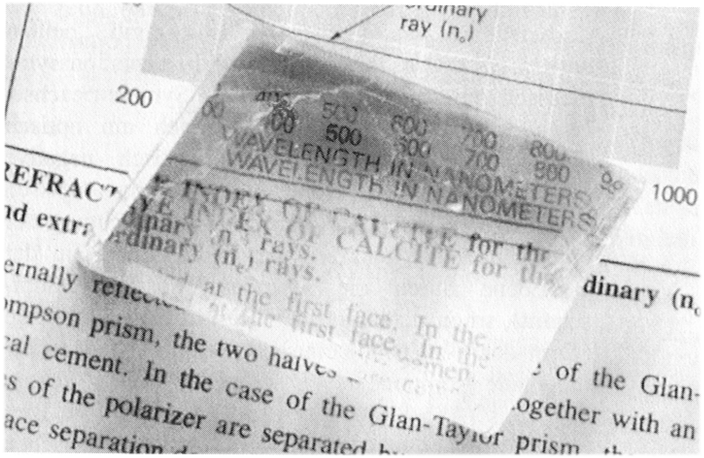
Beispiele:

| | $\lambda$ | $n$ | $\kappa$ | R |
|---|---|---|---|---|
| Kupfer | 500 nm | 1.03 | 2.78 | 0.65 |
| | 1000 nm | 0.147 | 6.93 | 0.99 |
| Silber | 500 nm | 0.17 | 2.94 | 0.93 |
| | 1000 nm | 0.13 | 6.83 | 0.99 |
| Gold | 500 nm | 0.84 | 1.84 | 0.50 |
| | 1000 nm | 0.18 | 6.04 | 0.98 |

# Doppelbrechung

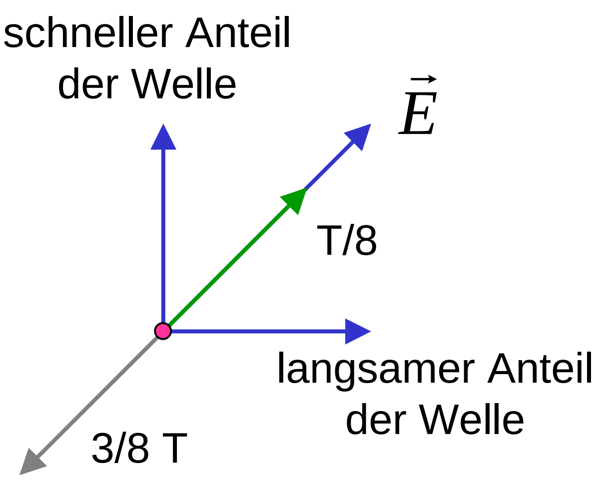
Es gibt durchsichtige Materialien, bei denen die Polarisierbarkeit in verschiedenen Richtungen des Kristallgitters unterschiedlich ist.
(z.B. Kalkspat $CaCO_3$) Ursache sind Asymmetrien in der Kristallstruktur.

Je nach Polarisation der einfallenden Strahlung ist die Wechselwirkung mit dem Material unterschiedlich und damit $\varepsilon$ und *n* unterschiedlich.
Dadurch werden unterschiedlich polarisierte Strahlen unterschiedlich gebrochen.
Ein unpolarisierter Strahl wird in zwei Strahlen mit verschiedener Polarisation aufgespalten $\rightarrow$ *Doppelbrechung*

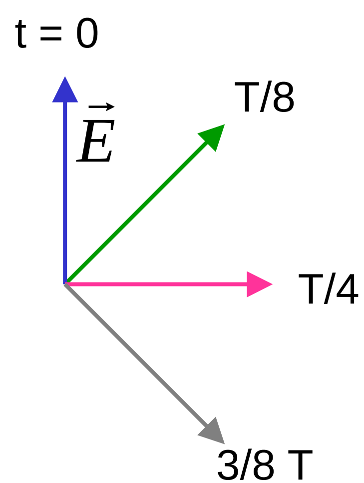


# $\lambda/4$ - Plättchen

Bei geeigneter Ausbreitungsrichtung des Lichtes bezüglich der Kristallrichtung laufen die beiden unterschiedlich polarisierten Strahlen in die selbe Richtung, aber mit unterschiedlicher Geschwindigkeit.
Wählt man die Dicke einer Kalkspatplatte so, dass nach Durchlaufen beide Strahlen einen Phasenunterschied von $\lambda/4$ haben, dann wird aus linear polarisiertem Licht vor der Platte zirkular-polarisiertes Licht hinter der Platte.



