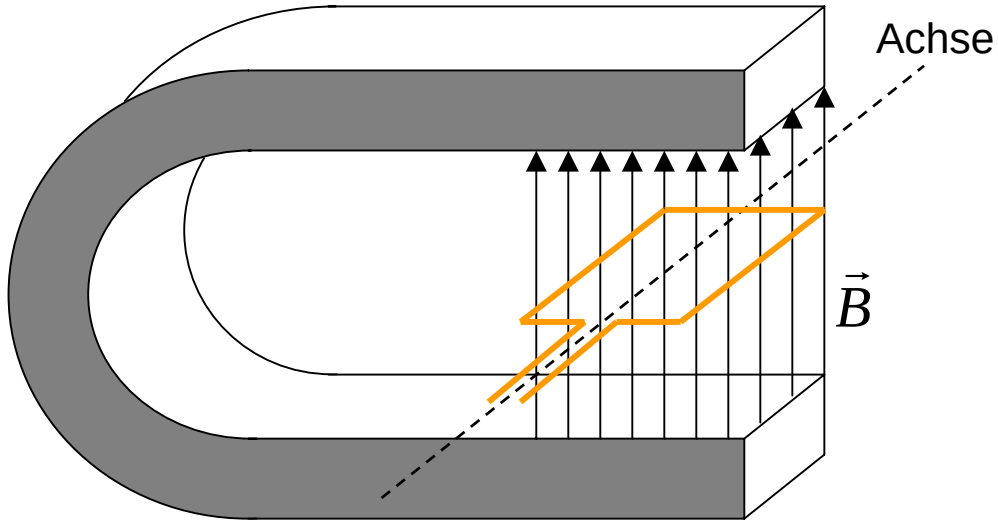
Wechselstromkreise

Der einfachste Aufbau eines Generators ist eine drehbar gelagerte Leiterschleife im Magnetfeld.



Dreht sich die Leiterschleife mit der konstanten Winkelgeschwindigkeit ω, dann ist die induzierte Spannung:

$$U_{ind} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \int_{\substack{Leiter-\\schleife}} \vec{B} \cdot \mathrm{d}\vec{A}$$

$$U_{ind} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B\,A\cos\alpha = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} B\,A\cos(\omega t) = \omega\,B\,A\sin(\omega t)$$

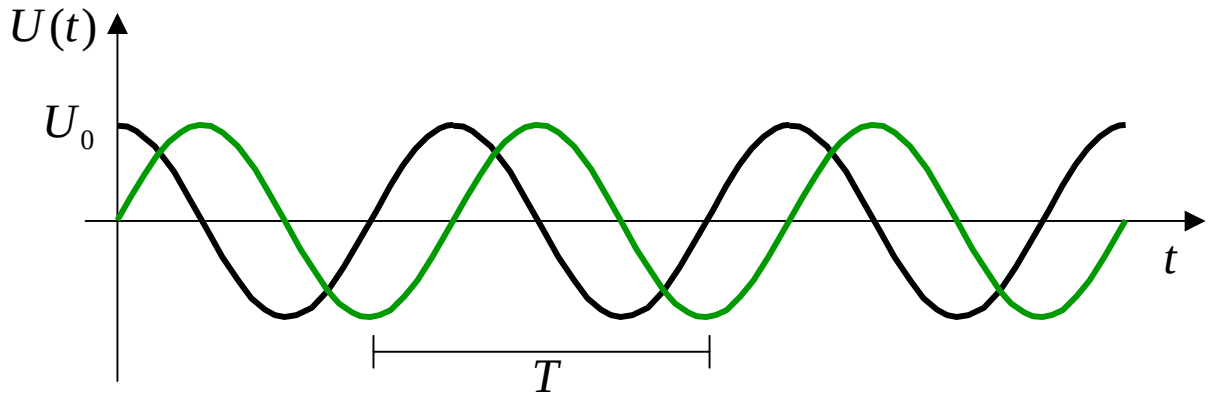
Eine solche sinusförmige Spannung nennt man *Wechselspannung*.

Im allgemeinen Fall schreibt man

$$U = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

Die Wechselspannung hat die *Amplitude* U_0, und die *Frequenz* $f = \frac{\omega}{2\pi}$

Den Winkel φ bezeichnet man als *Phase*.



Die grüne Kurve hat 90° = $\pi/2$ rad *Phasenverschiebung* gegenüber der schwarzen Kurve.

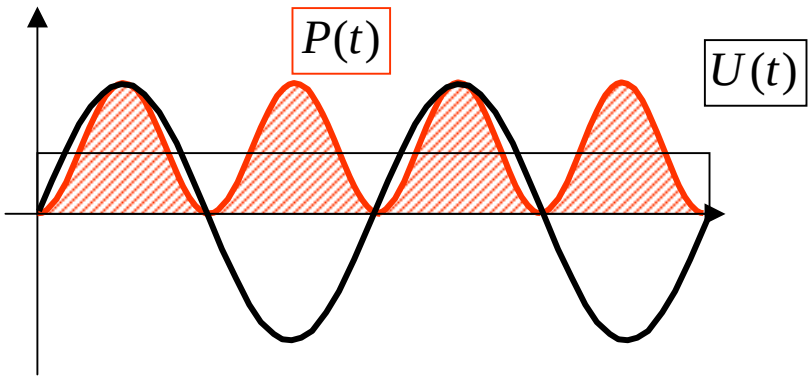
Die *Periodendauer* T beträgt $T = 1/f = \frac{2\pi}{\omega}$

Effektivspannung

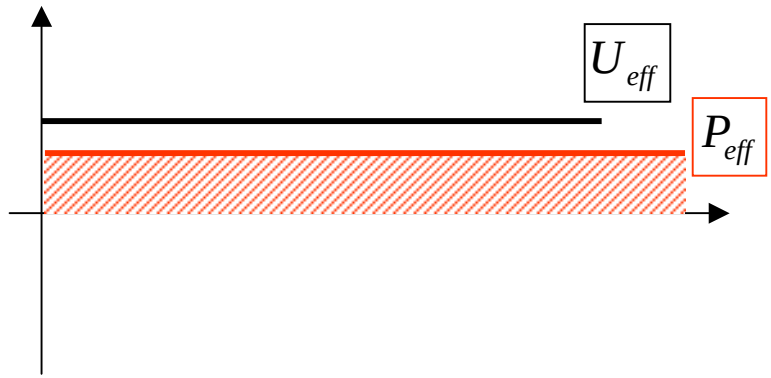
Der Effektivwert U_{eff} wird so definiert, das eine Wechselspannung an einem ohmschen Widerstand R die gleiche mittlere Leistung erzeugt, wie eine Gleichspannung mit $U=U_{eff}$.

$$P = U(t)\ I(t) = U_0 \cos(\omega t)\,\frac{U_0}{R}\cos(\omega t)$$

$$\overline{P} = \frac{U_0^2}{R}\,\frac{1}{T}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\,\frac{U_0^2}{R} = \frac{U_{eff}^2}{R} \quad \Rightarrow \quad \boxed{U_{eff} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}}$$



