



Universität Gesamthochschule Kassel

Fachbereich Bauingenieurwesen

Fachgebiet Massivbau

Friedrich-Karl Röder

Kippstabilität

von

Stahlbeton- und Spannbetonträgern

Herausgeber

Prof. Dr.-Ing. Ekkehard Fehling
Leiter des Fachgebiets Massivbau
Fachbereich Bauingenieurwesen
Universität Gesamthochschule Kassel

Verlag

Universität Gesamthochschule Kassel
Universitätsbibliothek
Diagonale 10
34127 Kassel
Telefon 0561/8042117 - Fax 0561/8042125

ISBN 3 - 89792 - 008 - 5

Verfasser

Dr.-Ing Friedrich-Karl Röder
Akademischer Oberrat
Fachgebiet Massivbau - Fachbereich Bauingenieurwesen
Universität Gesamthochschule Kassel
Kurt-Wolters-Straße 3
34125 Kassel
Telefon 0561/8042669 - Fax 0561/8042803

© 1999 Fachgebiet Massivbau
Fachbereich Bauingenieurwesen
Universität Gesamthochschule Kassel
Kurt-Wolters-Straße 3
34125 Kassel

Alle Rechte, besonders das der Übersetzung in fremde Sprachen, vorbehalten.



Universität Gesamthochschule Kassel

Fachbereich Bauingenieurwesen

Fachgebiet Massivbau

Friedrich-Karl Röder

Kippstabilität

von

Stahlbeton- und Spannbetonträgern

Kippstabilität von Stahlbeton- und Spannbetonträgern

Zusammenfassung

Der vorliegende Bericht behandelt die Kippstabilität von Stahlbeton- und Spannbetonträgern. Das vorgestellte Berechnungsverfahren berücksichtigt dabei sowohl den Einfluß geometrischer Nichtlinearitäten (Theorie II. Ordnung) als auch den der physikalischen Nichtlinearitäten (gerissene Betonzugzone und nichtlineares Werkstoffverhalten für Beton und für Bewehrungen, sowie belastungsabhängige Querschnittswerte und Steifigkeiten) auf das Stabilitätsverhalten.

Die Eignung des auf den beschriebenen Grundlagen erstellten Rechenprogramms für eine Beurteilung des Kippverhaltens von Stahlbeton- und Spannbetonträgern wird anhand einer Nachrechnung von acht bekannten Kippversuchen mit praxisgerechten Trägerabmessungen bestätigt (Anhang C). Für weitere acht typische Träger werden die Berechnungsergebnisse in Form von Diagrammen und Tabellen angegeben (Anhang B).

Es wird ein Näherungsverfahren zur Beurteilung der Kippstabilität für den in der Praxis häufig vorkommenden Fall eines beidseitig gabelgelagerten Einfeldträgers unter Gleichstreckenlast abgeleitet. Dieses Näherungsverfahren gilt für Parallelgurt- und Satteldachträger und führt den Nachweis der Kippsicherheit über einen Bruchsicherheitsnachweis für zweiachsige Biegung. Die Vereinfachung basiert auf der Verwendung von sinus- und parabelförmigen Ansätzen für die Verläufe der Steifigkeiten, Biegemomente und Verformungen, wodurch sich die Differentialgleichungen geschlossen integrieren lassen. Mit den abgeleiteten Formeln können die für den Bruchsicherheitsnachweis erforderlichen Biegemomente ermittelt werden. Das Verfahren wird anhand von vier Berechnungsbeispielen erläutert. Darüber hinaus wird eine weitere Möglichkeit zur einfachen Abschätzung des Kippverhaltens von Stahlbeton- und Spannbetonträgern (Kap. 7.2) angegeben.

Lateral buckling of reinforced and prestressed concrete girders

Summary

The presented report deals with lateral buckling of reinforced and prestressed concrete girders. The shown calculation method considers the influence of geometric nonlinearity (2nd order theory) as well as the influence of physical nonlinearities (cracked concrete tension zone and nonlinear material behavior for concrete and reinforcements and further load-dependent cross-sectional values and stiffness) on the stability behavior.

The suitability of the developed computer program to judge the lateral buckling behavior of reinforced and prestressed concrete girders is confirmed by comparing the numerical results with the known results of eight lateral buckling tests on real sized girders (Appendix C). In addition the calculated results of eight typical girders are presented in diagrams and tables (Appendix B).

An approximation method for the estimation of the lateral buckling stability is derived in theory for line loaded, simply supported girders with forked bearings at the ends, which are often found in practice. This approximation method is valid for parallel flanged and saddle shaped girders and replaces the lateral buckling analysis by a verification of the safety against failure under biaxial bending. The simplification is based on assuming sinusoidal and parabolic evolution of the stiffness, the bending moment and the displacement over the beam length, which allows the exact integration of the differential equations. With the derived formulas, the required bending moments can be determined to verify the safety against failure. Four numerical examples explain the procedure.

In addition another simplified method is presented, which allows an estimation of the lateral buckling of prestressed and unprestressed concrete girders.

Analyse de la tenue au déversement de fermes en béton armé et en béton précontraint

Résumé

Le présent rapport traite de la stabilité au déversement de fermes en béton armé et en béton précontraint. La méthode de calcul représentée tient tout aussi bien compte de l'influence de la non-linéarité géométrique (théorie du 2^{ème} ordre) que de celle des non-linéarités physiques (zone en béton tendue fissurée et comportement non-linéaire des matériaux pour béton et armatures, ainsi que des valeurs de section et de rigidité en fonction des charges) sur le comportement de la stabilité.

La validité du programme arithmétique, élaboré à partir des bases décrites, pour juger du comportement au déversement des poutres en béton armé et en béton précontraint a été confirmée à partir d'un calcul de contrôle pour huit expériences connues de déversement avec des dimensions de poutres conformes à la réalité (Appendice C). De plus les résultats calculés de huit fermes caractéristiques sont présentés dans les graphiques et les tableaux (Appendice B).

Une méthode approchée est dérivée pour évaluer la stabilité au déversement d'une poutre à deux appuis par l'entremise sur une contrainte parallèle, un cas souvent rencontré dans la pratique. Cette méthode approchée est valable pour des poutres de membrure parallèle et de toit à deux versants, et on remplace le fait de devoir prouver la tenue au déversement par une étude de tenue à la rupture suite aux flexions sur deux axes. La simplification a été basée sur l'application des équations sinusoidales et paraboliques mieux adaptées aux couples de flexion, aux déformations et aux comportements réels des rigidités; ceci permet l'utilisation d'équations différentielles capables d'intégrer en bloc.

A l'aide de ces formules dérivées, il est possible de déterminer les moments de flexion indispensables à l'établissement du justificatif de la tenue à la rupture. La méthode est expliquée par quatre exemples de calculs.

L'exposé présente en outre une possibilité d'estimation simplifiée de la tenue au déversement de poutres de ces deux types de béton (Chap. 7.2).

Inhaltsverzeichnis

	Vorwort	5		7 Grundlegende Zusammenhänge und Hinweise	
1	Einführung	7	7.1	Kippstabilität im Zusammenhang mit durchgeführter Biegebemessung	59
2	Differentialgleichungen nach Theorie II. Ordnung	10	7.1.1	Abhängigkeit des Bruchmoments von der Nulllinienneigung	60
3	Belastungs- und werkstoffabhängige Querschnittswerte und Steifigkeiten	12	7.2	Einfache Abschätzung der Kippstabilität	62
3.1	Wirklichkeitsnahe Werkstoffbeziehungen	13	7.3	Einfluß der maßgebenden Steifigkeiten	64
3.1.1	Verhalten der Bewehrungen bei Zug- und Druckbeanspruchung	13	7.4	Versagensursachen	65
3.1.2	Betonverhalten in der Druckzone	13	7.5	Imperfektionen	66
3.2	Querschnittswerte und Steifigkeiten für Biegebeanspruchung	17	7.6	Lagerbedingungen	67
3.3	Torsionskennwerte	17	7.6.1	Einfluß der Lagerbedingungen anhand eines Beispiels	68
4	Lösungsverfahren des Differentialgleichungssystems	21	8	Zusammenfassende Bemerkungen , Ausblick	72
5	Berechnungsablauf des Stabilitätsnachweises als Spannungsproblem II. Ordnung	22		Literaturverzeichnis	74
5.1	Rechnerischer Bruchzustand der Werkstoffe Beton und Bewehrungsstahl	23	Anhang A	Anhang A	
5.2	Rechnerisches Stabilitätsversagen eines Trägers	24		Aufstellen und Lösung der maßgebenden Differentialgleichungen Theorie II.Ordnung und Analyse eines Stahlbetonquerschnitts unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Werkstoffbeziehungen	79
6	Näherungsverfahren zur Abschätzung der Kippstabilität	24	Anhang B	Anhang B	
6.1	Grundüberlegungen zur Ableitung eines Näherungsverfahrens	25		Berechnungsbeispiele zur Kippstabilität ausgewählter Stahlbeton- und Spannbetonträger	127
6.2	Vereinfachungen der Differentialgleichungen nach Theorie II. Ordnung	25	Anhang C	Anhang C	
6.3	Untersuchungen zum Verlauf der Steifigkeiten über die Trägerlänge	27		Nachrechnung von durchgeführten Kippversuchen	153
6.4	Allgemeine Näherungslösung für die vereinfachte homogene Differentialgleichung	28		Ein detailliertes Inhaltsverzeichnis der Anhänge steht auf der folgenden Seite	
6.5	Näherungsweise Ermittlung der Stabverdrehung nach Theorie II. Ordnung	38			
6.6	Näherungsweise Ermittlung des Torsionsmoments an der Gabel	43			
6.7	Ablauf des Näherungsverfahrens zur Ermittlung der Kippstabilität	43			
6.8	Besonderheiten beim Satteldachbinder	44			
6.8.1	Lage des Berechnungsquerschnittes	44			
6.8.2	Wahl der Bezugslinie	44			
6.9	Anwendung des Näherungsverfahrens	45			
6.9.1	Ausgewählte Beispiele von Satteldachbindern				
6.9.1.1	Vorgespannter Satteldachbinder Beispiel 1	46			
6.9.1.2	Vorgespannter Satteldachbinder Beispiel 2	49			
6.9.2	Ausgewählte Beispiele von Parallelgurtbindern				
6.9.2.1	Vorgespannter Parallelgurtbinder Beispiel 3	52			
6.9.2.2	Stahlbetonträger Beispiel 4	55			
6.9.3	Zusammenfassende Bemerkungen zu den Beispielen 1-4	58			

Inhaltverzeichnis der Anhänge A , B und C

Anhang A

Aufstellen und Lösung der maßgebenden Differentialgleichungen Theorie II.Ordnung und Analyse eines Stahlbetonquerschnitts unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Werkstoffbeziehungen

A1	Die Differentialgleichungen nach Theorie II. Ordnung für den räumlich belasteten, geraden und dünnwandigen Stab mit offenem unsymmetrischem Querschnitt	
A1.1	Bezeichnungen, Abkürzungen	81
A1.2	Voraussetzungen	82
A1.3	Aufstellen der differentiellen Beziehungen	82
A1.3.1	Koordinatensystem, Verformungen	82
A1.3.2	Beziehungen zwischen Spannungen und Verformungen	83
A1.3.3	Schnittgrößen bezogen auf die verformten Achsen	84
A1.3.4	Schnittgrößen bezogen auf die Richtung der unverformten Achsen	85
A1.3.5	Gleichgewichtsbetrachtung am Stabelement	85
A1.3.6	Differentialgleichungen nach Theorie II. Ordnung für den wölbsteifen Stab	86
A1.3.7	Differentialgleichungssystem I. Ordnung	86
A1.3.8	Beziehungen zwischen den auf die unverformten und den auf die verformten Achsen bezogenen Schnittgrößen	88
A1.3.9	Der wölbfreie Querschnitt	88
A2	Erweiterung der Gleichungen nach Theorie II. Ordnung für den vorgespannten Stahlbetonquerschnitt	89
A2.1	Schnittgrößen bezogen auf die verformten Achsen	90
A2.2	Schnittgrößen bezogen auf die unverformten Achsen	92
A2.3	Gleichgewichtsbetrachtungen	92
A2.4	Differentialgleichungen nach Theorie II. Ordnung für den vorgespannten Stahlbetonquerschnitt	92
A2.5	Einfluß der Vorspannung auf das Dgl-System I. Ordnung	93
A2.6	Umrechnung der auf die unverformten Achsen bezogenen Schnittgrößen	93
A2.7	Zusammenfassende Bemerkungen	93
A3	Berechnung der Querschnittswerte und Steifigkeiten eines Stahlbetonquerschnitts für wirklichkeitsnahes Werkstoffverhalten	
A3.1	Querschnittswerte für Biegebeanspruchung	94
A3.2	Flächenintegrale der ungerissenen Betonzone	95
A3.2.1	Berechnung der Betondruckkraft und ihrer Momente	98
A3.3	Querschnittswerte für Torsionsbeanspruchung	
A3.3.1	Gewichteter mittlerer Schubmodul	100
A3.3.2	St. Venantsche Torsionssteifigkeit	101
A3.3.3	Schubmittelpunkt	103
A3.3.4	Wölbsteifigkeit	104

A4	Numerische Lösungsmöglichkeiten für das Differentialgleichungssystem	106
A4.1	Allgemeine Bemerkungen	106
A4.2	Nichtkonstante Größen des Dgl- Systems für das Einzelement	106
A4.2.1	Streckenlasten	107
A4.2.2	Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung	107
A4.2.3	Vorspannung	107
A4.2.4	Vorverformungen	108
A4.3	Aufstellen der Übertragungsmatrix des Stabelements	109
A4.4	Berechnung der Steifigkeitsmatrix für das Stabelement	110
A4.5	Umrechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen in das globale Koordinatensystem	111
A4.6	Bestimmung der Gesamtsteifigkeitsmatrix aus den globalen Elementsteifigkeitsmatrizen	113
A4.7	Berücksichtigung von Knotenlasten	115
A4.7.1	Richtungstreue Einzellasten	115
A4.7.2	Poltreue Einzellasten	116
A4.7.3	Einzelmomente	118
A4.7.4	Normalkraft	118
A4.8	Lagerbedingungen	119
A4.8.1	Starre Lager	120
A4.8.2	Elastische Lager	120
A4.8.2.1	Dehnfedern	121
A4.8.2.2	Drehfedern	121
A4.8.3	Der aufgehängte Träger	122
A4.9	Rückrechnung	123
A4.10	Iteration der Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung	124
A5	Beschreibung des Rechenprogramms nach Theorie II. Ordnung	124
A5.1	Berechnung für eine gegebene Laststufe	124
A5.2	Ermittlung der Traglast	125

Anhang B

Berechnungsbeispiele zur Kippstabilität ausgewählter Stahlbeton- und Spannbetonträger		
B1	Beidseitig gabelgalagerte Träger	129
B2	An Seilen aufgehängte Träger	129
B3	Berechnung mit dem Näherungsverfahren	150

Anhang C

Nachrechnung von durchgeführten Kippversuchen		
C1	Nachrechnung der Versuche von <i>König/Pauli</i>	
C1.1	Nachrechnung Versuch 1	157
C1.2	Nachrechnung Versuch 2	159
C1.3	Nachrechnung Versuch 3	160
C1.4	Nachrechnung Versuch 4	161
C1.5	Nachrechnung Versuch 5	162
C1.6	Nachrechnung Versuch 6	163
C1.7	Vergleichende Betrachtungen der Versuche 1 bis 4	166
C2	Nachrechnung des Kippversuchs von <i>Frenzel/Rafla</i>	168
C3	Zusammenfassende Bemerkungen zu den Versuchsnachrechnungen	172

Vorwort

Als im Jahr 1990 der Entschluß gefaßt war, einen umfassenden Bericht zur Kippstabilität von Stahlbeton und Spannbetonträgern zu schreiben, sollten die Dissertationen *Röder* [8] und *Wienecke* [9] zu einem gemeinsamen Werk zusammengefaßt werden. Diese Absicht konnte aufgrund der in den beiden Dissertationen sehr unterschiedlichen Darstellungs- und Bezeichnungsweise nicht mehr mit vertretbarem Aufwand verwirklicht werden. Zudem ergaben sich große Probleme bei der Funktionstüchtigkeit des Rechenprogramms von Wienecke , da die neueren Versionen der externen, im Wienecke-Programm verwendeten Programmbibliotheken nicht mehr kompatibel waren. Deshalb ist die ursprüngliche Absicht, die beiden Arbeiten zu integrieren, fallen gelassen worden, und es ist grundsätzlich auf die Ausführungen und auf das voll funktionstüchtige Rechenprogramm der Dissertation Röder zurückgegriffen worden.

Die erste Fassung des vorliegenden Berichts ist von mir bereits in den Jahren 1991-1993 bearbeitet worden. Im Frühjahr 1994 habe ich eine veröffentlichungsreife Fassung dem damaligen, seit Herbst 1997 pensionierten Leiter des Fachgebiets Massivbau, Herrn Prof.i.R. Dr.-Ing. Dr.-Ing.h.c. Gerhard Mehlhorn, übergeben. Herr Prof. Mehlhorn wollte nach einer eigenen Überarbeitung diesen Bericht in der Schriftenreihe des DAfStb veröffentlichen lassen. Nachdem sich dies zeitlich nicht verwirklichen ließ, habe ich mich nun entschlossen, den Bericht in einer überarbeiteten Form in der Reihe der Forschungsberichte des Fachgebiets Massivbau zu veröffentlichen.

Zu diesem Zweck habe ich nochmals eine umfassende Überarbeitung und mehrere Ergänzungen vorgenommen. Vor allem sind die beiden Aufsätze über ein Näherungsverfahren zur Beurteilung der Kippstabilität aus den Jahren 1991 und 1997 [38 und 49] zusammengefaßt worden. Darüber hinaus sind viele weitere Berechnungsbeispiele, insbesondere der Anhang B, in die vorliegende Fassung aufgenommen worden.

Kassel, im Juli 1999

Friedrich-Karl Röder

1. Einführung

Im Ingenieurbau ist seit langem bekannt, daß druckbeanspruchte Stäbe bei nicht ausreichenden Biegesteifigkeiten ausknicken (Biegeknicken). Die erste Behandlung eines Stabilitätsproblems der Elastostatik erfolgte bereits 1744 durch *Euler*, der für den mittig belasteten, ideal geraden Stab aus *Hookeschem* Material die Biegeknicklasten ermittelte. Erst etwa 150 Jahre später, um die Jahrhundertwende zum 20. Jahrhundert, wiesen *Prandtl* [1] und *Michell* [1a] fast gleichzeitig darauf hin, daß auch schlanke, durch Biegung ohne Normalkraft beanspruchte Träger bei Erreichen einer kritischen Belastung seitlich ausweichen können. Nach *Prandtl* werden solche Instabilitätsprobleme als Kipperscheinungen bezeichnet, weil das seitliche Ausweichen dabei stets mit einer Stabverdrehung verbunden ist : der Träger "kippt" im wahrsten Sinne des Wortes um seine Längsachse .

Bei dieser Gelegenheit und an dieser Stelle ist es angebracht, gleich zu Beginn einige ganz allgemeine Erläuterungen zur Definition der Begriffe "Kippen" und "Biegedrillknicken" zu geben. Beim Aufstellen der maßgebenden differentiellen Beziehungen besteht zwischen "Kippen" und "Biegedrillknicken" kein Unterschied. Eigentlich ist der Stabilitätsfall "Kippen" im allgemeineren Stabilitätsfall "Biegedrillknicken" als Sonderfall enthalten. Wie der Name schon ausdrückt, sind beim Biegedrillknicken die Einflüsse aus Biegung, Drillung und Knickung maßgebend. Aus diesen drei Grundeinflüssen können durch eine Wichtung nach der Hauptursache des Stabilitätsversagens die Sonderfälle "Drillknicken", "Biegeknicken" und "Biegedrillen" behandelt werden. Anstelle des Ausdrucks "Biegeknicken" hat sich die kürzere Bezeichnung "Knicken" durchgesetzt, und der Fall des "Biegedrillens" wird mit "Kippen" bezeichnet. Nun taucht natürlich sofort die Frage nach dem Sinn einer gezielten Behandlung dieser Sonderfälle auf, wenn sich mit dem umfassenden Fall des Biegedrillknickens diese Probleme auch lösen lassen. Der Vorteil einer Betrachtung von Sonderfällen liegt u.a. darin, daß man sich auf die wesentlichen, das Stabilitätsversagen hervorrufenden Einflüsse konzentriert und für die weniger wichtigen Einflüsse sinnvolle Vereinfachungen trifft oder sie ganz vernachlässigt. Dadurch kann das anstehende Problem übersichtlicher dargestellt werden, und auch die numerische Behandlung wird einfacher.

Mit "Kippen" wird also das Stabilitätsverhalten vorwiegend auf Biegung in der Hauptbiegungsebene beanspruchter Träger bezeichnet. In statischer Hinsicht kann das Kippproblem sowohl als Verzweigungsproblem, als auch als Spannungsproblem nach Theorie II. Ordnung behandelt werden. Beim Verzweigungsproblem kann das Tragverhalten nur sehr idealisierend erfaßt werden, da als Annahmen eine vor dem Ausweichen des Trägers ideal gerade Trägerachse, eine zur Hauptebene symmetrische Belastung und ein mindestens einfach symmetrischer Querschnitt erforderlich sind und geometrische Systemimperfectionen nicht erfaßt werden . Bei einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung entfallen alle eben aufgezählten Einschränkungen . In beiden Fällen werden durch die auftretende Verdrehung Torsionsmomente hervorgerufen, die jedoch direkt auf das Tragverhalten des Trägers keinen wesentlichen Einfluß haben und eigentlich nur zur Erfüllung des Gleichgewichts am verformten System dienen. Ähnlich verhält es sich mit der Normalkraft. Eine Normalkraft als wesentliche äußere Last tritt beim Stabilitätsfall "Kippen" nicht auf. Aus Eigenspannungszuständen bei einer möglichen Vorspannung oder aus einer Aufhängung an geneigten Seilen können jedoch Normalkraftbeanspruchungen vorhanden sein, die dann natürlich auch berücksichtigt werden müssen. Entsprechend diesen Vorgaben können die allgemein gehaltenen, differentiellen Beziehungen des Biegedrillknickens für den Stabilitätsfall Kippen vereinfacht und auf die wesentlichen Einflüsse beschränkt werden. Diese Ausführungen stehen nicht im Widerspruch zu den in den folgenden Kapiteln behandelten Differentialgleichungen, worin Torsionsmoment und Normalkraft explizit auftauchen und aus Gleichgewichtsgründen erforderlich sind.

Nach diesen mehr allgemein gehaltenen Erläuterungen zu einigen wesentlichen Begriffen aus dem Bereich des hier behandelten Stabilitätsproblems, wird nun in der kurzen Beschreibung des zeitlichen Ablaufs bei der Behandlung des angesprochenen Themenkreises fortgefahren. Die Theorie des Kippens ist in der Zeit nach *Prandtl* [1] und *Michell* [1a] von einer Vielzahl von Wissenschaftlern erweitert worden, von denen exemplarisch nur die Namen *Timoschenko* [2] und *Chwalla* [3] genannt seien. Eine ausführliche Literaturübersicht der wesentlichen Arbeiten zur Kippstabilität bis zum Jahre 1970 wird von *Mehlhorn* [4] vorgenommen.

Bis in die 50er Jahre sind die grundlegenden Arbeiten zur Theorie des Kippens ausnahmslos auf dem Gebiet des Stahlbaus erfolgt, wobei der ideal gerade Träger mit einem linear elastischen Werkstoffverhalten (*Hooke*) behandelt wird. Zur Beurteilung der Kippstabilität von Stahlträgern als Verzweigungsproblem sind dementsprechend eine Vielzahl unterschiedlicher Lösungen frühzeitig bekannt gewesen, die eine Abschätzung der kritischen Belastung ermöglichten. Durch die zunehmende Verwendung von Baustoffen höherer Festigkeiten und durch die zunehmende industrielle Vorfertigung werden etwa seit Beginn der 60er Jahre Stahlbeton- und Spannbetonträger mehr und mehr schlanker ausgebildet, so daß das Kippverhalten vorwiegend auf Biegung beanspruchter Träger auch im Massivbau an Bedeutung gewonnen hat. Sieht man von den werkstoffabhängigen Größen einmal ab, so bestehen hinsichtlich des Tragverhaltens zwischen Stahlträgern und Stahlbetonträgern keine grundsätzlichen Unterschiede. Die Behandlung des Stabilitätsproblems "Kippen" im Massivbau entwickelte sich dementsprechend in der Weise, daß auf aus dem Stahlbau bekannte Lösungen zurückgegriffen und zunächst nur die werkstoffspezifischen Gegebenheiten des Stahlbetons eingearbeitet wurden. In den Arbeiten am Beginn dieser Entwicklung wird noch ein idealisiertes, linear-elastisches Betonverhalten und in vielen Fällen der gesamte Betonquerschnitt als ungerissen angenommen. Die wirklichen Verhältnisse eines Betonträgers können damit natürlich nur sehr unzureichend erfaßt werden. Als erste Arbeiten, die bei der Behandlung des Kippverhaltens von Betonträgern ein wirklichkeitsnahes Betonverhalten (gekrümmte Spannungs-Verzerrungs- Beziehung) in der Druckzone und den gerissenen Zustand des Betons in der Zugzone bei der Ermittlung der Steifigkeiten und Querschnittswerte von vorgespannten und nicht vorgespannten Stahlbetonträgern berücksichtigen, sind die Beiträge von *Mehlhorn* [4] und [5] zu nennen. In diesen Arbeiten erfolgt jedoch die statische Behandlung des Kippens noch idealisiert als Verzweigungsproblem.

Unabhängig vom verwendeten Werkstoff kann man die Kippstabilität wirklichkeitsnah nur durch eine Untersuchung des Trägers am verformten System nach Theorie II. Ordnung abschätzen, worauf schon *Prandtl* [1] Ende des vorigen Jahrhunderts und in der Folgezeit wiederholt verschiedene Autoren hingewiesen haben. Obwohl die Problemstellung eigentlich frühzeitig bekannt gewesen ist, begann erst in den 60er Jahren,

wiederum zunächst für Träger mit linear- elastischem Werkstoffverhalten, eine Behandlung des allgemeinen Biegedrillknickproblems nach Theorie II. Ordnung. Als zwei der grundlegenden Arbeiten auf diesem Gebiet sind stellvertretend für viele die Veröffentlichungen von *Wlassow* [6] und *Steinbach* [7] zu nennen. Einer der wesentlichen Gründe für diesen verhältnismäßig späten Zeitpunkt dürfte darin zu suchen sein, daß es für die das Problem beschreibenden differentiellen Beziehungen nach Theorie II. Ordnung keine geschlossene Lösung mehr gibt, und die Anwendung geeigneter numerischer Verfahren zur Lösung von Gleichungssystemen erst durch die Entwicklung der elektronischen Datenverarbeitung mit einem vertretbarem Zeitaufwand brauchbare Ergebnisse liefert. Folgerichtig ist im Laufe der Entwicklung bei der Behandlung der Kippstabilität für Stahlbeton- und Spannbetonträger die Verknüpfung der geometrisch nichtlinearen Theorie II. Ordnung mit den physikalisch nichtlinearen Eigenschaften des Verbundwerkstoffes Stahlbeton erfolgt, was im Jahre 1982 in der Arbeit von *Röder* [8] für Kurzzeitbelastung geschehen und anschließend in 1985 von *Wienecke* [9] u.a. auch auf Langzeitbelastung erweitert worden ist. Ende der achtziger und Anfang der neunziger Jahre sind von mehreren Wissenschaftlern weitere umfangreiche Untersuchungen zur Beurteilung der Kippstabilität von Stahlbetonträgern vorgenommen worden, was in den Arbeiten von *Pauli* [32-34], *Ehret* [37] und *Backes* [42] dokumentiert ist. Mit diesen Arbeiten ist nun ein Stadium erreicht, in dem nahezu alle in der Praxis vorkommenden Stahlbetonträger mit und ohne Vorspannung bezüglich ihres Kippverhaltens mit einer sehr großen Zuverlässigkeit wirklichkeitsnah beurteilt werden können. Allerdings werden hierzu die im Rahmen der eben genannten Arbeiten entstandenen, umfangreichen Rechenprogramme benötigt. Mit der bloßen Anwendung dieser Rechenprogramme allein ist es jedoch nicht getan. Es gehört schon ein grundlegendes theoretisches Fachwissen dazu, um unsachgemäße Anwendungen zu vermeiden, und um die Ergebnisse richtig beurteilen zu können.

