

Kapitel 2

Ausgedehnte Körper und mechanische Spannung

LERNZIELE

- Definition des Begriffes mechanische Spannung.
- Mechanische Spannung als Eigenschaft eines Körpers.
- Unterschied zwischen mechanischer Spannung und Kraft.
- Zusammenhang mechanische Spannung und Dehnung von Körpern.
- Materialeigenschaften (Elastizität, Fließgrenze, Bruchgrenze)
- Funktion von Fasern in Materialien
- Erzeugung von mechanischer Spannung in einem Muskel.
- Wahrnehmung von mechanischer Spannung durch die Sinne des Menschen.
- Mechanische Spannungen in rotierenden Körpern, Gezeitenkräfte
- AFM Kraft-Dehnungskurven an Einzelmolekülen

INHALT

Bahnkurven ausgedehnter Körper

Möchte man die Bahnkurve eines ausgedehnten Körpers untersuchen, dann kann man sich der Punktmechanik bedienen, die im vorigen Kapitel beschrieben wurde. Der Schwerpunkt eines ausgedehnten Körpers folgt genau der Bahn, die eine Punktmasse genommen hätte, auf die bei gleicher Masse die gleichen Kräfte wirken. Die Bahnkurve ist unabhängig davon, ob der Körper rotiert oder seine Form verändert. Selbst der Schwerpunkt eines strampelnden Affen, der vom Baum springt, würde einer Bahnkurve folgen, die eine Punktmasse genommen hätte. Wir beschäftigen uns in diesem Kapitel deshalb nicht weiter mit der Berechnung von Bahnkurven.

Mechanische Spannung

Wir betrachten nun einen ausgedehnten Körper an dem an verschiedenen Orten unterschiedliche Kräfte angreifen. Das können Kräfte unterschiedlicher Stärke oder unterschiedlicher Richtung sein. Durch diese Kräfte entsteht in dem Körper eine mechanische Spannung. Mechanische Spannungen in elastischen Körpern gehen mit Verformungen des Körpers einher. Bei elastischen Körpern kann man die mechanische Spannung unmittelbar daran erkennen, dass dieser Körper verformt ist.

Als einfachstes Beispiel betrachten wir einen langen Stab. Greift an dem einen Ende des Stabes eine Kraft F an, die nach außen gerichtet ist und am anderen Ende eine Kraft $-F$ die auch nach außen gerichtet ist, dann gibt es im Innern des Stabes eine mechanische Spannung entlang des Stabes.



Der Zusammenhang zwischen Kraft und mechanischer Spannung σ ist

$$F = \sigma A$$

wobei A die Querschnittsfläche des Stabes ist.

Mit der mechanischen Spannung im Stab geht eine Dehnung ϵ des Stabes einher. ϵ ist definiert als relative Längenänderung

$$\epsilon = \frac{\Delta L}{L}$$

Hookesches Gesetz

Bei elastischen Materialien ist die Dehnung proportional zur Spannung. Dies nennt man das hookesche Gesetz.

$$\sigma = E \epsilon$$

E ist eine Materialkonstante, das Elastizitätsmodul. Je größer das Elastizitätsmodul eines Materials, umso steifer ist es. Materialien mit großem Elastizitätsmodul werden bei gleicher Spannung weniger gedehnt als Materialien mit kleinem Elastizitätsmodul.

Wenn man die Gleichung mit der Querschnittsfläche des Stabes multipliziert erhält man das hookesche Gesetz in einer anderen Form

$$F = \sigma A = E \epsilon A = \frac{E A}{L} \Delta L$$

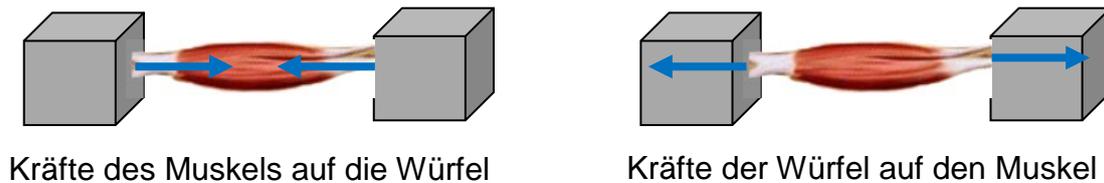
D.h. die Kraft an den Enden des Stabes ist proportional zur Längenänderung des Stabes. In dem einfachen Fall eines Stabes kann man das hookesche Gesetz dann wie bei einer Feder als

