

Bachelorarbeit

Stabilisierung eines Diodenlasersystems für Rydberg-Anregung

1. Oktober 2023

Von

Mahsoum Shafkat

35538116

Betreuer:

Prof. Dr. Kilian Singer

Prof. Dr. Daqing Wang

Inhaltsverzeichnis

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Einleitung | 2 |
| 2 | Bestandteile des PDH | 3 |
| 2.1 | Faraday-Isolator | 4 |
| 2.2 | Pockels-Zelle | 5 |
| 2.3 | $\frac{\lambda}{4}$ -Platte | 6 |
| 2.4 | Fabry-Perot-Resonator | 6 |
| 2.4.1 | Stabilitätskriterien des Fabry-Perot-Resonators | 8 |
| 2.4.2 | Der reflektierte Strahl aus dem Fabry-Perot-Resonator | 9 |
| 3 | Modulation des Laserstrahls | 10 |
| 4 | Modulation des reflektierten Strahls | 11 |
| 5 | Das Fehlersignal | 12 |
| 5.1 | Langsame Modulation | 12 |
| 5.2 | Schnelle Modulation | 13 |
| 6 | PID-Regler | 14 |
| 7 | Experimenteller Teil | 15 |
| 8 | Auswertung | 17 |
| 8.1 | Die Finesse des Fabry-Perot-Resonators | 17 |
| 8.2 | Fehlersignal mit unterschiedlichen Modulationsfrequenzen Ω | 19 |
| 8.3 | Fehlersignal mit unterschiedlichen Modulationsamplituden β | 23 |
| 9 | Zusammenfassung | 24 |

1 Einleitung

In dieser Arbeit wird ein Diodenlasersystem stabilisiert. Für die Stabilisierung dieses Systems wird das Pound-Drever-Hall-Verfahren verwendet. Das Pound-Drever-Hall-Verfahren (PDH-Verfahren) ist eine moderne Technik zur Stabilisierung von Laserfrequenzen. Es wurde von Robert Pound, Ronald Drever und John Lewis Hall entwickelt, weshalb es nach ihnen benannt wurde. Es bildet einen essenziellen Bestandteil von Technologien, die einen Laser mit stabilen Frequenzen erfordern, wie beispielsweise die Rydberg-Anregung. Das Verfahren basiert darauf, die Resonanzfrequenz konstant zu halten, während der Laserstrahl durch einen Fabry-Perot-Resonator geleitet wird. In dieser Arbeit wird der theoretische und experimentelle Hintergrund dieses Verfahrens erläutert. Um das Verfahren zu verstehen, wird zunächst die Funktionsweise der optischen und elektrischen Bauteile erklärt.

2 Bestandteile des PDH

Das Experiment lässt sich in optische und elektrische Teile unterteilen. Die optischen Teile sind ein Laser, ein Faraday-Isolator, eine Pockels-Zelle, $\frac{\lambda}{4}$ -Plättchen und ein Fabry-Perot-Resonator. Die elektrischen Teile bestehen aus einem Photodetektor, einem lokalen Oszillator, einem Phasenverschieber, einem Mixer, einem Low-Pass-Filter und einem PID-Regler, wie Abbildung 1 zeigt.

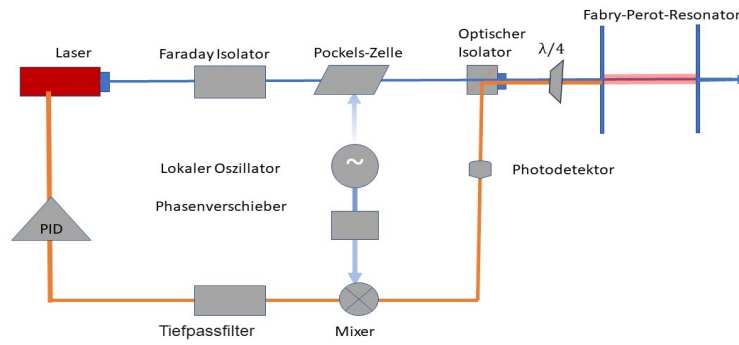


Abbildung 1: zeigt eine Skizze des PDH

2.1 Faraday-Isolator

Der Faraday-Isolator besteht aus einem Eingangspolarisator, einem Faraday-Rotator und einem Ausgangspolarisator. Der Eingangspolarisator lässt vertikal polarisiertes Licht passieren. Mit dem Faraday-Rotator wird die Polarisationsrichtung um 45° gedreht und der Ausgangspolarisator ermöglicht dem um 45° gedrehten Licht den Isolator zu verlassen. Wenn das rückläufige Licht auf den Faraday-Rotator fällt, wird es um 45° gedreht, damit ist das Licht horizontal polarisiert. Das bedeutet das Licht wird ausgelöscht. Siehe Abbildung 2.

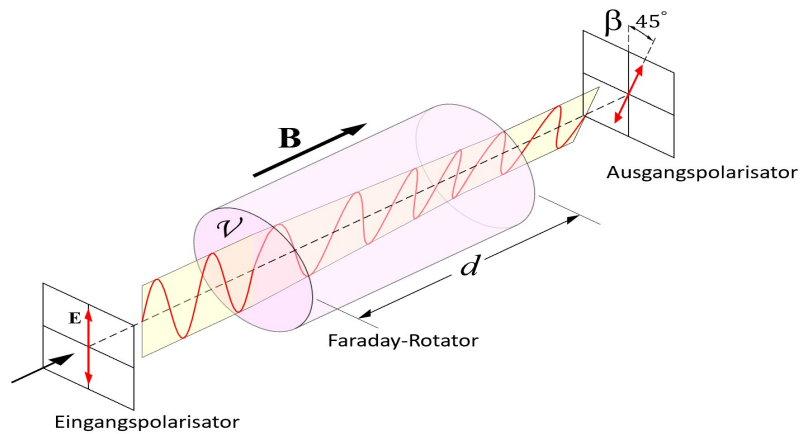


Abbildung 2: zeigt den Faraday-Isolator [con23]

2.2 Pockels-Zelle

Mithilfe der Pockels-Zelle wird das Laserlicht moduliert. Diese Zelle besteht aus einem doppelbrechenden Kristall, der in ein elektrisches Feld eingebettet ist und durch Elektroden erzeugt wird, wie in Abbildung 3 dargestellt ist. Durch Variation der angelegten Spannung wird der Brechungsindex des Kristalls verändert. Der Brechungsindex ist direkt mit dem elektrischen Feld und der angelegten Spannung verknüpft, wie die folgende Gleichung zeigt:

$$\Delta n = n_0^3 \cdot r_{\text{eff}} \cdot E = n_0^3 \cdot r_{\text{eff}} \cdot V \cdot d \quad (1)$$

Dabei steht Δn für die Modulation des Brechungsindexes, n_0 für den unveränderten Brechungsindex, r_{eff} für den effektiven Elektro-Optischen Tensor, E für das elektrische Feld, V für die Spannung und d für den Abstand zwischen den Elektroden. Die verwendete Spannung ist eine Wechselspannung. Das bedeutet, der Brechungsindex oszilliert mit der Änderung der Wechselspannung. Außerdem hängt die Phase des eingehenden Laserstrahls vom Brechungsindex des Kristalls ab. Das bedeutet, wenn der Laserstrahl die Pockels-Zelle passiert, wird die Phase der eingehenden Welle moduliert [223]:

$$E(t, x) = E e^{-i(\omega t - \frac{\omega}{c} x n)} \quad (2)$$

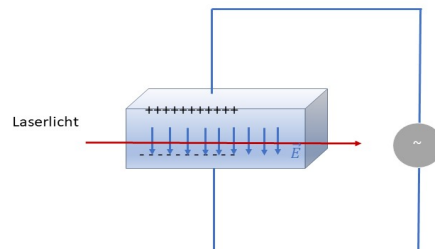


Abbildung 3: die Pockels-Zelle

2.3 $\frac{\lambda}{4}$ -Platte

Bei der $\frac{\lambda}{4}$ -Platte handelt es sich um ein optisches Element das unterschiedliche Brechungsindexe für unterschiedliche Ausbreitungsrichtungen hat. Die Richtung mit schneller Ausbreitung des Lichts wird schnelle Achse genannt und die senkrecht stehende Achse wird als langsame Achse bezeichnet. Wenn ein zirkular polarisiertes Licht auf die $\frac{\lambda}{4}$ -Platte fällt wird das Licht, parallel zu der schnellen Achse schneller durch die $\frac{\lambda}{4}$ -Platte dringen als das Licht parallel zur langsamen Achse. Nach dem Durchlaufen weist das Licht eine Phasenverzögerung von $\frac{\pi}{2}$ auf. Allgemein ist die Phasenverschiebung von $\frac{\lambda}{m}$ -Platte gegeben durch:

$$\Delta\phi = \frac{2\pi}{\lambda_0} d(n_{\text{schnell}} - n_{\text{langsam}}). \quad (3)$$

wobei $\Delta\phi$ die Phasenverschiebung, λ_0 die Wellenlänge des ausfallenden Lichts, d die Dicke der Platte, n_{schnell} der Brechungsindex der schnellen Achse, n_{langsam} der Brechungsindex der langsamen Achse sind. Wenn die obige Formel so ausgewählt ist, dass $\Delta\phi = \frac{\pi}{2}$ ist, dann wird eine $\frac{\lambda}{4}$ -Platte erzeugt.