Um den numerischen Aufwand beim Führen eines Kipp-Stabilitätsnachweises zu verringern, sind im Laufe der letzten 20 Jahre immer wieder Versuche unternommen worden, ein zutreffendes und dennoch einfach zu handhabendes Näherungsverfahren zu entwickeln.. Keiner der bis zum Jahre 1990 zur näherungsweise Abschätzung der Kippstabilität veröffentlichten Beiträge genügt diesen Anforderungen. Entweder erfordern diese Beiträge

bei Anwendung von iterativen Verfahren durch die physikalischen Nichtlinearitäten des Werkstoffes zwangsweise eine erhebliche Anzahl von zeit- aufwendigen Berechnungsschritten oder bei der Ermittlung der werkstoffabhängigen Querschnitts- größen und Steifigkeiten wird auf zwar bekannte und weitverbreitete, aber für das zu behandelnde Kippproblem ungeeignete Tafeln und Diagramme aus dem Bereich der Bauteilbemessung zurück- gegriffen. Seit 1990 ist die Entwicklung von Verfahren zur Beurteilung der Kippstabilität von Stahlbetontägern jedoch soweit fortgeschritten, daß im Rahmen der oben genannten Arbeiten Näherungsverfahren zur Beurteilung der Kipp- stabilität von *Mehlhorn/Röder/Schulz* [38], *Stiglat* [39], *König/Pauli* [40], *Kraus/Ehret* [40], *Backes* [43] und *Röder* [49] abgeleitet worden sind. Besonders die Ableitung des Näherungs- verfahrens [49] als Erweiterung von [38] ist der Gegenstand der folgenden Ausführungen. Auf- grund umfangreicher Erfahrungen mit konkret behandelten Fällen aus der Praxis ist es in Verbin- dung mit dem theoretischen Wissensstand gelungen dieses Näherungsverfahrens zu entwickeln, das die wesentlichen Zusammenhänge des Kippverhaltens von Stahlbeton- und Spannbetontägern erfaßt, dennoch verhältnis- mäßig einfach zu bedienen ist und auch schnell zum Ziel führt. Nur in sehr kritischen Fällen wird ein genauerer Nachweis notwendig.

Der folgende Bericht ist so aufgebaut, daß im Hauptteil die allgemeinen Zusammenhänge, gegliedert nach Ausführungen zu den maßgeben- den Differentialgleichungen (Abschnitt 2), zu den wirklichkeitsnahen Querschnittswerten und Steifigkeiten (Abschnitt 3) und zu den Lösungs- möglichkeiten der Differentialgleichungen (Abschnitt 4), dargestellt werden. Es folgt die Beschreibung des Ablaufs einer iterativen Berech- nung nach Theorie II. Ordnung (Abschnitt 5) und die Ableitung des Näherungsverfahrens zur Abschätzung der Kippstabilität mit vier ausführ- lichen Berechnungsbeispielen (Abschnitt 6). Daran anschließend werden einige allgemeine Zusam- menhänge beim Kippverhalten von Stahlbeton- trägern beschrieben und konstruktive Hinweise mit weiteren Beispielen gegeben (Abschnitt 7). Dabei wird ein besonders einfache und praxisgerechte Abschätzung der Kippstabilitäts vorgestellt. Eine Zusammenfassung mit Ausblick (Abschnitt 8) beschließt den Hauptteil des Berichts.

Im Anhang A wird in ausführlicher Form auf die Ableitung der Differentialgleichungen (Abschnitte A1 und A2), auf die Berechnung der Quer- schnittswerte und Steifigkeiten (Abschnitt A3) und ein Lösungsverfahren des Differentialgleichungs- systems (Abschnitt A4) eingegangen. Es schließt sich eine allgemein gehaltene Beschreibung des entwickelten Rechenprogramms und des Berechnungsablaufs an (Abschnitt A5). Der Anhang B enthält die mit [8] erhaltenen Berechnungsergebnisse für sechs ausgewählte Stahlbeton- und Spannbetontäger mit variablen Längen $\leq 40\text{m}$. Es wird der Standardfall beidseitig gabelgelagerter Träger unter Gleichstrecken- belastung und unter einer Einzellast in Trägermitte für fünf unterschiedliche Vorverformungen behan- delt. Außerdem ist der Montagefall der an Seilen aufgehängten Träger für Befestigungspunkte direkt am Trägerende, bzw. im Zehntelpunkt von den Trägerenden entfernt mit jeweils drei unterschied- lichen Seilneigungen berechnet worden. Die Ergebnisse sind in Form von Diagrammen und Tabellen angegeben.

Im Anhang C werden schließlich die mit dem Rechenprogramm [8] erzielten Ergebnisse der Nachberechnungen bisher bekannter Kippversuche [31-33] an Stahlbeton- und Spannbetontägern mit praxisgerechten Abmessungen vorgestellt, mit den Versuchsergebnissen verglichen und über die Unterschiede zwischen Versuch und Berechnung diskutiert.

Eine Berücksichtigung der zeitabhängigen Einwirkungen wie Kriechen und Schwinden des Betons werden in den theoretischen Abschnitten nicht behandelt. Explizite Beispielrechnungen zum Einfluß der Langzeiteinwirkungen können ebenfalls nicht vorgenommen werden. Die Gründe hierfür sind bereits im Vorwort kurz angesprochen worden. Zu diesem Themenbereich wird direkt auf die Dissertation *Wienecke* [9] verwiesen. Auch *Ehret* [37] gibt eine im Vergleich zu *Wienecke* sehr einfache Möglichkeit an, Kriech- und Schwind-Einflüsse im Werkstoffverhalten des Betons zu berücksichtigen. *Backes* [42] hat die Vorgehensweise von *Ehret* übernommen.

2. Differentialgleichungen nach Theorie II. Ordnung

Die grundlegenden Gleichungen und Ansätze für die Behandlung des Stabilitätsproblems nach Theorie II. Ordnung sind in einer Vielzahl von Veröffentlichungen bereits ausführlich dargestellt worden. Auf eine Herleitung wird deshalb an dieser Stelle verzichtet und auf den Anhang A1 verwiesen. Stellvertretend werden hier nur der Aufsatz von *Steinbach* [7] und die Dissertationen von *Röder* [8] und *Wienecke* [9] genannt. Dort sind weitere Literaturstellen angegeben.

Behandelt wird der räumlich belastete, gerade Stab in einem rechtwinkligen, rechtsorientierten Koordinatensystem nach Bild 1. Es wird mit koordinatenorientierten Schnittgrößen gearbeitet, was bedeutet, daß alle positiven Verformungsgrößen in Richtung der positiven Koordinatenachsen zeigen. Für die Schnittgrößen gilt diese Regelung am positiven Schnittufer eines Stabelements. Aus den Gleichgewichtsbetrachtungen am verformten System und den Verträglichkeitsbedingungen lassen sich unter Berücksichtigung der Materialgleichungen die das Stabilitätsproblem beschreibenden, differentiellen Beziehungen aufstellen. Es ergibt sich ein Dgl-System I. Ordnung mit 14 Unbekannten, bei denen es sich um die mechanisch sinnvollen 14 Zustandsgrößen der Balkentheorie handelt. Dies sind die Querkräfte Q_z und Q_y , die Normalkraft N , die Biegemomente M_y und M_z , das Torsionsmoment M_t und das Wölbmoment M_w sowie die jeweils zugeordneten Verschiebungen v , w und u , die Verdrehungen φ_z , φ_y und ϑ und die Verwindung ϑ' . Grundsätzlich ergeben sich im allgemeinen Fall gekoppelte Differentialgleichungen, die nur für Sonderfälle zu entkoppeln sind.

Wienecke [9] leitete unter Anwendung der Vektoranalysis ein sehr allgemeines Differentialgleichungssystem für eine beliebige Lage des Bezugskordinatensystems nach Theorie II. Ordnung her, ohne frühzeitig Linearisierungen vorzunehmen. Im theoretischen Teil der Arbeit werden deshalb auch die Schubdeformationen miteinfaßt. Für die Untersuchung der Kippstabilität von Stahlbeton- und Spannbetonträgern ist die Schubdeformation jedoch von geringer Bedeutung und wird deshalb bei der numerischen Behandlung vernachlässigt. Bei den Verknüpfungsgleichungen zwischen Schnittgrößen, Verformungen und Verzerrungen werden Terme einschließlich zweiter Ordnung berücksichtigt. Dadurch treten auch Produkte zweier unbekannter Schnitt- und/oder Verformungsgrößen auf, was schließlich auf ein

nichtlineares gekoppeltes Gleichungssystem

I. Ordnung führt. Diese geometrischen Nichtlinearitäten und nicht zuletzt auch die Wahl eines allgemeinen Bezugspunktes für das Koordinatensystem haben ein sehr komplexes Differentialgleichungssystem zur Folge, das sich für den mit der Problematik weniger vertrauten Ingenieur in einer einfachen und anschaulichen Form nicht mehr darstellen läßt. Zum besseren Verständnis des hier behandelten Stabilitätsproblems lassen sich jedoch Vereinfachungen treffen, und damit die gleichen Zusammenhänge weniger kompliziert darstellen. Wenn der elastische Schwerpunkt S des Querschnitts als Koordinatenursprung gewählt wird und die Verformungsgrößen auf den Schubmittelpunkt M bezogen werden, lassen sich die differentiellen Beziehungen am kürzesten und übersichtlichsten darstellen. Außerdem sollen die Koordinatenachsen y und z die Hauptträgheitsachsen des Querschnitts sein, wodurch eine weitere Entkoppelung erreicht wird. Die Längsachse des Trägers fällt dann mit der x -Achse zusammen. Unter Berücksichtigung dieser Vorgaben hat bereits *Röder* [8] die differentiellen Beziehungen nach Theorie II. Ordnung aufgestellt, die im Ansatz mit denen von *Wienecke* [9] identisch sind. Bei der weiteren Behandlung werden jedoch schon in einem verhältnismäßig frühen Entwicklungsstand Linearisierungen vorgenommen. Die Vernachlässigung der Verformung in der Längsachse erlaubt die Behandlung der Normalkraft nur als äußere Last und verringert die weiter vorn angegebenen unbekannt Zustandsgrößen von 14 auf 12. Durch weitere Vereinfachungen, die im Anhang A näher beschrieben werden, gelingt es, die entscheidenden Einflußgrößen für das Kippproblem herauszuarbeiten. Im Vergleich zu *Wienecke* [9] ergibt sich ein wesentlich einfacheres und zudem lineares Differentialgleichungssystem I. Ordnung. Hier ist anzumerken, daß sich das Dgl-System von *Wienecke* durch entsprechende Vereinfachungen in das Dgl-System von *Röder* überführen läßt. Anders ausgedrückt, steckt das einfachere Dgl-System von *Röder* im Kern des vollständigeren Dgl-Systems von *Wienecke*. In der Diplomarbeit von *Hartmann* [10] ist anhand von für das Stabilitätsproblem charakteristischen Beispielen untersucht worden, wie sich der Einfluß der beiden Dgl-Systeme von *Wienecke* und *Röder* auf das Kippverhalten auswirkt. Um die Ergebnisse frei von unterschiedlichen Werkstoffformulierungen zu halten, sind dabei die Untersuchungen mit linear-elastischem Materialverhalten für einen homogenen Werkstoff durchgeführt worden. Dadurch können die Einflüsse der geometrischen Nichtlinearitäten für sich allein beurteilt werden. Als Ergebnis läßt sich festhalten, daß sich die

maßgebenden, mit den unterschiedlichen Dgl-Systemen erreichten Versagenslasten des jeweils untersuchten Beispiels nur um höchstens etwa 5% unterscheiden. Die mit dem Dgl-System von Röder berechneten Verformungen sind bei Laststufen oberhalb von ca. 80% der Versagenlast geringfügig größer als die mit dem Dgl-System von Wienecke ermittelten. Die unterschiedliche Behandlung der geometrischen Imperfektionen, die bei Wienecke direkt im Dgl-System als Weggrößenbelastungsglieder bzw. bei Röder durch Umrechnung der Weggrößen in Zusatzkraftgrößen berücksichtigt werden, haben nur einen geringen Einfluß auf die Ergebnisse. Die zusätzlichen Koeffizienten im Dgl-System von Wienecke infolge der Mitnahme von Gliedern höherer Ordnung und nichtlinearer Anteile wirken sich spürbar erst bei größeren Verformungen aus. Für die baupraktisch üblichen Größenordnungen, z.B. einer horizontalen Vorverformung von bis zu 1/250 und einer Vorverdrehung von bis zu 0,02 rad, können sie jedoch vernachlässigt werden. Somit läßt sich die Schlußfolgerung ziehen, daß das weniger aufwendige Dgl-System von Röder die wesentlichen Einflüsse auf die Kippstabilität genügend genau erfaßt und im Hinblick auf die Berücksichtigung der geometrischen Nichtlinearitäten vollkommen ausreicht.

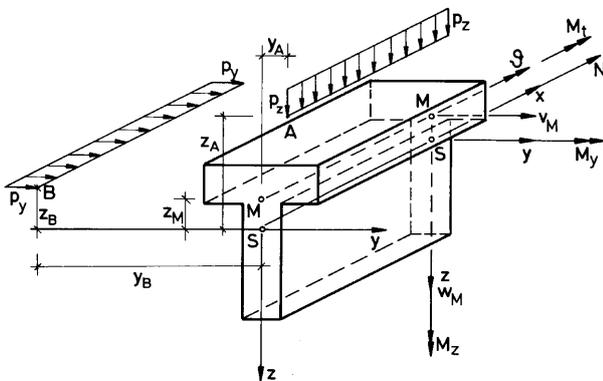


Bild 1 : Belastung und Schnittgrößen am einachsensymmetrischen Querschnitt

Fig. 1 : Loading and intersection values at single-symmetric cross-section

Zusammenfassend kann also bisher gesagt werden, daß sich der Stabilitätsfall "Kippen" mit einem linearen Differentialgleichungssystem I. Ordnung beschreiben läßt, das für den wirklichkeitsnahen Fall unter Berücksichtigung von Imperfektionen nur mit numerischen Methoden integriert werden kann. Für den mit der Problematik weniger vertrauten Leser ist die Darstellung der differentiellen Beziehungen in einem Dgl-System I. Ordnung (siehe Anhang A1) ungeläufig, zumal alle vorhandenen Koppelungen nicht sofort auf den ersten Blick erkennbar sind. Deshalb wird das aus 12 Gleichungen bestehende Dgl-System I. Ordnung in die bekanntere Form der drei gekoppelten Diffe-

rentialgleichungen 4. Ordnung umgeformt, mit denen die Biegung um die beiden Hauptachsen eines Querschnitts und die Verdrehung um die Trägerlängsachse beschrieben werden. Die unbekanntenen Verschiebungen v und w und die unbekanntene Verdrehung phi beziehen sich auf den Schubmittelpunkt M. Das Koordinatensystem liegt jedoch im elastischen Schwerpunkt S, die Richtung der Achsen zeigt in Richtung der unverformten Hauptachsen des Querschnitts. Die drei gekoppelten Differentialgleichungen IV. Ordnung nach der Dissertation Röder [8] lauten dann mit den Bezeichnungen nach Bild 1 :

$$((EI_y) w_M''')'' + (M_{zI} \vartheta)'' - N w_M'' + N y_M \vartheta'' = p_z \quad (2.1a)$$

$$((EI_z) v_M''')'' + (M_{yI} \vartheta)'' - N v_M'' + N z_M \vartheta'' = p_y \quad (2.1b)$$

$$((EC_M) \vartheta''')' - ((GI_t) + N i_M^2) \vartheta'' - (r_{M,y} M_{yI} \vartheta')' + (r_{M,z} M_{zI} \vartheta')' + M_{yI} v_M'' + M_{zI} w_M'' + N y_M w_M'' - N z_M v_M'' + (p_y (y_B - y_M) + p_z (z_A - z_M)) \vartheta = m_{tI} \quad (2.1c)$$

In den Gleichungen (2.1) bedeuten:

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{dx}$$

$(EI_y), (EI_z) \Rightarrow$ Biegesteifigkeiten

$(EA) \Rightarrow$ Dehnsteifigkeit

$(EC_M) \Rightarrow$ Wölbsteifigkeit

$(GI_t) \Rightarrow$ St. Venantsche Torsionssteifigkeit

$$i_M^2 = \frac{(EI_y) + (EI_z)}{(EA)} + y_M^2 + z_M^2$$

$$r_{M,y} = \frac{1}{(EI_y)_A} \iint_A E z (y^2 + z^2) dA - 2 z_M = r_y - 2 z_M$$

$$r_{M,z} = \frac{1}{(EI_z)_A} \iint_A E y (y^2 + z^2) dA - 2 y_M = r_z - 2 y_M$$

$y_M, z_M \Rightarrow$ Schubmittelpunktskoordinaten (Koordinatenursprung im Schwerpunkt)

$y_A, z_A \Rightarrow$ Abstände der Lastangriffspunkte A und B vom Schwerpunkt

$M_{yI}, M_{zI} \Rightarrow$ Biegemomente nach Theorie I. Ordnung

$N \Rightarrow$ äußere Normalkraft

$p_z, p_y \Rightarrow$ Streckenlasten

$v_M, w_M \Rightarrow$ Verschiebungen des Schubmittelpunkts in y- bzw. z-Richtung

$\vartheta \Rightarrow$ Verdrehung des Querschnitts um den Schubmittelpunkt

$m_{tI} = p_z (y_A - y_M) - p_y (z_B - z_M)$
 Torsionsstreckenmoment nach Theorie I. Ordnung infolge p_y und p_z

Zu den Koeffizienten der unbekanntenen Verformungsgrößen sind einige Bemerkungen zu machen. Die Steifigkeiten und Querschnittswerte sind grundsätzlich belastungsabhängig, weshalb die Lösung der Differentialgleichungen auch nur iterativ erfolgen kann. Die Schnittgrößen M und N sowie die Steifigkeiten und Querschnittswerte sind durch Integrationen über die wirksamen Querschnittsflächen zu bestimmen, worunter hier die Betondruckzone, die nicht vorgespannte und die vorgespannte Bewehrung und u.U. auch der nicht gerissene Anteil der Betonzugzone zu verstehen sind. Bei diesen Integrationen spielt dann das Werkstoffverhalten des Betons und der Bewehrungen eine entscheidende Rolle. Das formal gleiche Aussehen der Differentialgleichungen für einen Stahlträger und einen Stahlbetonträger, darf nicht zu der Annahme führen, daß die Besonderheiten des Verbundwerkstoffs Stahlbeton nicht richtig erfaßt werden. Über die Koeffizienten in den Differentialgleichungen werden diese Eigenheiten des Werkstoffs berücksichtigt. Im Anhang A2 werden diese Zusammenhänge ausführlich dargestellt.

3. Belastungs- und werkstoffabhängige Querschnittswerte und Steifigkeiten

Zur Lösung der im Abschnitt 2 angegebenen Differentialgleichungen ist die Kenntnis der maßgebenden Querschnittswerte und Steifigkeiten erforderlich. Dabei hängt die Qualität einer Berechnung in hohem Maße von der zutreffenden Bestimmung aller sie beeinflussenden Größen ab. Auf allgemeine Zusammenhänge zwischen Verformungsberechnung und Steifigkeitswerten soll hier nicht ausführlich eingegangen, sondern nur auf die diesbezügliche Fachliteratur, z.B. [18] bis [22] , verwiesen werden. Dort werden die Unterschiede einzelner Verfahren erläutert und deren Vor- und Nachteile für die Anwendung bei bestimmten Zielsetzungen aufgezeigt. Auf einige ausgewählte Punkte zur Ermittlung der hier behandelten Werte wird aber dennoch in diesem Abschnitt eingegangen, da sie zum besseren Verständnis der gesamten, hier behandelten Thematik von ganz wesentlicher und grundsätzlicher Bedeutung sind. Bekanntlich sind beim Verbundquerschnitt aus Stahlbeton wegen des nichtlinearen Spannungs-Verzerrungs- Zusammenhanges, besonders infolge der im Vergleich zur Druckfestigkeit geringen Zugfestigkeit des Betons, die Lage und Richtung der Querschnittshauptachsen , alle Querschnittswerte und die Steifigkeiten belastungsabhängig.

Für deren Berechnung werden nur der Bereich der nicht gerissenen Betonfläche und die punktweise vorhandenen Bewehrungsstäbe berücksichtigt. Als Folge der nichtlinearen Spannungs-Verzerrungs-Zuordnungen für Beton und Bewehrungen kann der zu einer äußeren Belastung gehörende innere Verzerrungszustand des Querschnitts nur auf iterativem Weg berechnet werden. Mit diesem Verzerrungszustand kann der Elastizitätsmodul aus der Werkstoffbeziehung für jedes σ - ϵ -Wertepaar bestimmt werden. Die Form und der Maximalwert des Werkstoffverhaltens und der Beanspruchungszustand bestimmen die Größe des Elastizitätsmoduls, der bei der Ermittlung der benötigten Steifigkeiten und Querschnittswerte eine wesentliche Rolle spielt. Beim Elastizitätsmodul muß zwischen Sekanten- und Tangentenmodul unterschieden werden, wobei die Entscheidung, welcher Elastizitätsmodul maßgebend ist, von der Art des behandelten Problems und mit der damit verbundenen Lastaufbringung abhängt. Der grundsätzliche Unterschied zwischen Sekantenmodul

$E_{\text{sek}} = \frac{\sigma}{\epsilon}$ und Tangentenmodul $E_{\text{tan}} = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$ ist im Bild 2 dargestellt.

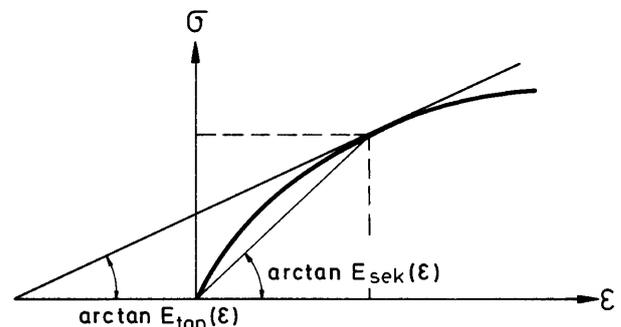


Bild 2 : Sekanten- und Tangentenmodul
 Fig. 2 : Secant and Tangent modulus

Anhand dieses Bildes kann man sich auch grundsätzlich klar machen, wann mit Sekanten- und wann mit Tangentenmodul zu rechnen ist. Ist der Kurvenverlauf eines Zusammenhanges, z.B. Kraft-Verschiebung oder Moment-Krümmung oder Spannungs-Verzerrung, von Interesse, so wird die Belastung (Kraft, Moment, Spannung) schrittweise gesteigert und in jedem Schritt die gewünschte abhängige Größe (Verschiebung, Krümmung, Verzerrung) ermittelt. Da die Berechnung in kleinen Lasterhöhungsschritten, die im Grenzfall infinitesimal klein sind, vorgenommen wird, ist für die Änderung der Zustandsbeschreibung des betrachteten Querschnitts immer nur ein Punkt der Werkstoffbeziehung maßgebend. In diesem Fall ist

der Tangentenmodul zu verwenden, der die Änderung zweier unmittelbar benachbarter Punkte der Werkstoffbeziehung beschreibt. Ist der Kurvenverlauf nicht gewünscht, sondern interessiert nur der zu einer bestimmten Last gehörende End-Verformungswert, so erhält man den maßgebenden Kurvenpunkt mit einer linearen Berechnung dann, wenn man den zugehörigen Sekantenmodul verwendet. Dieser Zusammenhang (schrittweise Lastaufbringung \Leftrightarrow Tangentensteifigkeiten oder komplette Last in einem Schritt \Leftrightarrow Sekantensteifigkeiten) ist bei der Anwendung eines Berechnungsverfahrens zu beachten. So wird z.B. im Berechnungsverfahren nach Röder [8] für eine vorgegebene Belastung eine Berechnung nach Theorie II. Ordnung vorgenommen, wobei die gesamte Belastung stets in einem Schritt aufgebracht wird. Dementsprechend wird dort mit Sekantensteifigkeiten gearbeitet. Im Gegensatz dazu werden bei der Bestimmung einer Verzweigungslast, wie z.B. bei Mehlhorn [4] und [5], Tangentensteifigkeiten angesetzt. Dies ist deshalb so richtig, weil bei der Behandlung als Verzweigungsproblem der Träger bis zum Erreichen der kritischen Last als ideal in seiner Hauptbiegungsebene bleibend vorausgesetzt wird. Am Verzweigungspunkt sind nun diejenigen Steifigkeiten maßgebend, durch die die momentane Widerstandsfähigkeit des Trägers gegen eine infinitesimal kleine Lasterhöhung beschrieben werden, also die Tangentensteifigkeiten. Eine ausführliche Herleitung der entsprechenden Formeln zur expliziten Bestimmung der Querschnittswerte und Steifigkeiten wird im Anhang A3 vorgenommen.

Im Zusammenhang mit dem im Abschnitt 6 vorgestellten Näherungsverfahren wird für den Fall der einachsigen Biegebelastung in [27] ein Verfahren erläutert, mit dem unter Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Werkstoffbeziehungen alle erforderlichen Querschnittswerte über lastabhängige Beiwerte für Rechteck- und Plattenbalken-Querschnitte mit einfachen Formeln ermittelt werden können.

Eine wesentliche Rolle bei der Ermittlung wirklichkeitsnaher Querschnittswerte und Steifigkeiten spielen die angesetzten Werkstoffbeziehungen für den Beton und für die Bewehrungen. Im folgenden wird deshalb zunächst auf die analytische Darstellung solcher Werkstoffbeziehungen, insbesondere für den Beton, etwas näher eingegangen.

3.1 Wirklichkeitsnahe Werkstoffbeziehungen

3.1.1 Verhalten der Bewehrungen bei Zug- und Druckbeanspruchung

Für Betonstahl und Spannstahl wird entsprechend Bild 3 eine bilineare Spannungs-Verzerrungs-Beziehung sowohl im Zug- als auch im Druckbereich angenommen.

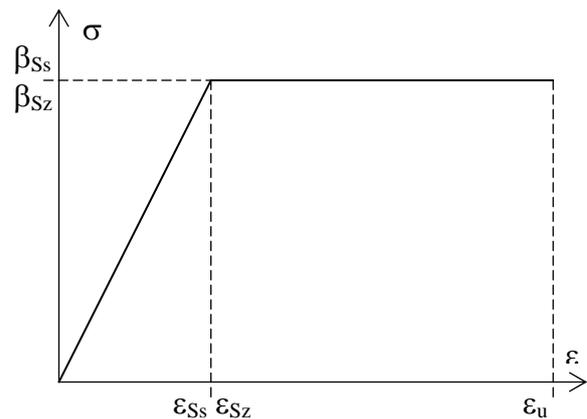


Bild 3 : Spannungs-Verzerrungs-Beziehung für Bewehrungen bei Zug- oder Druckbeanspruchung

Fig. 3 : Stress-strain-relationship for reinforcement at tension or compressive loading

Diese Werkstoffbeziehung für die Bewehrungen kommt der Wirklichkeit sehr nahe, hat sich in vielen Bereichen bei der Berechnung von Stahlbetonbauteilen bestens bewährt und reicht deshalb auch hier völlig aus.