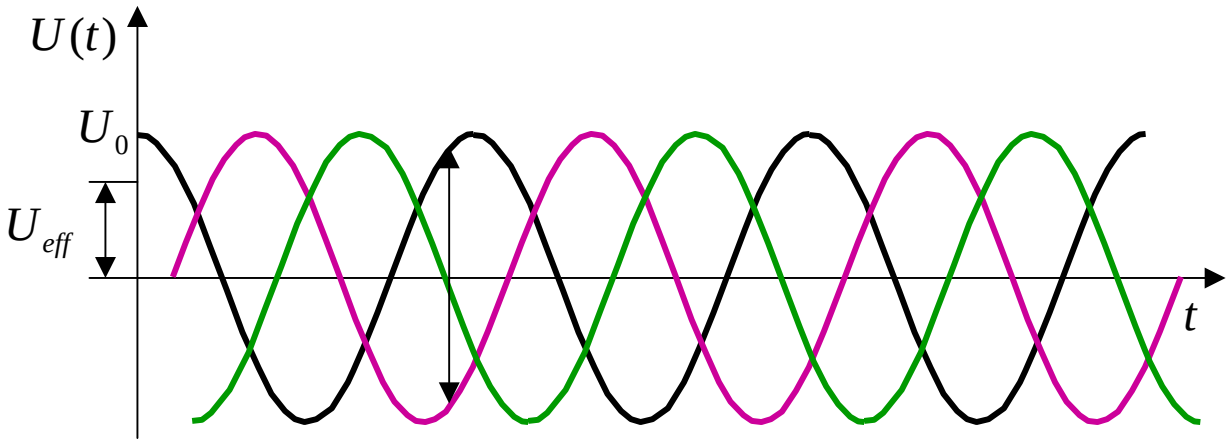
Wechselspannung



Gleichspannung

Netzspannung

Zur Versorgung der Haushalte wird Wechselspannung mit U_{eff} = 220V verwendet. Es stehen drei „Phasen“ zur Verfügung, die jeweils eine um 120° phasenverschobene Wechselspannung gegenüber dem „Nullleiter“ besitzen (Drehstrom).



Die Amplitude beträgt 220V·$\sqrt{2}$ = 311 V

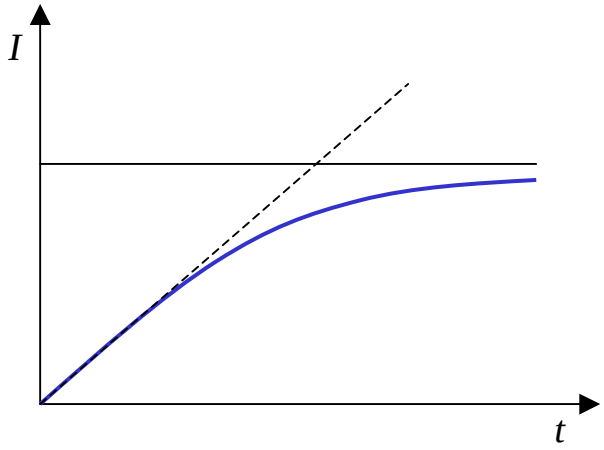
Zwischen unterschiedlichen Phasen misst man eine noch höhere Spannung, sie beträgt bis zu 540 V = 220V·$\sqrt{6}$.

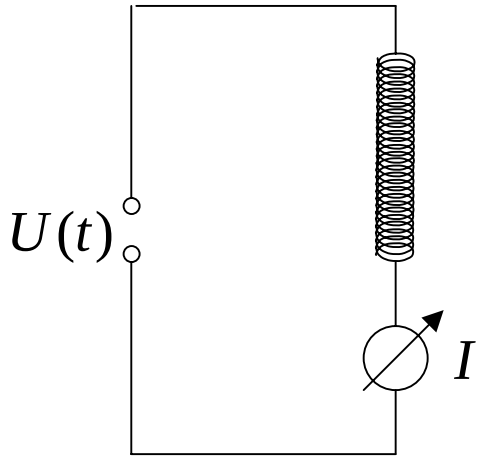
Die Effektivspannung zwischen zwei Phasen beträgt 380V = 220V·$\sqrt{3}$.

Wechselstromkreis mit Spule

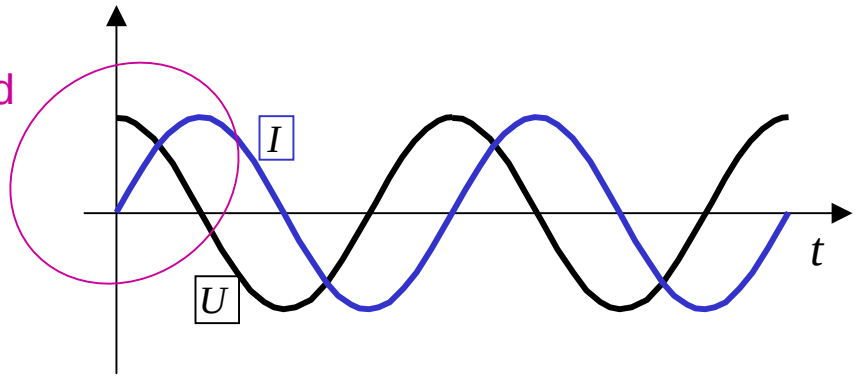
Eine Induktivität (Spule) führt in einem Wechselstromkreis zu einer Phasenverschiebung zwischen Strom und Spannung.

Beim Einschalten einer Spule hatten wir gesehen, das nach Anlegen der Spannung der Strom linear ansteigt





entsprechend zum Einschalten

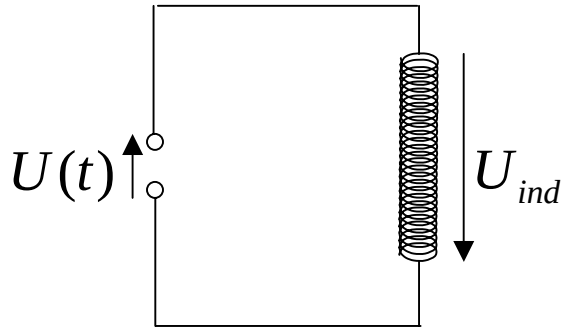


Annahme: Spule ohne ohmschen Widerstand

Der Strom steigt so schnell mit der Zeit an, dass die angelegte Spannung gleich der induzierten Gegenspannung ist. Die Kirchhoffsche Maschenregel fordert:

$$U(t) + U_{ind} = 0$$

$$U_0 \cos(\omega t) - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = 0$$



Durch Integration ergibt sich

$$I = \frac{U_0}{L}\int \cos(\omega t)\,\mathrm{d}t = \frac{U_0}{\omega L}\sin(\omega t) = \frac{U_0}{\omega L}\cos(\omega t + 90°)$$

Der Strom ist gegenüber der Spannung um 90° phasenverschoben.

Die Spule verhält sich nicht als ohmscher Widerstand, d.h. der Strom ist nicht zu jeder Zeit proportional zur Spannung.