2.4 Fabry-Perot-Resonator

Der Fabry-Perot-Resonator ist das zentrale Element des PDH-Verfahrens. Er setzt sich aus zwei parallelen Spiegeln mit den Reflexionskoeffizienten R_1 und R_2 sowie den Transmissionskoeffizienten T_1 und T_2 zusammen. Wenn ein Lichtstrahl auf die Oberfläche des ersten Spiegels trifft, wird ein Teil des Lichts reflektiert, während ein anderer Teil transmittiert wird. Eine stehende Welle entsteht, wenn der Abstand zwischen den Spiegeln L eine natürliche Zahl n halber Wellenlängen λ des Lichts beträgt. Anders ausgedrückt, fungiert der Fabry-Perot-Resonator als Filter. Wenn ein Lichtstrahl unter dem Winkel θ auf den Fabry-Perot-Resonator trifft, wie in Abbildung 4 dargestellt, ergibt sich die Phase des transmittierten Lichts ϕ durch die folgende Beziehung:

$$\phi = kz. \quad (4)$$

Wobei $z = a + b$ der Abstand, siehe Abbildung 4, und $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ die Wellenzahl sind.

Die Strecke $(a + b)$ lässt sich durch den Abstand zwischen den beiden Spiegeln wie folgt ausdrücken:

$$z = a + b = \frac{L}{\cos\theta} + a \cos 2\theta = 2L \cos\theta. \quad (5)$$

Damit ergibt sich die Phase ϕ durch :

$$\phi = \frac{4\pi}{\lambda} L \cos\theta = \frac{4\pi\nu}{c} L \cos\theta. \quad (6)$$

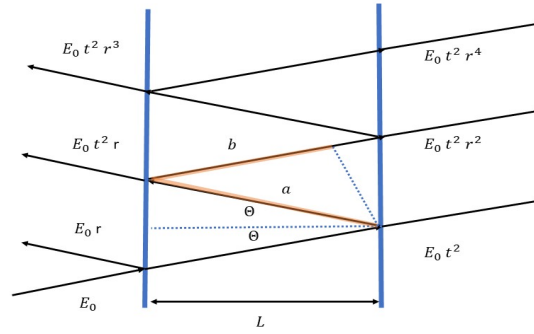


Abbildung 4: zeigt den Strahlenverlauf durch den Fabry-Perot-Resonator

Wobei c die Lichtgeschwindigkeit und ν die Frequenz des Lichts sind. Die transmittierte Wellenfront des Lichts E_t ergibt sich durch:

$$E_t = E_0 t^2 + E_0 t^2 r^2 e^{i\phi} + E_0 t^2 r^4 e^{2i\phi} + \dots = E_0 t^2 (1 + r^2 e^{i\phi} + r^4 e^{2i\phi} + \dots) \quad (7)$$

Wobei r der Reflexionskoeffizient der Spiegel, t der Transmissionskoeffizient der Spiegel und E_0 das auf den Fabry-Perot-Resonator einfallende Licht sind. Unter Verwendung der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} r^{2n} e^{in\phi} = \frac{1}{1 - r^2 e^{i\phi}}$ lässt sich die totale Transmission schreiben durch:

$$E_t = \frac{E_0 t^2}{1 - r^2 e^{i\phi}} \quad (8)$$

Die Intensität des transmittierten Lichts I_t steht in Beziehung mit E_t durch:

$$I_t = |E_t|^2 = \frac{I_0 |t|^4}{|1 - r^2 e^{i\phi}|^2} \quad (9)$$

Wobei $I_0 = E_0^2$ ist. Um die Intensität in einfacher Form zu schreiben, wird $T = |t|^2$ und $R = |r|^2$ in obenstehende Gleichung eingesetzt:

$$I_t = I_0 \frac{T^2}{|1 - R e^{i\phi}|^2} \quad (10)$$

Die Erweiterung des Ausdrucks $|1 - R e^{i\phi}|^2$ ergibt:

$$|1 - R e^{i\phi}|^2 = (1 - R)^2 \left[1 + \frac{4R}{(1 - R)^2} \sin^2 \frac{\phi}{2} \right] \quad (11)$$

Der Ausdruck $\frac{4R}{(1 - R^2)}$ stellt die Finesse des Fabry-Perot-Resonators \mathcal{F} dar:

$$\mathcal{F} = \frac{4R}{(1 - R^2)} \quad (12)$$

Durch Einsetzen der Gleichungen (6), (11) und (12) in die Gleichung (9) ergibt sich die Intensität, welche gegen die Frequenz in Abbildung 5 eingetragen wird [Sil04]

$$I = I_0 \frac{T^2}{(1-R)^2} \frac{1}{1 + \mathcal{F} \sin^2\left(\frac{2\pi\nu}{c} \cos(\theta)\right)} \quad (13)$$

Um sicherzustellen, dass der Raum zwischen den beiden Spiegeln von den Laserstrahlen nicht verlassen wird, müssen bestimmte Kriterien in Bezug auf die Brennpunkte f und den Abstand zwischen den Spiegeln L erfüllt werden.

2.4.1 Stabilitätskriterien des Fabry-Perot-Resonators

Der Resonator ist stabil, wenn der reflektierte Strahl zwischen beiden Spiegeln nicht divergiert. Das bedeutet, dass der Lichtstrahl bei jeder Reflexion an den Spiegeln nicht weit vom Zentrum des Resonators abweichen darf. Angenommen, dass der Resonator aus zwei Hohlspiegeln mit den Radien r_1 und r_2 besteht. Die Translation des Laserstrahls kann durch die folgende Matrix beschrieben werden [Mes04]:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & L \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{L-f_2-f_1}{f_1 f_2} & \frac{L^2-f_2 L-L f_1+f_1 f_2}{f_1 f_2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Term $\frac{1}{2}(A+B)$ definiert den Cosinus eines Winkels θ durch:

$$\cos(\theta) = \frac{1}{2}(A+B) = 2 \left(1 - \frac{L}{2f_1}\right) \left(1 - \frac{L}{2f_2}\right) - 1$$

Der Winkel θ muss reell bleiben. Das bedeutet:

$$-1 \leq \cos(\theta) \leq 1$$

Daraus folgt:

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{2f_1}\right) \left(1 - \frac{L}{2f_2}\right) \leq 1$$

Bei dem Fabry-Perot-Resonator im Experiment ist der Eingangsspiegel ein Planspiegel und der zweite Spiegel ist ein Hohlspiegel, daher kann $f_1 = \infty$ angenommen werden. Nun ergibt sich die Stabilisierungsbedingung für den Fabry-Perot-Resonator durch:

$$0 \leq \left(1 - \frac{L}{2f_2}\right) \leq 1$$

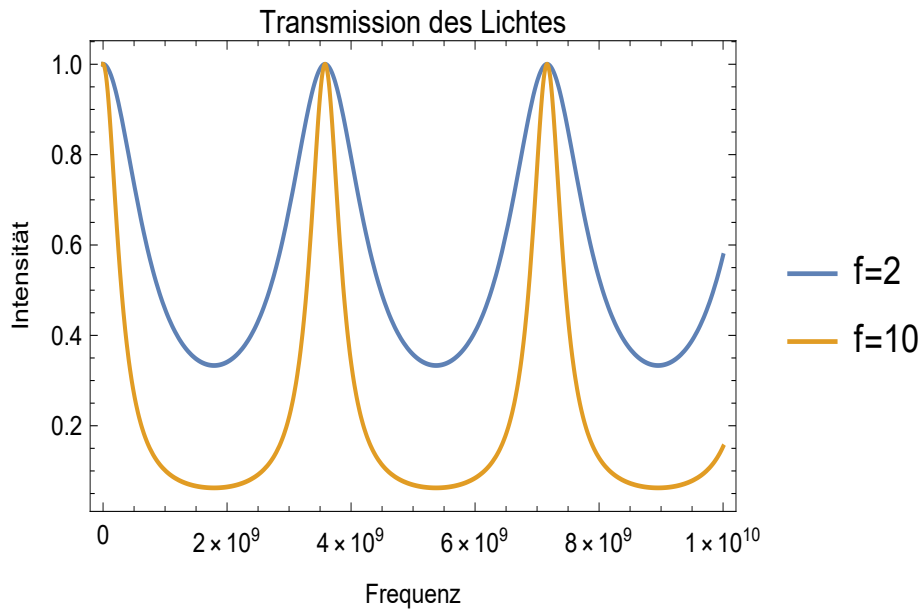


Abbildung 5: zeigt die Resonanz des Laserlichts mit unterschiedlichen Finessen f

2.4.2 Der reflektierte Strahl aus dem Fabry-Perot-Resonator

Der reflektierte Strahl aus dem Fabry-Perot-Resonator ist eine Interferenz des reflektierten Strahls auf dem ersten Spiegel und der transmittierten stehenden Welle aus der Fabry-Resonator-Hülle. Siehe Abbildung 4. Analog wie im vorherigen Abschnitt lässt sich zeigen:

$$E_{\text{ref}} = E_0 \frac{r(e^{i\frac{2\pi\nu L}{c}} - 1)}{1 - r^2 e^{i\frac{4\pi\nu L}{c}}} = E_0 \frac{r(e^{i\frac{\omega}{\Delta\nu}} - 1)}{1 - r^2 e^{i\frac{\omega}{\Delta\nu}}} \quad (14)$$