3.1.2 Betonverhalten in der Druckzone

Während für die Bewehrungen bilineare Formulierungen (s. Bild 3) das Werkstoffverhalten sehr gut erfassen, kann das Verhalten des Betons demgegenüber nur mit nichtlinearen Beziehungen wirklichkeitsnah beschrieben werden. Für dieses Betonverhalten werden von Grasser [11] Spannungs-Verzerrungs-Beziehungen in Form von Hyperbelfunktionen (s. Tabelle 1) angegeben, deren Einheitsverläufe von der Betonfestigkeit abhängen. Diese von Grasser bereits 1968 vorgestellten Kurven werden inzwischen auch im Eurocode 2 [28] und in den DIN-Vorschriften [51] für das Betonverhalten bei Verformungsberechnungen verwendet. Obwohl die äußere Form der Gleichungen bei Grasser und Eurocode/DIN etwas anders aussieht, sind beide Kurvenverläufe identisch. Durch Einsetzen der angegebenen dimensionslosen Parameter in die Gleichung von Eurocode/DIN ist dies leicht überprüfbar.

Diese wirklichkeitsnahen Werkstoffbeziehungen für den Beton in der Druckzone müssen im Rahmen der durchzuführenden Berechnungsschritte mehrfach differenziert und integriert werden. Die von Grasser angegebene Hyperbelform ist für diese mathematischen Operationen jedoch nicht besonders gut geeignet. Deshalb ist es zweckmäßig, diese Hyperbeln in sehr viel einfacher handhabbare Polynome der Form

$$\sigma = \beta_P \sum_{n=1}^4 A_n \varepsilon^n \quad (3.1)$$

zu approximieren. In der Tabelle 1 sind die Polynomkoeffizienten A_n und die Hyperbeln angegeben. Der Verlauf der Polynome und der Hyperbeln ist fast völlig identisch und läßt sich im Maßstab der Bilder 4 und 5 nicht mehr darstellen. Im Bild 4 sind diese auf die mittlere Würfeldruckfestigkeit β_{wm} normierten Kurvenverläufe für vier Betonfestigkeitsklassen B25 bis B55 der DIN 1045 und DIN 4227 dargestellt.

a.) Grasser-Hyperbel $\sigma = \beta_P \frac{a\varepsilon + b\varepsilon^2}{1 + c\varepsilon}$

Betonfestigkeitsklasse	Koeffizienten		
	a	b	c
B25	1,395	-0,2066	0,489
B35	1,149	-0,2066	0,24
B45	0,97	-0,2066	0,061
B55	0,828	-0,2066	-0,081

b.) Polynom $\sigma = \beta_P \sum_{n=1}^4 A_n \varepsilon^n$

Betonfestigkeitsklasse	Koeffizienten			
	A_1	A_2	A_3	A_4
B25	1,362	-0,711	0,175	-0,0181
B35	1,143	-0,454	0,0791	-0,00689
B45	0,97	-0,265	0,0155	-0,000661
B55	0,829	-0,141	-0,00928	-0,00169

Tabelle 1 : Koeffizienten der Funktionen für das Betonverhalten in der Druckzone

Table 1 : Coefficients of the functions for the material behavior of concrete in the compression zone

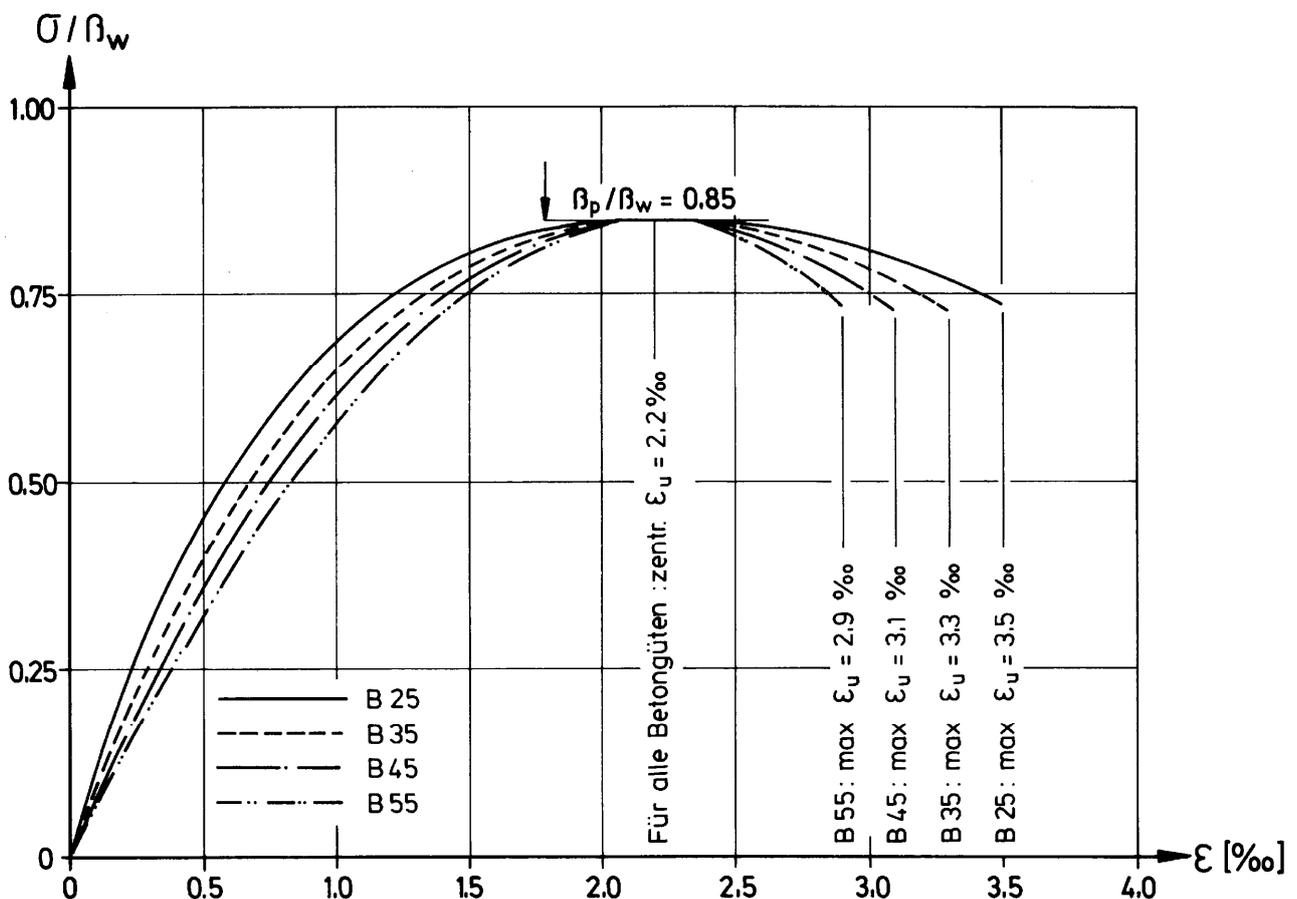


Bild 4 : Normiertes Betonwerkstoffverhalten nach Grasser [11]

Fig. 4 : Normalized material behavior of concrete acc. to Grasser [11]

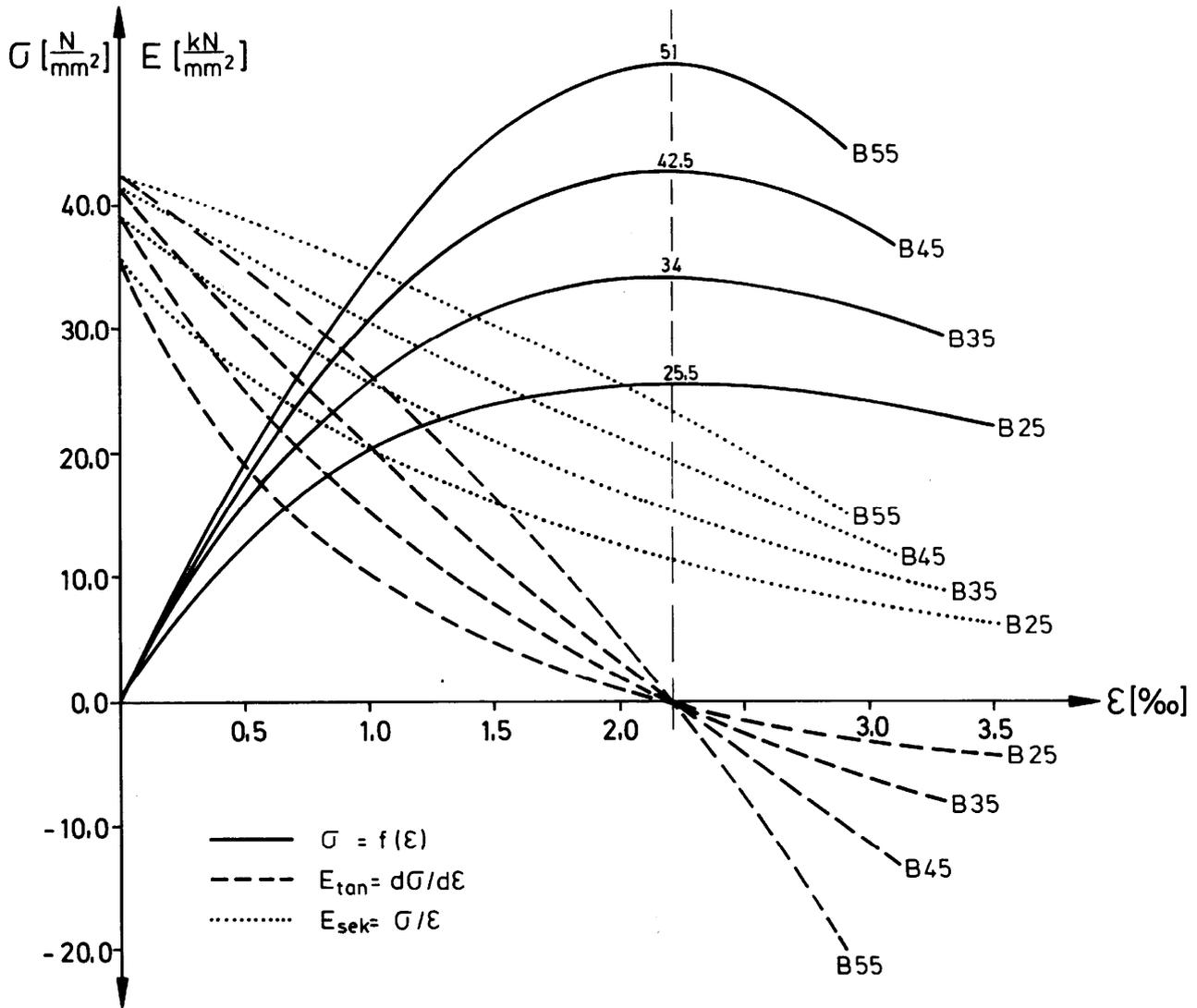


Bild 5 : Betonwerkstoffverhalten nach *Grasser* [11] mit Verlauf der Sekanten- und Tangentenmoduln
 Fig. 5 : Material behavior of concrete acc. to *Grasser* [11] with course of secant- and tangent modulus

Anhand des Bildes 4 läßt sich feststellen, daß mit geringerer Betonfestigkeit die Krümmung der Kurven zunimmt, wodurch der Verlauf des Elastizitätsmoduls wesentlich beeinflusst wird. Zur besseren Anschauung werden die mit der maßgebenden Prismenfestigkeit β_P multiplizierten Einheitskurven des Bildes 4 mit den Verläufen der

Tangentenmoduln $E_{tan}(\epsilon) = \frac{d\sigma}{d\epsilon}$

und der

Sekantenmoduln $E_{sek}(\epsilon) = \frac{\sigma}{\epsilon}$

im Bild 5 dargestellt. Diese Kurvenverläufe der Elastizitätsmoduln zeigen sehr deutlich, daß eine Zusammenfassung in nur eine Kurve, die dann für alle Betonfestigkeiten gilt, mit einer zufriedenstellenden Genauigkeit nicht möglich ist. In diese Richtung zielende Untersuchungen zur Einheitskurve für alle Betone haben ergeben, daß bei der Ermittlung des Elastizitätsmoduls zwischen den

Originalkurven von *Grasser* [11] und einer approximierten Mittelkurve Unterschiede von bis zu 25% sehr häufig auftreten, wobei diese Unterschiede hauptsächlich vom Beanspruchungszustand und von der Betonfestigkeit abhängen. Abweichungen in dieser Größenordnung bereits in den Eingangswerten einer Verformungsberechnung sind für eine zutreffende Beurteilung des Tragverhaltens vor allem dann nicht mehr hinnehmbar, wenn bessere und trotzdem nicht aufwendigere Möglichkeiten zur Verfügung stehen.

Außer der für jede Betonfestigkeitsklasse unterschiedlich gekrümmten Kurvenform ist auch die Festigkeit des betreffenden Betons für die Größe des Elastizitätsmoduls ausschlaggebend. Beim Bewehrungsstahl entspricht dieser Größtwert der Fließspannung β_S , was bei einer Verformungsberechnung allgemein immer richtig gemacht wird.

Für den Größtwert der Betondruckfestigkeit werden jedoch häufig fälschlicherweise Werte eingesetzt, die direkt aus der Nennfestigkeit des Betons β_{WN} ermittelt werden. Es ist jedoch unumstritten, daß für Verformungsberechnungen mittlere Festigkeiten anzusetzen sind. Diese mittlere Würfeldruckfestigkeit β_{Wm} des Betons ergibt sich aus seiner Nennfestigkeit β_{WN} durch Addition von 5 N/mm^2 : $\beta_{Wm} = \beta_{WN} + 5$. Maßgebend für Verformungsberechnungen ist nun die Prismenfestigkeit des Betons β_P , die hier für alle Betone mit 85% der Würfeldruckfestigkeit angesetzt werden kann, also $\beta_P = 0,85 \beta_{Wm}$. Diese Annahme ist genügend genau, obwohl der Umrechnungsfaktor eigentlich nicht konstant ist, sondern in Abhängigkeit von der Betonfestigkeit etwa zwischen 0,8 und 0,9 liegt. Die Prismenfestigkeit beschreibt das Betonverhalten unter einer Kurzzeitbelastung und wird somit hauptsächlich für die Berechnung von Montagezuständen verwendet. Der Einfluß einer Dauerlast kann näherungsweise durch eine Abminderung der Prismenfestigkeit um weitere 15% auf $\beta_P = 0,7 \beta_{Wm}$ berücksichtigt werden.

An dieser Stelle sollen noch einige Bemerkungen zur Anwendung des Parabel-Rechteck-Diagramms der DIN 1045 oder DIN 4227 für das Betonverhalten in der Druckzone besonders im Hinblick auf die hier zur Diskussion stehenden Verformungsberechnungen gemacht werden. Dies geschieht vor allem deshalb, weil in den letzten Jahren einige Veröffentlichungen zum hier behandelten Themenbereich erschienen sind, die für den Beton das Parabel-Rechteck-Diagramm annehmen. Auf diese Vorgehensweise treffen genau die Ausführungen des vorigen Absatzes mit allen sich daraus ergebenden Folgerungen zu. Es wird deshalb ausdrücklich darauf hingewiesen, daß das Parabel-Rechteck-Diagramm der DIN 1045 oder DIN 4227 nicht für Verformungsberechnungen, sondern ausschließlich als Spannungsverteilung für den Bruchzustand des Betons im Rahmen einer Bemessung entwickelt worden ist. Auf diesen Sachverhalt ist bereits bei vielen Diskussionen der letzten Jahre immer wieder hingewiesen worden. Auch in dem in jedem Betonkalender abgedruckten Aufsatz "Bemessung der Stahlbetonbauteile" sind diesbezügliche Ausführungen nachzulesen. Leider hat sich diese Auffassung immer noch nicht durchgesetzt, so daß auch an dieser Stelle nochmals darauf hingewiesen werden muß. Alle Verfahren, die bei der Berechnung von Steifigkeitswerten von der Parabel-Rechteck-Form für die Spannungsverteilung in der Betondruckzone ausgehen, liefern deshalb meistens unzutreffende Ergebnisse. Wenn

außerdem noch auf Werte aus Bemessungstabellen zurückgegriffen wird, wo bekanntlich die Rechenfestigkeit β_R maßgebend ist, liegen die Ergebnisse normalerweise soweit auf der sicheren Seite, daß sie schon als unwirtschaftlich anzusehen sind. Um dies an einem einfachen Beispiel zu verdeutlichen, sei daran erinnert, daß z.B. für einen B45 die Rechenfestigkeit $\beta_R = 27 \text{ N/mm}^2$, die für die Verformungsrechnung anzusetzende Prismenfestigkeit für Dauerbelastung jedoch $\beta_P = 35 \text{ N/mm}^2$ beträgt. Allein diese beiden Zahlen verdeutlichen bereits eine offensichtliche Unterschätzung einer der wesentlichen Werkstoffkenngrößen des Betons.

Gern wären auch die ermittelten Koeffizienten einer Polynomapproximation der Betonwerkstoffbeziehungen aus dem Eurocode [28] und den Neufassungen DIN 1045 [51] angegeben worden. Dies macht jedoch wenig Sinn, da diese Formulierungen mit den vorgegebenen Parametern in sich unstimme Ergebnisse liefern. Dabei spielt der verwendete Wert $E_{c,nom}$, bzw. E_{cm} , der als Sekantenmodul durch den Kurvenursprung und den Spannungswert $0,4f_{cm}$ definiert ist, die entscheidende Rolle. Dieser Tabellen oder auch Formelwert wird zusammen mit weiteren Parametern in die Gleichung für das Betonverhalten eingesetzt. Wird nun aus der so ermittelten Werkstoffbeziehung der zum Spannungswert $0,4f_{cm}$ gehörende Sekantenmodul berechnet, so stimmt dieser berechnete Sekantenmodul nicht mit dem vorher eingesetzten $E_{c,nom}$ oder E_{cm} überein. Diese Tatsache ist inzwischen dem DIN-Ausschuß bekannt, Verbesserungsvorschläge sind unterbreitet worden, und es ist mit Korrekturen zu rechnen.

In diesem Zusammenhang ist die folgende Information angebracht. In den alten Fassungen der DIN 1045 bis in die achtziger Jahre werden in einer Tabelle Rechenwerte des Elastizitätsmoduls des Betons E_b für die Verformungsberechnung unter Gebrauchslast angegeben. Diese Tabellenwerte entsprechen den Sekantenmoduln durch den Kurvennullpunkt und dem Spannungswert $\beta_P/3$ der von Grasser [11] angegebenen Werkstoffbeziehungen (s. Tabelle 1). Vermutlich haben bei der Neufassung der DIN 1045 zur Definition des Elastizitätsmoduls E_{cm} des Betons gleiche Überlegungen stattgefunden, wobei dann aber die Formulierungen von Grasser unzureichend in der DIN/im Eurocode umgesetzt worden sind.

3.2 Querschnittswerte und Steifigkeiten für Biegebeanspruchung

Die zur Verformungsberechnung benötigten Querschnittswerte und Steifigkeiten für eine Biegebeanspruchung werden mit den Gleichungen (A3.2) bis (A3.8) des Anhangs A3.1 durch Integration über die wirksame Querschnittsfläche bestimmt. Durch die Berücksichtigung einer nichtlinearen Werkstoffbeziehung ist der Verlauf des Elastizitätsmoduls nicht konstant und kann deshalb bei der Ausführung der Flächenintegrationen nicht vor das Integral gezogen werden. Bei der numerischen Behandlung von Flächenintegralen, bei denen die nichtlinear elastische Werkstoffbeziehung mit einer stetigen Funktion beschrieben wird, ergeben sich enorme Vorteile durch die Verwendung von Polynomen für den funktionalen Zusammenhang zwischen Spannungen und Verzerrungen. Unter Anwendung des Greenschen Integralsatzes läßt sich die Integration einer Funktion über einen Bereich B in ein Linienintegral über die zugehörige Kontur K umformen. Die bei der Anwendung des Greenschen Integralsatzes durchzuführenden Integrationen lassen sich dann in geschlossener Form durchführen, ohne auf Querschnittsprünge Rücksicht nehmen zu müssen. Da im Stahlbetonbau die Querschnittsfläche meist geradlinig begrenzt ist, ergibt sich die Kontur des Querschnitts als ein Polygonzug. Dies erleichtert den Arbeitsaufwand, da die Konturintegration des Polynoms nur über gerade Strecken auszuführen ist. Bei der Berechnung von werkstoffbehafteten Flächenintegralen sind dann nur noch die Koordinaten aller Eckpunkte in mathematisch positiv umlaufender Reihenfolge einzusetzen, und die Teilergebnisse aufzusummieren. Im Anhang A3.2 wird diese Vorgehensweise an einem Beispiel erläutert. Dort werden auch die Lösungen für alle Querschnittswerte und Steifigkeiten, die bei einer Biegebeanspruchung auftreten, in Tabellenform angegeben.

3.3 Torsionskennwerte

Die Bedeutung der Torsionskenngrößen eines Querschnitts – Lage des Schubmittelpunktes, *St. Venantsche* Torsionssteifigkeit und gegebenenfalls Wölbsteifigkeit – auf die Traglast räumlich belasteter Träger bei Spannungsproblemen nach Theorie II. Ordnung ist allgemein bekannt und bedarf keiner besonderen Erläuterungen. Das Hauptaugenmerk ist hier vielmehr auf eine möglichst zutreffende quantitative Erfassung dieser Werte zu legen, wobei im Fall von Stahlbeton- und

Spannbetonsträgern mit beliebiger Querschnittsform und unter allgemeiner Belastung dieses Problem auch heute noch nicht wissenschaftlich zufriedenstellend geklärt ist. Auf eine Literaturübersicht zu diesem Spezialgebiet wird unter Hinweis auf die Arbeiten [8],[9],[12] an dieser Stelle verzichtet. Den meisten theoretischen Lösungsansätzen der Torsionsproblematik fehlt es besonders hinsichtlich der Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Werkstoffformulierungen an Allgemeingültigkeit. Die Aufstellung der Differentialgleichungen des Torsionsproblems unter Beachtung nichtlinearer Werkstoffbeziehungen führt auf komplizierte mathematische Zusammenhänge. Lediglich mit Hilfe der Finite-Elemente-Methode ist solch eine weitgehend verallgemeinerte Torsionsanalyse grundsätzlich möglich [13]. Der zugehörige numerische Aufwand ist jedoch beträchtlich und deshalb im Rahmen der hier behandelten Theorie II. Ordnung nicht anwendbar. Da die Finite-Elemente-Methode ebenfalls ein numerisches Verfahren darstellt, kann schon an dieser Stelle festgehalten werden, daß nämlich eine geschlossene Integration über den wirksamen Querschnitt unter Beachtung wirklichkeitsnaher Werkstoffbeziehungen in einer ähnlichen Form wie bei der Berechnung der Biegequerschnittswerte wegen des hohen Aufwandes auch zum jetzigen Zeitpunkt noch nicht möglich ist.

Auch die Anwendung aus der Literatur bekannter, wirklichkeitsnaher Raumfachwerkmodelle zur Torsionsanalyse des Querschnitts scheidet hier aus, da die diesbezüglichen Voraussetzungen bei dem hier anstehenden Problem nicht oder nur in sehr geringem Maße gegeben sind. Die Ursache hierfür ist in dem Sachverhalt begründet, daß die auftretende Torsionsbeanspruchung des Querschnitts im allgemeinen immer nur als Folge der Berechnung des Trägers nach Theorie II. Ordnung zu sehen ist. Hauptsächlich tritt ein- oder zweiachsige Querkraftbiegung mit geringer oder ganz ohne Normalkraft auf, und eine Torsionsbeanspruchung ist im Vergleich zur Biegung sehr viel kleiner. Folglich kann auch eines der für überwiegende Torsionsbelastung entwickelten Raumfachwerkmodelle nicht angewendet werden, da sich ein nach dieser Theorie vorauszusetzendes Kraftabtragungssystem aus Betondruckzone, Zug- und Druckstreben in ausgeprägter Form nicht einstellen wird. Darüber hinaus ist auch der numerische Aufwand bei der Behandlung des Torsionsproblems mit einem räumlichen Fachwerkmodell sehr umfangreich und im Rahmen der hier behandelten Problemstellung schon allein unter diesem Gesichtspunkt ebenfalls nicht zu bewerkstelligen.

Die bisher angesprochenen Punkte zur Torsionsproblematik zeigen sehr deutlich, daß man für eine numerisch einfach handhabbare Berechnungsmethode zur Bestimmung der Torsionswerte auf Näherungsverfahren angewiesen ist. Als eine Möglichkeit zur Vereinfachung der Torsions-Differentialgleichungen bietet sich zunächst die Trennung von wirklichkeitsnahem Werkstoffverhalten und Querschnittsform an. Dann können die für ein linear elastisches Materialverhalten aufgestellten Differentialgleichungen des Torsionsproblems herangezogen werden, für die mehrere anwendbare Lösungsmöglichkeiten gegeben sind. Diese rein von der Querschnittsform abhängenden Teilergebnisse müssen dann anschließend in entsprechender Weise mit dem Werkstoffverhalten gekoppelt werden. Für diese Vorgehensweise werden im folgenden einige allgemeine grundlegende Gedanken ausgeführt.

Bereits im Fall eines homogenen Querschnitts mit linear elastischem Werkstoffverhalten führt das Torsionsproblem auf Differentialgleichungen der Potentialtheorie, wobei für die wirksame Querschnittsfläche $A(y,z)$ entweder die Wölbfunktion $\phi(y,z)$ als Lösung der Laplace-Dgl $\Delta\phi = 0$ oder die Spannungsfunktion $T(y,z)$ als Lösung der Poisson-Dgl. $\Delta T = -2$ für jeweils gegebene problemorientierte Randwerte bestimmt werden muß. Die Wölbfunktion ϕ und die Spannungsfunktion T sind über differentielle Beziehungen miteinander verknüpft, so daß die Lösung einer der beiden Randwertaufgaben ausreicht und durch Integration dieser Beziehungen die eine Funktion aus der anderen direkt berechnet werden kann. Auf anschauliche Weise können die Lösungen der Torsionspotentialgleichungen bekanntlich mit einer Membrananalogie (*Prandtl'sches Seifenhautgleichnis*) erläutert werden. Hierbei wird aus einer starren Ebene die zu behandelnde Grundfläche herausgestanzt, über die Öffnung eine Membran gespannt und von einer Seite ein konstanter Einheitsdruck aufgebracht, der die Membran zur anderen Seite aus der Grundflächenebene herauswölbt. Diese gewölbte Membranfläche ist die zu der betrachteten Grundfläche gehörende Potentialfläche als Lösung der Differentialgleichung $\Delta\psi = 0$, wobei die Funktion $\psi(y,z)$ der homogenen Lösung der Spannungsfunktion T entspricht. Das Volumen des Körpers, der aus der Grundfläche und der aufgespannten Potentialfläche gebildet wird, stellt dann den halben *St. Venantschen* Torsionswiderstand für die Grundfläche dar. Wenn die Potentialordinaten mit ψ bezeichnet werden, gilt also $I_t = 2 \iint \psi \, dA$. Auch

die Ermittlung des Wölbwiderstandes kann anschaulich mit der Membrananalogie erläutert werden. Aus den bekannten Spannungsordinaten ψ lassen sich über die differentielle Beziehungen $\frac{\partial\phi}{\partial z} = -\frac{\partial\psi}{\partial y}$ und $\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial\psi}{\partial z}$ Wölbordinaten ϕ bestimmen, mit denen dann der Wölbwiderstand zu $C = \iint \phi^2 \, dA$ berechnet werden kann. Dieser Ausdruck stellt also das Volumen des aus der Grundfläche und dem Quadrat der Wölbordinaten gebildeten Körpers dar.