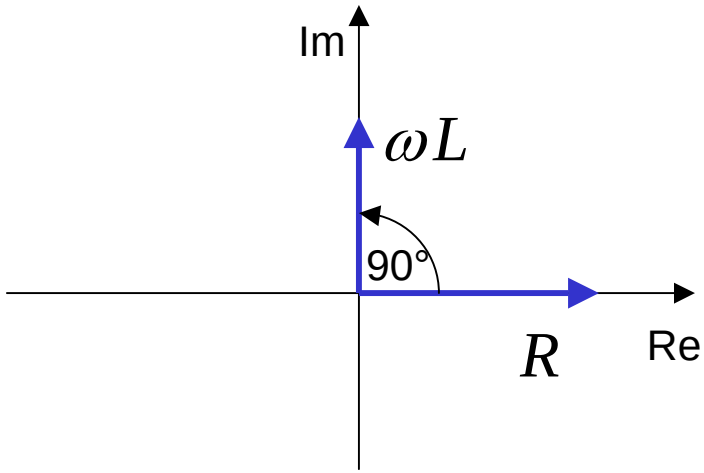
Komplexer Widerstand einer Spule

Die Effektivwerte von Strom und Spannung sind proportional zueinander

$$\frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = \omega L$$

Um die Phasenverschiebung zu berücksichtigen und in Wechselstromkreisen mit Widerständen rechnen zu können, führt man den *komplexen Widerstand* ein.

$$Z = i\omega L$$

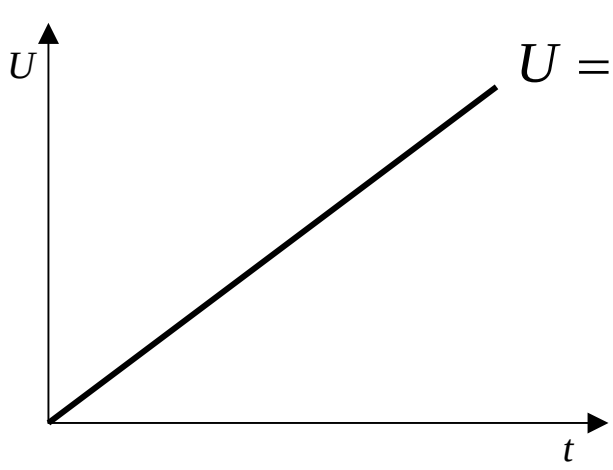


komplexe Zahlenebene

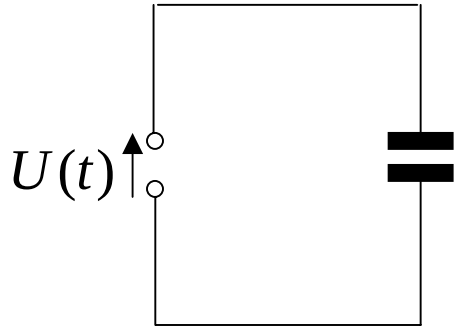
Mit reellem ohmschen Widerstand und imaginärem Widerstand der Spule erhält man einen Winkel von 90° zwischen beiden.

Wechselstromkreis mit Kondensator

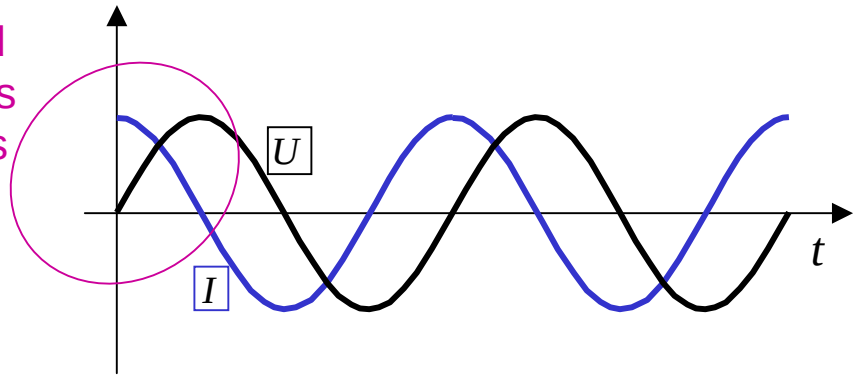
Die Spannung am Kondensator ist proportional zur Ladung und steigt bei konstantem Strom linear an:



$$U = \frac{Q}{C} = \frac{It}{C}$$



entsprechend zum Laden des Kondensators



Annahme: Stromkreis mit Kondensator ohne ohmschen Widerstand

Es gilt:

$$Q(t) = CU(t) \qquad \rightarrow \qquad I(t) = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t}$$

Mit der Spannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$ folgt

$$I(t) = -\omega C U_0 \sin(\omega t) = \omega C U_0 \cos(\omega t - 90°)$$

Der Strom ist gegenüber der Spannung auch um 90° phasenverschoben, aber zeitlich in die andere Richtung.

Die Effektivwerte von Strom und Spannung sind proportional zueinander

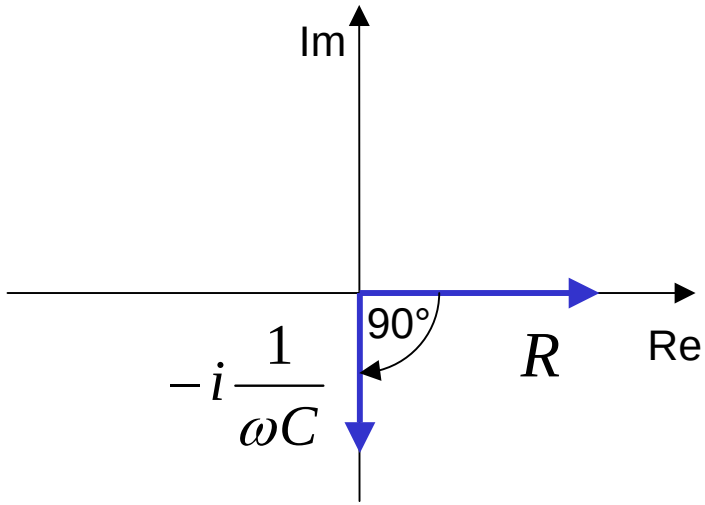
$$\frac{U_{eff}}{I_{eff}} = \frac{U_0}{I_0} = \frac{1}{\omega C}$$

Komplexer Widerstand eines Kondensators

Um die Phasenverschiebung richtig zu berücksichtigen wird dem Kondensator der *komplexen Widerstand*

$$Z = -i\frac{1}{\omega C} = \frac{1}{i\omega C}$$

zugeordnet.

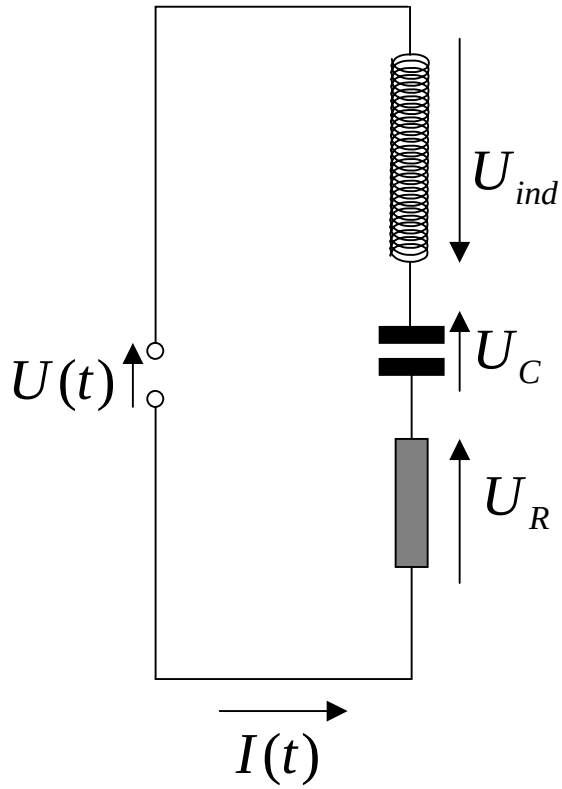


komplexe Zahlenebene

Wechselstromkreis mit Spule, Kondensator und Widerstand

Nach der Kirchhoffschen Maschenregel gilt:

$$U(t) + U_{ind} = U_R + U_C$$



Es folgt

$$U(t) - L\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} = I\,R + \frac{Q}{C}$$

Ein weiteres Differenzieren liefert

$$\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I$$

Mit der äußeren Spannung $U(t) = U_0 \cos(\omega t)$

erhalten wir die Differentialgleichung für den Strom

$$\omega U_0 \sin(\omega t) = L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I$$

Die Differentialgleichung ähnelt sehr der Dgl. für erzwungene Schwingungen aus der Mechanik.