Der Reflexionskoeffizient eines Laserstrahls $F(\omega)$ ist das Verhältnis der Amplitude des reflektierten Strahls zu der Amplitude des einfallenden Strahls :

$$F(\omega) = \frac{r(e^{i\frac{\omega}{\Delta\nu}} - 1)}{1 - r^2 e^{i\frac{\omega}{\Delta\nu}}} \quad (15)$$

Wobei ω die Kreisfrequenz des Laserstrahls und $\Delta\nu = \frac{c}{2L}$ der Freispektralbereich sind. Mit $\frac{I_{\text{ref}}}{I_0} = \left| \frac{E_{\text{ref}}}{E_0} \right|^2$ lässt sich die Intensität der reflektierten Strahlen bestimmen. Die Betrachtung der Änderung der Intensität in Abhängigkeit von der Frequenzänderung, $\frac{\Delta I_{\text{ref}}}{\Delta\nu}$, ermöglicht es, festzustellen, auf welcher Seite der Resonanzfrequenz sich die Laserfrequenz befindet, wie in Abbildung 6 dargestellt. Wenn die reflektierte Welle vom ersten Spiegel und die transmittierte stehende Welle aus dem Fabry-Perot-Resonator um 180° phasenverschoben sind, tritt destruktive Interferenz auf, und beide Wellen löschen sich gegenseitig aus. Bei einer geringfügigen Abweichung der Laserfrequenz von der Resonanzfrequenz, sodass die beiden Wellen sich nicht vollständig auslöschen, kann durch die Phase ermittelt werden, auf welcher Seite der Laserfrequenz die Frequenzabweichung liegt. Dies liegt daran, dass die Phase um die Resonanzfrequenz herum antisymmetrisch ist, wie in Abbildung 7 veran-

schaulich wird [323].

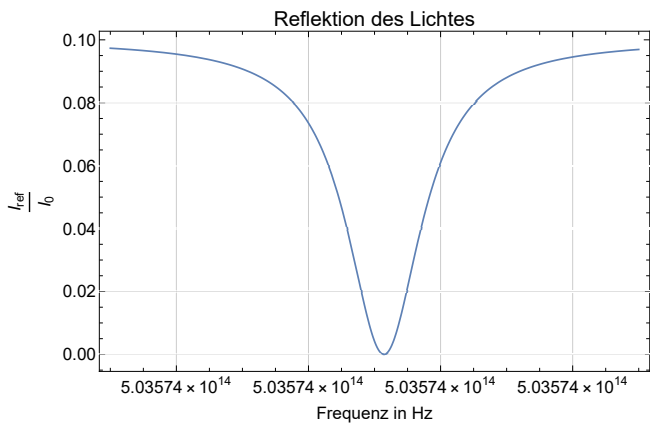


Abbildung 6: zeigt die relative Intensität des reflektierten Strahls

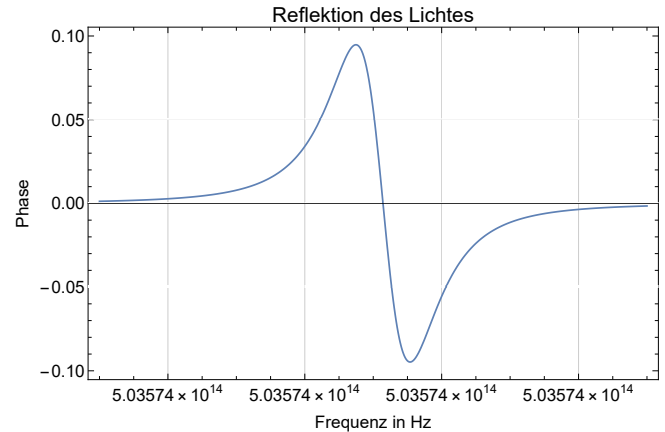


Abbildung 7: zeigt die Phase um die Resonanzfrequenz

3 Modulation des Laserstrahls

In der Praxis wird nicht direkt die Variation der Intensität durch Änderung der Frequenz betrachtet, um festzustellen, auf welcher Seite der Resonanzfrequenz sich die Laserfrequenz befindet. Stattdessen wird die Phase des einfallenden Laserstrahls mithilfe der Pockels-Zelle moduliert. Wenn der Laserstrahl die Pockels-Zelle durchläuft, bewirkt das elektrische Feld eine Modulation der Phase des Laserstrahls. Der einfallende Laserstrahl auf den Fabry-Perot-Resonator, bezeichnet als E_{ein} , kann wie folgt beschrieben werden:

$$E_{\text{ein}} = E_0 e^{i(\omega t + \beta \sin \Omega t)} \quad (16)$$

Wobei ω die Kreisfrequenz des Lasers, β die Amplitude des elektrischen Felds und Ω die Kreisfrequenz des elektrischen Felds sind. Durch Taylorentwicklung kann die E_{ein} angenähert werden durch:

$$E_{\text{ein}} = E_0 [1 + 2i \sin \Omega t] e^{i\omega t} \quad (17)$$

Diese Gleichung kann mittels Besselfunktion und $\sin \Omega t = \frac{e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}}{2i}$ umgeschrieben werden:

$$E_{\text{ein}} = E_0 \left[\underbrace{J_0(\beta) e^{i\omega t}}_{\text{Laserstrahl bei Resonanz}} + \underbrace{J_1(\beta) e^{i(\omega+\Omega)t}}_{\text{oberes Seitenband}} - \underbrace{J_1(\beta) e^{i(\omega-\Omega)t}}_{\text{unteres Seitenband}} \right] \quad (18)$$

Diese Gleichung zeigt, dass drei Strahlen durch Modulation der Strahlen auf den Fabry-Perot-Resonator fallen. Die totale Leistung der einfallenden Strahlen auf den Fabry-Perot-Resonator $P_o = |E_0|^2$ setzt sich zusammen aus der Leistung des Laserstrahls $P_c = J_0^2(\beta)$ und der Leistungen der Seitenbänder $P_s = J_1^2(\beta)$ wie in Abbildung 8 dargestellt wird.

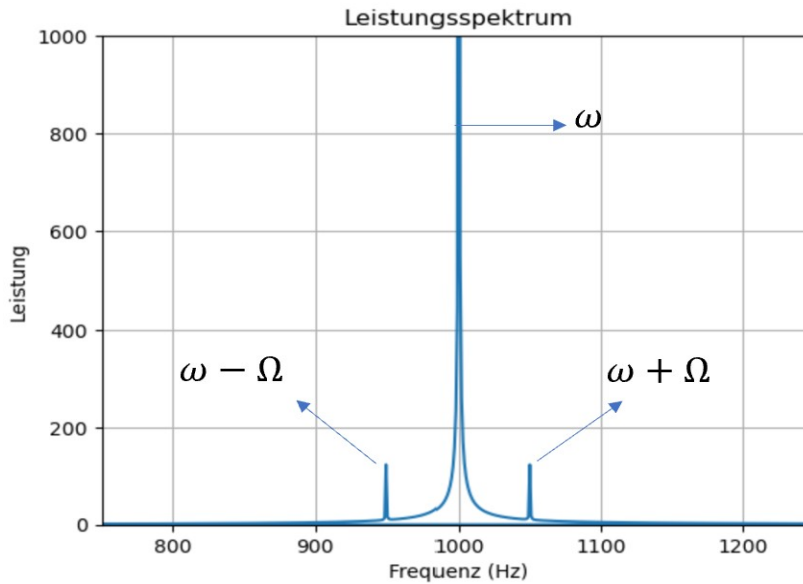


Abbildung 8: Zeigt die oberen und unteren Seitenbänder

4 Modulation des reflektierten Strahls

Um die reflektierten Strahlen aus dem Fabry-Perot-Resonator zu bestimmen, werden die einfallenden Strahlen mit ihrem eigenen Reflexionskoeffizient multipliziert:

$$E_{\text{ref}} = E_0 \left[F(\omega) J_0(\beta) e^{i\omega t} + F(\omega + \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega + \Omega)t} - F(\omega - \Omega) J_1(\beta) e^{i(\omega - \Omega)t} \right] \quad (19)$$

Die reflektierte Leistung ergibt sich durch:

$$\begin{aligned} P_{\text{ref}} &= E_{\text{ref}} E_{\text{ref}}^* \\ &= E_0^2 [J_0(\beta)^2 F^2(\omega) + J_1^2(\beta) F^2(\omega - \Omega) + J_1^2 F^2(\omega - \Omega) \\ &\quad + J_0(\beta) J_1^* F(\omega) F^*(\omega + \Omega) e^{-i\Omega t} + J_0(\beta) J_1 F(\omega) F^*(\omega - \Omega) e^{i\Omega t} \\ &\quad + J_0^*(\beta) J_1 F^*(\omega) F(\omega + \Omega) e^{i\Omega t} + J_0(\beta) J_1 F^*(\omega) F(\omega - \Omega) e^{-i\Omega t} \\ &\quad - \underbrace{J_1^2(\beta) F(\omega + \Omega) F^*(\omega - \Omega) e^{2i\Omega t} - J_1^2(\beta) F^*(\omega + \Omega) F(\omega - \Omega) e^{2i\Omega t}}_{2\Omega \text{ Terme}}] \end{aligned}$$

Unter Verwendung von $e^{\pm i\Omega} = \cos(\Omega) \pm i \sin(\Omega)$ ergibt sich:

$$\begin{aligned} P_{\text{ref}} &= P_c |F(\omega)|^2 + P_s [|F(\omega - \Omega)|^2 + |F(\omega - \Omega)|^2] \\ &\quad + 2\sqrt{P_c P_s} [\text{Re}[F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \cos \Omega t \\ &\quad + \text{Im}[F(\omega) F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega) F(\omega - \Omega)] \sin \Omega t] + (2\Omega \text{Term}) \end{aligned} \quad (20)$$

Die 2Ω -Terme entstehen aufgrund der Interferenz der Seitenbänder miteinander. Für das PDH-Verfahren sind die Terme relevant, die mit der Modulationsfrequenz Ω oszillieren,

nämlich Sinus- und Cosinus-Terme. In der Praxis bleibt einer dieser Terme erhalten, während der andere verschwindet. Welcher davon erhalten bleibt und welcher verschwindet, hängt von der Art des Modulationsverfahrens ab. Diese Verfahren werden im nächsten Abschnitt erläutert [323].