$$F = D \Delta L$$

schreiben. Die Federkonstante $D = E A/L$ hängt von der Form des Stabes (Länge und Querschnittsfläche) sowie dem Material (Elastizitätsmodul) ab. Wichtig ist zu bedenken, dass nicht nur eine Kraft auf den Körper wirkt, sondern an beiden Seiten entgegengesetzt gleich große Kräfte F und $-F$ wirken müssen, um den Körper zu dehnen.

Muskelspannung

Muskeln können aktiv eine mechanische Zugspannung im Muskel erzeugen. An der Oberfläche, d.h. an den Enden des Muskels übt der Muskel dadurch Kräfte auf andere Körper aus.



Dieses Verhalten des Muskels kann vereinfacht durch die Kombination aus dem Muskel und der elastischen Sehne beschrieben werden.

Bei einer isometrischen Kontraktion bleibt die Länge des Systems konstant. Der Muskel verkürzt sich und die Sehne wird gedehnt. Durch die Dehnung der elastischen Sehne steigt die Spannung in Muskel und Sehne an und es entstehen Kräfte an beiden Enden des Systems.

Bei einer isotonischen Kontraktion bleibt die mechanische Spannung konstant, und das System aus Muskel und Sehne verkürzt sich.

Bei Dehnung eines passiven Muskels steigt seine Spannung an. Die Spannungs-Dehnungs-Kurve in Ruhe ist nicht linear sondern progressiv steifer, d.h. je mehr ein Muskel gedehnt wird, umso größer wird sein Elastizitätsmodul.

Für die physiologischen Details der Muskelkontraktion siehe z.B. das Kapitel Kontraktionsmechanismen in Schmidt, Lang, Thews, Physiologie des Menschen https://link.springer.com/content/pdf/10.1007%2F3-540-26416-7_6.pdf

Sinneswahrnehmung

Der menschliche Körper hat einen Sinn für mechanische Spannung im eigenen Körper. Man fühlt Spannungen und nicht Kräfte.

Beispiel 1: Im freien Fall wirkt eine Gesamtkraft auf den Körper, aber er ist spannungsfrei, da die Gravitationskraft auf jedes Massenelement gleich wirkt. In der Schwerelosigkeit fühlt man die Gravitation nicht, da keine Spannung im Körper vorhanden ist.

Beispiel 2: Man steht auf dem Boden. Es wirkt die Gewichtskraft auf jedes Massenelement und eine Kraft vom Boden auf die Fußsohlen. Die Gesamtkraft auf den Körper ist null. Im Körper ist eine Druckspannung, die in den Beinen besonders groß ist. Diese Druckspannung fühlt man.

Wenn an verschiedenen Orten unterschiedliche Kräfte auf den Körper wirken, resultieren Spannungen im Körper. Wirken nur homogene Volumenkräfte resultiert keine Spannung im Körper (Schwerelosigkeit). Sind die Volumenkräfte ortsabhängig, dann resultieren Spannungen im Körper (Gezeitenkräfte bei rotierenden Körpern).