Die mathematische Formulierung der Torsionsproblematik wird über Gleichgewichtsbetrachtungen am Balkenelement vorgenommen, wobei hier nicht näher auf Einzelheiten eingegangen, sondern auf die Literatur, z.B. *Sauer*[12], verwiesen wird. Dabei wird zunächst das Torsionsmoment als Spannungsergebnante der Schubspannungen mit Hebelarm angeschrieben. Werden dann die Schubspannungen in Abhängigkeit der Verschiebungen in Form der Wölbfunktion ϕ eingesetzt, folgt für den *St. Venantschen* Torsionswiderstand:

$$I_t = \iint \left(\frac{\partial\phi}{\partial z} y - \frac{\partial\phi}{\partial y} z + y^2 + z^2 \right) dy \, dz \quad (3.2)$$

Für die Bestimmung der Wölbfunktion ϕ ist die Laplace-Dgl $\Delta\phi = 0$ für zugehörige Randwerte zu lösen. Die beiden anderen Glieder sind die Flächenträgheitsmomente um die Koordinatenachsen und entsprechen in der Summe dem polaren Flächenträgheitsmoment. Werden die Schubspannungen in Abhängigkeit der Spannungsfunktion $T(y,z)$ in dieselbe Gleichgewichtsbedingung eingesetzt, so ergibt sich der *St. Venantsche* Torsionswiderstand zu:

$$I_t = - \iint \left(\frac{\partial T}{\partial y} y + \frac{\partial T}{\partial z} z \right) dy \, dz \quad (3.3)$$

wobei für die Spannungsfunktion $T(y,z)$ die Poisson-Dgl $\Delta T = -2$ ebenfalls für entsprechende Randwerte gelöst werden muß. Der differentielle Zusammenhang zwischen ϕ und T ist dabei wie folgt angegeben:

$$\frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} + z \quad \text{und} \quad \frac{\partial\phi}{\partial z} = - \left(\frac{\partial T}{\partial y} + y \right) \quad (3.4)$$

Beide angegebenen Ausgangsgleichungen zur Berechnung des *St. Venantschen* Torsionswiderstandes I_t müssen dasselbe Ergebnis liefern und können deshalb zur gegenseitigen Kontrolle eingesetzt werden.

Wenn die Wölbfunktion $\phi(y,z)$ bekannt ist, wird der Wölbwiderstand ermittelt aus:

$$C = \iint \phi^2 \, dy \, dz \quad (3.5)$$

Obwohl die Ausgangsgleichungen für den *St. Venantschen* Torsionswiderstand und den Wölbwiderstand gleich sind, soll nicht unerwähnt bleiben, daß der *St. Venantsche* Torsionswiderstand ein von der Lage des Koordinatensystems unabhängiger Wert ist, obwohl die Wölbfunktion ϕ von der Lage des Koordinatenursprungs und der Koordinatenachsen abhängt. Die Gleichung zur Bestimmung von I_t aus der Wölbfunktion ϕ enthält jedoch entsprechende Terme, die eine unterschiedliche Lage des Koordinatensystems kompensieren. Dagegen ist der Wölbwiderstand ein koordinatenabhängiger Querschnittswert wie ein Flächenträgheitsmoment. Der minimale Wölbwiderstand ergibt sich, wenn als Bezugspunkt der Schubmittelpunkt und die Hauptachsenrichtungen gewählt werden. Dieser Zusammenhang zwischen Wölbwiderstand und Schubmittelpunkt eröffnet eine Möglichkeit zur Berechnung des Schubmittelpunktes. Der Schubmittelpunkt eines Querschnitts kann entweder als Querkraftmittelpunkt oder als Drillruhepunkt definiert werden:

- a.) Querkraftmittelpunkt:
Berechnet wird derjenige Querschnittspunkt, durch den die Wirkungslinie der äußeren Querkraft gehen muß, damit sich der Querschnitt bei der zugehörigen Biegung nicht verdreht.
- b.) Drillruhepunkt:
Berechnet wird derjenige Querschnittspunkt, um den sich der Querschnitt bei einer Torsionsbelastung dreht, wenn ihm kein anderer Drehpunkt aufgezwungen wird.

Gemäß den beiden Definitionen stehen zur Berechnung der Schubmittelpunktskoordinaten zwei Methoden zur Verfügung, die wie bei der Bestimmung des Torsionswiderstandes identische Ergebnisse liefern müssen. Diese doppelte Berechnungsmöglichkeit entspricht der bereits erwähnten Darstellung der Torsionsproblematik über die Spannungsfunktion T (Querkraftmittelpunkt) oder über die Wölbfunktion ϕ (Drillruhepunkt). Über die Funktion $\psi(y,z)$ als homogene Lösung der Spannungsfunktion T ergeben sich die Koordinaten des Schubmittelpunktes zu:

$$y_M = - \iint \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} y + \frac{\partial \psi}{\partial z} z + \frac{1}{I_y} z^2 y \right) dy \, dz \quad (3.6)$$

$$z_M = - \iint \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} y + \frac{\partial \psi}{\partial z} z + \frac{1}{I_z} y^2 z \right) dy \, dz$$

Mit Hilfe der Wölbfunktion ϕ werden die Schubmittelpunktskoordinaten berechnet aus:

$$y_M = - \frac{1}{I_y} \iint \phi z \, dy \, dz \quad (3.7)$$

$$z_M = - \frac{1}{I_z} \iint \phi y \, dy \, dz$$

Die Werte I_y und I_z sind dabei jeweils die auf die Koordinatenachsen bezogenen Flächenträgheitsmomente.

Diese vorstehenden, verhältnismäßig einfach aussehenden Bestimmungsgleichungen für die Torsionswerte dürfen jedoch nicht darüber hinwegtäuschen, daß die mathematische Formulierung der Wölbfunktion ϕ oder der Spannungsfunktion T auf komplizierte Zusammenhänge führt. Als Grundfunktionen ergeben sich Ausdrücke, die u.a. den natürlichen Logarithmus und den Arkustangens enthalten. Für allgemeine dickwandige Querschnitte kommen deshalb normalerweise nur numerische Lösungsverfahren in Betracht. Als solche numerische Methoden stehen dabei für einfache Querschnittsformen, wie Rechteck und Dreieck, Reihenentwicklungen (*St. Venantsche* Spannungsfunktion) und für beliebige Querschnittsformen das Differenzenverfahren, das Randelement- bzw. Integralverfahren und die Finite-Elemente-Methode zur Verfügung. In diesem Zusammenhang wird auf die Arbeit von *Sauer*[12] verwiesen, wo die gesamte Torsionsproblematik ausführlich dargestellt und eine auf einem Integralverfahren beruhende Lösungsmöglichkeit in Anlehnung an *Mehlhorn*[4],[5] aufgezeigt wird. An dieser Stelle sei noch darauf hingewiesen, daß für dünnwandige Querschnitte geeignete geschlossene Lösungsfunktionen gefunden werden können, wie *Wlassow* in [6] zeigt.

Bei der Verbindung von Querschnitt und Werkstoff besteht zum einen die Möglichkeit, mit dem in [4] und [12] vorgestellten Integralverfahren die Torsionspotentialgleichung für die gesamte wirksame Betonfläche zu lösen und somit den Einfluß der geometrischen Form des Querschnitts sehr genau zu erfassen. Dabei kann jedoch mit nur einem mittleren konstanten Elastizitäts-, bzw. Gleitmodul über die Gesamtfläche gerechnet werden, wodurch der Einfluß eines nichtlinearen Werkstoffverhaltens nur verhältnismäßig grob

erfaßt wird. Eine andere Näherungslösung besteht darin, die wirksame Betonfläche in Bereiche einzuteilen, für diese Bereiche dann jeweils getrennt eine linear elastische Berechnung unter Beachtung der betreffenden Rand- und Übergangsbedingungen durchzuführen und die Einzelergebnisse schließlich zu überlagern. Dabei kann der stetig veränderliche, wirklichkeitsnahe Elastizitäts- oder Schubmodulverlauf bereichsweise konstant gesetzt werden. Diese Vorgehensweise gestattet eine verhältnismäßig genaue Näherung des Elastizitäts- und Schubmodulverlaufs über den Querschnitt. Der Einfluß der geometrischen Form der wirksamen Betonfläche wird aber ungenauer erfaßt, wobei eine richtige Berücksichtigung der Übergangsbedingungen an den Bereichsgrenzen eine wichtige Rolle spielt. Über die Genauigkeit der beiden eben kurz erläuterten Näherungsverfahren für eine Bestimmung der drei Torsionsquerschnittswerte Schubmittelpunkt, *St. Venantsche* Torsionssteifigkeit und Wölbsteifigkeit kann keine allgemein gültige Aussage getroffen werden, da der Beanspruchungszustand und die geometrischen Verhältnisse des Querschnitts sowie die Art des Elastizitäts- und Gleitmoduls (Sekanten- oder Tangentenmodul) von erheblicher Bedeutung sind und immer vom gerade betrachteten Einzelfall abhängen.

Bei der Anwendbarkeit der beiden Näherungsverfahren setzt die zuerst angegebene Methode voraus, daß eine entsprechende Lösungsmöglichkeit der Torsionspotentialgleichung z.B. nach dem in [4] und [12] beschriebenen Verfahren besteht. Diese Voraussetzung wird nur in Ausnahmefällen gegeben sein. Die einfacher anzuwendende Möglichkeit bietet die zweite beschriebene Vorgehensweise, da die Unterteilung der wirksamen Betonfläche so vorgenommen werden kann, daß rechteckige Teilbereiche entstehen, für die geschlossene, formelmäßig aufbereitete Lösungen der Torsionspotentialgleichung vorhanden sind. Für die hier behandelten Träger ist es normalerweise ausreichend, die wirksame Betonfläche in die Bereiche Obergurt, Steg und gegebenenfalls Untergurt einzuteilen. Dabei können angevoutete Teilbereiche näherungsweise in flächengleiche Rechtecke umgewandelt werden. Da in jedem Teilbereich ein zwar linearisierter, aber dennoch beanspruchungsabhängiger Werkstoffverlauf angenommen wird, kann eine wirklichkeitsnahe gekrümmte Werkstoffbeziehung besser als bei einer Linearisierung über die gesamte Betonfläche angenähert werden. Diese genauere Berücksichtigung des Werkstoffverhaltens liefert für T- und I- Querschnitte mit besonders ausgeprägten Gurten bei einer Berechnung der sehr wesentlichen

Torsionssteifigkeit erfahrungsgemäß die zutreffendsten Ergebnisse. Auch die Lage des Schubmittelpunktes kann mit den beiden angesprochenen Näherungen ermittelt werden. Er läßt sich jedoch für den Fall eines T- oder I- Querschnitts keine so eindeutige Aussage wie bei der Torsionssteifigkeit machen, welcher der beiden Wege eine zutreffendere Lage des Schubmittelpunktes ergibt.

Der Begriff der Wölbsteifigkeit ist auf dem Gebiet des Massivbaus nicht so geläufig wie z.B. auf dem Gebiet des Stahlbaus. Dies hat zwei wesentliche Gründe: einerseits spielt die Wölb torsion bei den normalerweise dickwandigen Querschnitten der hier behandelten Stahlbeton- und Spannbetonträger keine so wesentliche Rolle wie bei vergleichbaren Stahlträgern mit dünnwandigen Querschnitten, und andererseits gestaltet sich für eine allgemeine dickwandige Querschnittsform die Ermittlung der Wölbsteifigkeit bzw. des Wölbwiderstands noch um einiges schwieriger als die ohnehin schon aufwendige Bestimmung der *St. Venantschen* Torsionswerte. Deshalb wird normalerweise die Wölbsteifigkeit bei dem hier behandelten Stabilitätsproblem vernachlässigt und aus der maßgebenden Differentialgleichung gestrichen. Dennoch kann natürlich die Wölbsteifigkeit auch für einen dickwandigen Querschnitt zumindest näherungsweise ermittelt werden, worauf im folgenden vollständigshalber eingegangen wird.

Bei der Berechnung der Wölbsteifigkeit eines Stahlbeton- oder Spannbetonquerschnitts wird von dem Betonquerschnitt üblicherweise ebenfalls nur der ungerissene Teil berücksichtigt. Eine Unterteilung der ungerissenen Betonfläche in Teilbereiche mit unterschiedlichen, aber bereichsweise konstanten Elastizitätsmoduln, wie dies bei der Berechnung der *St. Venantschen* Torsionssteifigkeit vorgenommen werden kann, scheidet bei der Bestimmung der Wölbsteifigkeit jedoch aus. Durch die erwähnten differentiellen Zusammenhänge zwischen Torsionsordinaten ψ und Wölbordinaten ϕ sind die Voraussetzungen für eine einfache Überlagerung von Teilbereichen zum Gesamtbereich nicht mehr gegeben. Die Wölbsteifigkeit der wirksamen Betonfläche kann also im allgemeinen Fall nur näherungsweise für ein linear elastisches Werkstoffverhalten ermittelt werden.

Schließlich soll auch auf den Einfluß einer Bewehrung bei der Ermittlung von Torsionsquerschnittswerten eingegangen werden. Man muß sich jedoch darüber im klaren sein, welchen Stellenwert eine Torsionsbewehrung im Rahmen der hier behandelten Träger besitzt. Wie bereits zuvor kurz ausgeführt, ist die Torsionsbeanspruchung nur als

Folge einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung zu sehen und deshalb wesentlich kleiner als die Biegebeanspruchung. Eine Torsionsbewehrung wird deshalb nur konstruktiv vorhanden sein. Erst bei hochgradig auf Biegung ausgenutzten und damit in weiten Bereichen gerissenen Querschnitten, bei denen deshalb nur noch eine geringe wirksame Restfläche des Betons für die Aufnahme der Torsionsbeanspruchung verbleibt, wird die Berücksichtigung dieser konstruktiven Torsionsbewehrung überhaupt zahlenmäßig spürbar und damit zweckmäßig sein. Die Frage, ob diese Berücksichtigung auch von Nutzen ist, sei dahingestellt, da die entscheidende Größe für die Bestimmung der Torsionswerte die ungerissene Betonzone ist. Die Torsionsbewehrung bleibt deshalb bei der Berechnung des Schubmittelpunktes unberücksichtigt, wobei anzumerken ist, daß auch kein Verfahren bekannt ist, nach dem die Bestimmung des Schubmittelpunktes eines inhomogenen Querschnitts vorgenommen werden kann.

Im Anhang A3.3 werden für die Bestimmung der Torsionswerte –Schubmittelpunkt, *St. Venantsche* Torsionssteifigkeit und Wölbsteifigkeit– einfache Näherungsverfahren dargestellt. Bei der *St. Venantschen* Torsionssteifigkeit und der Wölbsteifigkeit kann auch eine Torsionsbewehrung näherungsweise mit den dort angegebenen Formeln berücksichtigt werden.

4. Lösungsverfahren des Differentialgleichungssystems

Das allgemeine Problem nach Theorie II. Ordnung wird durch die drei gekoppelten Differentialgleichungen vierter Ordnung (2.1a) bis (2.1c) beschrieben. In diesen Dgln sind einige Koeffizienten der Verformungsgrößen in Längsrichtung x veränderlich. Das sind i.a. die Biegemomente M_{yI} und M_{zI} und bei veränderlichen Streckenlasten p_y und p_z einmal die Streckenlasten selbst und bei exzentrischem Lastangriff noch daraus resultierende Streckentorsionsmomente m_t . Damit scheidet eine geschlossene formelmäßige Lösung für den allgemeinen Fall aus. Für Sonderfälle ist eine Entkoppelung der Dgln möglich, wobei dann meist ein einfacher trigonometrischer Ansatz für die verbleibende unbekannte Verformungsgröße zum Ziel führt. Zur Lösung der Differentialgleichungen für den allgemeinen Fall werden jedoch nicht die drei Dgln vierter Ordnung, sondern die diesen Dgln zugrunde liegenden Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen herangezogen.

Diese Bedingungen stellen ein Dgl-System I. Ordnung der Form

$$\underline{Y}' = \underline{A} \underline{Y} + \underline{C} \quad (4.1)$$

dar, wobei bedeutet :

$\underline{Y} \Rightarrow$ Vektor der unbekanntenen Größen

$\underline{Y}' \Rightarrow$ 1. Ableitung des Vektors \underline{Y} nach der Koordinate x

$\underline{A} \Rightarrow$ Koeffizientenmatrix

$\underline{C} \Rightarrow$ inhomogener Teil

Das Dgl-System I. Ordnung wird im Anhang A1.3.7 aufgestellt und beschrieben. Die Koeffizientenmatrix \underline{A} ist in den Bildern A3 und A4 des Anhangs angegeben.

Zur Integration des Dgl-Systems (4.1) sind genügend Verfahren bekannt, wobei die verschiedensten Ansätze von der direkten Integration, über Reihenentwicklungen bis hin zum numerischen Lösungsweg möglich sind. Immer anwendbar sind die Verfahren der numerischen Integration, von denen eines der bekanntesten von Runge-Kutta entwickelt worden ist. Grundsätzlich kann damit für einen gegebenen Anfangsvektor \underline{Y}_0 durch Integration des Dgl-Systems der Zustandsvektor \underline{Y}_x an jeder Stelle x berechnet werden. Ein Anfangswertproblem ist also ohne Umweg sofort zu lösen. Nun liegt bei der hier gestellten Aufgabe aber ein Randwertproblem vor, da im allgemeinen je ein Teil der Randbedingungen am Trägeranfang und am Trägerende bekannt sind. Die Behandlung als Anfangswertproblem ist jedoch möglich, da als Unbekannte des hier vorliegenden Dgl-Systems (A1.25) mechanisch sinnvolle Größen gewählt werden, mit denen sich die Randbedingungen sehr einfach erfüllen lassen. Dadurch kann die Lösung des Dgl-Systems mit Hilfe des Übertragungsmatrizen-Verfahrens, auch Reduktionsverfahren genannt, erfolgen. Die Übertragungsmatrix wird dabei durch numerische Integration des Dgl-Systems aufgestellt. Aus der Übertragungsmatrix wird durch einfache Matrizenoperationen die Steifigkeitsmatrix ermittelt, wodurch der benötigte Zusammenhang zwischen Verformungen und Schnittgrößen hergestellt ist. Man erhält so ein lineares Gleichungssystem zur Bestimmung der unbekanntenen Verformungen. Diese kurz beschriebene Vorgehensweise führt bei linearen Dgl-Systemen I. Ordnung auf eine "geschlossene" Lösung. Im Anhang A4 werden ausführliche Erläuterungen zu diesem Lösungsweg gegeben.

Bei nichtlinearen Dgl-Systemen, z.B. nach [9], wo keine Beziehungen mehr zwischen Trägeranfang und -ende formuliert werden können, müssen zunächst die teilweise unbekanntes Anfangswerte sinnvoll geschätzt werden, was i.a. meist durch eine vorgeschaltete Berechnung nach Theorie I. Ordnung geschieht. Nach erfolgter numerischer Integration des nichtlinearen Dgl-Systems bis zum Trägerende wird der berechnete Endvektor mit den ebenfalls nur teilweise bekannten Endrandbedingungen verglichen. Die zu Beginn des Iterationsprozesses auftretenden Differenzen werden mit Hilfe eines modifizierten Newton-Verfahrens systematisch bis auf eine vorgegebene Genauigkeitsschranke verbessert. Diese Vorgehensweise wird mit "Schießverfahren" oder "Numerische Variation des Anfangsvektors" bezeichnet.

5. Berechnungsablauf des Stabilitätsnachweises als Spannungsproblem II. Ordnung

Eine wirklichkeitsnahe Behandlung des Stabilitätsfalles "Kippen" führt also zwangsläufig auf den allgemeinen Fall des räumlich beanspruchten Stabes mit Systemimperfectionen und unter Berücksichtigung physikalischer Nichtlinearitäten. Analytische Lösungsmöglichkeiten, zudem noch in geschlossener Form, scheiden deshalb von vornherein aus, von einigen wenigen Sonderfällen einmal abgesehen. Die Integration der maßgebenden Differentialgleichungen (2.1) erfolgt normalerweise mit numerischen Methoden, wobei infolge der Nichtlinearitäten der Werkstoffe noch zusätzliche Iterationen notwendig sind, um die gegenseitige Abhängigkeit zwischen Schnittgrößen und Verformungen auf der einen , und Steifigkeiten und Querschnittsgrößen auf der anderen Seite in den Griff zu bekommen. Damit läßt sich der gesamte Berechnungsablauf in zwei, eigentlich voneinander unabhängige Bereiche unterteilen:

1. Bestimmung wirklichkeitsnaher Querschnittswerte und Steifigkeiten unter Verwendung nichtlinearer Werkstoffbeziehungen für eine gegebene Schnittgrößenkombination (Querschnittsanalyse):

Für den gegebenen Stahlbeton- oder Spannbetonquerschnitt wird für eine aus der Belastung, den Lagerbedingungen und der Imperfektion berechnete Schnittgrößenkombination (Biegemomente um beide Hauptachsen) der

zugehörige innere Verzerrungszustand ermittelt, was nur auf iterativem Wege möglich ist. Für diesen Gleichgewichtszustand werden anschließend die wirksamen Querschnittswerte wie elastischer Schwerpunkt, Hauptachsenrichtungen, Schubmittelpunkt und die Steifigkeiten für Biegung und Torsion bestimmt. Hierbei spielen die physikalischen Nichtlinearitäten des Werkstoffs, wie z.B. eine gerissene Zugzone und eine gekrümmte Spannungs-Verzerrungs-Beziehung des Betons in der Druckzone, eine entscheidende Rolle. Außerdem wird bei der Querschnittsanalyse der zur äußeren Schnittkraftkombination gehörende innere rechnerische Bruchzustand des Querschnitts überprüft. Hierfür ist in der Betondruckzone das in der DIN 1045 oder DIN 4227 zu diesem Zweck angegebene Parabel-Rechteck-Diagramm maßgebend. Wenn mit den vorhandenen äußeren Schnittgrößen der rechnerische Bruchzustand überschritten wird, ist der Fall des Werkstoffversagens eingetreten.

2. Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung für die vorgegebenen statischen Randbedingungen, Belastungen und Imperfektionen unter Verwendung vorab ermittelter Querschnittswerte und Steifigkeiten (Systemanalyse):

Hier wird das Differentialgleichungssystem numerisch integriert. Als Ergebnis erhält man die Verformungen und Schnittkräfte des betrachteten Trägers für die angesetzten Querschnittswerte und Steifigkeiten. Es kann der Fall eintreten, daß aufgrund der Vorgaben für Steifigkeiten und Querschnittswerte das Gleichungssystem nicht mehr zu lösen ist (singuläre Koeffizientenmatrix) oder die berechneten Verformungen im Vergleich zum vorhergehenden Schritt divergieren. Durch beides wird ein Stabilitätsversagen gekennzeichnet.

Diese beiden Berechnungsabschnitte sind solange iterativ zu durchlaufen, bis sich die vergleichbaren Eingangsgrößen von den entsprechenden Ausgangsgrößen weniger als eine vorgegebene Iterationsschranke unterscheiden.

5.1 Rechnerischer Bruchzustand der Werkstoffe Beton und Bewehrungsstahl

Für die Spannungs-Verzerrungs-Beziehung des Betons gilt nach DIN 1045 und DIN 4227:

$$\sigma/\beta_R = \varepsilon - 0,25 \varepsilon^2 \quad \text{für } \varepsilon \leq 2 \text{ ‰} \quad (5.1)$$

$$\sigma/\beta_R = 1 \quad \text{für } 2 \text{ ‰} < \varepsilon \leq 3,5 \text{ ‰}$$

Um die Integration des Spannungsverlaufs über die Fläche der Betondruckzone in geschlossener Form, wie in Kap. A3.2 beschrieben, durchführen zu können, wird das Parabel-Rechteck-Diagramm in ein Polynom dritten Grades umgewandelt. Da die Form des Parabel-Rechteck-Diagramms für alle Betongüten gleich ist, wird die Einheitskurve approximiert. Die Werkstoffbeziehungen lautet dann:

$$\sigma/\beta_R = 1,09\varepsilon - 0,384\varepsilon^2 + 0,0438\varepsilon^3 \quad \text{für } 0 < \varepsilon \leq 3,5 \text{ ‰} \quad (5.2)$$

Der Unterschied dieses Polynoms im Vergleich zum Parabel-Rechteck-Diagramm der Normen wird im Bild 6 dargestellt. Die Polynomkurve weicht von dem Parabel-Rechteck-Diagramm nur geringfügig ab. Der Fehler liegt z.B. bei der

Bestimmung der Betondruckkraft oder ihres Hebelarmes in der Größenordnung von 1% . Hier soll darauf hingewiesen werden, daß auch der Parabel-Rechteck-Verlauf der DIN-Vorschriften nur eine Rechenvereinbarung darstellt. Deshalb sind die genannten geringen Abweichungen ohne Bedeutung für die Berechnung des Bruchzustandes.

Für die Bewehrung wird das im Bild 3 dargestellte bilineare Werkstoffverhalten angenommen. Als Grenzen für die Verzerrung auf der Druck- und der Zugseite werden die Werte der DIN 1045 übernommen.

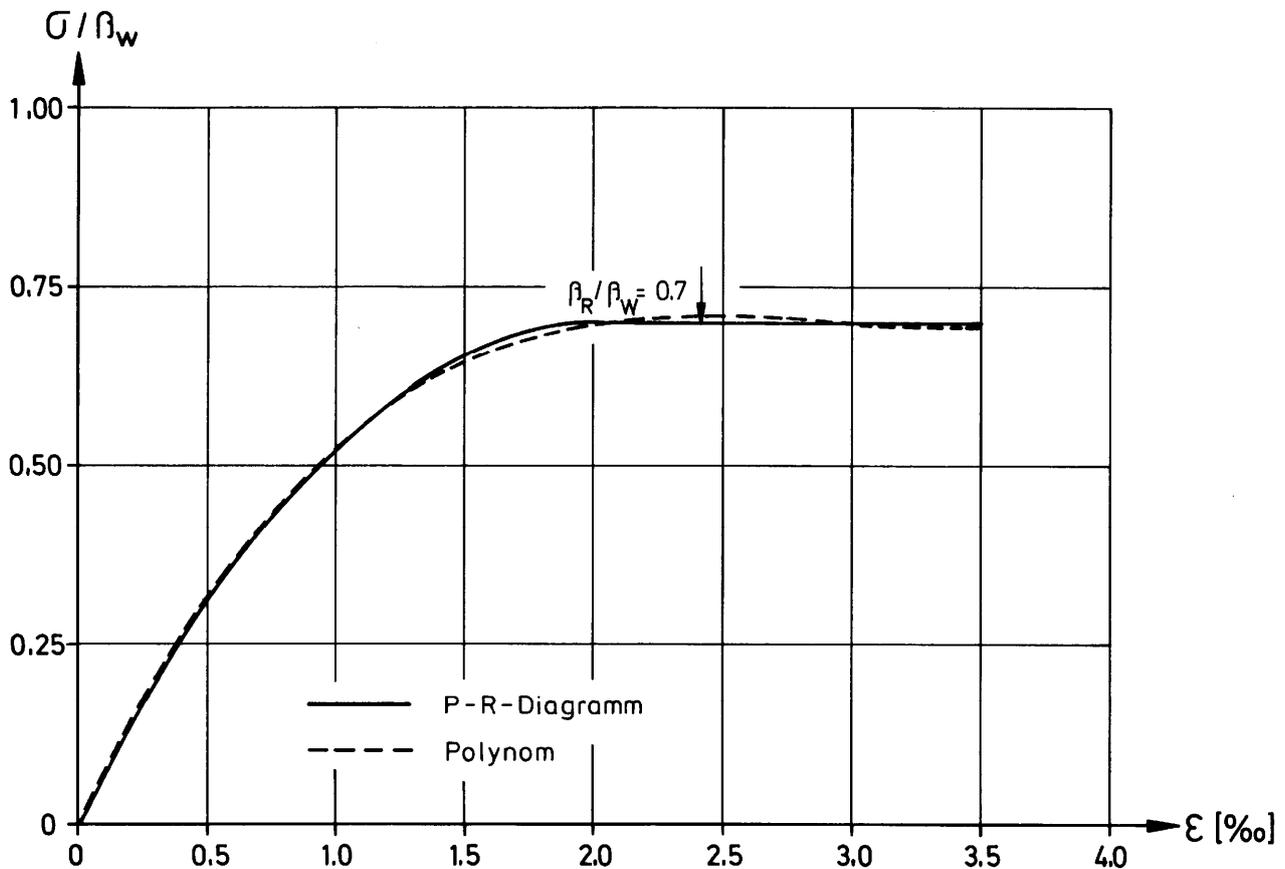


Bild 6 : Parabel-Rechteck-Diagramm nach DIN 1045 und DIN 4227
 Fig. 6 : Parabola-rectangle-diagramm acc. to DIN 1045 and DIN 4227

5.2 Rechnerisches Stabilitätsversagen eines Trägers

Mit Stabilitätsversagen eines Trägers wird das Erreichen der Traglast bezeichnet. Die Traglast ist dann gefunden, wenn die Last-Verformungs-Kurve für eine charakteristische Verformungsgröße ihr Maximum erreicht. Da direkt im Maximum dieser Kurve indifferentes Gleichgewicht (horizontale Tangente) herrscht, ist dieser Kurvenpunkt exakt nur schwer zu erreichen.