5 Das Fehlersignal

Die reflektierte Leistung aus dem Fabry-Perot-Resonator wird mit einem Photodetektor gemessen, und das gemessene Signal enthält alle Terme aus Gleichung (20). Im PDH-Verfahren sind entweder die Sinus- oder die Cosinus-Terme relevant. Diese Terme werden durch einen Mixer und einen Tiefpassfilter isoliert. Der Mixer hat zwei Eingangssignale und ein Ausgangssignal. Das Ausgangssignal ist das Produkt der Eingangssignale, wie in Abbildung 1 dargestellt. Wenn die Eingangssignale sinusförmig sind, ergibt sich das Ausgangssignal durch:

$$\sin(\Omega_1 t) \sin(\Omega_2 t) = \frac{1}{2} [\cos(\Omega_1 - \Omega_2)t - \cos(\Omega_1 + \Omega_2)t] \quad (21)$$

Sei Ω_2 die Frequenz des gemessenen Signals vom Photodetektor und Ω_1 die Modulationsfrequenz. Der Term $\cos(\Omega_1 - \Omega_2)$ repräsentiert die Phasenverschiebung zwischen der Phasenreferenz und dem zu messenden Signal. Bei $\Omega_2 = \Omega_1$ ergibt sich $\cos(\Omega_1 - \Omega_2) = 1$. Dies ist ein konstantes Signal, das mithilfe eines Tiefpassfilters isoliert werden kann. Wenn die Eingangssignale sinusförmig oder cosinusförmig sind, ergibt sich das Ausgangssignal zu:

$$\sin(\Omega_1 t) \cos(\Omega_2 t) = \frac{1}{2} [\sin(\Omega_1 - \Omega_2)t - \sin(\Omega_1 + \Omega_2)t] \quad (22)$$

In diesem Fall, wenn $\Omega_2 = \Omega_1$, verschwindet das Differenzsignal $\sin(\Omega_1 - \Omega_2) = 0$. Das bedeutet, dass das Gleichstromsignal verschwindet. Daher wird ein Phasenverschieber verwendet, um das sinusförmige Signal um 90° zu verschieben und in ein cosinusförmiges Signal zu wandeln. Es gibt zwei Arten von Modulation des Fehlersignals, die im kommenden Abschnitt erklärt werden [323].

5.1 Langsame Modulation

Bei der langsamen Modulation wird die Laserfrequenz langsam variiert und die Modulationsfrequenz Ω wird klein gehalten. Damit ergibt sich die absolute Phase $\omega(t)$ durch:

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}(\omega t + \beta \sin \Omega t) = \omega + \beta \Omega \cos \Omega t \quad (23)$$

Die reflektierte Phase ergibt sich durch:

$$P_{\text{ref}}(\omega + \beta \Omega \cos \Omega t) \approx P_{\text{ref}}(\omega) + P_0 \frac{d|F(\omega)|^2}{d\omega} \Omega \beta \cos \Omega t \quad (24)$$

Im Vergleich der Gleichung (20) mit der Gleichung (24) lässt sich schreiben:

$$\frac{d|F(\omega)|^2}{d\omega}\Omega \approx F(\omega)F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega)F(\omega - \Omega) \approx 2\Omega \operatorname{Re}\left[F(\omega)\frac{dF^*(\omega)}{d\omega}\right] \quad (25)$$

Durch den Mixer werden Cosinus Terme herausgefiltert und alle anderen Terme werden verschwinden. Mit $\sqrt{P_c P_s} \approx P_0 \frac{\beta}{2}$ ergibt sich das Fehlersignal durch:

$$\epsilon = P_0 \frac{d|F(\omega)|^2}{d\omega} \Omega \beta \approx 4\sqrt{P_c P_s} \Omega \operatorname{Re}\left[F(\omega)\frac{dF^*(\omega)}{d\omega}\right] \quad (26)$$

Das Fehlersignal wird in Abbildung (9) dargestellt.

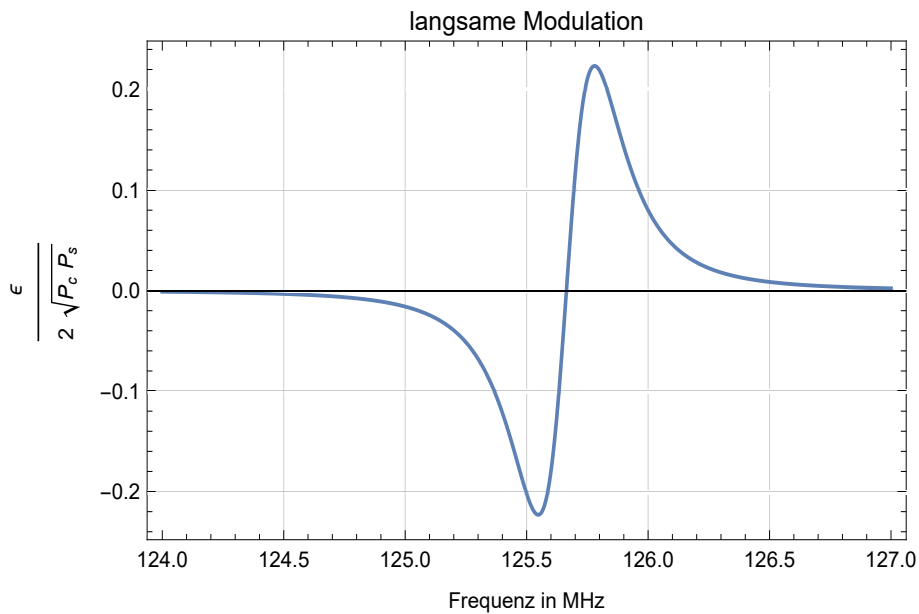


Abbildung 9: Zeigt das Fehlersignal bei langsamer Modulation

5.2 Schnelle Modulation

Wenn die Laserfrequenz nah an der Resonanzfrequenz und die Seitenbänder eine hohe Frequenz haben, dann kann angenommen werden, dass die Seitenbänder total reflektieren. In diesem Fall kann der Reflexionskoeffizient $F(\omega \pm \Omega) \approx 1$ geschrieben werden und der Ausdruck $F(\omega)F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega)F(\omega + \Omega)$ ist rein imaginär. Das bedeutet, in der Gleichung (20) bleiben nur Sinusterme und die restlichen Terme können vernachlässigt werden und das Fehlersignal ergibt sich durch:

$$\epsilon = -2\sqrt{P_c P_s} \operatorname{Im}[F(\omega)F^*(\omega + \Omega) - F^*(\omega)F(\omega + \Omega)] \quad (27)$$

Eine Darstellung des Fehlersignals ist in Abbildung (10) zu sehen.

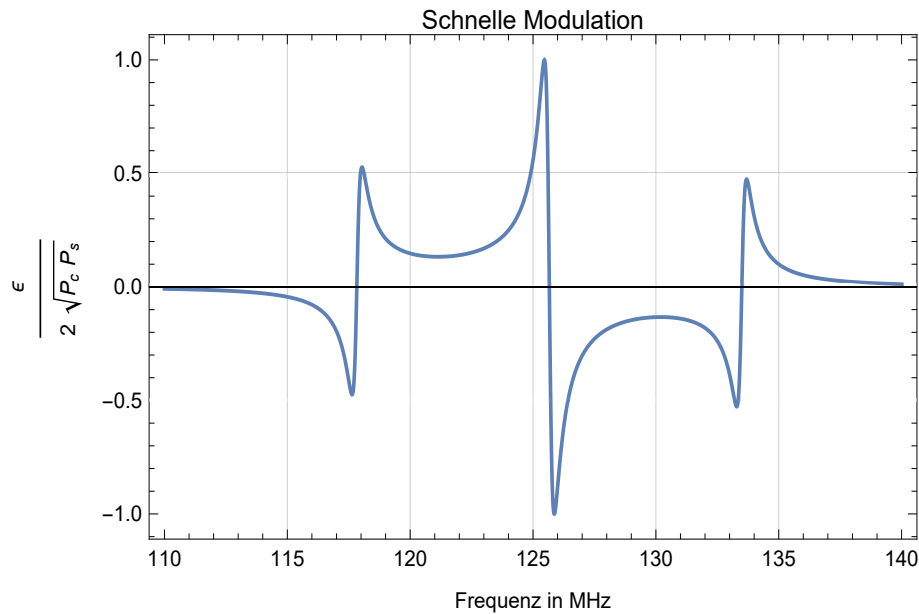


Abbildung 10: Zeigt das Fehlersignal bei schneller Modulation

6 PID-Regler

Nach dem ein Fehlersignal gemessen wurde, wird das erhaltene Signal zum PID-Regler geleitet, um es zu behandeln. Ein PID-Regler besteht aus einem Proportionalteil (P), einem Integralteil (I) und einem Differenzialteil (D).