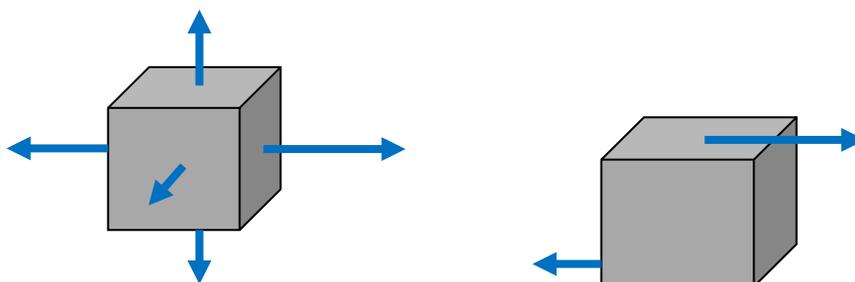
Druck

Sind die äußeren Kräfte bei einem langen Stab nach innen gerichtet, dann steht der Stab unter einer negativen Spannung. Negative mechanische Spannungen nennt man auch Druck oder Druckspannung. Z.B. steht eine Flüssigkeit unter Druck, wenn auf die Seitenwände Kräfte nach innen wirken. Flüssigkeiten können nicht unter positiven mechanischen Spannungen stehen, da sie immer einfach verdampfen würden. Positive mechanische Spannungen also Zugspannungen beobachtet man nur bei Festkörpern.



Dreidimensionale Spannungen und Dehnungen

Betrachtet man dreidimensionale Körper, auf die Kräfte in allen drei Raumrichtungen wirken können, dann ist die Situation etwas komplizierter (siehe Abb. Links). Es können mechanische Spannungen in allen drei Raumrichtungen auftreten und mit diesen Dehnungen in allen drei Raumrichtungen einhergehen. Diese Situation wird mit Kraft-Vektoren und Spannungsmatrizen beschrieben und ist mathematisch sehr kompliziert. In dieser Situation kann man auch zwischen Normalspannungen (linkes Bild) und Scherspannungen (rechtes Bild) unterscheiden.



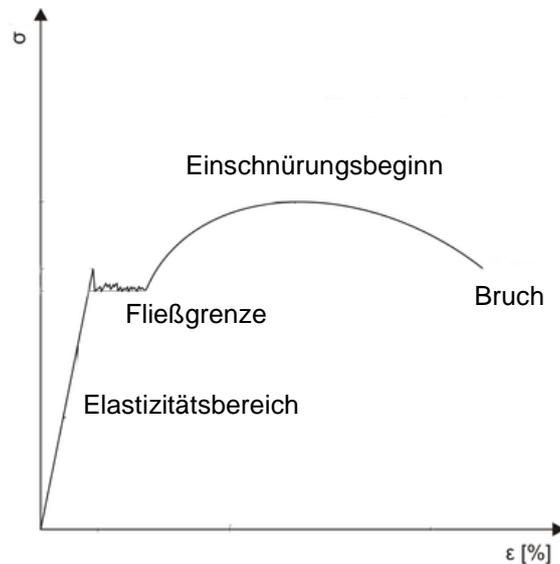
Eine weitere Komplikation kommt ins Spiel durch die sogenannte Querkontraktion. Ein Stab den man dehnt, wird etwas dünner bei der Dehnung. Dies verkompliziert die mathematische Beschreibung in drei Dimensionen nochmals erheblich. Daher betrachten wir hier solche Fälle nicht.

Fließgrenze

Die Elastizität von Materialien wie Metallen ist meistens bei sehr großen mechanischen Spannungen nicht mehr gegeben. Das Material reagiert dann durch eine irreversible

Verformung bei der sich die Atome nachhaltig gegeneinander verschieben. Dies beobachtet man z.B. wenn man einen Draht sehr lang ziehen würde, so dass er sich nicht mehr auf die ursprüngliche Länge verkürzt, wenn die Spannung nachlässt. Auch beim Schmieden von Metall wird durch die kurzzeitig großen Spannungen unter den Hammerschlägen die Fließgrenze eines Materials überschritten, so dass es nachhaltig verformt wird.

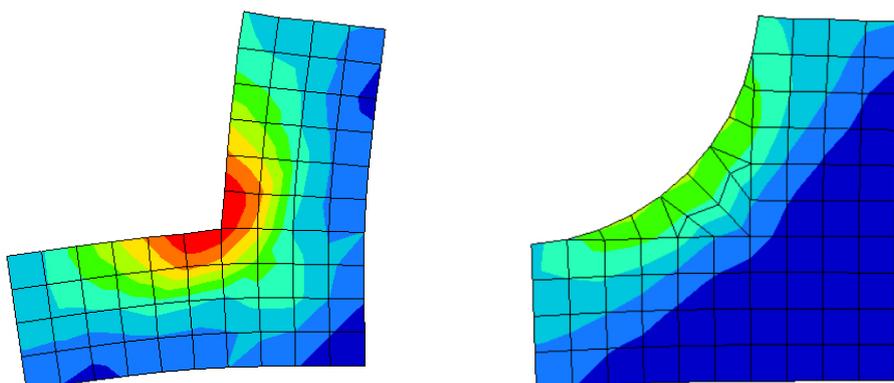
Der Zusammenhang zwischen Spannung und Dehnung wird in dem Spannungs-Dehnungs-Diagramm dargestellt.