Es werden deshalb zwei für das gestellte Problem charakteristische Verformungsgrößen des Trägers, nämlich die horizontale Verschiebung und die Verdrehung um die Längsachse, dazu verwendet, das als Stabilitätsfall bezeichnete Versagen des Trägers zu definieren. Es wird festgelegt, daß Stabilitätsversagen rechnerisch dann eintritt, wenn zwischen Trägeranfang und Trägermitte

1. die horizontale Verschiebung größer als ein Hundertstel der Trägerlänge oder
2. der Drehwinkel um die Längsachse größer als 5° wird.

Da die Verschiebungen und Verdrehungen miteinander gekoppelt sind, ergänzen sich die beiden eingeführten Grenzfälle gegenseitig. Beide Forderungen erscheinen auf den ersten Blick recht willkürlich, lassen sich aber mit den bei der Aufstellung der Differentialgleichungen getroffenen Annahmen begründen. Die hier angewendete Theorie setzt nämlich u.a. kleine Verformungen voraus, damit die Vereinfachungen $\sin\vartheta \approx \tan\vartheta \approx \vartheta$ und $\cos\vartheta \approx 1$ getroffen werden können. Dies ist bei einem Drehwinkel bis etwa 5° ohne nennenswerten Fehler erfüllt.

Ein weiteres Kennzeichen für den Stabilitätsfall ist ein schlecht konditioniertes Gleichungssystem (Gesamtsteifigkeitsmatrix) für die Berechnung der unbekanntenen Verformungsgrößen. Dabei läßt sich entweder das Gleichungssystem nicht lösen (singuläre Matrix) oder einige der berechneten Verformungsgrößen wechseln vom Iterationsschritt i zum Schritt $i+1$ sprunghaft das Vorzeichen.

Schließlich besteht noch die Möglichkeit, daß die Verformungen zwar klein bleiben, aber divergieren. Da eine Divergenz nicht immer zweifelsfrei feststellbar ist, sollte die Anzahl der Iterationen am Querschnitt pro Laststufe begrenzt werden. Eine Anzahl von 10-15 Iterationen hat sich als ausreichend erwiesen. Mit diesen Schranken ist gewährleistet, daß die notwendige Anzahl an Iterationsschritten im Rechenablauf minimiert wird.

6. Näherungsverfahren zur Abschätzung der Kippstabilität

Das im folgenden beschriebene Näherungsverfahren ist eine Zusammenfassung der Veröffentlichungen [38] und [49].

Bereits in [38] sind die Grundzüge des Näherungsverfahrens zur Beurteilung der Kippstabilität von Stahlbeton- und Spannbetonsträgern vorgestellt worden. Dort wird jedoch nur der Fall eines parallelgurtigen Trägers behandelt, wobei die maßgebenden Steifigkeitsverläufe (EI_z) und (GI_t) über die Trägerlänge näherungsweise zunächst nur mit einer Sinusfunktion beschrieben werden. Dieser sehr einfache Ansatz bietet sich bei dem gewählten Lösungsweg des Näherungsverfahrens vor allem auch aus Verständnisgründen an und führt auch, wie die Zahlenbeispiele in [38] zeigen, im Rahmen der getroffenen Vorgaben zu vernünftigen Ergebnissen.

Weitere Vergleichsberechnungen zur Überprüfung des Näherungsverfahrens, wobei auch die Kippversuche [34] nachgerechnet worden sind, haben jedoch sehr schnell gezeigt, daß der Ansatz eines näherungsweise sinusförmigen Verlaufs der Steifigkeiten in sehr vielen Fällen unzutreffend ist und sogar auf der unsicheren Seite liegende Ergebnisse liefern kann.

Auf der Suche nach Verbesserungsmöglichkeiten, besonders im Hinblick auf eine angestrebte Erweiterung des Näherungsverfahrens auf Satteldachbinder, hat sich auch aufgrund des Literaturstudiums [44] bis [48] die bereits in [38] vorgestellte Lösungsmethode als ein gangbarer Weg herausgestellt. Dieses verhältnismäßig einfache Verfahren wird für die Integration der maßgebenden Differentialgleichung grundsätzlich beibehalten. Die erforderlichen Verbesserungen werden nur über die Ansatzfunktionen vorgenommen. Dabei werden die beim Satteldachbinder vorhandenen linear veränderlichen Verläufe der Belastung und der Lastangriffspunkte, der damit zusammenhängende Verlauf des Biegemoments und die Steifigkeitsverläufe durch geeignete Ansatzfunktionen beschrieben. Diese geben den Verlauf über die Trägerlänge möglichst wirklichkeitsnah wieder, erschweren aber nicht übermäßig die durchzuführenden Integrationen.

6.1 Grundüberlegungen zur Ableitung eines Näherungsverfahrens

Im Abschnitt 5 wird der Ablauf einer genauen Berechnung nach Theorie II. Ordnung dargestellt, woran sich die Zielrichtung eines Näherungsverfahrens bereits erkennen läßt. Es muß also gelingen, die beiden immer erforderlichen Schritte Systemanalyse und Querschnittsanalyse dahingehend zu vereinfachen, daß mit einem vertretbaren numerischen Aufwand eine zwar auf der sicheren Seite liegende, aber dennoch wirtschaftliche Abschätzung des Kippverhaltens durchgeführt werden kann. Zu diesem Zweck soll noch einmal kurz die Wirkungsweise der Berechnung nach Theorie II. Ordnung und die wesentliche Versagensursache dargestellt werden. Ein planmäßig nur einachsig in seiner Hauptbiegeebene belasteter Träger erfährt durch unvermeidbare Imperfektionen auch seitliche Verschiebungen aus der Hauptbiegeebene heraus und damit verbundene Verdrehungen um seine Längsachse. Mit den Gleichgewichtsbetrachtungen nach Theorie II. Ordnung am verformten System können diese Zusatzbeanspruchungen rechnerisch erfaßt werden, deren Wirkungsweise im wesentlichen ganz einfach darin besteht, daß aus einer ursprünglich einachsigen eine zweiachsige Biegebeanspruchung wird. Für diesen Fall der zweiachsigen Biegung ist der betrachtete Träger normalerweise jedoch nicht bemessen worden, so daß überprüft werden muß, ob der Träger unter dieser Beanspruchung versagt oder nicht versagt. In diesem Zusammenhang soll hier an die Tatsache erinnert werden, daß bereits kleine Nebenbiegemomente in einer Größenordnung von 2-3% des Hauptbiegemoments eine Neigung der Verzerrungsnulldlinie von 70-80° zur Richtung des Hauptmomentenvektors hervorrufen können. Diese Nulliniendrehung kann in Abhängigkeit von der Querschnittsgeometrie mit einer Verkleinerung des rechnerischen Bruchmoments auf 60-70% des einachsigen Falles verbunden sein.

Der Weg der Näherungslösung beginnt damit, zunächst durch gezielte Vorgaben das Differentialgleichungssystem so zu vereinfachen, daß wieder eine geschlossene Lösung möglich ist. Dieses Vorgehen führt zwangsläufig auf das Verzweigungsproblem. Bei der Lösung der charakteristischen Gleichung des Verzweigungsproblems werden wirklichkeitsnahe, belastungsabhängige Querschnittswerte und Steifigkeiten berücksichtigt. Aus den mit Hilfe der Lösungen des Verzweigungsproblems gewonnenen Formeln wird als maßgebende Verformungsgröße eine Verdrehung ϑ ermittelt, mit der sich das Nebenbiegemoment um

die schwache Trägerachse näherungsweise bestimmen läßt. Damit kann dann ein Bruchsicherheitsnachweis auf zweiachsige Biegung durchgeführt werden.

6.2 Vereinfachungen der Differentialgleichungen nach Theorie II. Ordnung

Die vorzunehmenden Vereinfachungen orientieren sich an den Trägern, für die in der Praxis häufig ein Kippnachweis zu führen ist. Dies sind normalerweise gabelgelagerte Einfeldträger mit einfachsymmetrischen Querschnitten, die planmäßig in ihrer Symmetrieebene belastet werden.

Daraus ergeben sich die folgenden Annahmen, die die drei Differentialgleichungen (2.1) vereinfachen und entkoppeln:

- 1.) Der Querschnitt ist zur z-Achse symmetrisch:
 $y_M = 0, r_{M,z} = 0$ (6.1a)
- 2.) Äußere Normalkräfte werden nicht berücksichtigt (die Vorspannung wird als Eigenspannungszustand erfaßt):
 $N = 0$ (6.1b)
- 3.) Die äußere Belastung wirkt nur in z-Richtung:
 $p_z = 0, M_{zI} = 0$ (6.1c)
- 4.) Die Wölbesteifigkeit wird vernachlässigt, da sie für die relativ dickwandigen Querschnitte von Betonträgern nur einen unwesentlichen Einfluß besitzt:
 $(EC_M) = 0$ (6.1d)

Mit den Annahmen (6.1a) bis (6.1d) lauten dann die Differentialgleichungen (2.1):

$$((EI_y) w_M'')'' = p_z \quad (6.2a)$$

$$((EI_z) v_M'')'' + (M_{yI} \vartheta)'' = 0 \quad (6.2b)$$

$$(GI_t) \vartheta'' + (r_{M,y} M_{yI} \vartheta')' - M_{yI} v_M'' - p_z (z_A - z_M) \vartheta = -p_z y_A \quad (6.2c)$$

Die Gleichung (6.2a), die die bekannte Differentialgleichung für die Hauptbiegerichtung darstellt, ist damit von den Gleichungen (6.2b) und (6.2c) entkoppelt und für das hier behandelte Kippproblem nicht mehr von Bedeutung. Aus Gleichung (6.2b), wo eine differentielle Beziehung zwischen der seitlichen Verschiebung und der Verdrehung um die Längsachse hergestellt wird, folgt durch zweimalige Integration unter Beachtung der Randbedingungen für einen gabelgelagerten Träger:

$$v_M'' = - \frac{M_{yI}}{(EI_z)} \vartheta \quad (6.3)$$

An dieser Stelle ist sehr einfach eine geometrische Imperfektion des Trägers in Form einer seitlichen Vorverformung zu erfassen, wenn folgender Additionsansatz für die seitliche Gesamtverschiebung v_M eingeführt wird:

$$v_M(x) = \hat{v}_M(x) + v_{0M}(x) \quad (6.4)$$

Hierbei stellt \hat{v}_M den Anteil der Formänderung infolge der Belastung dar, und v_{0M} ist eine Funktion, mit der die seitliche Imperfektion beschrieben wird. Die zweite Ableitung nach x soll für v_{0M} wenigstens stetig sein. Damit gilt für die Krümmung $v_M'' = \hat{v}_M'' + v_{0M}''$ und unter Berücksichtigung der Beziehung (6.3) für \hat{v}_M''

$$v_M'' = -\frac{M_{yI}}{(EI_z)} \vartheta + v_{0M}'' \quad (6.4a)$$

In den Differentialgleichungen (2.1) und (6.2) werden die bekannten Abkürzungen für die Steifigkeiten und Querschnittswerte verwendet, die Integrationen von geometrischen Beziehungen oder Spannungsfunktionen über die wirksame Querschnittsfläche beinhalten. Bei Stahlbeton- und Spannbetonquerschnitten sind diese Integrationen immer über die Betondruckzone und die Bewehrungsflächen sowie gegebenenfalls über die nicht gerissene Betonzugzone durchzuführen. Aus den Gleichgewichtsbetrachtungen am verformten System ergeben sich aus der Schrägstellung der Fasern Längsspannungsanteile, deren Integration über die wirksamen Flächen auf Ausdrücke führt, die häufig als "Abtriebskräfte" bezeichnet werden.

So ergibt sich aus der vorgespannten Bewehrung ein Einfluß, der die rückdrehende Wirkung des verformten Spannstahls explizit enthält und der üblicherweise mit der Torsionssteifigkeit zusammengefaßt wird. In Anlehnung an [4] und [6] wird deshalb eine erweiterte Torsionssteifigkeit $(\tilde{G}\tilde{I}_t)$, die die *St. Venantsche* Torsionssteifigkeit (GI_t) enthält, in folgender Form eingeführt:

$$(\tilde{G}\tilde{I}_t) = (GI_t) + \sum_{j=1}^m Z_{vj}(y_{vj}^2 + z_{vj}^2) \quad (6.5)$$

Diese erweiterte Torsionssteifigkeit $(\tilde{G}\tilde{I}_t)$ ersetzt in den Differentialgleichungen die reine *St. Venantsche* Torsionssteifigkeit (GI_t) .

Die in den Differentialgleichungen vorkommenden Ausdrücke $r_{M,y}$ und $r_{M,z}$ stammen ebenfalls aus der Integration von Längsspannungsanteilen über die Querschnittsfläche. Es hat sich als sinnvoll erwiesen, den in der Gl. (6.2c) vorkommenden Ausdruck $r_{M,y}M_{yI}$ entsprechend seines Ursprungs zu verwenden und deshalb umzuformen. Mit der Abkürzung

$$(EI_r) = \iint_{A_b} \sigma_b (y_b^2 + z_b^2) dA_b + \sum_{i=1}^n \sigma_{si} (y_{si}^2 + z_{si}^2) A_{si} \quad (6.6)$$

gilt dann

$$r_{M,y}M_{yI} = (EI_r) - 2z_M M_{yI} \quad (6.7)$$

Bei vorgespannten Querschnitten sind in den Betonspannungen σ_b und in den Bewehrungsspannungen σ_{si} der Spannungszustand aus Belastung und Vorspannung zu berücksichtigen. Es ist zu beachten, daß die wirksamen Anteile bei (EI_r) nur aus der ungerissenen Betonfläche und der nicht vorgespannten Bewehrung gebildet werden. Der Einfluß der Vorspannung steckt zum einen in den Spannungen σ_b und σ_{si} und zum anderen explizit in der erweiterten Torsionssteifigkeit $(\tilde{G}\tilde{I}_t)$ (s. Gl. (6.5)).

Die maßgebende Differentialgleichung für das "exzentrische" Kippen, wobei dieser zutreffende Ausdruck in Anlehnung an Stüssi [15] verwendet wird, folgt dann aus Gleichung (6.2c) unter Berücksichtigung von (6.4a) und (6.7)

$$(\tilde{G}\tilde{I}_t)\vartheta'' + \left[((EI_r) - 2z_M M_{yI}) \vartheta' \right]' + \frac{M_{yI}^2}{(EI_z)} \vartheta - p_z(z_A - z_M)\vartheta = -p_z(y_A - v_{0M}) + M_{yI}v_{0M}'' \quad (6.8)$$

Alle Koeffizienten, also die Größen $(\tilde{G}\tilde{I}_t)$, (EI_r) , (EI_z) , z_M , M_{yI} , p_z , y_A , z_A und v_{0M} sind im allgemeinen Funktionen der Balkenordinate x , wobei die Querschnittswerte $(\tilde{G}\tilde{I}_t)$, (EI_r) , (EI_z) und z_M zusätzlich belastungsabhängig sind.

6.3 Untersuchungen zum Verlauf der Steifigkeiten über die Trägerlänge

Um sich überhaupt ein Bild über die Größenordnung und den Verlauf der beim Kippverhalten maßgebenden Steifigkeiten (EI_z) und (GI_t) machen zu können, sind etwa 50 Stahlbeton- und Spannbetonträger, insbesondere Satteldachbinder, mit Längen zwischen 15m und 35m systematisch untersucht worden. Sie stammen zum überwiegenden Teil aus durchgeführten Bauvorhaben der letzten 15 Jahre.

Zu diesem Zweck sind alle Träger mit dem Rechenprogramm [8] für folgende Randbedingungen berechnet worden :

- beidseitige starre Gabellagerung
- Gleichstreckenlast p mittig auf dem Obergurt ; Eigenlast g in der geometrischen Schwerlinie
- geometrische Imperfektion mit parabelförmigem Verlauf über die Trägerlänge, und zwar als eine horizontale Vorverschiebung mit einem Stich von $\ell/500$ für Trägerlängen $\ell \leq 30$ m und von $\ell/1000$ für $\ell > 30$ m zuzüglich einer Vorverdrehung mit einem Stich von $0,01$ rad jeweils in Trägermitte

Für diese für alle Träger gleichen Vorgaben ist die Versagenslast p_u für ein globales Sicherheitskonzept ($p_u = 1,75 g + f * p$) iteriert worden. Für den letzten stabilen Gleichgewichtszustand sind dann die Verläufe der interessierenden Größen – Steifigkeiten (EI_z) und (GI_t) ; Lage des elastischen Schwerpunkts und des Schubmittelpunkts – über die Trägerlänge in Diagrammen aufgetragen worden. Das Ergebnis dieser Untersuchung wird im folgenden kurz zusammengefaßt, wobei die Träger in vier Klassen mit den typischen Unterscheidungsmerkmalen parallelgurtig oder satteldachförmig und vorgespannt oder nicht vorgespannt eingeteilt werden. Wegen der vorhandenen Symmetrie zur Trägermitte wird im folgenden nur der halbe Träger beschrieben.

Zu den für die Steifigkeitsverläufe wesentlichen Trägerbereichen ist in Abhängigkeit vom Binder-typ folgendes festzustellen :

Typklasse PG-V :

Parallelgurtbinder, vorgespannt

Untersuchung an 13 Trägern, davon zwei

Versuchsträger aus [33]

ausgeprägter ungerissener Bereich im Zustand I (Auflagerzone) etwa bis $0,1\ell$, teilweise bis $0,2\ell$ je nach Größe der Vorspannung ; danach bis $0,5\ell$ gerissener Bereich im Zustand II mit kontinuierlichem nichtlinearem Abfall auf den kleinsten Wert in Trägermitte

Typklasse PG-S :

Parallelgurtbinder , nicht vorgespannt

Untersuchung an 5 Trägern , davon 4 Versuchs-träger aus [33]

Bereich des Zustandes I nur direkt am Auflager, steiler Abfall der Werte von Zustand I auf Zustand II; bereits bei $0,2\ell$ Zustand II maßgebend; weiterer Verlauf bis $0,5\ell$ nahezu konstant mit Minimum in Trägermitte

Typklasse SD-V :

Satteldachbinder , vorgespannt

Untersuchung an 21 Trägern mit Obergurt-neigungen von $1,1^\circ$ bis $7,6^\circ$

Bereich des Zustandes I bis etwa $0,1\ell$; zwischen $0,1\ell$ und $0,2\ell$ rascher Abfall auf die Werte des Zustandes II ; nahezu konstanter Verlauf zwischen $0,25\ell$ und $0,5\ell$ mit dem maßgebenden Wert im kritischen Schnitt, der bei Obergurtneigungen bis etwa 3° zwischen $0,4\ell$ und $0,5\ell$ und bei Obergurtneigungen von 3° bis 5° im Bereich $0,3\ell$ bis $0,4\ell$ liegt

Typklasse SD-S :

Satteldachbinder , nicht vorgespannt

Untersuchung an 5 Trägern mit Obergurtneigungen von $0,6^\circ$ bis 10°

kleinster Wert im kritischen Schnitt (siehe Erläuterungen Typklasse SD-V); von dort in Richtung Auflager und Trägermitte Vergrößerung um etwa 10% bis 20% ; Alle hier untersuchten Träger dieses Typs sind bezüglich ihres Kippverhaltens unkritisch gewesen, wobei für das rechnerische Versagen der Bruchzustand für einachsige Biegung im kritischen Schnitt maßgebend gewesen ist.

Bei allen Trägern ist festzustellen, daß die Lage des elastischen Schwerpunkts im gerissenen Bereich etwa parallel zur Trägeroberkante verläuft. Die Lage des Schubmittelpunktes bleibt über die gesamte Trägerlänge etwa konstant zum elastischen Schwerpunkt.

Bei diesen Untersuchungen sind noch weitere fünf Träger mit zur Mitte hin dicker werdendem Obergurt untersucht worden. Die berechneten Steifigkeiten weisen in Trägermitte im Zustand II ausnahmslos z.T. wesentlich größere Zahlenwerte als im ungerissenen Auflagerbereich auf, wodurch genau gegensätzliche Steifigkeitsverläufe, als die gewohnten, gegeben sind. Diese Träger können mit den hier verwendeten Näherungsansätzen nicht erfaßt werden.

6.4 Allgemeine Näherungslösung für die vereinfachte homogene Differentialgleichung

In [4] wird ein Verfahren zur Ermittlung des kritischen Momentes für das Verzweigungsproblem vorgespannter und nicht vorgespannter, beidseitig gabelgelagerter Stahlbetonträger vorgestellt. Die hierfür abgeleitete Differentialgleichung entspricht dem homogenen Teil der Gleichung (6.8). In [4] wird außerdem von einer Endmomentenbelastung ausgegangen, so daß die Querschnittsgrößen entlang der Balkenachse x ebenfalls konstant verlaufen. Die belastungsabhängigen Querschnittsgrößen werden allerdings mit wirklichkeitsnahen Werkstoffformulierungen ermittelt. Der Einfluß eines parabelförmigen Momentenverlaufs infolge einer Gleichstreckenlast kann hierbei näherungsweise durch einen Formfaktor berücksichtigt werden [5] .

Um die sich infolge eines nicht konstanten Momentenverlaufs entlang der Balkenachse ebenfalls verändernden Querschnittswerte zu berücksichtigen, wird im folgenden eine erweiterte Gleichung zur Bestimmung des kritischen Moments als Lösung der homogenen Differentialgleichung für einen beidseitig gabelgelagerten Träger hergeleitet.

In [38] werden zunächst für den Momentenverlauf M_{yI} und den Querschnittswert (EI_t) parabelförmige und für die Steifigkeiten (GI_t) und (EI_z) sinusförmige Ansätze gemacht. Die Belastung p_z ist dabei entsprechend dem parabelförmigen Momentenverlauf konstant. Obwohl sich beim Satteldachbinder geknickte Verläufe von elastischer Schwerlinie und Schubmittelpunktlinie einstellen, wird für die Erweiterung des Näherungsverfahrens zunächst auch von einem konstanten Verlauf der Systemlinien ausgegangen, um die Vorgehensweise nicht unnötig zu komplizieren. Der wesentliche Punkt der Erweiterung liegt in der wirklichkeitsnäheren Erfassung der Steifigkeitsverläufe (EI_z) und (GI_t) , die auf das Kippverhalten den entscheidenden Einfluß besitzen.

Für normierte Koordinaten $\xi = x/l$ werden im einzelnen die nachstehenden Ansätze gemacht :

– für das Biegemoment M_{yI} : $M_{yI}(\xi) = 4 M_m f_m(\xi)$ mit $M_m = M(l/2)$ (6.9)

- bei einer Gleichstreckenlast (Bild 7a) : $M_m = \frac{p_z l^2}{8}$ und $f_m(\xi) = \xi - \xi^2$ (6.9a)

- bei einer trapezförmigen Streckenlast (z.B. Eigenlast des Satteldachbinders),(Bild 7b) :

$$M_m = M_{m,0} + \Delta M_m \quad \text{mit} \quad M_{m,0} = \frac{p_{z,0} l^2}{8} \quad , \quad \Delta M_m = \frac{\Delta p_z l^2}{12} \quad \text{und}$$

$$f_m(\xi) = \frac{M_{m,0}}{M_m} (\xi - \xi^2) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{3}{4} \xi - \xi^3 \right) \quad (6.9b)$$

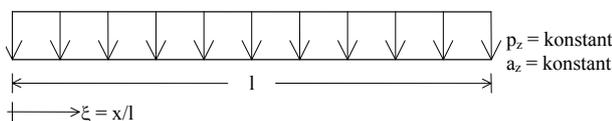


Bild 7a : Gleichstreckenlast
 Fig. 7a : Uniform line load

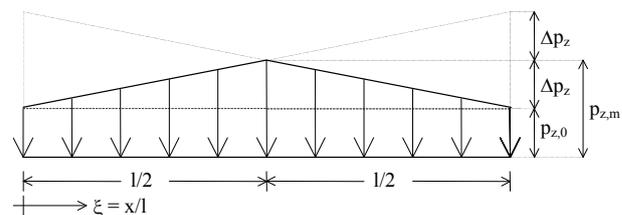


Bild 7b : Verlauf der trapezförmigen Streckenlast
 Fig. 7b : Trapezoidal line load

– für die Belastung p_z (Bild 7b) und die Lastangriffslinie a_z (Bild 7c)

Bereich $0 < \xi \leq \frac{1}{2}$ $p_z(\xi) = p_{z,0} + 2\Delta p_z \xi$ (6.9c)

Bereich $\frac{1}{2} < \xi \leq 1$ $p_z(\xi) = 2 p_{z,m} - p_{z,0} - 2 \Delta p_z \xi$ mit $\Delta p_z = p_{z,m} - p_{z,0}$

Bereich $0 < \xi \leq \frac{1}{2}$ $z_A(\xi) = z_{A,0} + 2 \Delta z_A \xi$ (6.9d)

Bereich $\frac{1}{2} < \xi \leq 1$ $z_A(\xi) = 2 z_{A,m} - z_{A,0} - 2 \Delta z_A \xi$ mit $\Delta z_A = z_{A,m} - z_{A,0}$

– für den Querschnittswert (EI_r)

$$(EI_r)(\xi) = 4(EI_r)_m f_r(\xi) \quad \text{mit} \quad f_r(\xi) = \xi - \xi^2 \quad (6.10)$$

– für die Steifigkeiten (EI_z) und (\tilde{GI}_t) , wie im Bild 7d dargestellt,

$$(\tilde{GI}_t)(\xi) = (\tilde{GI}_t)_0 - \Delta(\tilde{GI}_t) f_{St}(\xi) \quad (6.11)$$

$$(EI_z)(\xi) = (EI_z)_0 - \Delta(EI_z) f_{St}(\xi) \quad (6.12)$$

mit $\Delta(EI_z) = (EI_z)_0 - (EI_z)_m$ und $\Delta(\tilde{GI}_t) = (\tilde{GI}_t)_0 - (\tilde{GI}_t)_m$, sowie

$$\text{den Funktionen } f_{St} \text{ für den Verlauf über die Trägerlänge } f_{St}(\xi) = \sin(\pi\xi) \quad (6.11a) \quad (6.12a)$$

$$\text{oder } f_{St}(\xi) = 1 - (2\xi - 1)^6 \quad (6.11b) \quad (6.12b)$$

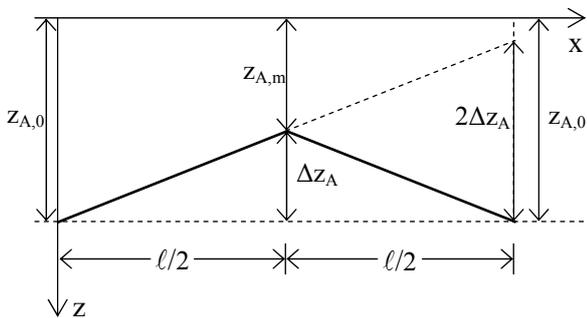


Bild 7c : Verlauf der Lastangriffslinie

Fig. 7c : Loading line

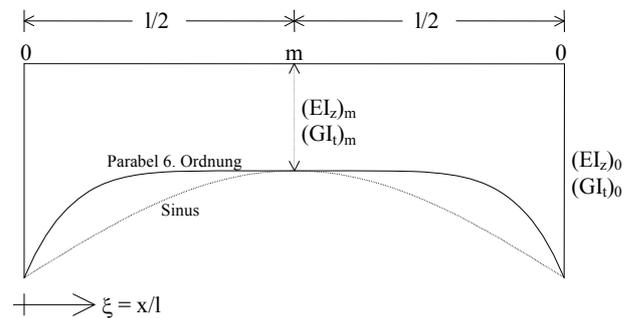


Bild 7d : Verlauf der Steifigkeiten (EI_z) und (\tilde{GI}_t)

Fig. 7d : Stiffnesses (EI_z) and (\tilde{GI}_t)

Der Abstand z_M des Schubmittelpunktes vom elastischen Schwerpunkt wird näherungsweise konstant gesetzt. Zwar ändert sich die Lage des Schubmittelpunktes über die Trägerlänge, was jedoch in etwa gleichem Maße auch für den elastischen Schwerpunkt gilt. Der interessierende Abstand z_M zwischen Schwerpunkt und Schubmittelpunkt ändert sich trotz der belastungsabhängigen Lage beider Punkte erfahrungsgemäß nur unwesentlich über die Trägerlänge. Da für die angestrebte Näherungslösung ein konstanter Verlauf der Bezugsachse (elastische Schwerlinie) angesetzt wird, ist es folgerichtig, auch einen konstanten Schubmittelpunktsabstand anzunehmen.