1) Proportionalteil P : bei diesem Teil wird die Abweichung des Istwerts von dem Sollwert bestimmt und der Istwert multipliziert mit einer Proportionalitätskonstante K_p . Eine starke Abweichung des Istwerts $e(t)$ vom Sollwert $y(t)$ führt zu einem großen Wert des K_p .

$$y(t) = K_p e(t) \quad (28)$$

2) Integralteil I : der Integralteil integriert den Fehler in einem Zeitintervall und dies wird mit einer Integralkonstante K_I multipliziert.

$$y(t) = K_I \int_{t_1}^{t_2} e(t) dt \quad (29)$$

Der Nachteil bei diesem Teil ist, dass der Regler verzögert reagiert, da ein Zeitintervall nötig ist, um den Integral zu bestimmen.

3) Differenzialteil D : Der D -Regler misst die Steigung des Istwerts und multipliziert dies mit der Differenzialkonstante K_D . Durch das Bestimmen der Steigung wird der zukünftige Fehler abgeschätzt und entsprechend dieser Steigung reagiert.

$$y(t) = K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (30)$$

Eine Kombination der oben erwähnten Teile des Reglers ergeben einen *PID*-Regler wie Abbildung (11) zeigt.

$$y(t) = K_p e(t) + K_I \int_{t_1}^{t_2} e(t) dt + K_D \frac{de(t)}{dt} \quad (31)$$

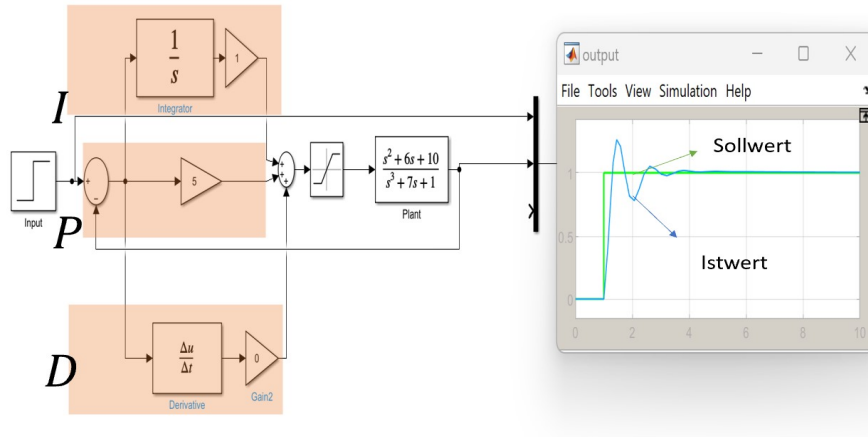


Abbildung 11: Zeigt eine Simulation des *PID*-Reglers

7 Experimenteller Teil

In diesem Abschnitt wird der Aufbau des PDH-Experimentes präziser beschrieben. Dabei wurde ein Laser mit der Wellenlänge von 960nm verwendet, was einer Frequenz von 312,4248 THz entspricht. Die erwähnte Frequenz wurde vom Bildschirmmonitor im Labor abgelesen, siehe Abbildung 12 (Teil a). Die Laserstrahlen wurden durch eine Glasfaser an einen Phasenmodulator geleitet, wie in Abbildung 12 (Teil b) gezeigt. Ein Querschnitt des Phasenmodulators ist in Abbildung 13 zu sehen. Der Laserstrahl wurde weiter durch einen Faraday-Isolator und einen Filter geleitet, bevor er auf einen Spiegel traf. Der Spiegel leitete den Laserstrahl auf einen Strahlenteiler, wodurch ein Teil des Strahls in den Fabry-Perot-Resonator eintrat, wie in Abbildung 12 (Teil c) gezeigt. Ein Querschnitt des Fabry-Perot-Resonators ist in Abbildung 12 (Teil e) zu sehen. Der Fabry-Perot-Resonator besteht aus einem Kristallzylinder, dessen jeweilige Grundfläche mit Spiegeln befestigt ist. Der Abstand zwischen den beiden Spiegeln beträgt $L = 7$ cm und beide Spiegel besitzen einen Reflexionskoeffizienten von $r = 0,99$. Die aus dem Fabry-Perot-Resonator reflektierte Intensität wurde mittels eines Photodetektors gemessen und das elektrische Signal wurde anschließend an den Mixer weitergeleitet. Schließlich wurde das entstehende Fehlersignal an den PID-Regler geleitet. Um die Temperatur im Fabry-Perot-Resonator stabil zu halten, wurde die Temperatur mittels eines Paltierelements geregelt. In diesem Experiment wurde das Fehlersignal mit unterschiedlichen Modulationsamplituden und Modulationsfrequenzen gemessen, und schließlich wurde der reflektierte Strahl aus dem Fabry-Perot-Resonator gemessen. Für diese Messungen wurde die Software (Linien Spectroscopy Lock) verwendet. Die Features der

verwendeten Software (Linien Spectroscopy Lock) sind in Abbildung 14 zu sehen [423].

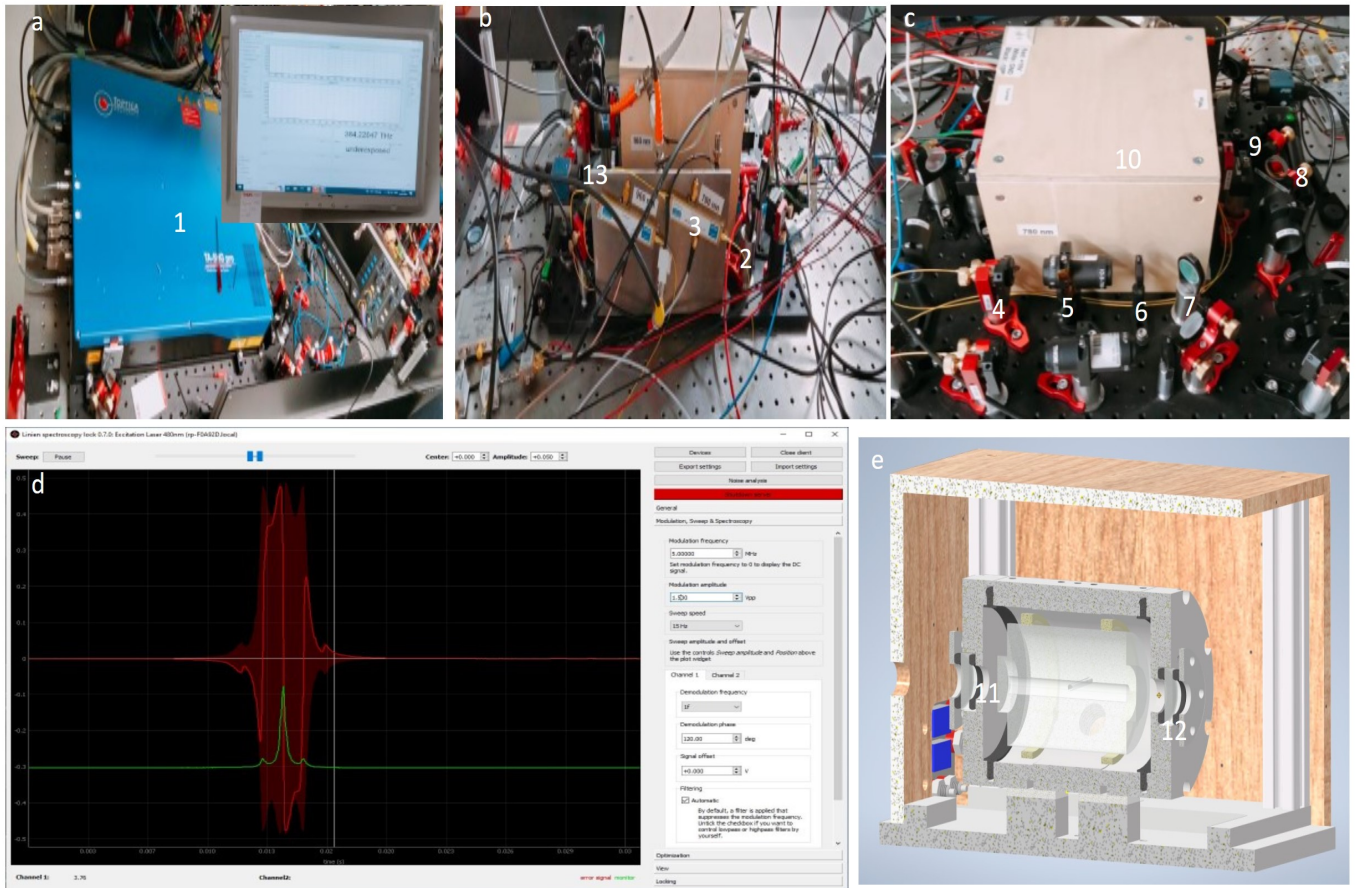


Abbildung 12: Zeigt den Aufbau des Experimentes wobei 1 der Laser, 2 die Glasfaser, 3 der Phasenmodulator, 4 ein Filter, 5 der Faradayrotator, 6 ein Filter, Strahlenbrecher, 7 eine Linse, 8 ein Spiegel, 9 der PBS, 10 der Fabry-Perot-Resonator, 11 der erste Spiegel, 12 der zweite Spiegel und 13 der Photodetektor sind.