Lösung durch Ansatz mit komplexer e-Funktion:

Verwenden wir für die äußere Spannung die Funktion

$$U(t) = U_0 e^{i\omega t} = U_0 \cos(\omega t) + i U_0 \sin(\omega t)$$

Erhält man als Dgl.

$$i\omega U_0 e^{i\omega t} = L\frac{\mathrm{d}^2 I}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{C}I$$

Die Lösung dieser inhomogenen Dgl. ist die Summe aus der Lösung der homogenen Dgl. und einer speziellen Lösung der inhomogenen Dgl.

Die Lösung der homogenen Dgl. (d.h. ohne äußere Spannung) ist exponentiell gedämpft und spielt nach einer Weile keine Rolle mehr.

Als Ansatz für eine spezielle Lösung verwenden wir eine Funktion, die die selbe Frequenz wie die äußere Spannung besitzt.

Mit dem Ansatz

$$I(t) = I_0 e^{i(\omega t - \varphi)}$$

ergibt sich durch Einsetzen in die Dgl:

$$i\omega U_0 e^{i\omega t} = -L\omega^2 I_0 e^{i(\omega t-\varphi)} + iR\omega I_0 e^{i(\omega t-\varphi)} + \frac{1}{C} I_0 e^{i(\omega t-\varphi)}$$

Umformen ergibt:

$$iU_0 e^{i\omega t} = I_0 e^{i\omega t} e^{-i\varphi}\left(-L\omega + iR + \frac{1}{\omega C}\right)$$

$$U_0 = I_0 e^{-i\varphi}\left(iL\omega + R - \frac{i}{\omega C}\right)$$

Man drückt jetzt den Zusammenhang zwischen den Scheitelwerten von Strom und Spannung mit einem komplexen Widerstand *Z* der s.g. *Impedanz* aus.

$$U_0 = Z I_0'$$

In der Konstanten I_0' ist die Phasenverschiebung um den Phasenwinkel φ enthalten

$$U_0 = Z\, I_0' = Z\, I_0 e^{-i\varphi}$$

Es ergibt sich also für die Impedanz *Z*:

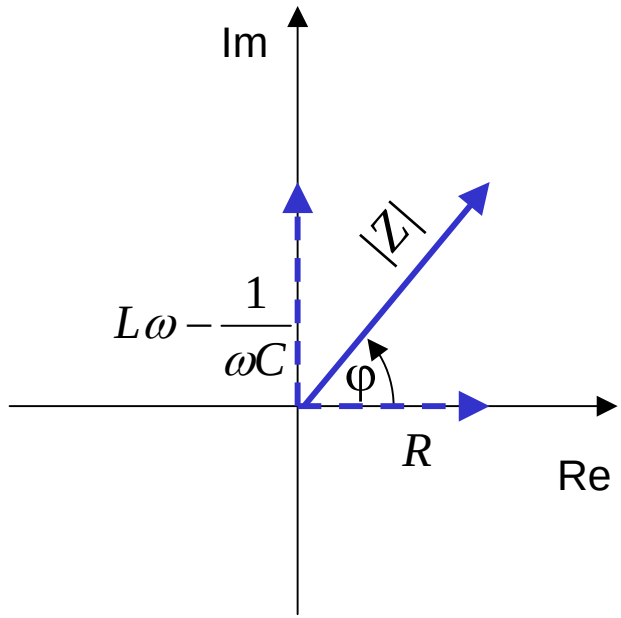
$$Z = i\,L\omega + R - \frac{i}{\omega C}$$

Für den Betrag von *Z* erhält man

$$|Z| = \sqrt{(\mathrm{Re}\,Z)^2 + (\mathrm{Im}\,Z)^2} = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{\omega C}\right)^2}$$

Den Phasenwinkel berechnet man aus

$$\varphi = \arctan\frac{\mathrm{Im}\,Z}{\mathrm{Re}\,Z} = \arctan\frac{L\omega - \frac{1}{\omega C}}{R}$$



Schein-, Wirk-, und Blindwiderstand

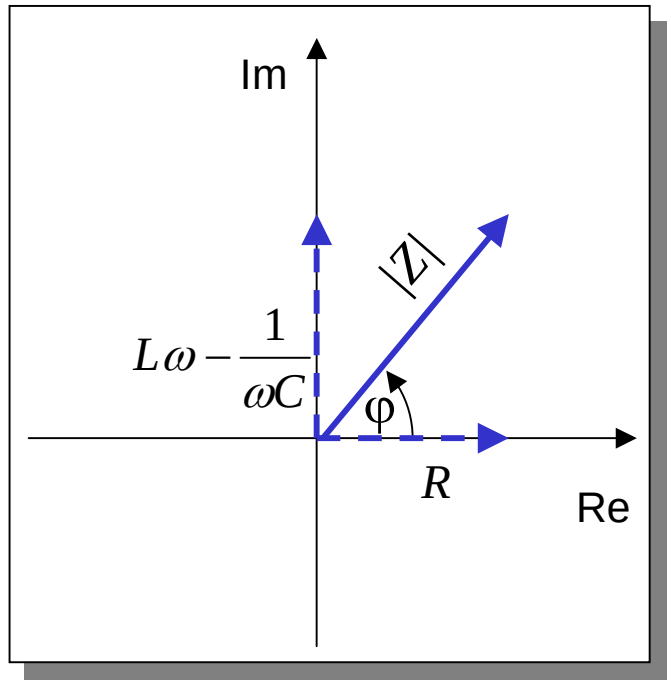
Die Impedanz bezeichnet man auch als *Scheinwiderstand*.

Den Ohmschen Widerstand R, d.h. den Realteil von Z nennt man *Wirkwiderstand*.

Den Imaginärteil der Impedanz nennt man *Blindwiderstand*.

Die Darstellung der Impedanz als Pfeile in der komplexen Zahlenebene nennt man *Zeigerdiagramm*.

Die Impedanzen in einer Schaltung addieren sich (komplex) wie die ohmschen Widerstände im reellen Fall.



Elektrische Leistung beim Wechselstrom

Man muss zwischen Blindleistung und Wirkleistung unterscheiden.

In einem Wechselstromkreis ohne ohmschen Widerstand wird keine Energie in Wärme umgesetzt. Die von Spule und Kondensator aufgenommene Energie wird im Feld gespeichert und bei der folgenden Halbwelle wieder abgegeben.
Im zeitlichen Mittel wird daher keine Leistung aufgenommen (Blindleistung).