Die zu lösende homogene Differentialgleichung ergibt sich aus (6.8), wenn diese noch mit (EI_z) multipliziert wird, zu:

$$(EI_z) \left\{ (\tilde{GI}_t) \vartheta'' + \left[(EI_r) - 2z_M M_{yI} \right] \vartheta' - p_z (z_A - z_M) \vartheta \right\} + M_{yI}^2 \vartheta = 0 \quad (6.13)$$

Mit den Beziehungen (6.9) bis (6.12) folgt dann für Gl. (6.13)

$$\left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) f_{St} \right] \left\{ \left[(\tilde{GI}_t)_0 - \Delta(\tilde{GI}_t) f_{St} \right] \vartheta'' + \left[4(EI_r)_m f_r \vartheta' \right] - \left[8z_M M_m f_m \vartheta' \right] - p_z (z_A - z_M) \vartheta \right\} + 16 M_m^2 f_m^2 \vartheta = 0 \quad (6.14)$$

Zur Lösung der Differentialgleichung (6.14) wird ein eingliedriger Ansatz für die Stabverdrehung gemacht:

$$\vartheta(\xi) = \vartheta_0 f_\vartheta(\xi) \quad \text{mit} \quad f_\vartheta(\xi) = \sin(\pi\xi) \quad (6.15)$$

Die Anwendung des *Galerkin*-Verfahrens $\int L(\vartheta)\tilde{\vartheta} l d\xi = 0$ auf die Dgl. (6.14) führt mit dem Ansatz (6.15) zu :

$$\int_0^1 \left\{ \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) f_{St} \right] \left\{ \left[(\tilde{GI}_t)_0 - \Delta(\tilde{GI}_t) f_{St} \right] \vartheta_0 f_9'' + \left[4(EI_r)_m f_r \vartheta_0 f_9' \right]' \right. \right. \\ \left. \left. - \left[8z_M M_m f_m \vartheta_0 f_9' \right]' - p_z(z_A - z_M) \vartheta_0 f_9 \right\} + 16 M_m^2 f_m^2 \vartheta_0 f_9 \right\} f_9 l d\xi = 0 \quad (6.16)$$

Nach Ausführung der Differentiationen, Trennung der Glieder mit M_m^2 und M_m sowie Einführung der Abkürzungen

$$f_1 = f_m^2 f_9^2 \quad (6.17a)$$

$$f_2 = \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) f_{St} \right] \left[f_m' f_9' + f_m f_9'' \right] f_9 \quad (6.17b)$$

$$f_3 = \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) f_{St} \right] \left\{ \left[(\tilde{GI}_t)_0 - \Delta(\tilde{GI}_t) f_{St} \right] f_9'' + 4(EI_r)_m \left[f_r' f_9' + f_r f_9'' \right] - p_z(z_A - z_M) f_9 \right\} f_9 \quad (6.17c)$$

folgt aus (6.16) die quadratische Gleichung für M_m

$$16 M_m^2 \vartheta_0 l \int_0^1 f_1 d\xi - 8 M_m z_M \vartheta_0 l \int_0^1 f_2 d\xi + \vartheta_0 l \int_0^1 f_3 d\xi = 0 \quad (6.18)$$

Division der Gl. (6.18) durch den Term $16 \vartheta_0 l \int_0^1 f_1 d\xi$ und anschließendes Kürzen führt auf die Normalform der quadratischen Gleichung

$$M_m^2 - M_m \frac{z_M \int_0^1 f_2 d\xi}{2 \int_0^1 f_1 d\xi} + \frac{\int_0^1 f_3 d\xi}{16 \int_0^1 f_1 d\xi} = 0 \quad (6.19)$$

Die Lösung der quadratischen Gleichung ergibt das kritische Moment $M_{m,kr}$:

$$M_{m,kr} = \frac{z_M \int_0^1 f_2 d\xi}{4 \int_0^1 f_1 d\xi} + \sqrt{\frac{z_M^2 \left(\int_0^1 f_2 d\xi \right)^2}{16 \left(\int_0^1 f_1 d\xi \right)^2} - \frac{\int_0^1 f_3 d\xi}{16 \int_0^1 f_1 d\xi}} \quad (6.20)$$

Mit der Gleichung (6.20) liegt damit die Lösung des Verzweigungsproblems in verhältnismäßig allgemeiner Form vor. Die Berechnung der bestimmten Integrale der Gl.(6.20) für die Funktionen f_1 , f_2 und f_3 wird mit den obenstehenden Ansätzen für f_m , f_r , f_{St} und f_9 durchgeführt. Für die möglichen Kombinationen der Ansatzfunktionen für das Biegemoment (Parabel zweiter oder dritter Ordnung) und für die Steifigkeiten (Sinus oder Parabel sechster Ordnung) ergeben sich folgende vier Fallgruppen :

Bindertyp BT-I mit der Vorgabe : $p_z(\xi) = \text{konstant}$, Bild 7a
 $z_A(\xi) = \text{konstant}$, Bild 7a
 $f_g(\xi) = \text{sinusförmig}$ nach Glch (6.15)
 $f_r(\xi) = \text{parabelförmig (2. Ordnung)}$ nach Glch (6.10)
 $f_m(\xi) = \text{parabelförmig (2. Ordnung)}$ nach Glch (6.9),(6.9a)
 $f_{st}(\xi) = \text{sinusförmig}$ nach Glch (6.11a),(6.12a); Bild 7d

Die Auswertung der bestimmten Integrale ergibt:

$$\int_0^1 f_1(\xi) d\xi = \int_0^1 (\xi - \xi^2)^2 \sin^2(\pi\xi) d\xi = \frac{\pi^4 + 45}{60\pi^4} \quad (6.20a-I)$$

$$\int_0^1 f_2(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) \sin(\pi\xi) \right] \left[\frac{\pi}{1^2} (1 - 2\xi) \cos(\pi\xi) - \frac{\pi^2}{1^2} (\xi - \xi^2) \sin(\pi\xi) \right] \sin(\pi\xi) d\xi \quad (6.20b-I)$$

$$= \left[(EI_z)_0 \frac{3 - \pi^2}{12\pi^2} + \Delta(EI_z) \frac{56}{27\pi^3} \right] \frac{\pi^2}{1^2}$$

$$\int_0^1 f_3(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) \sin(\pi\xi) \right] \left\{ \left[(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 - \Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t) \sin(\pi\xi) \right] \left[-\frac{\pi^2}{1^2} \sin(\pi\xi) \right] + \right. \quad (6.20c-I)$$

$$\left. 4(EI_r)_m \left[\frac{\pi}{1^2} (1 - 2\xi) \cos(\pi\xi) - \frac{\pi^2}{1^2} (\xi - \xi^2) \sin(\pi\xi) \right] - p_z(z_A - z_M) \sin(\pi\xi) \right\} \sin(\pi\xi) d\xi$$

$$= \frac{\pi^2}{1^2} \left\{ -\frac{1}{2} (EI_z)_0 (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 - \frac{3}{8} \Delta(EI_z) \Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t) + \frac{4}{3\pi} \left[\Delta(EI_z) (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 + \Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t) (EI_z)_0 \right] + \right.$$

$$\left. 4(EI_r)_m \left[\frac{3 - \pi^2}{12\pi^2} (EI_z)_0 + \frac{56}{27\pi^3} \Delta(EI_z) \right] - p_z(z_A - z_M) \frac{1^2}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} (EI_z)_0 - \frac{4}{3\pi} \Delta(EI_z) \right] \right\}$$

Bindertyp BT-II mit der Vorgabe : $p_z(\xi) = \text{konstant}$, Bild 7a
 $z_A(\xi) = \text{konstant}$, Bild 7a
 $f_g(\xi) = \text{sinusförmig}$ nach Glch (6.15)
 $f_r(\xi) = \text{parabelförmig (2. Ordnung)}$ nach Glch (6.10)
 $f_m(\xi) = \text{parabelförmig (2. Ordnung)}$ nach Glch (6.9),(6.9a)
 $f_{st}(\xi) = \text{parabelförmig (6.Ordnung)}$ nach Glch(6.11b),(6.12b);Bild 7d

Die Auswertung der bestimmten Integrale ergibt:

$$\int_0^1 f_1(\xi) d\xi = \frac{\pi^4 + 45}{60 \pi^4} \quad \text{wie BT-I} \quad (6.20a-II)$$

$$\int_0^1 f_2(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) (1 - (2\xi - 1)^6) \right] \left[\frac{\pi}{1^2} (1 - 2\xi) \cos(\pi\xi) - \frac{\pi^2}{1^2} (\xi - \xi^2) \sin(\pi\xi) \right] \sin(\pi\xi) d\xi \quad (6.20b-II)$$

$$= \left[(EI_z)_0 \frac{3 - \pi^2}{12 \pi^2} + \Delta(EI_z) \left(\frac{5}{63} + \frac{6}{\pi^4} - \frac{330}{\pi^6} + \frac{2520}{\pi^8} \right) \right] \frac{\pi^2}{1^2}$$

$$\int_0^1 f_3(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) (1 - (2\xi - 1)^6) \right] \left\{ \left[(\tilde{G}I_t)_0 - \Delta(\tilde{G}I_t) (1 - (2\xi - 1)^6) \right] \left[-\frac{\pi^2}{1^2} \sin(\pi\xi) \right] + \right.$$

$$\left. 4(EI_r)_m \left[\frac{\pi}{1^2} (1 - 2\xi) \cos(\pi\xi) - \frac{\pi^2}{1^2} (\xi - \xi^2) \sin(\pi\xi) \right] - p_z(z_A - z_M) \sin(\pi\xi) \right\} \sin(\pi\xi) d\xi$$

$$= \left\{ -\frac{1}{2} (EI_z)_0 (\tilde{G}I_t)_0 - \Delta(EI_z) \Delta(\tilde{G}I_t) \left(\frac{36}{91} + \frac{540}{\pi^4} - \frac{46800}{\pi^6} + \frac{1995840}{\pi^8} - \frac{39916800}{\pi^{10}} + \frac{239500800}{\pi^{12}} \right) \right. \quad (6.20c-II)$$

$$+ \left[\Delta(EI_z) (\tilde{G}I_t)_0 + \Delta(\tilde{G}I_t) (EI_z)_0 \right] \left(\frac{3}{7} + \frac{3}{\pi^2} - \frac{60}{\pi^4} + \frac{360}{\pi^6} \right)$$

$$+ 4(EI_r)_m \left[\frac{3 - \pi^2}{12 \pi^2} (EI_z)_0 + \Delta(EI_z) \left(\frac{5}{63} + \frac{6}{\pi^4} - \frac{330}{\pi^6} + \frac{2520}{\pi^8} \right) \right]$$

$$\left. - p_z(z_A - z_M) \frac{1^2}{\pi^2} \left[\frac{1}{2} (EI_z)_0 - \Delta(EI_z) \left(\frac{3}{7} + \frac{3}{\pi^2} - \frac{60}{\pi^4} + \frac{360}{\pi^6} \right) \right] \right\} \frac{\pi^2}{1^2}$$

Bindertyp BT-III mit der Vorgabe : $p_z(\xi) =$ satteldachförmig , Bild 7b , Glch (6.9c)
 $z_A(\xi) =$ satteldachförmig , Bild 7c , Glch (6.9d)
 $f_g(\xi) =$ sinusförmig nach Glch (6.15)
 $f_r(\xi) =$ parabelförmig (2. Ordnung) nach Glch (6.10)
 $f_m(\xi) =$ parabelförmig (3. Ordnung) nach Glch (6.9),(6.9b)
 $f_{st}(\xi) =$ sinusförmig nach Glch (6.11a),(6.12a); Bild 7d

Die Auswertung der bestimmten Integrale ergibt:

$$\int_0^1 f_1(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[\frac{M_{m,0}}{M_m} (\xi - \xi^2) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{3}{4} \xi - \xi^3 \right) \right]^2 \sin^2(\pi \xi) d\xi$$

$$= \frac{\pi^4 + 45}{60 \pi^4} \left(\frac{M_{m,0}}{M_m} \right)^2 + \frac{7\pi^4 - 15\pi^2 + 540}{240 \pi^4} \frac{M_{m,0}}{M_m} \frac{\Delta M_m}{M_m} + \frac{102\pi^6 - 945\pi^4 + 17640\pi^2 - 37800}{6720 \pi^6} \left(\frac{\Delta M_m}{M_m} \right)^2 \quad (6.20a-III)$$

$$\int_0^1 f_2(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) \sin(\pi \xi) \right] \left[\frac{\pi}{l^2} \left(\frac{M_{m,0}}{M_m} (1 - 2\xi) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{3}{4} - 3\xi^2 \right) \right) \cos(\pi \xi) - \frac{\pi^2}{l^2} \left(\frac{M_{m,0}}{M_m} (\xi - \xi^2) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{3}{4} \xi - \xi^3 \right) \right) \sin(\pi \xi) \right] \sin(\pi \xi) d\xi \quad (6.20b-III)$$

$$= \left[(EI_z)_0 \left(\frac{3 - \pi^2}{12 \pi^2} \frac{M_{m,0}}{M_m} + \frac{6 - \pi^2}{16 \pi^2} \frac{\Delta M_m}{M_m} \right) + \Delta(EI_z) \left(\frac{56}{27 \pi^3} \frac{M_{m,0}}{M_m} + \frac{56 - 3\pi^2}{18 \pi^3} \frac{\Delta M_m}{M_m} \right) \right] \frac{\pi^2}{l^2}$$

$$\int_0^1 f_3(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) \sin(\pi \xi) \right] \left\{ \left[(\tilde{G} \tilde{I}_t)_0 - \Delta(\tilde{G} \tilde{I}_t) \sin(\pi \xi) \right] \left[- \frac{\pi^2}{l^2} \sin(\pi \xi) \right] + 4(EI_r)_m \left[\frac{\pi}{l^2} (1 - 2\xi) \cos(\pi \xi) - \frac{\pi^2}{l^2} (\xi - \xi^2) \sin(\pi \xi) \right] \right\} \sin(\pi \xi) d\xi$$

$$- \int_0^{0,5} \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) \sin(\pi \xi) \right] \left[p_{z,0} + 2\Delta p_z \xi \right] \left[z_{A,0} + 2\Delta z_A \xi - z_M \right] \sin^2(\pi \xi) d\xi$$

$$- \int_{0,5}^1 \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) \sin(\pi \xi) \right] \left[2p_{z,m} - p_{z,0} - 2\Delta p_z \xi \right] \left[2z_{A,m} - z_{A,0} - 2\Delta z_A \xi - z_M \right] \sin^2(\pi \xi) d\xi$$

$$= \frac{\pi^2}{l^2} \left\{ - \frac{1}{2} (EI_z)_0 (\tilde{G} \tilde{I}_t)_0 - \frac{3}{8} \Delta(EI_z) \Delta(\tilde{G} \tilde{I}_t) + \frac{4}{3\pi} \left[\Delta(EI_z) (\tilde{G} \tilde{I}_t)_0 + \Delta(\tilde{G} \tilde{I}_t) (EI_z)_0 \right] \right\} \quad (6.20c - III)$$

$$+ 4(EI_r)_m \left[\frac{3 - \pi^2}{12 \pi^2} (EI_z)_0 + \frac{56}{27 \pi^3} \Delta(EI_z) \right]$$

$$- (EI_z)_0 \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} p_{z,0} (z_{A,0} - z_M) + \frac{\pi^2 + 4}{4 \pi^2} [p_{z,0} \Delta z_A + \Delta p_z (z_{A,0} - z_M)] + \frac{\pi^2 + 6}{6 \pi^2} \Delta p_z \Delta z_A \right)$$

$$+ \Delta(EI_z) \frac{l^2}{\pi^2} \left(\frac{4}{3\pi} p_{z,0} (z_{A,0} - z_M) + \frac{28}{9 \pi^2} [p_{z,0} \Delta z_A + \Delta p_z (z_{A,0} - z_M)] + \frac{168\pi - 320}{27 \pi^3} \Delta p_z \Delta z_A \right) \left. \right\}$$

Bindertyp BT-IV mit der Vorgabe : $p_z(\xi) =$ satteldachförmig , Bild 7b , Glch (6.9c)
 $z_A(\xi) =$ satteldachförmig , Bild 7c , Glch (6.9d)
 $f_g(\xi) =$ sinusförmig nach Glch (6.15)
 $f_r(\xi) =$ parabelförmig (2. Ordnung) nach Glch (6.10)
 $f_m(\xi) =$ parabelförmig (3. Ordnung) nach Glch (6.9),(6.9b)
 $f_{st}(\xi) =$ parabelförmig (6.Ordnung) nach Glch(6.11b),(6.12b); Bild 7d

Die Auswertung der bestimmten Integrale ergibt:

$$\begin{aligned}
 & \int_0^1 f_1(\xi) d\xi \quad \text{wie bei BT-III} \\
 & \int_0^1 f_2(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) (1 - (2\xi - 1)^6) \right] \left[\frac{\pi}{1^2} \left(\frac{M_{m,0}}{M_m} (1 - 2\xi) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{3}{4} - 3\xi^2 \right) \right) \cos(\pi\xi) - \right. \\
 & \quad \left. \frac{\pi^2}{1^2} \left(\frac{M_{m,0}}{M_m} (\xi - \xi^2) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{3}{4} \xi - \xi^3 \right) \right) \sin(\pi\xi) \right] \sin(\pi\xi) d\xi \\
 & = \frac{\pi^2}{1^2} \left\{ (EI_z)_0 \left(\frac{3 - \pi^2}{12\pi^2} \frac{M_{m,0}}{M_m} + \frac{6 - \pi^2}{16\pi^2} \frac{\Delta M}{M_m} \right) \right. \\
 & \quad \left. + \Delta(EI_z) \left[\left[\frac{5}{63} + \frac{6}{\pi^4} - \frac{330}{\pi^6} + \frac{2520}{\pi^8} \right] \frac{M_{m,0}}{M_m} + \left[\frac{11}{168} - \frac{3}{8\pi^2} + \frac{33}{2\pi^4} - \frac{540}{\pi^6} + \frac{3780}{\pi^8} \right] \frac{\Delta M}{M_m} \right] \right\} \quad (6.20b - IV) \\
 & \int_0^1 f_3(\xi) d\xi = \int_0^1 \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) (1 - (2\xi - 1)^6) \right] \left\{ \left[(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 - \Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t) (1 - (2\xi - 1)^6) \right] \left[-\frac{\pi^2}{1^2} \sin(\pi\xi) \right] + \right. \\
 & \quad \left. 4(EI_r)_m \left[\frac{\pi}{1^2} (1 - 2\xi) \cos(\pi\xi) - \frac{\pi^2}{1^2} (\xi - \xi^2) \sin(\pi\xi) \right] \right\} \sin(\pi\xi) d\xi \\
 & - \int_0^{0,5} \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) (1 - (2\xi - 1)^6) \right] [p_{z,0} + 2\Delta p_z \xi] [z_{A,0} + 2\Delta z_A \xi - z_M] \sin^2(\pi\xi) d\xi \\
 & - \int_{0,5}^1 \left[(EI_z)_0 - \Delta(EI_z) (1 - (2\xi - 1)^6) \right] [2p_{z,m} - p_{z,0} - 2\Delta p_z \xi] [2z_{A,m} - z_{A,0} - 2\Delta z_A \xi - z_M] \sin^2(\pi\xi) d\xi \\
 & = \left\{ -\frac{1}{2} (EI_z)_0 (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 - \Delta(EI_z) \Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t) \left(\frac{36}{91} + \frac{540}{\pi^4} - \frac{46800}{\pi^6} + \frac{1995840}{\pi^8} - \frac{39916800}{\pi^{10}} + \frac{239500800}{\pi^{12}} \right) \right. \\
 & \quad + \left[\Delta(EI_z) (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 + \Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t) (EI_z)_0 \right] \left[\frac{3}{7} + \frac{3}{\pi^2} - \frac{60}{\pi^4} + \frac{360}{\pi^6} \right] \\
 & \quad + 4(EI_r)_m \left[\frac{3 - \pi^2}{12\pi^2} (EI_z)_0 + \Delta(EI_z) \left(\frac{5}{63} + \frac{6}{\pi^4} - \frac{330}{\pi^6} + \frac{2520}{\pi^8} \right) \right] \\
 & \quad - (EI_z)_0 \frac{1^2}{\pi^2} \left(\frac{1}{2} p_{z,0} (z_{A,0} - z_M) + \frac{\pi^2 + 4}{4\pi^2} [p_{z,0} \Delta z_A + \Delta p_z (z_{A,0} - z_M)] + \frac{\pi^2 + 6}{6\pi^2} \Delta p_z \Delta z_A \right) \\
 & \quad + \Delta(EI_z) \frac{1^2}{\pi^2} \left[\left(\frac{3}{7} + \frac{3}{\pi^2} - \frac{60}{\pi^4} + \frac{360}{\pi^6} \right) p_{z,0} (z_{A,0} - z_M) \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{27}{112} + \frac{1}{2\pi^2} + \frac{45}{\pi^4} - \frac{900}{\pi^6} + \frac{5040}{\pi^8} \right) [p_{z,0} \Delta z_A + \Delta p_z (z_{A,0} - z_M)] \right. \\
 & \quad \left. + \left(\frac{83}{504} + \frac{1}{\pi^2} - \frac{18}{\pi^4} + \frac{1200}{\pi^6} - \frac{10080}{\pi^8} \right) \Delta p_z \Delta z_A \right] \left. \right\} \frac{\pi^2}{1^2} \quad (6.20c - IV)
 \end{aligned}$$

Die Ergebnisse Gl.(6.20a-c) der bestimmten Integrationen werden in Gl.(6.20) für die vier Fallgruppen eingesetzt, entsprechend umgeformt und zusammengefaßt, so daß die bereits in [38] angegebene bekannte Form für das kritische Moment $M_{m,kr}$ entsteht :

$$M_{m,kr} = k_1 \frac{\pi^2}{l^2} (EI_z)_0 z_M k_2 + \sqrt{\left[k_1 \frac{\pi^2}{l^2} (EI_z)_0 z_M k_2 \right]^2 + k_1 \frac{\pi^2}{l^2} (EI_z)_0 \left[(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 k_3 + (EI_r)_m k_4 + p_z l^2 (z_A - z_M) k_5 \right]} \quad (6.21)$$

Diese Gleichung (6.21) für das Moment $M_{m,kr}$ wird noch in eine bekanntere Form umgeschrieben :

$$M_{m,kr} = c \frac{\sqrt{(EI_z)_0 (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0}}{l} \quad (6.22)$$

$$\text{mit } c = \pi \sqrt{k_1} \left[c_1 + \sqrt{c_1^2 + k_3 + k_4 \frac{(EI_r)_m}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0} + k_5 \frac{p_{z,0} l^2 (z_{A,0} - z_M)}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0}} \right] \quad (6.22a)$$

$$\text{und } c_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{k_1} \sqrt{\frac{(EI_z)_0}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0}} z_M k_2 \quad (6.22b)$$

Für die vier Fallgruppen ergeben sich die Faktoren k_1 bis k_5 zu :

Bindertyp BT-I :

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{15\pi^4}{4\pi^4 + 180} \quad (6.23a-I)$$

$$k_2 = \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{3} + \frac{448}{27\pi^3} \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \quad (6.23b-I)$$

$$k_3 = 1 + \frac{3}{4} \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \frac{\Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t)}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0} - \frac{8}{3\pi} \left[\frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} + \frac{\Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t)}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0} \right] \quad (6.23c-I)$$

$$k_4 = \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{448}{27\pi^3} \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} = -k_2 \quad (6.23d-I)$$

$$k_5 = \frac{1}{\pi^2} - \frac{8}{3\pi^3} \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \quad (6.23e-I)$$

Dieser Fall entspricht dem in [38] behandelten. Leider hat sich in [38], Glch (20c) ,ein Vorzeichenfehler eingeschlichen, der dort bei dem Faktor k_4 ,Gleich.(21d) ,ebenfalls zu einem falschen Vorzeichen führt.