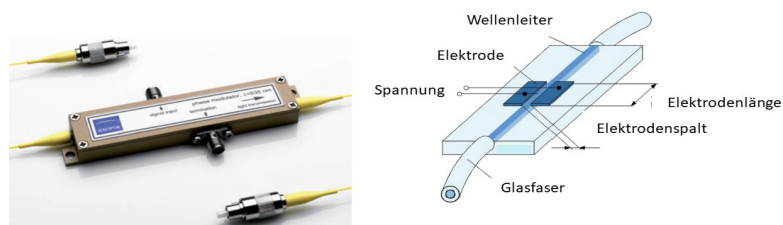


Abbildung 13: Zeigt einen Phasenmodulator und seine Bestandteile [523]



Abbildung 14: Zeigt die Features der verwendeten Software

8 Auswertung

In diesem Abschnitt werden die gemessenen Daten ausgewertet. Dabei wird die Finesse des Fabry-Perot-Resonators berechnet. Weiterhin werden das gemessene Fehlersignal sowie die Auswirkungen der Modulationsfrequenz und die Amplitude der Modulation auf das Fehlersignal analysiert.

8.1 Die Finesse des Fabry-Perot-Resonators

Zunächst wurde der Freispektralbereich $\Delta\nu_{f_{SR}}$ bestimmt. Der Freispektralbereich ergibt sich aus dem Abstand zwischen zwei aufeinanderfolgenden Peaks, wie in Abbildung 15 dargestellt. Dieser Abstand wurde mithilfe von Mathematica ermittelt. Die Koordinaten der Maxima des ersten und zweiten Peaks sind (913,007MHz|2222) und (3054,89MHz|2222). Daraus ergibt sich

$$\Delta\nu_{f_{SR}} = 3054,89\text{MHz} - 913,007\text{MHz} = 2141,883\text{MHz}$$

Nun wurde die Halbwertbreite $\delta\nu$ berechnet, indem die Messwerte des reflektierten Strahls, wie in Abbildung 16 an eine Lorenz-Funktion ($f(\nu) = \frac{A}{\pi\delta\nu(1+(\frac{\nu-\nu_0}{\delta\nu})^2)}$) angepasst wurden. Daraus ergibt sich:

$$\delta\nu = 10,774\text{MHz}$$

$$\nu_0 = 912,912\text{MHz}$$

$$A = 71573,10$$

Die Finesse des Resonators \mathcal{F} ergibt sich durch:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{\Delta\nu}{\delta\nu} \\ &= \frac{2141,853\text{MHz}}{10,774\text{MHz}} \\ &= 198,80\end{aligned}$$

Nun wird die Finesse durch die Reflektivität der Spiegel (Gleichung 12) berechnet:

$$\begin{aligned}\mathcal{F} &= \frac{4R}{1-R^2} \\ &= \frac{4 \cdot 0,99}{1-0,99^2} \\ &= 198,99\end{aligned}$$

Durch den Vergleich der oben berechneten Finesse \mathcal{F} lässt sich schlussfolgern, dass die beiden Werte sehr nah beieinander liegen. Der geringe Unterschied zwischen den beiden Finesse-Werten \mathcal{F} könnte auf Staubpartikel zurückzuführen sein.

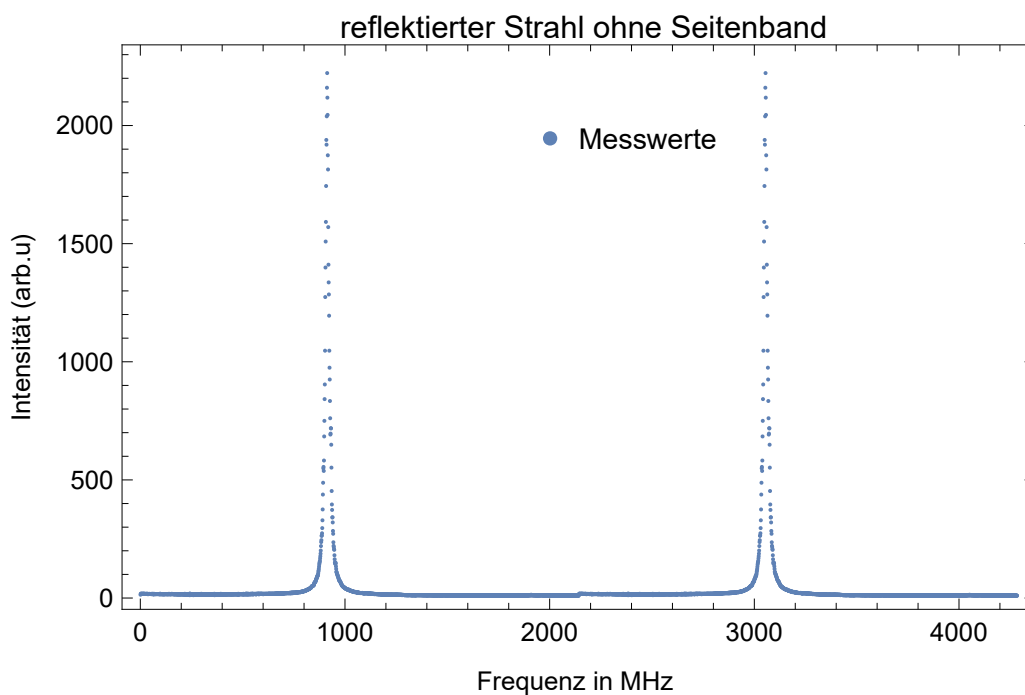


Abbildung 15: Zeigt den reflektierten Strahl aus dem Resonator

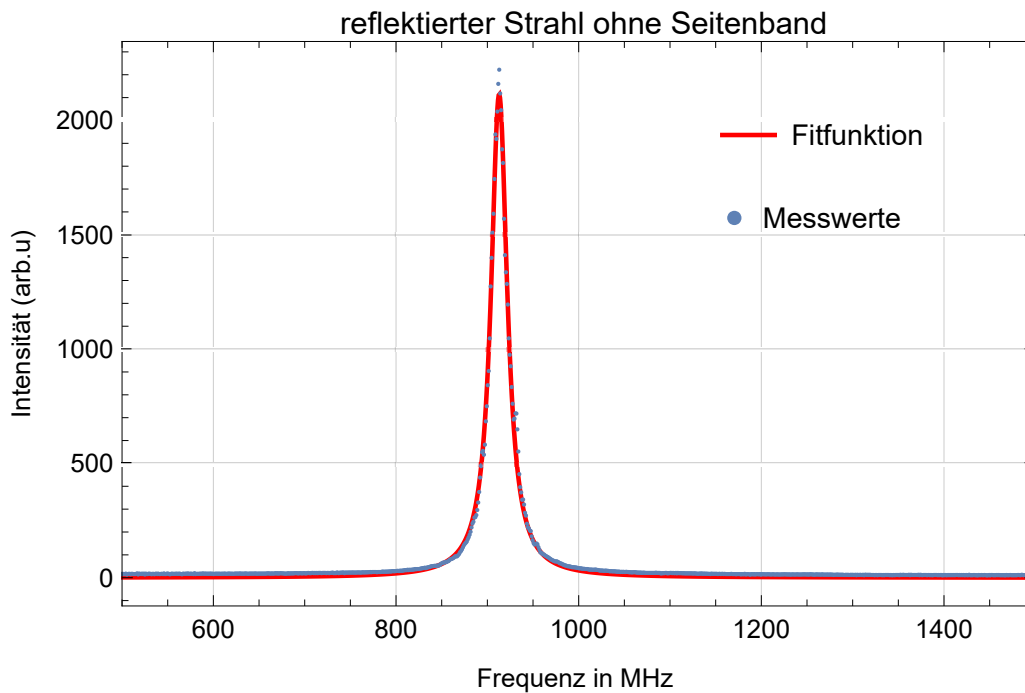


Abbildung 16: Die Anpassung der Lorenz-Funktion an die gemessenen Messwerte zeigt die Anpassungsgenauigkeit.

8.2 Fehlersignal mit unterschiedlichen Modulationsfrequenzen Ω

In diesem Abschnitt wurde der Laserstrahl mit verschiedenen Frequenzen moduliert (siehe Abbildung 17). Dabei sind die Seitenbänder als zwei symmetrische Peaks auf beiden Seiten der Resonanzfrequenz des Laserstrahls im Abstand von Ω erkennbar. Die Abstände der Seitenbänder steigen mit zunehmender Modulationsfrequenz Ω . Hingegen nimmt die Intensität des Laserstrahls mit steigender Modulationsfrequenz ab. Die gesteigerte Anzahl von Seitenbändern bei höheren Modulationsfrequenzen lässt sich dadurch erklären, dass bei höheren Modulationsfrequenzen die Überlagerung des einfallenden Strahls mit den Seitenbändern, die durch die Pockels-Zelle erzeugt werden, zu weiteren Modulationen im Frequenzspektrum und somit zu zusätzlichen Seitenbändern führen kann. Diese zusätzlichen Seitenbänder sind besonders deutlich in Abbildung 17 bei $\Omega = 15\text{MHz}$ erkennbar.