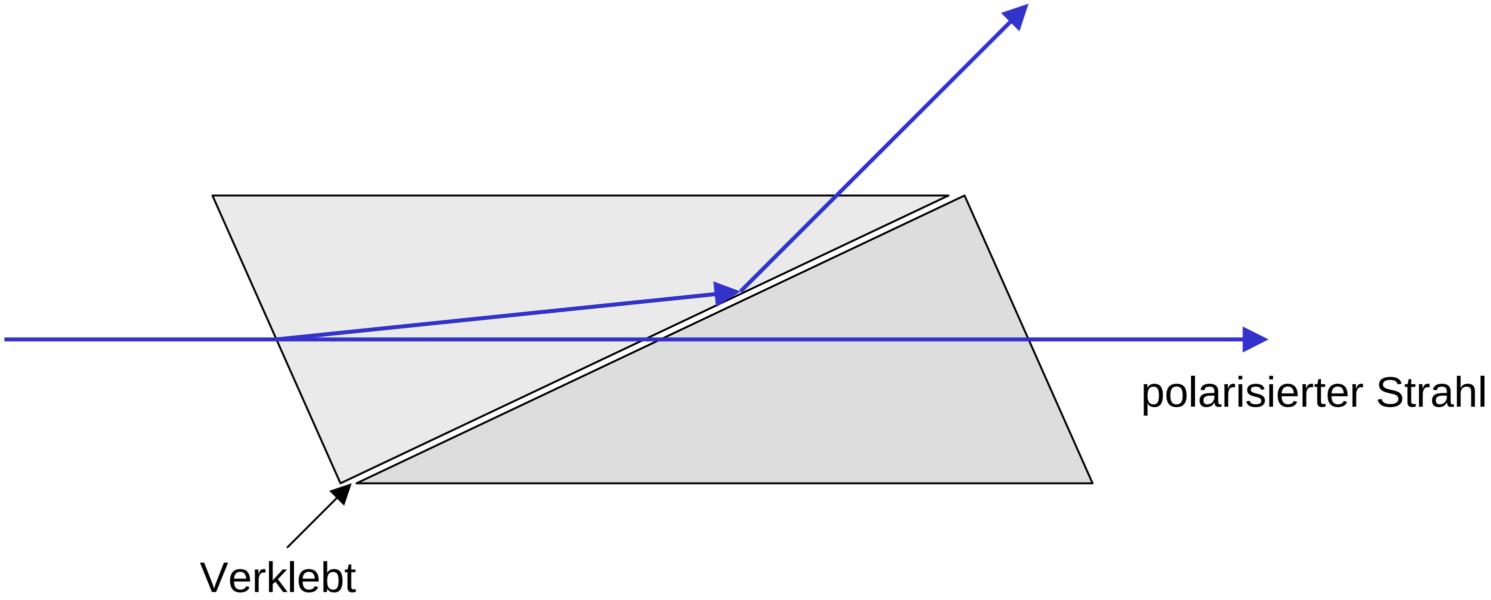

Linear polarisiert vor dem Kristall




zirkular polarisiert hinter dem Kristall

## Erzeugung von polarisiertem Licht mit doppelbrechendem Prisma

Schneidet man einen doppeltbrechenden Körper so, dass der eine von beiden Strahlen durch Totalreflexion beim Austritt abgelenkt wird, dann verbleibt ein vollständig polarisierter Strahl.