Bindertyp BT-II :

k_1 wie (6.23a-I) bei BT-I

$$k_2 = \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{3} + \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \left(\frac{40}{63} + \frac{48}{\pi^4} - \frac{2640}{\pi^6} + \frac{20160}{\pi^8} \right) \quad (6.23b-II)$$

$$k_3 = 1 + \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \frac{\Delta(\tilde{G}I_t)}{(\tilde{G}I_t)_0} \left[\frac{72}{91} + \frac{360}{\pi^4} \left\{ 3 - \frac{260}{\pi^2} + \frac{11088}{\pi^4} \left(1 - \frac{20}{\pi^2} + \frac{120}{\pi^4} \right) \right\} \right] - \left[\frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} + \frac{\Delta(\tilde{G}I_t)}{(\tilde{G}I_t)_0} \right] \left[\frac{6}{7} + \frac{6}{\pi^2} - \frac{120}{\pi^4} + \frac{720}{\pi^6} \right] \quad (6.23c-II)$$

$$k_4 = \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi^2} - \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \left(\frac{40}{63} + \frac{48}{\pi^4} - \frac{2640}{\pi^6} + \frac{20160}{\pi^8} \right) = -k_2 \quad (6.23d-II)$$

$$k_5 = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \left[\frac{6}{7} + \frac{6}{\pi^2} - \frac{120}{\pi^4} + \frac{720}{\pi^6} \right] \quad (6.23e-II)$$

Bindertyp BT-III :

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{15\pi^4}{\left(\frac{M_{m,0}}{M_m} \right)^2 (4\pi^4 + 180) + \frac{M_{m,0}}{M_m} \frac{\Delta M_m}{M_m} (7\pi^4 - 15\pi^2 + 540) + \left(\frac{\Delta M_m}{M_m} \right)^2 k_{1n}} \quad (6.23a-III)$$

$$\text{mit } k_{1n} = \left(\frac{102\pi^6 - 945\pi^4 + 17640\pi^2 - 37800}{28\pi^2} \right)$$

$$k_2 = \frac{M_{m,0}}{M_m} \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{3} \right) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{3}{\pi^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \left(\frac{M_{m,0}}{M_m} \frac{448}{27\pi^3} + \frac{\Delta M_m}{M_m} \frac{224 - 12\pi^2}{9\pi^3} \right) \quad (6.23b-III)$$

k_3 wie (6.23c-I) bei BT-I

k_4 wie (6.23d-I) bei BT-I

$$k_5 = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \left[\frac{8}{3\pi} + \frac{56}{9\pi^2} \left(\frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \right) + \frac{336\pi - 640}{27\pi^3} \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} \right] + \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \right) \left(\frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \right) \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} \right] \quad (6.23e-III)$$

Bindertyp BT-IV :

k_1 wie (6.23a-III) bei BT-III

$$k_2 = \frac{M_{m,0}}{M_m} \left(\frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{3} \right) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{3}{\pi^2} - \frac{1}{2} \right) + \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \left[\frac{M_{m,0}}{M_m} \left(\frac{40}{63} + \frac{48}{\pi^4} - \frac{2640}{\pi^6} + \frac{20160}{\pi^8} \right) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{11}{21} - \frac{3}{\pi^2} + \frac{132}{\pi^4} - \frac{4320}{\pi^6} + \frac{30240}{\pi^8} \right) \right] \quad (6.23b-IV)$$

k_3 wie (6.23c-II) bei BT-II

k_4 wie (6.23d-II) bei BT-II

$$k_5 = \frac{1}{\pi^2} - \frac{1}{\pi^2} \frac{\Delta(EI_z)}{(EI_z)_0} \left[\left(\frac{6}{7} + \frac{6}{\pi^2} - \frac{120}{\pi^4} + \frac{720}{\pi^6} \right) + \left(\frac{27}{56} + \frac{1}{\pi^2} + \frac{90}{\pi^4} - \frac{1800}{\pi^6} + \frac{10080}{\pi^8} \right) \left(\frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \right) + \left(\frac{83}{252} + \frac{2}{\pi^2} - \frac{36}{\pi^4} + \frac{2400}{\pi^6} - \frac{20160}{\pi^8} \right) \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} \right] + \frac{1}{\pi^2} \left[\left(\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \right) \left(\frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{\pi^2} \right) \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} \right] \quad (6.23e-IV)$$

Die Faktoren k_1 bis k_5 beschreiben die gegenseitigen Einflüsse der vorgegebenen Verläufe von Biegemomenten, Steifigkeiten und Belastungen mit ihren Angriffslinien. Bei Anwendung der Formeln (6.21) bis (6.23) ist darauf zu achten, daß die Abstände des Schubmittelpunktes z_M und der Last z_A gemäß dem Koordinatensystem nach Bild 1 mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind. Da der Schubmittelpunkt normalerweise oberhalb des elastischen Schwerpunkts liegt und die Belastung auf dem Obergurt angreift, ergeben sich für diese Abstände jeweils negative Werte. Bei unterschiedlichen Lastangriffslinien, wie z.B. Eigenlast g in der geometrischen Schwerlinie und Verkehrslast p auf dem Obergurt, muß der Faktor k_5 für jede Last getrennt ermittelt und nach Multiplikation mit dem jeweiligen Lastfaktor dann aufsummiert werden.

In diese vier Bindertypklassen BT-I bis BT-IV können die meisten Stahlbeton- und Spannbetonträger eingruppiert werden, wobei als Einstufungskriterien der Biegemomentenverlauf und die Steifigkeitsverläufe über die Trägerlänge herangezogen werden. Aufgrund der in Kap. 6.3 kurz dargestellten Ergebnisse der Voruntersuchungen ergeben sich folgende Einstufungen :

- **Vorgespannte Parallelgurtbinder (PG-V)** mit einer Gleichlast auf dem Obergurt besitzen normalerweise einen vom Auflager her gesehen weiten Bereich (teilweise bis 0,2 l) im Zustand I und anschließend einen langsamen Abfall der Steifigkeitswerte auf den Zustand II mit dem Minimum in Trägermitte. Diese Träger gehören deshalb in die **Binderklasse BT-I**.
- **Nicht vorgespannte Parallelgurtbinder (PG-S)** mit einer Gleichlast auf dem Obergurt sind durch den raschen Abfall der Steifigkeiten im Auflagerbereich vom Zustand I in den Zustand II fast ausnahmslos in die **Binderklasse BT-II** einzuordnen.
- **Vorgespannte Satteldachbinder (SD-V)** können je nach Steifigkeitsverlauf im Auflagerbereich zu der **Binderklasse BT-III (sinusförmig) oder BT-IV (parabelförmig)** gehören. Um eine zutreffende Einordnung vornehmen zu können, ist die Kenntnis der Steifigkeitsverläufe erforderlich (s. Beispiele Kap. 6.6), was jedoch einen erhöhten Berechnungsaufwand erfordert. Auf jeden Fall liefert eine Berechnung nach BT-IV ein kleineres kritisches Moment M_m als nach BT-III und ist deshalb bei einem unbekanntem Steifigkeitsverlauf anzuwenden.
- **Nicht vorgespannte Satteldachbinder (SD-S)** zeigen wie Parallelgurtbinder einen raschen Abfall der Steifigkeitswerte im Auflagerbereich und gehören deshalb zur **Binderklasse BT-IV**.

Anhand der Binderklasse BT-I können vom Verzweigungsproblem her bekannte Lösungen abgeleitet werden. Die Faktoren k_1 bis k_5 beschreiben dort die Einflüsse eines parabelförmigen Verlaufs von Biegemoment und Querschnittswert (EI_r) in Verbindung mit sinusförmigen Verläufen der Steifigkeiten (EI_z) und (\tilde{GI}_t). Der Faktor k_1 ist konstant und gibt den Einfluß des parabelförmigen Momentenverlaufs über die Trägerlänge in Verbindung mit dem sinusförmigen Verdrehungsansatz wieder. Der Zahlenwert $\sqrt{k_1} \approx 1,13$ entspricht dem aus der Literatur bekannten Faktor 1,12 zur Berücksichtigung eines parabelförmigen Momentenverlaufs beim Verzweigungsproblem und wird ableitungsbedingt geringfügig größer ermittelt. Es lassen sich zwei bekannte Sonderfälle angeben :

– 1. Sonderfall : Gleichstreckenbelastung

$\Rightarrow (EI_r)$ und Moment parabelförmig ;
 näherungsweise $(EI_z) = \text{konst}$; $(\tilde{GI}_t) = \text{konst}$

$$k_1 = \frac{1}{2} \frac{15\pi^4}{4\pi^4 + 180} \approx 1,2825 \text{ (unverändert)}$$

$$k_2 = \frac{2}{\pi^2} - \frac{2}{3}$$

$$k_3 = 1 \tag{6.24-a}$$

$$k_4 = \frac{2}{3} - \frac{2}{\pi^2} = -k_2$$

$$k_5 = \frac{1}{\pi^2}$$

Hier zeigt sich allein der Einfluß eines parabelförmigen Momentenverlaufs.

– 2. Sonderfall : Belastung durch Endmomente

(klassisches Verzweigungsproblem)

$\Rightarrow (EI_z)$; (\tilde{GI}_t) ; (EI_r) ; Moment = konstant

$$k_1 = 1 ; k_2 = -1 ; k_3 = 1 ; k_4 = 1 ; k_5 = 0 \tag{6.24-b}$$

Dieser Fall entspricht der in [4] angegebenen Lösung für das ideale Kippmoment M_{ki} .

6.5 Näherungsweise Ermittlung der Stabverdrehung nach Theorie II. Ordnung

Die Stabverdrehung ϑ_{II} nach Theorie II. Ordnung kann näherungsweise mit Hilfe der inhomogenen Differentialgleichung (6.2c) ermittelt werden. Diese Differentialgleichung (6.2c) muß hierfür noch etwas umgeformt werden und lautet dann mit der Beziehung (6.7) für den Ausdruck $r_{M,y}M_{yI}$ und unter Berücksichtigung der erweiterten Torsionssteifigkeit (6.5) und einer Vorverformung v_{0M} :

$$(\tilde{GI}_t)\vartheta'' + [(EI_r) - 2z_M M_{yI}]\vartheta' - M_{yI}v_M'' - p_z(z_A - z_M)\vartheta = -p_z(y_A + v_{0M}) \tag{6.25}$$

Die seitliche Verschiebung v_M ist eine unbekannte Verschiebung nach Theorie II. Ordnung für den Endzustand des Trägers, die durch die Vorverformung und die Belastung hervorgerufen wird. Es wird hier zunächst davon ausgegangen, daß diese Verschiebung bekannt ist, um den Lösungsweg aufzuzeigen. Näherungsweise wird ein sinusförmiger Verlauf entlang der Trägerachse angenommen :

$$v_M(\xi) = v_{M,m} f_v(\xi) \approx v_{M,m} \sin \pi \xi \tag{6.26}$$

Am Ende des Kapitels 6.5 wird in Gl.(6.35) angegeben, wie sich der Stich $v_{M,m}$ in Trägermitte näherungsweise ermitteln läßt. Der Verlauf der Vorverformung v_{0M} wird ebenfalls sinusförmig angenommen :

$$v_{0M}(\xi) = v_{0M,m} f_v(\xi) \approx v_{0M,m} \sin \pi \xi \tag{6.27}$$

Die Berücksichtigung der Gln. (6.26),(6.27) und deren Ableitungen in Gl. (6.25) ergibt, wenn alle bekannten Terme auf die rechte Seite gebracht werden, die folgende Gleichung :

$$(\tilde{G}\tilde{I}_t)\vartheta'' + \left[((EI_r) - 2z_M M_{yI})\vartheta' \right]' - p_z(z_A - z_M)\vartheta = M_{yI}v_{M,m}f_v''(\xi) - p_z(y_A + v_{0M,m}f_v(\xi)) \quad (6.28)$$

Gl.(6.28) ist nun eine Differentialgleichung für ϑ , die durch Anwendung des *Galerkin*-Verfahrens gelöst werden kann. Entlang der Balkenachse wird eine sinusförmig verlaufende Vorverdrehung ϑ_0 berücksichtigt, was auf folgenden Ansatz für die Gesamtverdrehung ϑ führt :

$$\vartheta(\xi) = (\vartheta_0 + \vartheta_1)f_\vartheta(\xi) \approx (\vartheta_0 + \vartheta_1)\sin \pi\xi \quad (6.29)$$

Bei Einsetzen des Verdrehungsansatzes (6.29) in die Dgl (6.25) wird davon ausgegangen, daß die Vorverformungen üblicherweise keine Anfangsspannungen im Träger hervorrufen. Dies bedeutet, daß keine Belastungsglieder, die aus dem Produkt von Steifigkeiten und Vorverformungen gebildet werden, in den Dgln auftreten. Unter diesem Gesichtspunkt wird das *Galerkin*-Verfahren mit dem Verdrehungsansatz nach Gl. (6.29) auf Gl. (6.28) angewendet und führt auf folgende Bestimmungsgleichung für ϑ_1 :

$$\int_0^1 \left[(\tilde{G}\tilde{I}_t)\vartheta_1 f_\vartheta'' + \left[((EI_r) - 2z_M M_{yI})\vartheta_1 f_\vartheta' \right]' - p_z(z_A - z_M)(\vartheta_0 + \vartheta_1)f_\vartheta \right] \sin(\pi\xi) \, d\xi = \int_0^1 \left[M_{yI}v_{M,m}f_v'' - p_z(y_A + v_{0M,m}f_v) \right] \sin(\pi\xi) \, d\xi \quad (6.30)$$

Unter Berücksichtigung der Näherungsansätze Gl.(6.26), (6.27) und (6.29) für die Verformungen und der allgemeinen Form der Ansätze Gl.(6.9) bis (6.12) für Momente, Steifigkeiten und Belastung ergibt die Auflösung der Gl. (6.30) nach dem Ansatzkoeffizienten ϑ_1 :

$$\vartheta_1 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{n_1 + n_2 + n_3} \quad (6.31)$$

mit den Termen

$$\begin{aligned} z_1 &= - \int_0^1 M_{yI}v_{M,m}f_v'' \sin(\pi\xi) \, d\xi = \frac{\pi^2}{1} \int_0^1 M_{yI}v_{M,m} \sin^2(\pi\xi) \, d\xi = \frac{4\pi^2}{1} \int_0^1 M_m v_{M,m} f_m(\xi) \sin^2(\pi\xi) \, d\xi \\ z_2 &= \int_0^1 p_z [y_A + v_{0M,m}f_v] \sin(\pi\xi) \, d\xi = \int_0^1 p_z(\xi) [y_A(\xi) + v_{0M,m} \sin(\pi\xi)] \sin(\pi\xi) \, d\xi \\ z_3 &= - \int_0^1 p_z(z_A - z_M)\vartheta_0 f_\vartheta \sin(\pi\xi) \, d\xi = - \int_0^1 p_z(\xi) [z_A(\xi) - z_M] \vartheta_0 \sin^2(\pi\xi) \, d\xi \\ n_1 &= - \int_0^1 (\tilde{G}\tilde{I}_t) f_\vartheta'' \sin(\pi\xi) \, d\xi = \frac{\pi^2}{1} \int_0^1 (\tilde{G}\tilde{I}_t) \sin^2(\pi\xi) \, d\xi = \frac{\pi^2}{1} \int_0^1 \left[(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 - \Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t) f_{St}(\xi) \right] \sin^2(\pi\xi) \, d\xi \\ n_2 &= - \int_0^1 \left[((EI_r) - 2z_M M_{yI}) f_\vartheta' \right]' \sin(\pi\xi) \, d\xi = - \int_0^1 \left[4 \left\{ (EI_r)_m f_r(\xi) - 2z_M M_m f_m(\xi) \right\} \frac{\pi}{1} \cos(\pi\xi) \right]' \sin(\pi\xi) \, d\xi \\ n_3 &= \int_0^1 p_z(z_A - z_M) f_\vartheta \sin(\pi\xi) \, d\xi = \int_0^1 p_z(\xi) [z_A(\xi) - z_M] \sin^2(\pi\xi) \, d\xi \end{aligned} \quad (6.31a-f)$$

In diese Ausdrücke z_i und n_i sind die sinusförmigen bzw. parabelförmigen Funktionsverläufe f_m , f_r und f_{St} nach den Gln. (6.9) bis (6.12) einzusetzen, dann zunächst die Differentiationen bei N_2 und anschließend die Integrationen auszuführen. Bei den Integralen, die einen Lastanteil mit einem Knick in Trägermitte enthalten, muß dabei in zwei Teilen von $0 \rightarrow \frac{1}{2}$ und von $\frac{1}{2} \rightarrow 1$ integriert und die Teilergebnisse müssen summiert werden.

Für die vier gewählten Fallgruppen ergeben sich dann folgende Werte :

Bindertyp BT-I :

$$z_1 = \frac{4\pi^2}{1} M_m v_{M,m} \int_0^1 (\xi - \xi^2) \sin^2(\pi\xi) d\xi = \frac{M_m}{1} v_{M,m} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) \quad (6.32a-I)$$

$$z_2 = p_z y_A l \int_0^1 \sin(\pi\xi) d\xi + p_z v_{0M,m} l \int_0^1 \sin^2(\pi\xi) d\xi = p_z l \left(\frac{2}{\pi} y_A + \frac{1}{2} v_{0M,m} \right) \quad (6.32b-I)$$

$$z_3 = -p_z (z_A - z_M) \vartheta_0 l \int_0^1 \sin^2(\pi\xi) d\xi = -\frac{1}{2} p_z l (z_A - z_M) \vartheta_0 \quad (6.32c-I)$$

$$n_1 = \frac{\pi^2}{1} \left[(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 \int_0^1 \sin^2(\pi\xi) d\xi - \Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t) \int_0^1 \sin^3(\pi\xi) d\xi \right] = \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{1} (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 \left[1 - \frac{\Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t)}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0} \frac{8}{3\pi} \right] \quad (6.32d-I)$$

$$n_2 = -4\pi [(EI_r)_m - 2z_M M_m] \int_0^1 [(\xi - \xi^2) \cos(\pi\xi)]' \sin(\pi\xi) d\xi = \frac{\pi^2}{1} [(EI_r)_m - 2z_M M_m] \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi^2} \right) \quad (6.32e-I)$$

$$n_3 = p_z l (z_A - z_M) \int_0^1 \sin^2(\pi\xi) d\xi = \frac{1}{2} p_z l (z_A - z_M) \quad (6.32f-I)$$

Bindertyp BT-II : z_1, z_2, z_3, n_2 und n_3 wie BT-I, n_1 wie BT-IV

Bindertyp BT-III : z_1, z_2, z_3, n_2 und n_3 wie BT-IV, n_1 wie BT-I

Bindertyp BT-IV :

$$z_1 = \frac{4\pi^2}{1} M_m v_{M,m} \left[\frac{M_{m,0}}{M_m} \int_0^1 (\xi - \xi^2) \sin^2(\pi\xi) d\xi + \frac{\Delta M_m}{M_m} \int_0^1 \left(\frac{3}{4} \xi - \xi^3 \right) \sin^2(\pi\xi) d\xi \right] \quad (6.32a-IV)$$

$$= \frac{M_m}{1} v_{M,m} \left[\frac{M_{m,0}}{M_m} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{3}{2} \right) \right]$$

$$z_2 = \int_0^{0,5} [p_{z,0} + 2\Delta p_z \xi] [y_A \sin(\pi\xi) + v_{0M,m} \sin^2(\pi\xi)] l d\xi + \int_{0,5}^1 [2p_{z,m} - p_{z,0} - 2\Delta p_z \xi] [y_A \sin(\pi\xi) + v_{0M,m} \sin^2(\pi\xi)] l d\xi \quad (6.32b-IV)$$

$$= p_{z,0} l \left(\frac{2}{\pi} y_A + \frac{1}{2} v_{0M,m} \right) + \Delta p_z l \left(\frac{4}{\pi^2} y_A + \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} \right) v_{0M,m} \right)$$

$$z_3 = - \int_0^{0,5} [p_{z,0} + 2\Delta p_z \xi] [z_{A,0} + 2\Delta z_A \xi - z_M] \vartheta_0 \sin^2(\pi\xi) l d\xi - \int_{0,5}^1 [2p_{z,m} - p_{z,0} - 2\Delta p_z \xi] [2z_{A,m} - z_{A,0} + 2\Delta z_A \xi - z_M] \vartheta_0 \sin^2(\pi\xi) l d\xi \quad (6.32c-IV)$$

$$= -\vartheta_0 l \left[\frac{1}{2} p_{z,0} (z_{A,0} - z_M) + \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} \right) [p_{z,0} \Delta z_A + \Delta p_z (z_{A,0} - z_M)] + \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{6} \right) \Delta p_z \Delta z_A \right]$$

$$n_1 = \frac{\pi^2}{1} \int_0^1 \left[(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 - \Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t)(1 - (2\xi - 1)^6) \right] \sin^2(\pi\xi) d\xi \quad (6.32d-IV)$$

$$= \frac{1}{2} \frac{\pi^2}{1} (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 \left[1 - \frac{\Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t)}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0} \left(\frac{6}{7} + \frac{6}{\pi^2} - \frac{120}{\pi^4} + \frac{720}{\pi^6} \right) \right]$$

$$n_2 = - \int_0^1 \left[4 \left\{ (EI_r)_m (\xi - \xi^2) - 2z_M \left[M_{m,0} (\xi - \xi^2) + \Delta M_m \left(\frac{3}{4} \xi - \xi^3 \right) \right] \right\} \frac{\pi}{1} \cos(\pi\xi) \right]' \sin(\pi\xi) \text{Id}\xi \quad (6.32e-IV)$$

$$= \frac{\pi^2}{1} \left[(EI_r)_m \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi^2} \right) - 2z_M M_m \left\{ \frac{M_{m,0}}{M_m} \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{\pi^2} \right) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{1}{4} - \frac{3}{2\pi^2} \right) \right\} \right]$$

$$n_3 = \int_0^{0,5} [p_{z,0} + 2\Delta p_z \xi] [z_{A,0} + 2\Delta z_A \xi - z_M] \sin^2(\pi\xi) \text{Id}\xi + \int_{0,5}^1 [2p_{z,m} - p_{z,0} - 2\Delta p_z \xi] [2z_{A,m} - z_{A,0} + 2\Delta z_A \xi - z_M] \sin^2(\pi\xi) \text{Id}\xi \quad (6.32f-IV)$$

$$= 1 \left[\frac{1}{2} p_{z,0} (z_{A,0} - z_M) + \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{4} \right) [p_{z,0} \Delta z_A + \Delta p_z (z_{A,0} - z_M)] + \left(\frac{1}{\pi^2} + \frac{1}{6} \right) \Delta p_z \Delta z_A \right]$$

Mit diesen Ausdrücken kann nun die Verdrehung ϑ_1 in der Form

$$\vartheta_1 = \frac{z_1 + z_2 + z_3}{n_1 + n_2 + n_3} \quad (6.33)$$

berechnet werden. Diese berechnete Verdrehung ϑ_1 gibt näherungsweise die zusätzliche Verdrehung nach Theorie II. Ordnung infolge einer Vorverformung v_{0M} und ϑ_{0M} an.

Bei Vernachlässigung der Lastexzentrizität y_A in (6.32b) ergeben sich für die Zähler- und Nennerausdrücke der vier Binderklassen :

Bindertyp BT-I :

$$z_1 + z_2 + z_3 = M_m v_{M,m} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) + \frac{1}{2} p_z l^2 (v_{0M,m} - (z_A - z_M) \vartheta_0) \quad (6.33z-I)$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = \frac{\pi^2}{2} (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 \left(1 - \frac{8}{3\pi} \frac{\Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t)}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0} \right) + [(EI_r)_m - 2z_M M_m] \left[\frac{\pi^2}{3} - 1 \right] + \frac{1}{2} p_z l^2 (z_A - z_M) \quad (6.33n-I)$$

Bindertyp BT-II :

$z_1 + z_2 + z_3$ wie bei BT-I

$$n_1 + n_2 + n_3 = \frac{\pi^2}{2} (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 \left(1 - \left(\frac{6}{7} + \frac{6}{\pi^2} - \frac{120}{\pi^4} + \frac{720}{\pi^6} \right) \frac{\Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t)}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0} \right) + [(EI_r)_m - 2z_M M_m] \left[\frac{\pi^2}{3} - 1 \right] + \frac{1}{2} p_z l^2 (z_A - z_M) \quad (6.33n-II)$$

Bindertyp BT-III :

$$z_1 + z_2 + z_3 = M_m v_{M,m} \left[\frac{M_{m,0}}{M_m} \left(\frac{\pi^2}{3} + 1 \right) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{\pi^2}{4} + \frac{3}{2} \right) \right] + p_{z,0} l^2 v_{0M,m} \left[\frac{1}{2} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \frac{\pi^2 + 4}{4 \pi^2} \right] - \quad (6.33z-III)$$

$$p_{z,0} l^2 (z_{A,0} - z_M) \vartheta_0 \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \right) \frac{\pi^2 + 4}{4 \pi^2} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} \frac{\pi^2 + 6}{6 \pi^2} \right]$$

$$n_1 + n_2 + n_3 = \frac{\pi^2}{2} (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 \left(1 - \frac{8}{3\pi} \frac{\Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t)}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0} \right) + (EI_r)_m \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) -$$

$$2 z_M M_m \left[\frac{M_{m,0}}{M_m} \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2} \right) \right] + \quad (6.33n-III)$$

$$p_{z,0} l^2 (z_{A,0} - z_M) \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \right) \frac{\pi^2 + 4}{4 \pi^2} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} \frac{\pi^2 + 6}{6 \pi^2} \right]$$

Bindertyp BT-IV :

$z_1 + z_2 + z_3$ wie bei BT-III

$$n_1 + n_2 + n_3 = \frac{\pi^2}{2} (\tilde{G}\tilde{I}_t)_0 \left(1 - \left(\frac{6}{7} + \frac{6}{\pi^2} - \frac{120}{\pi^4} + \frac{720}{\pi^6} \right) \frac{\Delta(\tilde{G}\tilde{I}_t)}{(\tilde{G}\tilde{I}_t)_0} \right) + (EI_r)_m \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) -$$

$$2 z_M M_m \left[\frac{M_{m,0}}{M_m} \left(\frac{\pi^2}{3} - 1 \right) + \frac{\Delta M_m}{M_m} \left(\frac{\pi^2}{4} - \frac{3}{2} \right) \right] + \quad (6.33n-IV)$$

$$p_{z,0} l^2 (z_{A,0} - z_M) \left[\frac{1}{2} + \left(\frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \right) \frac{\pi^2 + 4}{4 \pi^2} + \frac{\Delta p_z}{p_{z,0}} \frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} \frac{\pi^2 + 6}{6 \pi^2} \right]$$

In diesen Ausdrücken ist die Verschiebung $v_{M,m}$ im Zählerterm als einzige Größe noch unbekannt.

Zur näherungsweisen Ermittlung dieser Verschiebung wird die Lösung des Verzweigungsproblems (homogener Teil der Dgl (6.8)) , die in der Gl. (6.22) mit den Faktoren k_1 bis k_5 der Gl. (6.23) vorliegt, zu Hilfe genommen. Die erforderlichen belastungsabhängigen Querschnittswerte sind dabei für mit entsprechenden Sicherheitsbeiwerten γ multiplizierte Last- und Werkstoffgrößen zu ermitteln, wobei die Tangentenmoduln der Werkstoffe zu berücksichtigen sind (s. Kap. 3). Mit dem nach Gl.(6.22) so berechneten Moment $M_{m,kr}$ und dem Lastmoment wird der Beiwert η_{kr} aus der Beziehung

$$\eta_{kr} = \frac{M_{m,kr}}{\gamma M_{yI}} \geq 1 \quad (6.34)$$

ermittelt. Der Beiwert η_{kr} gibt also bei vorgegebener γ -facher Belastung und damit berechneten Steifigkeiten an, welche zusätzliche Sicherheit gegen das Erreichen der Verzweigungslast, die als Lösung der homogenen Differentialgleichung nach (6.22) bestimmt wird, noch vorhanden ist.

In Anlehnung an *Stüssi*[15] und *Vianello*[17] kann ein Näherungswert für die seitliche Verschiebung $v_{M,m}$ nach Theorie II. Ordnung in Abhängigkeit von der angesetzten Vorverformung $v_{0M,m}$ und dem Beiwert η_{kr} ermittelt werden :

$$v_{M,m} = v_{0M,m} \frac{\eta_{kr}^2}{\eta_{kr}^2 - 1} \quad (6.35)$$

Wird dieser Wert in die Zählerterme z_1 der Gln.(6.33) eingesetzt, so kann je nach Typklasse die Verdrehung ϑ_1 berechnet werden. Die gesamte Verdrehung ϑ_{II} , bezogen auf die ideal gerade, unverformte Längsachse, ergibt sich aus der Summe von ϑ_{0M} und ϑ_1 :

$$\vartheta_{II} = \vartheta_1 + \vartheta_{0M} \quad (6.36)$$

6.6 Näherungsweise Ermittlung des Torsionsmoments an der Gabel

Außer dem Nachweis der Kippstabilität für den Träger ist das auftretende Torsionsmoment am Gabellager von besonderem Interesse. Mit dem ermittelten Torsionsmoment muß nämlich die Gabel bemessen werden. Dabei muß die Gabel so konstruiert werden, daß dieses Torsionsmoment ohne nennenswerte Verformungen aufgenommen werden kann, um die üblicherweise getroffene Voraussetzung einer starren Lagerung zu erfüllen. Da diese Gabellagerung zudem häufig an Stützenköpfen zu finden ist, greift das Torsionsmoment der Gabel als Biegemoment am Stützenkopf an und ist von dort noch in die Fundamente weiterzuleiten.