Das Fehlersignal verhält sich um die Resonanzfrequenz der oberen und unteren Seitenbänder sowie um die Resonanzfrequenz des Laserstrahls herum antisymmetrisch. Ein Vergleich zwischen Abbildung 17 und Abbildung 18 zeigt, dass das Fehlersignal in der Nähe der Resonanzfrequenz die Ableitung des Laserstrahls nach der Frequenz repräsentiert. Daher muss das Fehlersignal bei stabiler (konstanter) Laserfrequenz (Resonanzfrequenz) null sein.

Weiterhin ist zu bemerken, dass das Fehlersignal im Bereich zwischen den ersten Seitenbändern einen negativen und einen positiven Teil aufweist. Bei Erhöhung der Laserfrequenz wird der Wert des Fehlersignals negativ. Hingegen, wenn das Fehlersignal einen positiven Wert hat, bedeutet dies, dass die Laserfrequenz abgenommen hat. Der PID-Regler betrachtet das Vorzeichen des Fehlersignals und erkennt daraus, ob die Laserfrequenz gestiegen oder gesunken ist, und reagiert entsprechend auf das Vorzeichen des Fehlersignals. Dadurch

kann das PDH-Verfahren angewendet werden, wenn die Abweichung der Laserfrequenz von der Resonanz im Bereich $[(\nu_{\text{res}} - \Omega), (\nu_{\text{res}} + \Omega)]$ liegt.

Bei einer großen Abweichung der Laserfrequenz von der Resonanzfrequenz, sodass die Laserfrequenz außerhalb des genannten Bereichs $[(\nu_{\text{res}} - \Omega), (\nu_{\text{res}} + \Omega)]$ liegt, muss die Laserfrequenz manuell auf die Resonanzfrequenz eingestellt werden. In Anbetracht dessen wurde das Fehlersignal bei $\Omega = 5\text{MHz}$ und $\Omega = 15\text{MHz}$ miteinander verglichen. Es ist erkennbar, dass das Fehlersignal bei $\Omega = 15\text{MHz}$ einen breiteren Bereich erfasst als bei $\Omega = 5\text{MHz}$. Daher ergibt es Sinn, eine Modulation mit höherer Modulationsfrequenz zu verwenden.

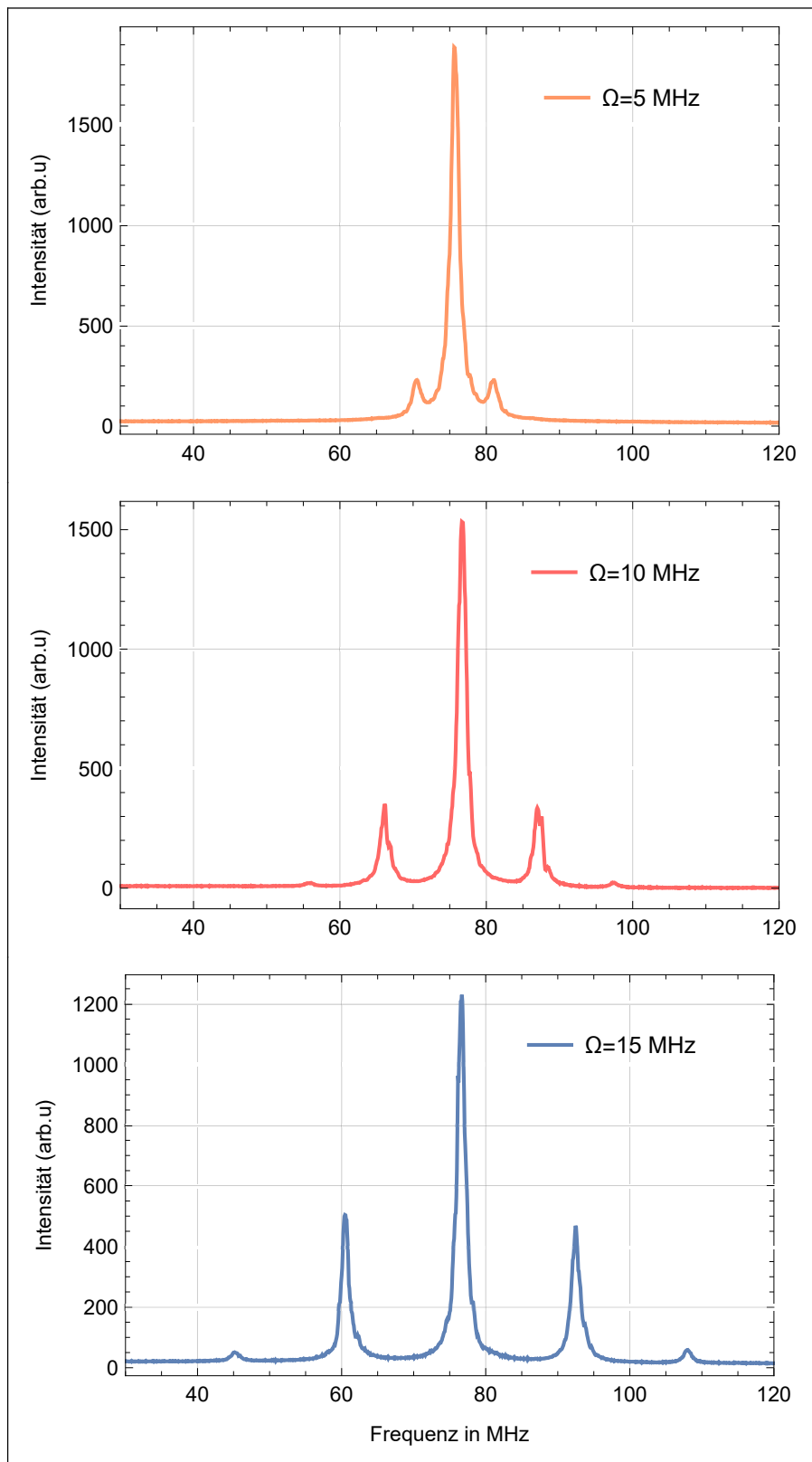


Abbildung 17: Erzeugung von Seitenbändern mit unterschiedlichen Modulationsfrequenzen.

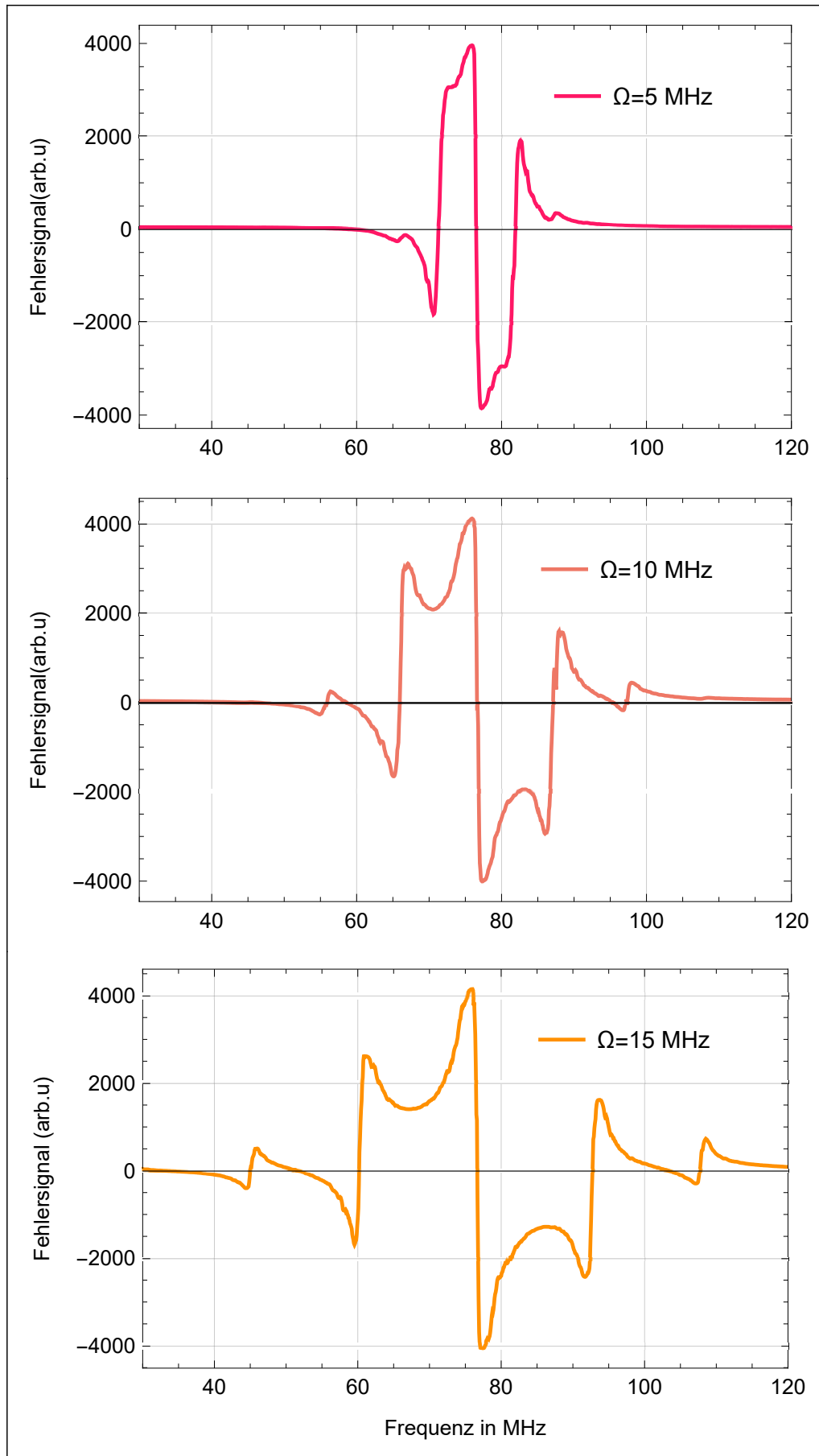


Abbildung 18: Fehlersignal mit verschiedenen Modulationsfrequenzen

8.3 Fehlersignal mit unterschiedlichen Modulationsamplituden β

In der Amplitudenmodulation nahm die Intensität des Laserstrahls mit zunehmender Modulationsamplitude ab, wie in Abbildung 19 dargestellt. Die Resonanzfrequenz und die Anzahl der Seitenbänder blieben jedoch unverändert, selbst wenn die Amplitudenmodulation variiert wurde. Um das Verhalten des Fehlersignals bei unterschiedlichen Modulationsamplituden (β) zu zeigen, wurde das Fehlersignal in 2D- und 3D-Grafiken, wie in Abbildung 20 gezeigt, dargestellt. Es ist zu beachten, dass die Amplitude des Fehlersignals proportional zur Modulationsamplitude ansteigt, bis sie schließlich gesättigt ist. Diese Proportionalität wird durch die offensichtliche Gleichung (26) beschrieben: $(\epsilon = P_0 \frac{d|F(\omega)|^2}{d\omega} \Omega \beta)$