Video mit Experiment: <https://www.youtube.com/watch?v=fEbkcTBNiGg>

Bruchgrenze, Risse

Weiterhin gibt es eine Bruchgrenze. Überschreitet die Spannung einen bestimmten Wert dann bilden sich Risse und das Material reißt bzw. bricht in zwei Teile. Risse entstehen immer dort wo die Spannung am größten ist. In kompliziert geformten Körpern, auf die unterschiedliche Kräfte an unterschiedlichen Orten wirken, herrscht eine mechanische Spannung im Innern, die von Ort zu Ort sehr unterschiedlich sein kann. An bestimmten Punkten insbesondere an Innenecken des Körpers treten besonders große Spannungen auf (siehe linkes Bild, rot große Spannung, blau kleine Spannung).

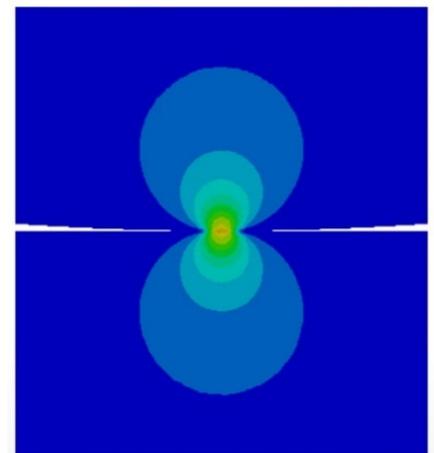


An solchen Stellen bilden sich als erstes Risse. Ein Beispiel dafür wäre zum Beispiel eine Astgabel oder ein Ast der aus einem Baumstamm wächst. An der Ecke zwischen Ast und Baumstamm ist die Spannung am größten, wenn Ast und Baumstamm unter mechanischer Spannung stehen. Man beobachtet daher in der Natur, dass solche Innenecken mit Material gefüllt werden und ein Ast nicht mit einer scharfen Kante am Baum wächst sondern mit einer Rundung. Je geringer die Krümmung der Materialoberfläche, umso geringer ist die mechanische Spannung an der Materialoberfläche (siehe rechtes Bild).

Siehe auch Abb. 4 in <http://rspb.royalsocietypublishing.org/content/280/1772/20132244>

Auch bei Knochen des menschlichen Körpers beobachtet man, dass es keine scharfen Ecken gibt. Dadurch ist der Knochen stabiler. Es ist bekannt, dass das Knochenwachstum unter mechanischer Spannung gefördert wird. Dadurch wächst der Knochen am stärksten dort, wo die mechanische Spannung am größten ist. Dies führt dazu, dass solche Innenecken vermieden werden und sich mit Knochenmaterial füllen. So vermeidet der Körper Gefahrenstellen im Knochen, an denen Rissbildung als erstes auftreten würde.

Bei punktuellen Berührungen entstehen lokal sehr große mechanische Spannungen. Im Folgenden Bild ist die Berührung einer Kugel (oben) mit einer ebenen Fläche (unten) gezeigt. In beiden Körpern entsteht in der Umgebung der Berührung eine große Spannung. Es ist an dem Bild auch gut zu beobachten, dass bei Berührung von zwei Körpern, die mechanische Spannung auf beiden Seiten der Berührungsfläche gleich groß ist.