Die tatsächlich „verbrauchte“ (in andere Energieformen umgewandelte) Leistung ist die Wirkleistung:

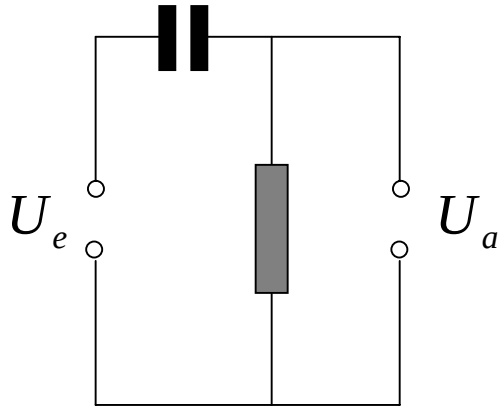
$$\overline{P}_{el} = \frac{1}{T}\int_0^T U(t)I(t)\,\mathrm{d}t = \frac{U_0 I_0}{T}\int_0^T \cos(\omega t)\cos(\omega t+\varphi)\,\mathrm{d}t = \frac{U_0 I_0}{2}\cos\varphi$$

Bei Spule und Kondensator ist die Phasenverschiebung φ zwischen Strom und Spannung gerade ± 90° ($\cos\varphi = 0$) und daher die Wirkleistung gleich Null.

Hochpass-Filter

Einen Hochpass-Filter passieren die hohen Frequenzen, während die tiefen Frequenzen unterdrückt werden.

Man kann die Reihenschaltung von Kondensator und Widerstand als Spannungsteiler auffassen.
Am Ausgang U_a liegt also nur ein Bruchteil der Eingangsspannung U_e an:

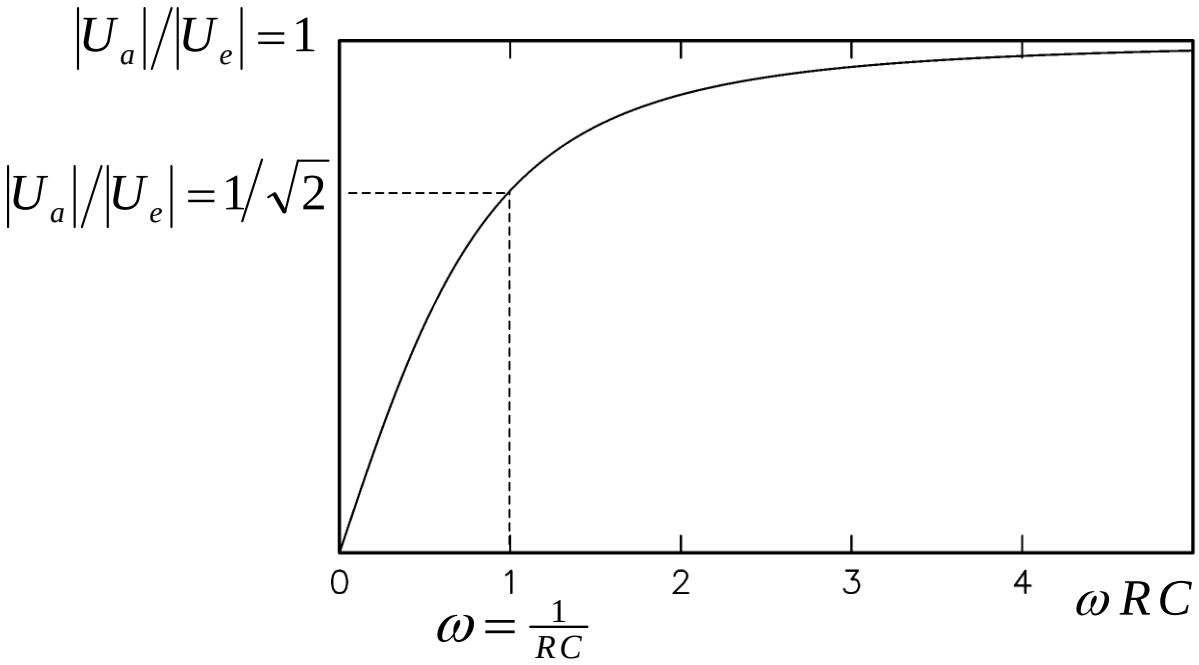


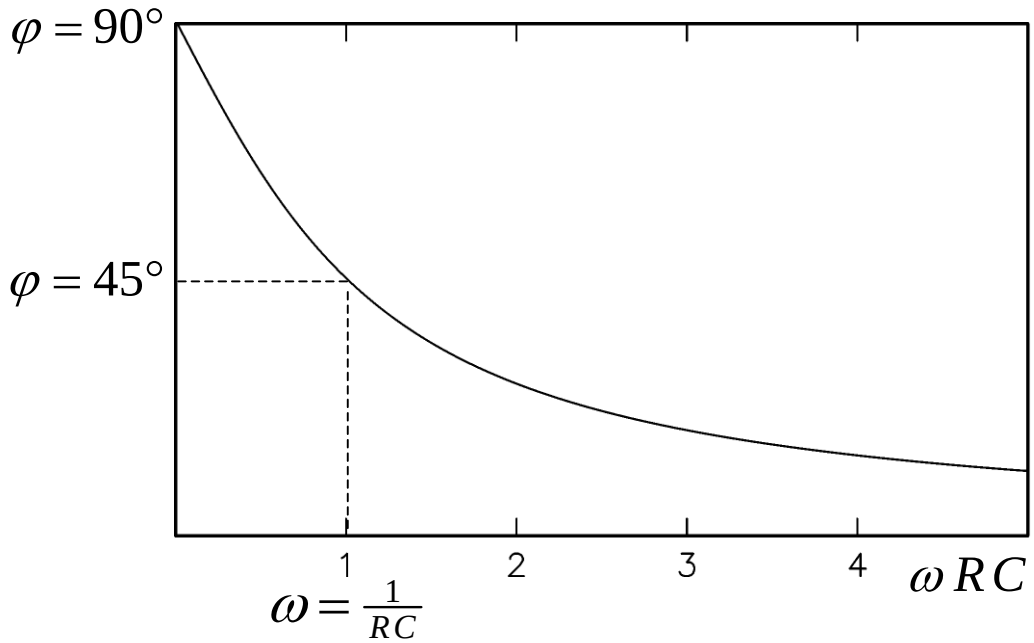
$$U_a = \frac{Z_R}{Z_{ges}} U_e = \frac{R}{R - \frac{i}{\omega C}} U_e$$

Nach kurzer Rechnung erhält man für Betrag und Phase

$$|U_a| = \frac{\omega R C}{\sqrt{1+\omega^2 R^2 C^2}} |U_e| \qquad \varphi = \arctan \frac{1}{\omega R C}$$

Frequenzabhängigkeit:

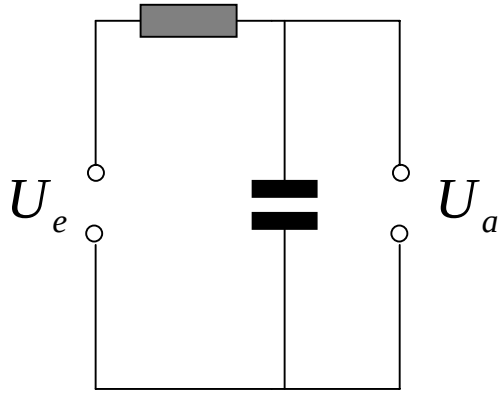




Tiefpass-Filter

Einen Tiefpass-Filter passieren die tiefen Frequenzen, während die hohen Frequenzen unterdrückt werden.