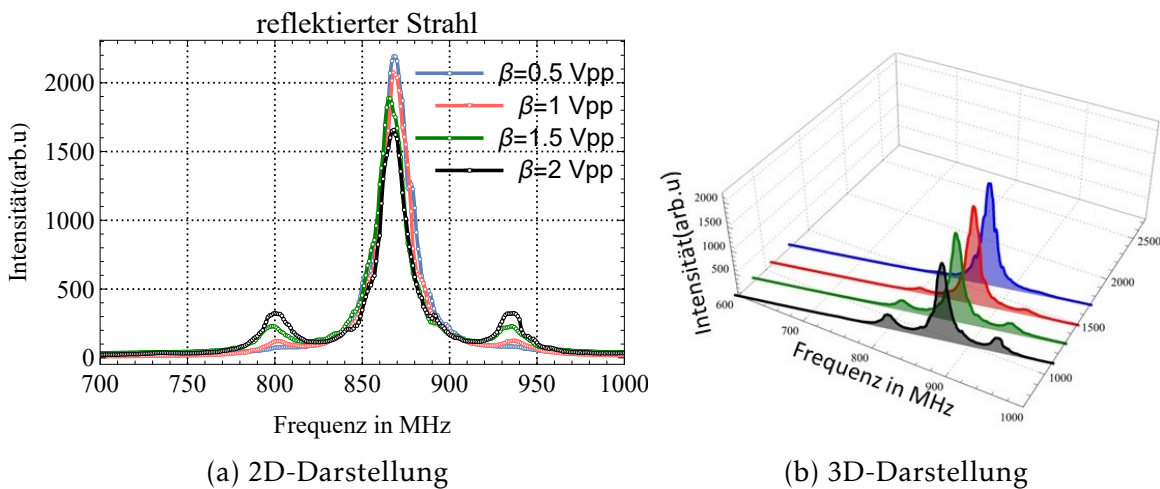


Abbildung 19: Der reflektierte Strahl mit unterschiedlichen Modulationen der Amplitude.

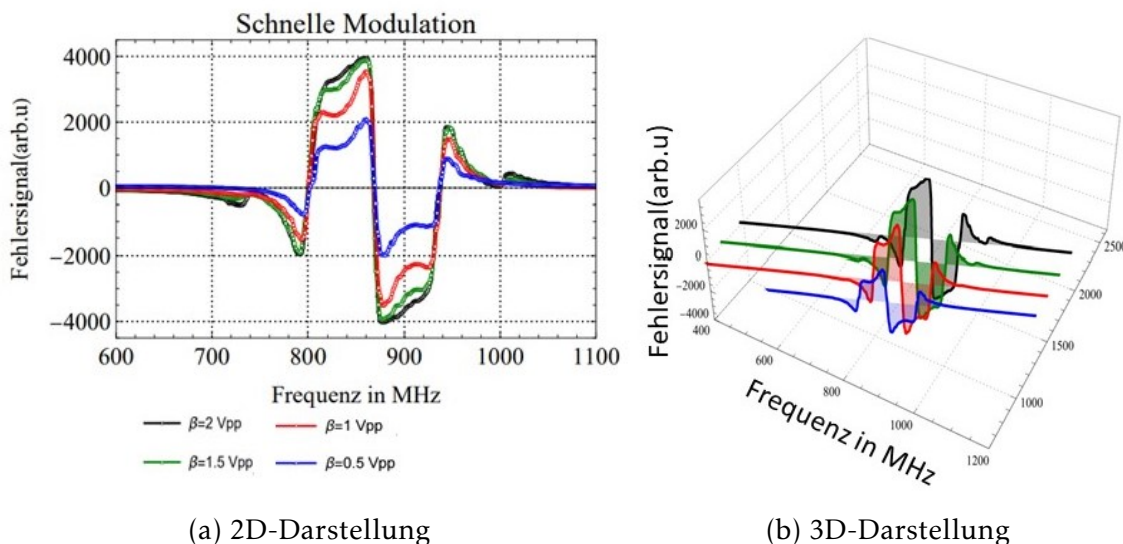


Abbildung 20: Fehlersignal mit unterschiedlichen Modulationen der Amplitude.

9 Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde das Laserstabilisierungsverfahren PDH erläutert. Zu Beginn wurde ein Blick auf die Funktionsweise der Bestandteile geworfen. Dabei wurde theoretisch gezeigt, wie Seitenbänder mithilfe einer Pockels-Zelle erzeugt werden, bevor der Laserstrahl in den Fabry-Perot-Resonator eintritt. Der vom Fabry-Perot-Resonator reflektierte Strahl wurde durch Mixer mit einem Modulationssignal multipliziert, um ein Fehlersignal zu erzeugen. Durch den PID-Regler wurde das Fehlersignal auf null gesetzt, um die Laserfrequenz wieder in Resonanz zu bringen, wenn sie von der gewünschten Frequenz abweicht. Mögliche Störsignale in diesem Experiment könnten aufgrund von Variationen im Abstand zwischen den beiden Spiegeln auftreten, die durch Temperaturänderungen verursacht werden können. Im experimentellen Teil wurde der Aufbau des Experiments gezeigt und die Datenaufnahme beschrieben. Das aufgenommene Fehlersignal zeigte, dass bei höherer Modulationsfrequenz die Anzahl der Seitenbänder steigt, was zu einem verbesserten Fehlersignal beiträgt.

Danksagung

Mit diesem Schreiben möchte ich mich bei den Personen bedanken, die es mir ermöglicht haben, diese Arbeit anzufertigen.

Ein besonderer Dank gilt Stefan Aull, der mir mit wertvollen Ratschlägen bei meinen Fragen zur Seite stand.

Ich möchte mich auch bei Prof. Dr. Kilian Singer bedanken, der es mir ermöglicht hat, meine Arbeit in seiner Arbeitsgruppe zu verfassen.

Abschließend möchte ich Prof. Dr. Daqing Wang danken, der sich als Zweitprüfer zur Verfügung gestellt hat.

Eigenständigkeitserklärung

Hiermit bestätige ich, dass ich die vorliegende Arbeit selbständig verfasst und keine anderen als die angegebenen Hilfsmittel benutzt habe. Die Stellen der Arbeit, die dem Wortlaut oder dem Sinn nach anderen Werken (dazu zählen auch Internetquellen) entnommen sind, wurden unter Angabe der Quelle kenntlich gemacht.

Literatur

- [223] *Fast Switching Pockels Cell Driver for SLR Laser System*. https://cdis.nasa.gov/1w16/docs/papers/1as_5_Koe1b1_p.pdf. Version: 2023. – [Online; Stand 21. Juni 2023]
- [323] *An introduction to Pound–Drever–Hall laser frequency stabilization*. <https://web.archive.org/web/20150714124411/http://elmer.tapir.caltech.edu/ph237/week13/BlackAJP01.pdf>. Version: 2023. – [Online; Stand 21. Juni 2023]
- [423] *Linien: A versatile, user-friendly, open-source FPGA-based tool for frequency stabilization and spectroscopy parameter optimization*. <https://pubs.aip.org/aip/rsi/article/93/6/063001/2848770/Linien-A-versatile-user-friendly-open-source-FPGA>. Version: 2023. – [Online; Stand 21. Juni 2023]
- [523] *Phasenmodulator*. <https://www.jenoptik.de/-/media/websitedocuments/optics/modulators/modulatorfibel.pdf>. Version: 2023. – [Online; Stand 21. Juni 2023]
- [con23] CONTRIBUTORS, Wikipedia: *Faraday rotator* — *Wikipedia, The Free Encyclopedia*. https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Faraday_rotator&oldid=1156147894. Version: 2023. – [Online; accessed 25-August-2023]
- [Mes04] MESCHÉDE, Dieter: *Optik, Licht und Laser*. 2. Vieweg Teubner, 2004 (Page 20 bis 28). – ISBN 978–3–8348–9288–1
- [Sil04] SILFVAST, William T.: *Laser Fundamental*. 2. Cambridge University Press, 2004 (Page 374). – ISBN 0–521–83345–0