Faserverstärkte Materialien

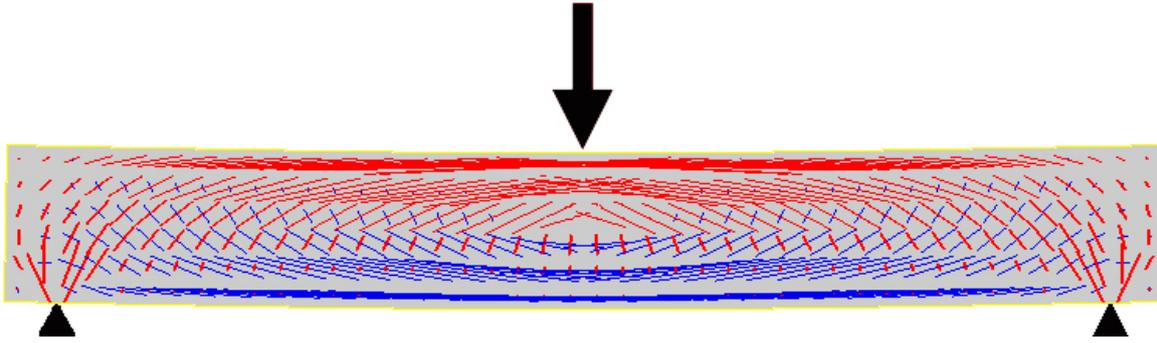
In einem dreidimensionalen Material, das unter Spannung steht, kann man Richtungen identifizieren, entlang derer die mechanische Spannung am größten ist (Hauptspannungen). In der Natur sind viele Materialien nicht isotrop sondern sind mit Fasern verstärkt. Für eine optimale Festigkeit sollten die Fasern entlang der Richtung verlaufen, in der die maximale Zugspannung auftritt.

Bei einem Baumstamm oder Pflanzenstengel, der im Wind gebogen wird, verlaufen die maximalen Spannungen entlang des Stammes insbesondere auf der Außenseite des Stammes. In dieser Richtung sind auch die Holzfasern orientiert.

Beton kann als Werkstoff große Druckspannungen aushalten, aber bei vergleichsweise kleinen Zugspannungen reißt er. Daher wird Beton als Stahlbeton mit Stahl-„Fasern“ verstärkt, die bei optimaler Ausrichtung entlang der Hauptspannungsrichtung mit maximaler Zugspannung verlaufen. Moderne Werkstoffe wie kohlefaserverstärkte Kunststoffe machen sich dieses Prinzip ebenfalls zu nutze.

Im folgenden Bild sind die Hauptspannungen dargestellt – Spannung in Blau und Druck in Rot. Die Hauptspannungsrichtungen geben die Richtungen der maximalen Spannung bzw. des maximalen Drucks an. An jedem Punkt im Material steht die Richtung maximaler Spannung

immer senkrecht auf der Richtung maximalen Drucks, wie in dem Bild gut sichtbar ist. Lange Linien bedeuten große Werte und kurze Linien kleine Werte.



Man sieht deutlich, dass an den Auflagern große Drücke auftreten. In der unteren Hälfte des Balkens, die bei der Durchbiegung gedehnt wird, treten Spannungen auf (blaue Linien), die weitgehend parallel zum Balken verlaufen. Auf der Oberseite des Balkens treten Drücke auf (rote Linien), die ungefähr parallel zum Balken verlaufen. Wollte man das Material mit Fasern verstärken, dann müssten diese den Richtungen der blauen Linien folgen

Kraft oder Spannung

Für die Argumentation bei der mechanischen Belastung von ausgedehnten Körpern ist es besser, mit der mechanischen Spannung zu argumentieren als mit Kräften. Eine einzelne Kraft auf einen Knochen würde diesen Knochen beschleunigen, z.B. wenn man den Knochen nach oben wirft. Um Stabilität und elastische Verformung von Knochen zu betrachten, muss man die mechanische Spannung im Knochen betrachten. Die mechanische Spannung im Knochen hängt mit den Kräften zusammen, die an unterschiedlichen Orten auf den Knochen wirken und in der Summe die Gesamtkraft Null ergeben (Statik). Ergibt sich eine Gesamtkraft auf den Knochen, dann wird er auch beschleunigt.

Gezeitenkräfte

Rotierende Körper stehen durch sogenannte Gezeitenkräfte unter mechanischer Spannung. Dies kann auf zwei unterschiedliche Weisen beschrieben werden.