Man kann die Reihenschaltung von Kondensator und Widerstand wieder als Spannungsteiler auffassen.

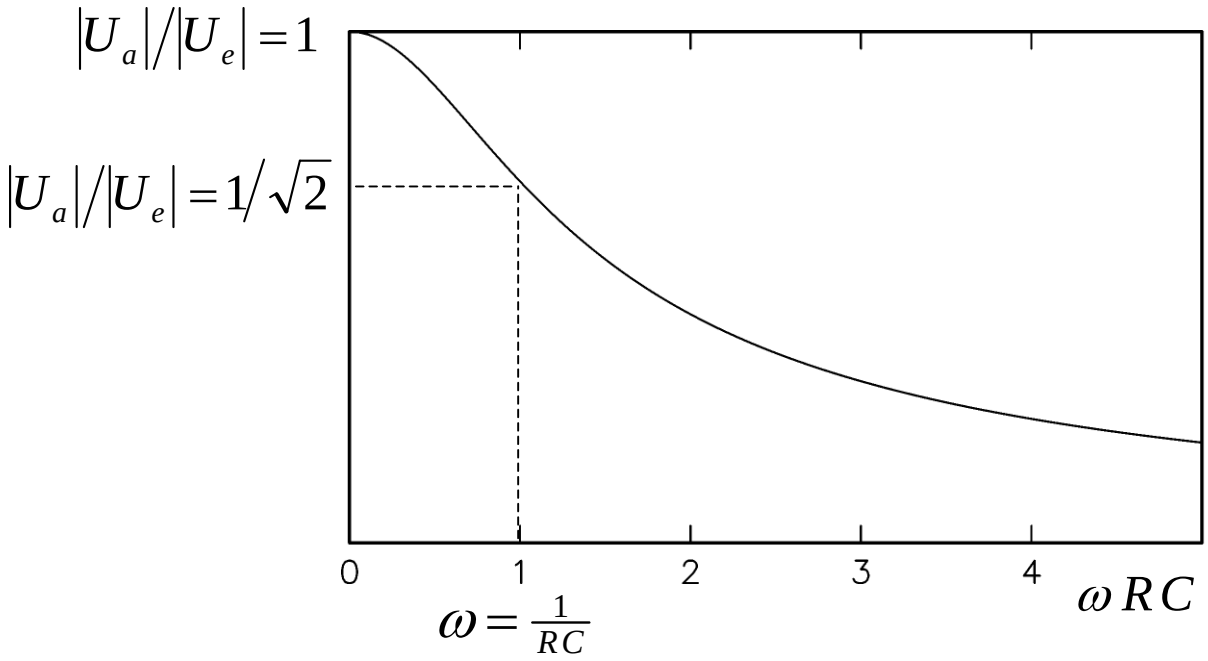


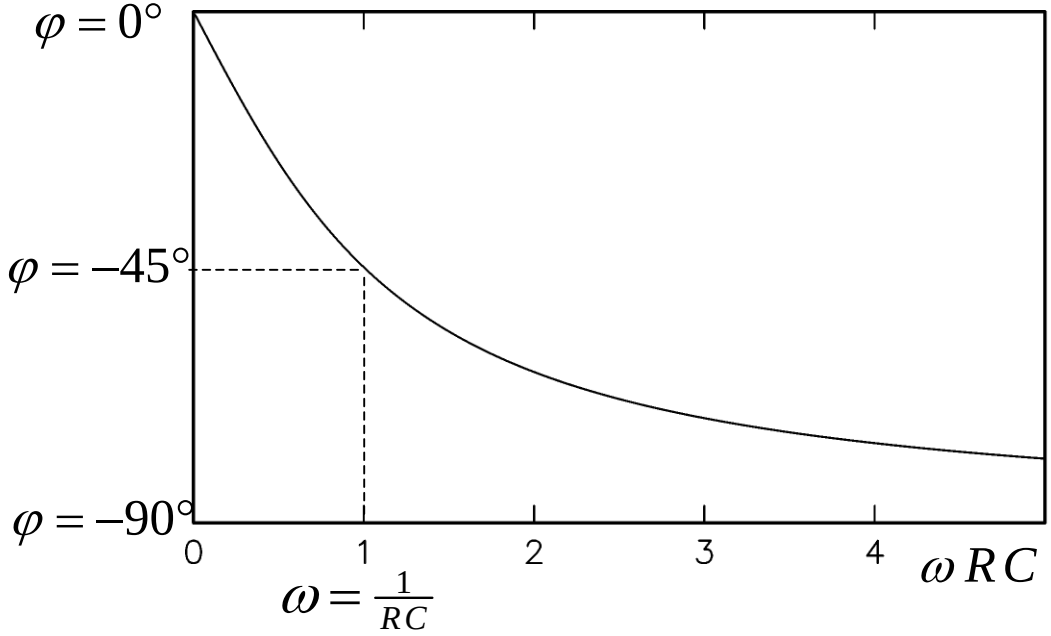
$$U_a = \frac{Z_C}{Z_{ges}} U_e = \frac{-\frac{i}{\omega C}}{R - \frac{i}{\omega C}} U_e = \frac{1}{1 + i\omega RC} U_e$$

Nach kurzer Rechnung erhält man für Betrag und Phase

$$|U_a| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}} |U_e| \qquad \varphi = \arctan(-\omega RC)$$

Frequenzabhängigkeit:



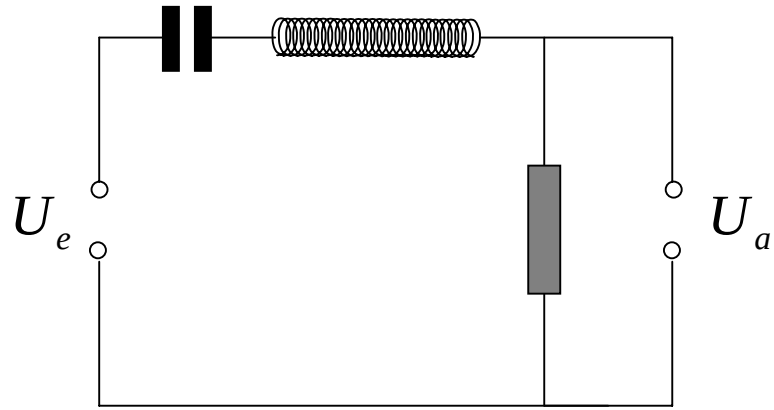


Frequenzfilter (Bandpass)

Aus Widerstand, Kondensator und Spule kann eine Filter für einen schmalen Frequenzbereich aufgebaut werden.