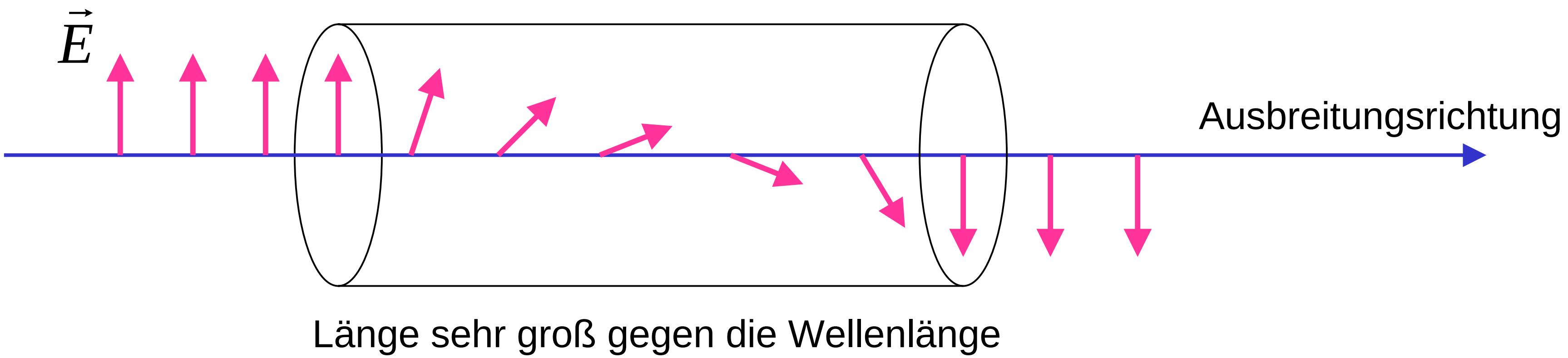

Bei hohen Laserintensitäten werden solche Polarisatoren verwendet, da Anisotrop absorbierende Polarisatoren durch die hohe Lichtleistung im Laserstrahl verbrennen.

# Optische Aktivität

Lösungen von chiralen Molekülen können die Polarisationsebene einer Lichtwelle drehen.

Chirale Moleküle sind spiralförmig aufgebaut und kommen rechtsdrehend und linksdrehend vor (Milchsäure, Zucker, etc.).

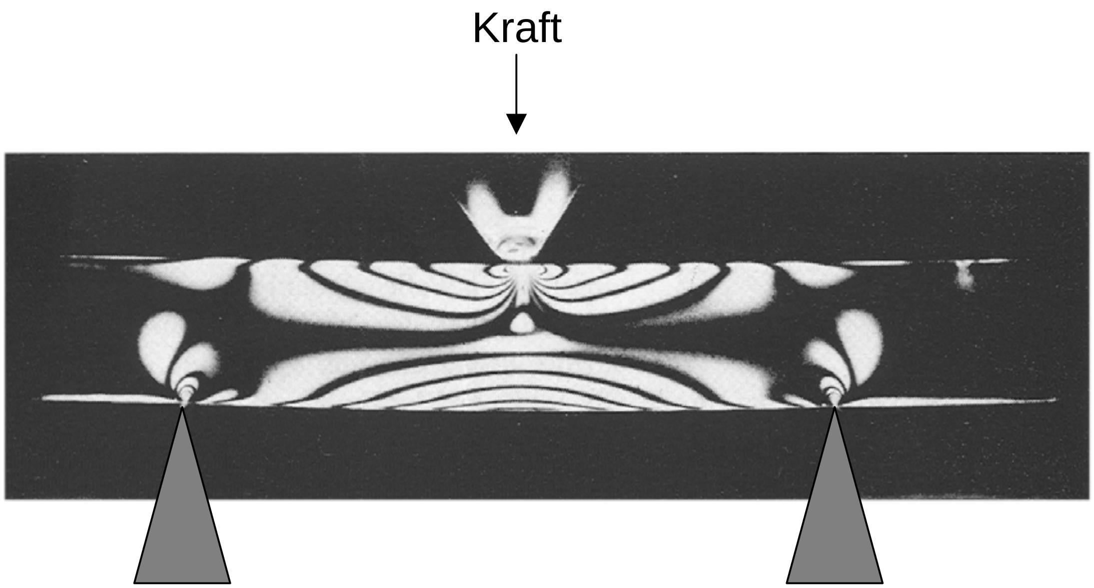
Die Substanzen werden als *optisch aktiv* bezeichnet.




Der Winkel, um den die Polarisationsebene gedreht wird, ist proportional zur Konzentration und durchlaufenen Länge.

# Spannungsdoppelbrechung

Die Symmetrie eines Kristallgitters wird durch Verspannungen reduziert. Weil die Polarisierbarkeit dadurch in verschiedenen Richtungen unterschiedlich wird entsteht Doppelbrechung.




Die Verspannungen in einem durchsichtigen Werkstück können durch diesen Effekt sichtbar gemacht werden.