Bei Verwendung eines Inertialsystems als Bezugssystems müssen die Punkte, die weit von der Drehachse entfernt sind, durch eine Zentripetalkraft auf die Kreisbahn gezwungen werden. Je weiter ein Masselement von der Drehachse entfernt ist, umso größer ist die Zentripetalkraft.

Eine andere Beschreibung verwendet ein rotierendes Bezugssystem, das sich mit dem Körper mitdreht. Jetzt ruht der Körper in dem rotierenden Bezugssystem (Statik kann angewendet werden). In diesem rotierenden Bezugssystem tritt die Zentrifugalkraft auf, eine Scheinkraft, die durch die Rotation des Bezugssystems zustande kommt. Die Zentrifugalkraft ist nach außen, weg von der Rotationsachse gerichtet. Sie ist umso größer, je größer der Abstand zur Achse und je schneller die Rotation des Körpers ist.

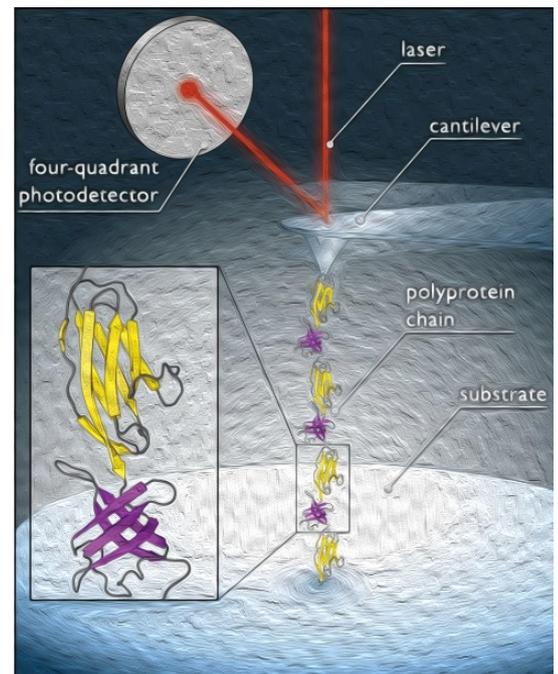
Unabhängig davon, welche Beschreibung man wählt, ergibt sich im Körper immer die gleiche Spannungsverteilung. Mit der mechanischen Spannung in dem rotierenden Körper geht eine Verformung des Körpers einher. So ist z.B. unsere Erde durch ihre Rotation um die eigene Achse etwas oblat verformt ist (Radius am Pol: 6.356.752 m, Radius am Äquator: 6.378.137 m, Differenz: 21.385 m).

Zentrifuge

Betrachten wir jetzt eine Zentrifuge. In einer Zentrifuge wirken Zentrifugalkräfte auf jedes Massenelement. Der rotierende Teil der Zentrifuge steht dadurch unter erheblichen mechanischen Spannungen. Befindet sich in der Zentrifuge ein Behälter mit einer Flüssigkeit und Schwebeteilchen darin, dann wirkt auf diese Schwebeteilchen ebenso die Zentrifugalkraft radial nach außen (von der Achse weggerichtet). Je schneller die Zentrifuge rotiert, umso größer ist diese Kraft. Auch der Abstand von der Achse ist entscheidend. Je größer der Abstand umso größer die Kraft. In Ultrazentrifugen ist die Kraft auf die Schwebeteilchen um einen Faktor 100.000 größer als die Gravitationskraft auf die gleichen Schwebeteilchen im Gravitationsfeld der Erde. Dadurch bewegen sich die Teilchen sehr viel schneller in der Flüssigkeit als sie im Gravitationsfeld der Erde auf den Boden sinken würden.