Anwendung: Abstimmung auf einen Radiosender

Die Reihenschaltung erzeugt eine Spannung am Widerstand von

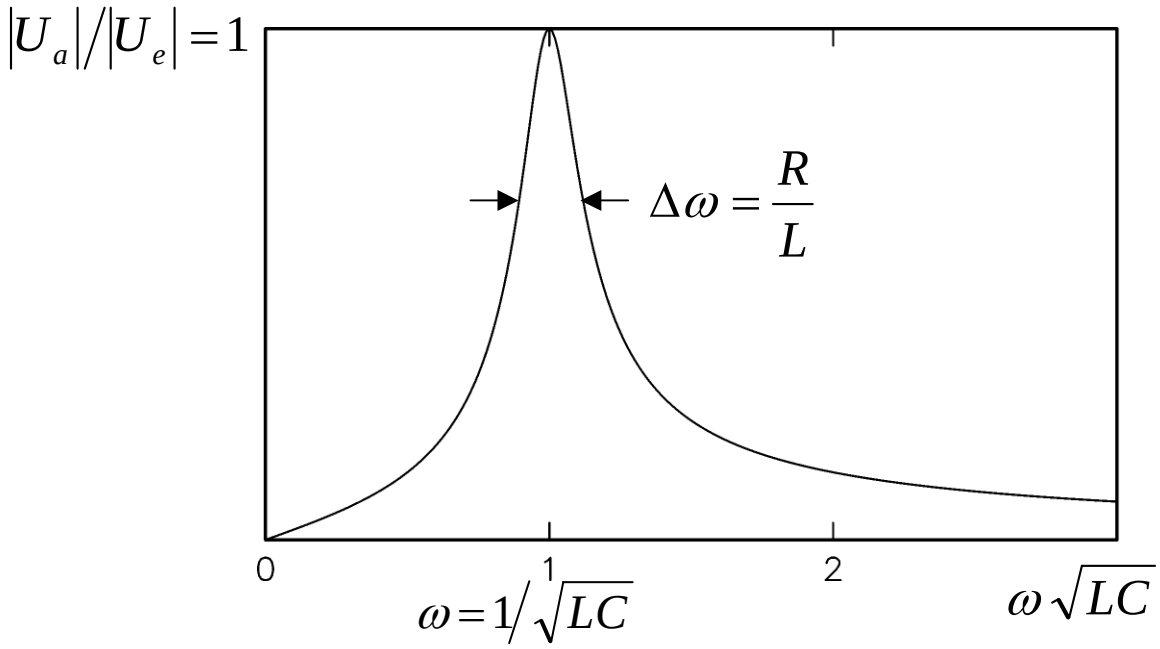


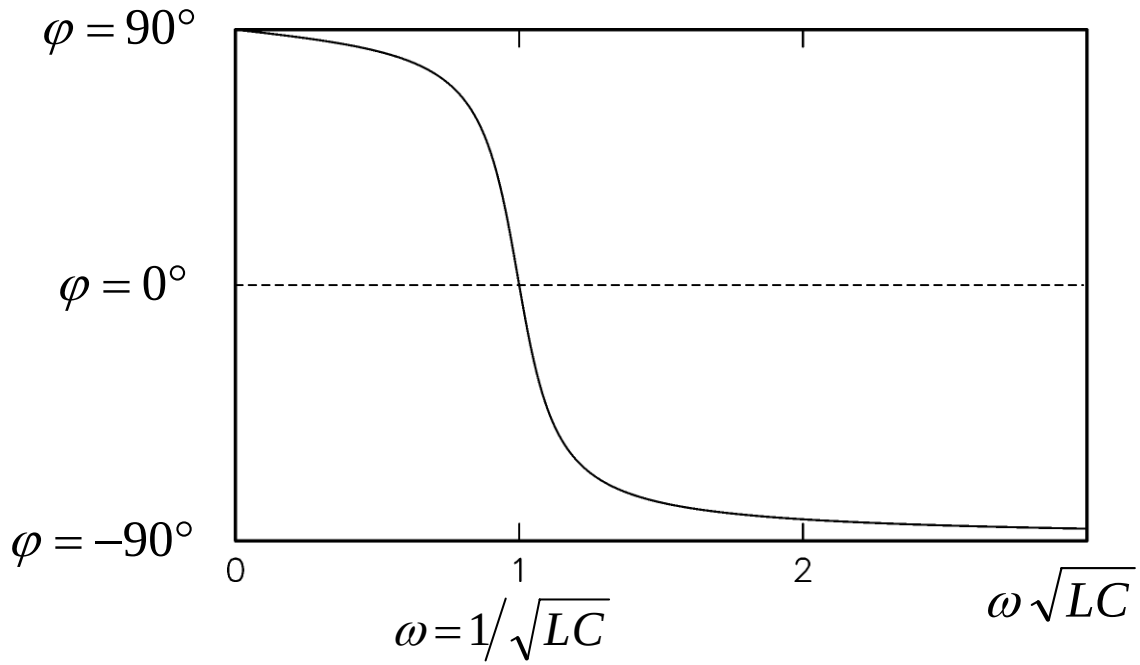
$$U_a = \frac{Z_R}{Z_{ges}} U_e = \frac{R}{R + i\omega L - \frac{i}{\omega C}} U_e$$

Nach kurzer Rechnung erhält man für Betrag und Phase

$$|U_a| = \frac{R}{\sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2}} |U_e| \qquad \varphi = \arctan \frac{\frac{1}{\omega C} - \omega L}{R}$$

Frequenzabhängigkeit:





Elektrischer Schwingkreis

Schaltungen aus Widerstand, Kondensator und Spule verhalten sich analog zu mechanischen Schwingungen.

Die äußere Wechselspannung entspricht der Anregung bei der erzwungenen Schwingung.

Die Energie oszilliert zwischen elektrischer Feldenergie im Kondensator und magnetischer Feldenergie in der Spule.

Der ohmsche Widerstand verursacht Dissipation: (Erzeugung von Wärme) analog zur Reibung in der Mechanik.

Die Schwingungsdauer der ungedämpften Schwingung ist $T = 2\pi\sqrt{LC}$

Es tritt Resonanz auf, wenn die anregende Frequenz nahe der Eigenfrequenz der Schwingung liegt (vgl. Bandpass-Filter).

Bei der Resonanzfrequenz „springt“ die Phase um 180°.

Transformatoren

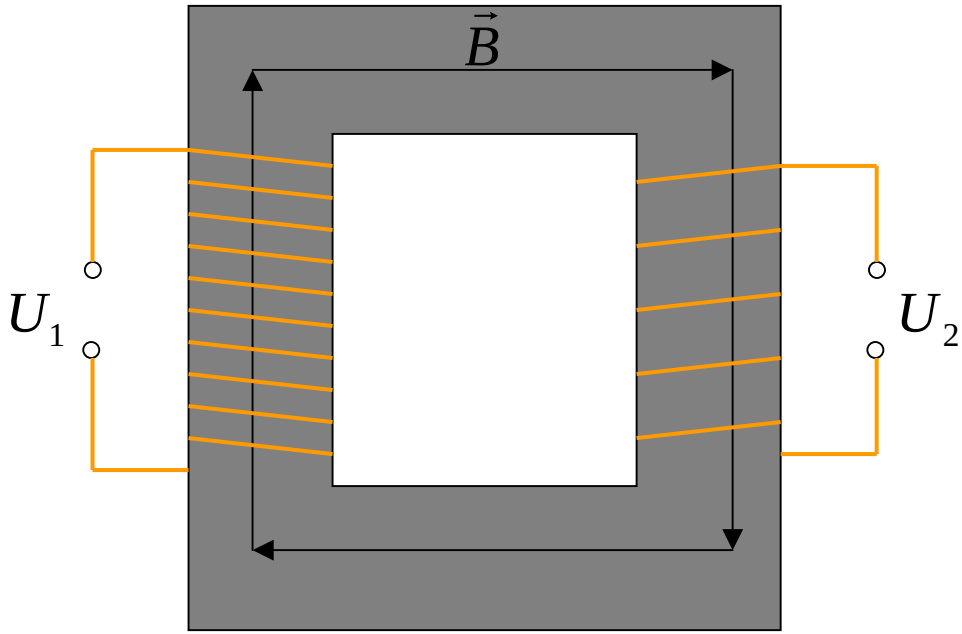
In der Technik sind Transformatoren weit verbreitet.
Zur Übertragung von elektrischer Leistung über weite Strecken ist Hochspannung erforderlich, für elektronische Anwendungen muss auf wenige Volt reduziert werden.