AFM

Betrachten wir nun Kraft-Dehnungs-Kurven in einem Kraftmikroskop (AFM). Wenn ein großes Molekül zwischen einem Körper und der Spitze des AFM befestigt ist, dann kann auf dieses Molekül eine Kraft durch die AFM Spitze (nach außen gerichtet) und eine Kraft auf der anderen Seite durch den anderen Körper (ebenfalls nach außen gerichtet) ausgeübt werden. Dadurch entsteht eine mechanische Spannung in dem Molekül, mit der eine Dehnung des Moleküls einhergeht. Erhöht man langsam die äußeren Kräfte, dann nimmt die Spannung und die damit einhergehende Dehnung des Moleküls zu. Ähnlich zu der Fließgrenze bei Metallen, die wir oben besprochen haben, kann es zu irreversiblen Längenänderungen des Moleküls kommen, wenn sich z.B. eine Faltung in einem gefalteten Molekül öffnet. Bei weiter zunehmenden Kräften und weiter ansteigender Spannung im Molekül, öffnen sich nacheinander alle Faltungen, bis das Molekül vollkommen gestreckt ist. Bei weiter steigender Spannung reißt das Molekül oder es trennt sich von der Spitze oder dem anderen Körper ab. Solche Kraft-Dehnungs-Kurven werden zur Untersuchung großer Biomoleküle in der Kraftmikroskopie verwendet. Man spricht in diesem Zusammenhang auch von Kraftspektroskopie.



Videos:

<https://www.youtube.com/watch?v=xATMav9-cf0>

https://www.youtube.com/watch?v=1mdDbLPWq_Y

FRAGEN

- Gibt es einen Punkt in einem ausgedehnten Körper, der genau der Bahnkurve folgt der eine Punktmasse folgen würde auf die die gleiche Gesamtkraft wirkt?
- Wie müssen Kräfte an einem Körper angreifen, sodass im Inneren des Körpers eine mechanische Spannung entsteht?
- Was ist der Unterschied zwischen Kraft und mechanischer Spannung?
- Macht es Sinn von Kräften im Körper zu sprechen oder ist es besser von Kräften zwischen Körpern zu sprechen?
- Ist es korrekt von mechanischen Spannungen in ausgedehnten Körpern zu sprechen oder muss man von Spannungen zwischen Körpern sprechen?
- Geben Sie den Zusammenhang zwischen Kräften an den Enden eines langen Stabes und der mechanischen Spannung im Stab an.
- Wie hängt mechanische Spannung und Dehnung eines Körpers zusammen?
- Geben Sie das hookesche Gesetz für einen Stab an, indem sie Spannung und Dehnung als Formelzeichen verwenden.
- Geben Sie das hookesche Gesetz an, indem sie die Kraft am Ende des Stabes und Längenänderung des Stabes verwenden.
- Zeichnen Sie eine Situation in der ein Muskel mit zwei Körpern an seinen Enden verbunden ist und zeichnen Sie die Kräfte ein, die der Muskel auf die Körper ausübt, wenn sich die Muskelfasern kontrahieren.
- Fühlt man eher Kräfte oder mechanische Spannungen im eigenen Körper? Geben Sie dafür Beispiele an.
- Was ist der Unterschied zwischen Druck und Zugspannung?
- Was ist der Unterschied zwischen einer Normalspannung und einer Scherspannung?
- Wie verhalten sich Materialien oberhalb der Fließgrenze?
- Was ist eine Bruchgrenze?
- Nennen sie Orte in einem ausgedehnten Körper, an denen besonders große mechanische Spannungen vorliegen.
- Wie verlaufen Wachstumsprozesse in der Natur, um Formen zu vermeiden, bei denen an bestimmten Punkten sehr große Spannungen auftreten?

- In der Natur gibt es Materialien die durch Fasern verstärkt sind. Geben Sie an, in welcher Richtung die Fasern verlaufen sollten, um dem Material unter Belastung eine große Festigkeit zu geben.
- Wenn man die Stabilität von ausgedehnten Körpern unter Belastung diskutieren möchte, ist es dann besser mit Kräften oder mit mechanischen Spannungen zu argumentieren?
- Warum treten in rotierenden Körpern mechanische Spannungen auf?
- Wie verformt sich eine elastische rotierende Kugel?
- Welche Spannungen und welche Kräfte treten in einer Zentrifuge auf?
- Von welchen Größen hängt die Kraft auf ein Schwebeteilchen in einer Flüssigkeit ab, das sich in einer Zentrifuge befindet?
- Wie sehen Kraft-Dehnungskurven von gefalteten Einzelmolekülen aus, die mit einem AFM gemessen werden?