An der Primärspule liegt die Wechselspannung

$$U_1 = U_0 \cos(\omega t)$$

die einen Strom I_1 bewirkt:

$$U_0 \cos(\omega t) = L \frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = N_1 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$



Die selbe Flussänderung $\mathrm{d}\Phi/\mathrm{d}t$ geschieht in der Sekundärwicklung, da alle magnetischen Feldlinien durch beide Spulen verlaufen.

Dadurch wird in der Sekundärwicklung die Spannung

$$U_{ind} = -N_2 \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

induziert. Als Spannungsverhältnis ergibt sich

$$\frac{U_1}{N_1} = \frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t} = -\frac{U_2}{N_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{U_2}{U_1} = -\frac{N_2}{N_1}$$

Beide Spannungen sind um 180° gegeneinander phasenverschoben.

Der Strom

$$\frac{\mathrm{d}I_1}{\mathrm{d}t} = \frac{U_0}{L}\cos(\omega t) \qquad \Rightarrow \qquad I_1 = \frac{U_0}{L}\sin(\omega t)$$

hat eine Phasenverschiebung von 90 Grad gegenüber der Spannung.

Der unbelastete Transformator nimmt daher keine Leistung auf.
(Durch den ohmschen Widerstand der Spule und Verluste bei der Ummagnetisierung des Eisenkerns wird dennoch Leistung aufgenommen.)

Wird an die Sekundärspule ein Verbraucher angeschlossen, fließt auch dort ein Strom (I_2). Dieser Strom ist um 90° phasenverschoben gegenüber dem Strom I_1 und erzeugt eine zusätzliche Flussänderung $d\Phi_2/dt$.

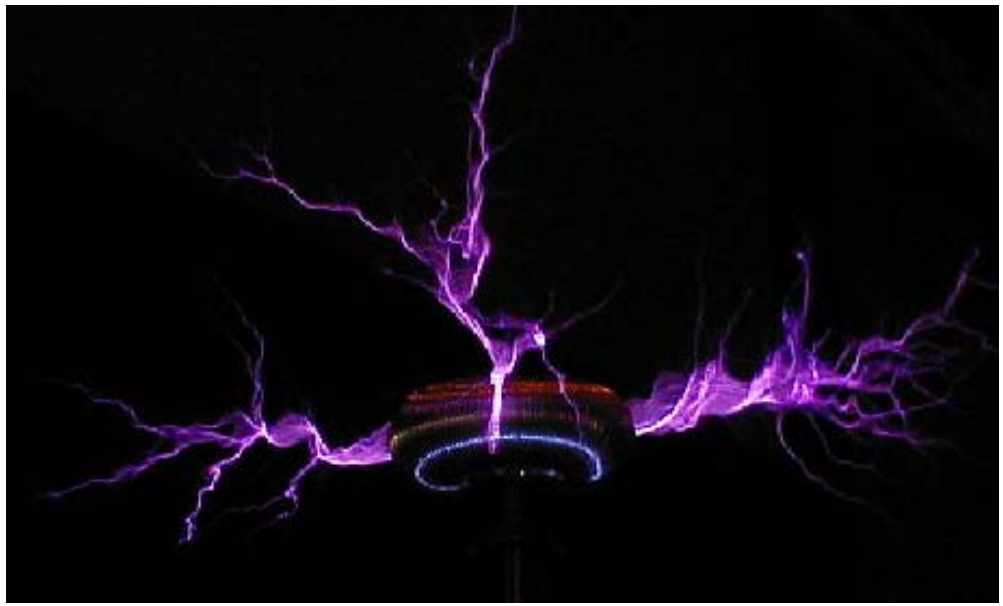
Durch die Phasenverschiebung beider magnetischer Flussänderungen ergibt sich eine Phasenverschiebung von Strom gegenüber Spannung im Primärkreis ungleich 90°.
Dies führt zu einer Leistungsaufnahme im Primärkreis.

Die aufgenommene Leistung wird im Sekundärkreis wieder abgegeben.

Im Transformator treten ohmsche Verluste auf. Zusätzlich treten Verluste bei der Ummagnetisierung des Eisenkerns auf (Fläche der Hystereseschleife).
Im Eisenkern induzierte Wirbelströme verursachen auch Verluste.
Der Kern wird aus dünnen, gegeneinander isolierten Blechen aufgebaut, die die Ausbildung großräumiger Wirbelströme unterbrechen.

Tesla-Trafo

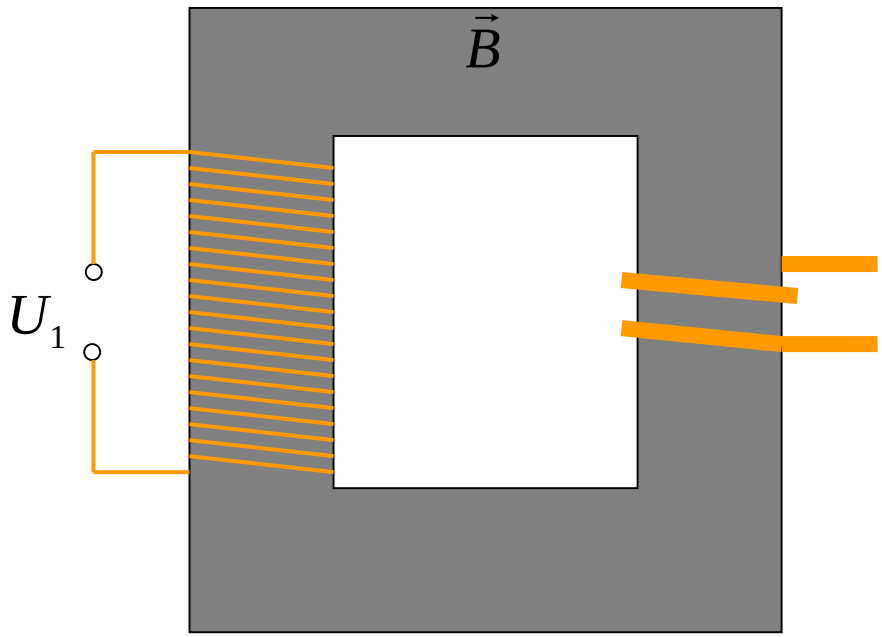
Mit einer Primärwicklung aus sehr wenigen Windungen und einer Sekundärwicklung aus vielen tausend Windungen bei gleichzeitig hohen Spannungen und Frequenzen können sehr große Spannungen erzeugt werden.



Induktionsofen

Wenn die Spannung hochtransformiert wird, wird der maximal entnehmbare Strom auf der Sekundärseite entsprechend kleiner. Die maximal entnehmbare Leistung ist $\leq$ der abgegebenen Leistung an der Primärseite.

Transformiert man die Spannung herunter, können auf der Sekundärseite sehr hohe Ströme fließen.

$\rightarrow$ Elektrisches Schweißen

$\rightarrow$ Induktionsofen