Näherungsweise kann das Torsionsmoment M_t an der Gabel aus der Belastung und der Verschiebung berechnet werden. Für eine Streckenlast p_z und eine Verschiebung v_p des Lastangriffspunktes gilt:

$$M_t = \int_0^{0,5} p_z(\xi) v_p(\xi) l d\xi \quad (6.37)$$

Die Verschiebung v_p setzt sich aus der Vorverformung und den zusätzlichen Verformungen nach Theorie II. Ordnung zusammen und wird über die Trägerlänge mit sinusförmigem Verlauf analog den Gln. (6.26), (6.27) und (6.9a) angenommen:

$$v_p(\xi) = \left[v_{0M,m} - (z_A(\xi) - z_M) \vartheta_0 + v_{M,m} - (z_A(\xi) - z_M) \vartheta_1 \right] \sin \pi \xi \quad (6.38)$$

Gl. (6.38) in (6.37) eingesetzt, liefert mit den Gl.(6.9) für p_z und z_A nach Integration das Torsionsmoment M_t :

$$M_t = p_{z,0} \frac{1}{\pi} \left[v_{0M,m} \left(1 + \frac{\eta_{kr}^2}{\eta_{kr}^2 - 1} \right) - (z_{A,0} - z_M) \left(1 + \frac{2}{\pi} \frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} \right) \vartheta_{II} \right] + \Delta p_z \frac{2l}{\pi} \left[v_{0M,m} \left(1 + \frac{\eta_{kr}^2}{\eta_{kr}^2 - 1} \right) - (z_{A,0} - z_M) \left(1 + \frac{2\pi - 4}{\pi} \frac{\Delta z_A}{z_{A,0} - z_M} \right) \vartheta_{II} \right] \quad (6.39)$$

Dabei ist der Näherungswert für die Verschiebung $v_{M,m}$ nach Gl.(6.35) bereits eingesetzt. Die Verdrehung ϑ_{II} wird mit Gl.(6.36) ermittelt.

6.7 Ablauf des Näherungsverfahrens zur Ermittlung der Kippstabilität

Wie in Kap. 6.1 beschrieben, läßt sich der Nachweis der Kippstabilität im wesentlichen auf einen Nachweis der Bruchsicherheit für zweiachsige Biegung zurückführen. Die Aufgabe besteht also darin, für ein bekanntes Hauptbiegemoment und für eine vorgegebene Imperfektion zunächst ein Nebenbiegemoment zu bestimmen und anschließend mit beiden Biegemomenten einen Bruchsicherheitsnachweis zu führen.

Die vereinfachte Differentialgleichung (6.2b) gibt eine Beziehung zwischen dem seitlichen Biegemoment M_z , dem Hauptbiegemoment M_y und der Verdrehung ϑ an. Näherungsweise gilt danach für den verformten Zustand (siehe Gl.(6.3)):

$$M_{zII} = - M_{yII} \vartheta_{II} \quad (6.40)$$

Die Verdrehung ϑ_{II} ist im vorherigen Kapitel in Gl.(6.36) bestimmt worden.

Für die hier behandelten, vorwiegend auf Biegung in der Hauptebene beanspruchten Träger kann mit sehr guter Näherung angenommen werden, daß das Hauptbiegemoment M_{yII} nach Theorie II. Ordnung etwa dem nach Theorie I. Ordnung entspricht:

$$M_{yII} \approx M_{yI} \quad (6.41)$$

Mit den Beziehungen (6.40) und (6.41) sind die Biegemomente nach Theorie II. Ordnung näherungsweise bekannt. Mit diesen beiden Momenten wird das resultierende Moment aus der Belastung $resM$ gebildet:

$$resM = \sqrt{M_{yII}^2 + M_{zII}^2} \approx M_{yI} \sqrt{1 + \vartheta_{II}^2} \quad (6.42)$$

Mit diesen Biegemomenten muß dann ein Bruchsicherheitsnachweis für zweiachsige Biegung geführt werden. Für das rechnerische Bruchmoment M_u muß dann gelten:

$$M_u \geq resM \quad \text{oder} \quad \gamma_u = \frac{M_u}{resM} \geq 1 \quad (6.43)$$

Wird die Bedingung (6.43) nicht erfüllt, ist die Belastung, ausgedrückt durch das Biegemoment M_{yI} , zu groß und müßte verkleinert werden, um die geforderten Vorgaben für die Vorverformungen und Sicherheitsbeiwerte zu gewährleisten.

Wenn mit diesem Näherungsverfahren das größtmögliche kritische Lastmoment $M_{y,kr}$ für einen gegebenen Querschnitt bestimmt werden soll, so ist dies nur auf iterativem Wege durch eine Varia-

tion des Moments M_{yI} möglich. Es wird ein Moment M_{yI} vorgegeben, für das die erforderlichen Querschnittswerte und Steifigkeiten zur Berechnung von $M_{m,kr}$ nach (6.22) ermittelt werden. Mit $M_{m,kr}$ wird η_{kr} nach (6.34), dann $v_{M,m}$ nach (6.35) und ϑ_{II} nach (6.36) mit (6.33) bestimmt. Über die Beziehungen (6.40), (6.41) und (6.42) ergeben sich die Biegemomente, mit denen der Bruchsicherheitsnachweis (6.43) zu führen ist. Das größte Moment $M_{y,kr}$ ist bestimmt, wenn nach (6.43) $M_u = resM$, also $\gamma_u = 1$, gilt :

$$M_u = \sqrt{M_{y,kr}^2 + \vartheta_{II}^2 M_{y,kr}^2} = M_{y,kr} \sqrt{1 + \vartheta_{II}^2} \quad (6.44)$$

Das zulässige Moment ergibt sich aus dem Moment $M_{y,kr}$ bei Berücksichtigung der beiden Anteile von ständiger Last g und Verkehrslast p zu

$$zul M_y^p = \frac{M_{y,kr} - \gamma_g M_y^g}{\gamma_p} \quad (6.45)$$

6.8 Besonderheiten beim Satteldachbinder

Die in den beiden folgenden Unterkapiteln beschriebene Vorgehensweise ist das Ergebnis einer Vielzahl von Vergleichsberechnungen an den etwa 50 Stahlbeton- und Spannbetonträgern, die bereits im Rahmen der Voruntersuchungen (s. Kap. 6.3) verwendet worden sind. Die damit erzielten Ergebnisse des Näherungsverfahrens liegen bei einem Vergleich mit den Ergebnissen des genauen Berechnungsverfahrens in allen Fällen auf der sicheren Seite.

6.8.1 Lage des Berechnungsquerschnittes

Die Berechnungen sind an der Stelle der maximalen Biegebeanspruchung des Trägers durchzuführen. Während beim Parallelgurtbinder diese Stelle mit der Trägermitte zusammenfällt, liegt beim Satteldachbinder dieser kritische Schnitt nicht mehr im Mittelquerschnitt, sondern ist je nach Obergurtneigung und Querschnittsform ein Stück davon entfernt. Die Bestimmung des kritischen Schnittes x_{krit} erfolgt in genügender Genauigkeit mit der Formel

$$x_{krit} = \frac{1}{2}(1 - \rho) \quad \text{mit} \quad \rho = a - \sqrt{a^2 - 1} \quad (6.46)$$

und $a = \frac{h_m}{h_m - h_0}$,

was mit den Ergebnissen des genauen Rechenprogramms [8] überprüft worden ist. Obwohl in die Berechnungsformeln des Näherungsverfahrens die Werte am Auflager (Index 0) und in Trägermitte (Index m) eingehen,

hat es sich beim Satteldachbinder als sinnvoll herausgestellt, **nicht** die Steifigkeitswerte des Mittelquerschnittes sondern die des kritischen Schnittes heranzuziehen. Die Biege-Steifigkeitswerte haben dort ein Minimum und steigen in Richtung Trägermitte wieder an (vergl. Bilder 9b und 10b). Die Ermittlung von kritischem Moment $M_{m,kr}$, Beiwert η_{kr} und Verdrehung ϑ_{II} erfolgt jedoch mit den abgeleiteten Formeln in Trägermitte. Der anschließende Bruchsicherheitsnachweis ist wieder im kritischen Schnitt zu führen. Die Biegemomente sind hierfür mit den Gl.(6.9) entsprechend umzurechnen. Die Beispiele in Kap. 6.9 verdeutlichen die eben kurz beschriebene Vorgehensweise.

6.8.2 Wahl der Bezugslinie

Die Gleichungen des Näherungsverfahrens sind für die elastische Schwerlinie als Bezugslinie hergeleitet worden. Wie im Kap. 6.3 beschrieben, verlaufen bei allen berechneten Bindern die elastische Schwerlinie und die Schubmittelpunktlinie etwa parallel zur Trägeroberkante. Während bei Parallelgurtbindern damit die elastische Schwerlinie in konstantem Abstand parallel zur x-Achse liegt, ergibt sich beim Satteldachbinder durch die unterschiedliche Querschnittshöhe ein näherungsweise linear veränderlicher Verlauf mit einem Knick in der Trägermitte, wie im Bild 8 dargestellt.

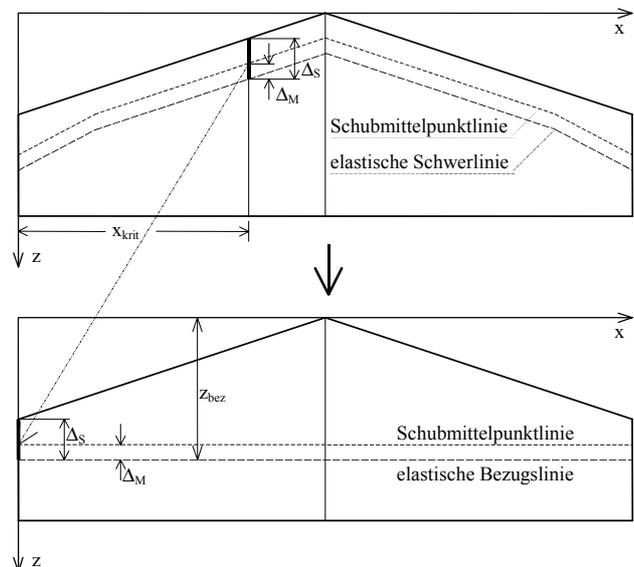


Bild 8 : Schematische Darstellung der Bezugslinien beim Satteldachbinder

Fig. 8 : Sketch of reference axis for saddle shaped girder

Bei genaueren Verfahren führt die Berücksichtigung dieser Gegebenheit beim Aufstellen und Lösen der Differentialgleichungen zu umfangreichen Berechnungsschritten, was bei einem

einfachen Näherungsverfahren natürlich nicht möglich ist. Für ein Näherungsverfahren ist es aber nicht so sehr entscheidend, alle Einzelheiten exakt zu erfassen. Viel wesentlicher ist, durch mechanisch sinnvolle Vereinfachungen die Wirkungsweise aller maßgebenden Komponenten in ihrer Gesamtheit so zu berücksichtigen, daß die Ergebnisse zuverlässig sind und in jedem Fall auf der sicheren Seite liegen. Aufgrund eigener Vergleichsberechnungen und auch aufgrund des Literaturstudiums [44] bis [48] erscheint es deshalb sinnvoll, beim Satteldachbinder ebenfalls mit einer ortsfesten, geraden Bezugslinie vom Trägeranfang bis zum Trägerende als elastischer Schwerlinie zu rechnen. Deren Lage ist dann so zu bestimmen, daß die dadurch entstehenden Abstände des Schubmittelpunkts und des Lastangriffspunkts auf das Ergebnis die richtige Wirkung entfalten. Auf das Kippverhalten eines Trägers haben oberhalb des Schubmittelpunkts liegende, wie normalerweise auf dem Obergurt eines Trägers angreifende Lasten, bekanntlich einen ungünstigen Einfluß, der sich mit zur Mitte hin zunehmenden Abständen wie beim Satteldachbinder noch verstärkt. Da voraussetzungsgemäß der Schubmittelpunkt als Drillruhepunkt gilt, wird der Abstand der Last auf den Schubmittelpunkt bezogen. Dies bedeutet für die Berechnung, daß der Schubmittelpunktsabstand z_M konstant zur elastischen Schwerlinie und somit ebenfalls parallel zur Bezugslinie angesetzt wird, um die volle „abtreibende“ Wirkung eines Lastangriffs auf dem Obergurt zu erfassen. Zum besseren Verständnis ist diese Vorgehensweise im Bild 8 dargestellt. Der linear veränderliche Verlauf von elastischer Schwerlinie und Schubmittelpunktlinie etwa parallel zur Trägeroberkante, was bezüglich dieser Linien eigentlich eine konstante Lastangriffslinie zur Folge hat, wird also ersetzt durch einen konstanten Verlauf von elastischer Schwerlinie und Schubmittelpunktlinie mit einer linear veränderlichen Lastangriffslinie. Als Berechnungswerte für den elastischen Schwerpunkt und den Schubmittelpunkt werden die Abstände im kritischen Schnitt herangezogen.

6.9 Anwendung des Näherungsverfahrens

Die Qualität einer Stabilitätsuntersuchung hängt ganz entscheidend von der richtigen Ermittlung der erforderlichen Steifigkeiten ab. Dabei ist der Ansatz wirklichkeitsnaher Werkstoffbeziehungen von wesentlicher Bedeutung. Die wichtigsten Dinge zum Werkstoffverhalten für die Berechnung der Steifigkeiten sind bereits in den Kap. 3 und A3 und in [27] ausführlich dargestellt worden, worauf hier verwiesen wird. Obwohl die Berechnung der für das Näherungsverfahren erforderlichen Steifig-

keiten und Querschnittswerte sehr wichtig ist, werden nur die mit dem für das Näherungsverfahren entwickelten Rechenprogramm [50] ermittelten Zahlenwerte angegeben, da hier die Qualität des abgeleiteten Näherungsverfahrens und nicht die Ermittlung von Querschnittswerten im Vordergrund steht.

Die folgenden vier Beispiele entsprechen denen in [38] und [49] und werden hier ebenfalls für die beiden Sicherheitskonzepte globaler und geteilter Sicherheitsbeiwerte berechnet. Dabei werden für globale Sicherheitsbeiwerte auf der Lastseite für die ständige Last $\gamma_g = 1,75$ und die Verkehrslast $\gamma_p = 1,75$ und auf der Werkstoffseite für den Beton $\gamma_b = 1,0$ und für die Bewehrungen $\gamma_s = 1,0$, sowie für Teilsicherheitsbeiwerte auf der Lastseite $\gamma_g = 1,35$ und $\gamma_p = 1,5$ und auf der Werkstoffseite $\gamma_b = 1,2$ und $\gamma_s = 1,15$ angesetzt. Der Berechnungsablauf für einen gegebenen Lastfall soll noch einmal kurz beschrieben werden. Mit dem aus der Belastung bekannten einachsigen Biegemomentenverlauf ist zuerst im kritischen Schnitt eine Querschnittsanalyse durchzuführen. Dann ist zu entscheiden, ob ein parabel- oder sinusförmiger Steifigkeitsverlauf angenommen wird. Um die z.T. erheblichen Unterschiede in den Ergebnissen der beiden Approximationsmöglichkeiten aufzuzeigen, werden bei den Beispielen die Formeln für beide Approximationskurven ausgewertet. Mit den ermittelten Querschnittswerten sind dann nacheinander die k -Werte nach (6.23), das kritische Moment $M_{m,kr}$ nach (6.22), der Beiwert η_{kr} nach (6.34), die z_i - und n_i -Werte nach (6.32), die Verdrehungen ϑ_I nach (6.33) und ϑ_{II} nach (6.36) und schließlich das Nebenbiegemoment $M_{z,II}$ nach (6.40) zu bestimmen. Anschließend ist der Bruch-sicherheitsnachweis für zweiachsige Biegung nach (6.43) zu führen. Damit ist näherungsweise das Kippverhalten des untersuchten Trägers ermittelt. Zusätzlich werden für alle vier Beispiele auch die Ergebnisse der in Kap.6.7 angesprochenen Möglichkeit zur Bestimmung der maximalen Last zusammengestellt. Der erforderliche Iterationsablauf sieht so aus, daß die vorstehend beschriebenen Berechnungsschritte des Einzelnachweises immer wieder durchlaufen werden, wobei das Biegemoment für die Querschnittsanalyse solange verändert wird, bis die Bruch-sicherheit nach (6.43) eins beträgt. Die Ergebnisse aller Berechnungen sind in Tabellenform getrennt nach dem vorhandenen Lastfall und nach der Iteration der Maximallast zusammengestellt. In beiden Tabellen sind zum Vergleich auch die Ergebnisse einer Berechnung mit dem genauen Verfahren [8] angegeben.

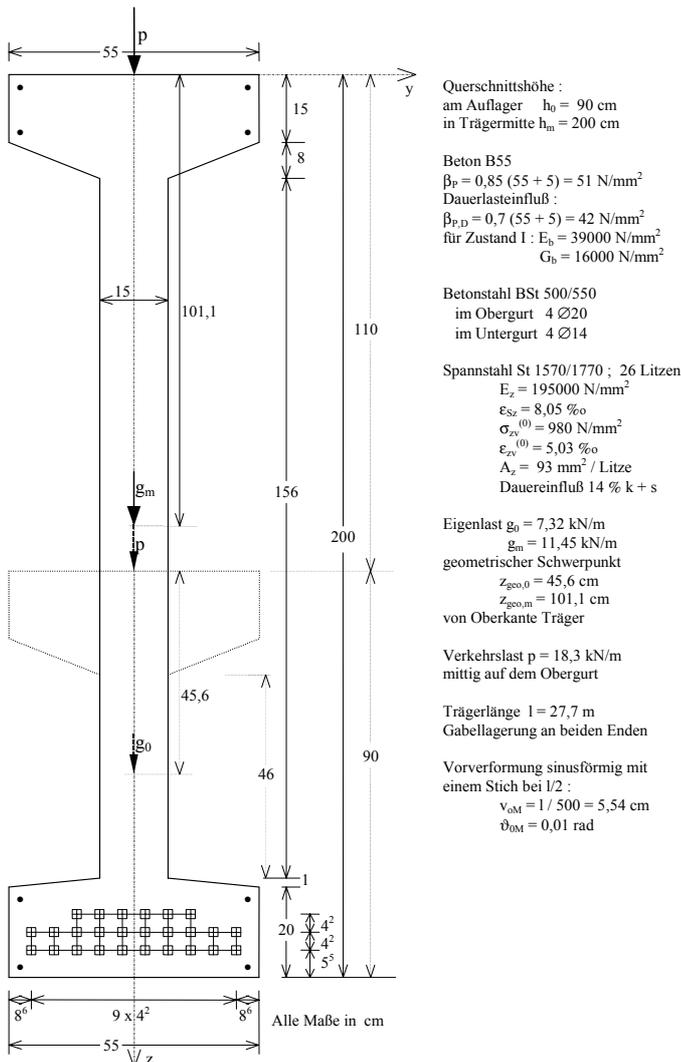
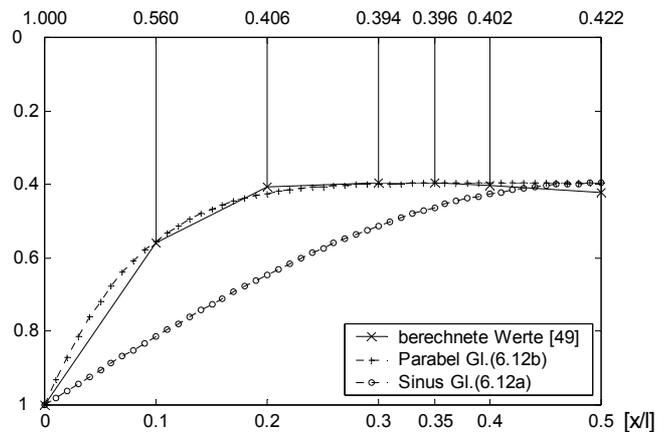


Bild 9a : Vorgespannter Satteldachbinder, Beispiel 1
 Fig. 9a : Prestressed saddle shaped girder, example 1

Verlauf der normierten Biegesteifigkeit $(EI_z)/(EI_z)_0$



Verlauf der normierten Torsionssteifigkeit $(GI_t)/(GI_t)_0$

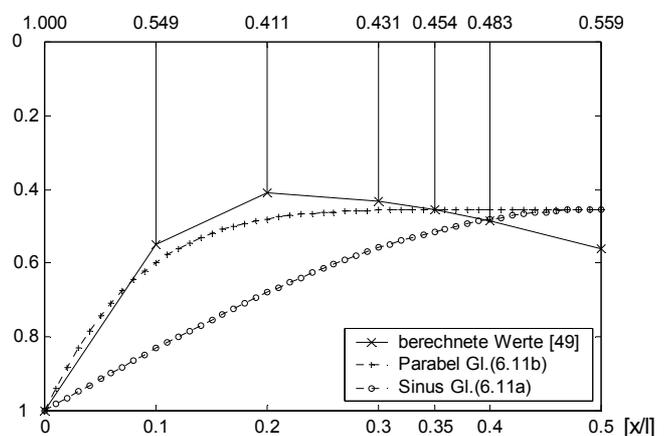


Bild 9b : Tangentensteifigkeiten für Satteldachbinder 1
 Fig. 9b : Tangent stiffnesses of saddle shaped girder 1

6.9.1 Ausgewählte Beispiele von Satteldachbindern

6.9.1.1 Vorgespannter Satteldachbinder Beispiel 1

Im Bild 9a ist der Querschnitt eines Satteldachbinders mit allen Werkstoff-, Belastungs- und Imperfektionsangaben dargestellt. Aufgrund dieser Angaben liegt der kritische Schnitt nach Gl.(6.46) mit $a = 1,82$ und $\rho = 0,3$ bei $x_{krit} = 9,70$ m ($\xi_{krit} = 0,35$). Bild 9b zeigt die Steifigkeitsverläufe mit den entsprechenden parabel- oder sinusförmigen Approximationen. Es ist klar erkennbar, daß die parabelförmige Approximation eine optimale Näherungslösung bietet.

Die Zahlenwerte für die Berechnung des vorhandenen Lastfalls sind in der Tabelle 2a zusammengestellt.

In allen vier Fällen ergibt sich eine ausreichende Bruchsicherheit $\gamma_u > 1$, wobei jedoch bei den mit der sinusförmigen Approximation erzielten Ergebnissen Vorsicht geboten ist. Sie zeigen nämlich noch Tragreserven an, die in Wirklichkeit nicht vorhanden sind, wie ein Vergleich der Ergebnissen in Tabelle 2b zeigt.

Die Zahlenwerte des letzten Iterationsschrittes bei der Bestimmung der größtmöglichen Last nach dem Näherungsverfahren sind in der Tabelle 2b angegeben und werden mit den Ergebnissen des genauen Verfahrens verglichen. Für globale Sicherheitsbeiwerte ermittelt das Rechenprogramm nach Theorie II. Ordnung [8] eine zulässige Gleichlast auf dem Obergurt von $p = 20,2$ kN/m. Der Träger versagt dabei rechnerisch infolge divergierender Verformungen,

Beispiel 1 : Satteldachbinder Bild 9 - Berechnung gegebener Lastfall										
Dimensionen in m und kN	Globale Sicherheitsbeiwerte					Teilsicherheitsbeiwerte				
	$\gamma_b=1,0$	$\gamma_s=1,0$	$\gamma_g=1,75$	$\gamma_p=1,75$		$\gamma_b=1,2$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_g=1,35$	$\gamma_p=1,5$	
Werkstoffkenngrößen	$\beta_R = 33000$	$\beta_{Ss} = 500000$	$\beta_{Sv} = 1570000$			$\beta_R = 27500$	$\beta_{Ss} = 435000$	$\beta_{Sv} = 1365000$		
Steifigkeiten Zustand I	$(EI_z)_0 = 232541$	$(GI_t)_0 = 44577$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 44850$			$(EI_z)_0 = 198224$	$(GI_t)_0 = 37148$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 37418$		
Belastung des Trägers und Momente in Trägermitte $\xi = 0,5$ aus Eigenlast $g_0 = 7,32$ und $\Delta g = 4,13$: $M_{m,0} = 702,55$ $\Delta M = 263,75$ $M_{m,g} = 966,30$ aus Verkehrslast $p_0 = 18,3$ und $\Delta p_z = 0$: $M_{m,0} = 1755,20$ $\Delta M = 0$ $M_{m,p} = 1755,20$										
γ -fache Momente (g+p)	$M_{m,0} = 4301,0$	$\Delta M = 461,6$	$M_m = 4762,6$			$M_{m,0} = 3581,2$	$\Delta M = 356,1$	$M_m = 3937,3$		
Querschnittswerte im kritischen Schnitt $\xi = 0,35$										
M_{yI} (γ -fach)	4319,4					3571,7				
$(EI_z)_m$ ($\tilde{GI}_t)_m$ $(EI_t)_m$	92141	20237	92			84912	19392	-98		
z_S z_M bez. auf S	+0,336	von OK		+0,070	von S	+0,398	von OK		+0,041	von S
Vorwerte für FormelAuswertung										
Bezugslinie z_{bez}	1,10 + 0,336 = 1,436					1,10 + 0,398 = 1,498				
für g : $z_{A,0}$ Δz_A	+0,12	-0,545				+0,058	-0,545			
$\gamma_g g_0$ $\gamma_g \Delta g$	12,81	7,23				9,88	5,58			
für p : $z_{A,0}$ Δz_A	-0,336	-1,10				-0,398	-1,10			
$\gamma_p p_0$ $\gamma_p \Delta p_z$	32,025	0				27,45	0			
$M_{m,0}/M_m$ $\Delta M/M_m$	0,9031	0,0969				0,9096	0,0904			
$\frac{\Delta(EI_z)_m}{(EI_z)_0}$ $\frac{\Delta(\tilde{GI}_t)_m}{(\tilde{GI}_t)_0}$	0,6038	0,5488				0,5716	0,4818			
Approximation der Steifigkeitsverläufe										
	Parabel BT - IV		Sinus BT - III		Parabel BT - IV		Sinus BT - III			
k_1 k_2 (6.23a-b)	1,2967	-0,1463	1,2967	-0,1241	1,2958	-0,1626	1,2958	-0,1420		
k_3 k_4 (6.23c-d)	0,1887	0,1583	0,2702	0,1409	0,2320	0,1746	0,3124	0,1581		
k_{5p} k_{5g} (6.23e)	0,1186	-0,3887	0,1378	-0,4374	0,1216	-1,4081	0,1390	-1,5692		
c_1 c (6.22b,a)	-0,0030	1,4134	-0,0025	1,7254	-0,0020	1,5793	-0,0018	1,8603		
$M_{m,kr}$ (6.22) η_{kr} (6.34)	5211	1,094	6361	1,335	4910	1,247	5784	1,469		
$v_{M,m}$ (6.35)	0,337		0,126		0,155		0,103			
z_1 z_2 z_3 (6.32a-c)	246,7	38,30	6,08		94,0	31,7	5,3		62,5	31,7
n_1 n_2 n_3 (6.32d-f)	3684,0	-44,2	-607,8		4268,2	-44,2	-607,8		3940,1	-33,7
ϑ_I (6.33) ϑ_{II} (6.36)	0,096	0,106	0,038	0,048	0,045	0,055	0,0295	0,0395		
M_t (6.39)	209		96		93		70			
Bruchsicherheitsnachweis im kritischen Schnitt $\xi = 0,35$ [$\sin(\pi\xi) = 0,891$ $M_z = \vartheta_{II} \sin(\pi\xi) M_{y,I}$]										
M_{yI} M_z $resM$	4319,4	408	4339		4319,4	185	4324		3571,7	126
ϵ_{bu} ϵ_{zu} Nulllinienwinkel	-3,5	+4,0	76°		-3,4	+5	59°		-3,5	+4,7
M_u $\gamma_u = M_u / resM$	4395	1,013			5625	1,3			5025	1,41
Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung mit dem Rechenprogramm [8]										
$v_{M,m}$ ϑ_I M_t		0,151	0,029	78,5		0,098	0,0185	50		

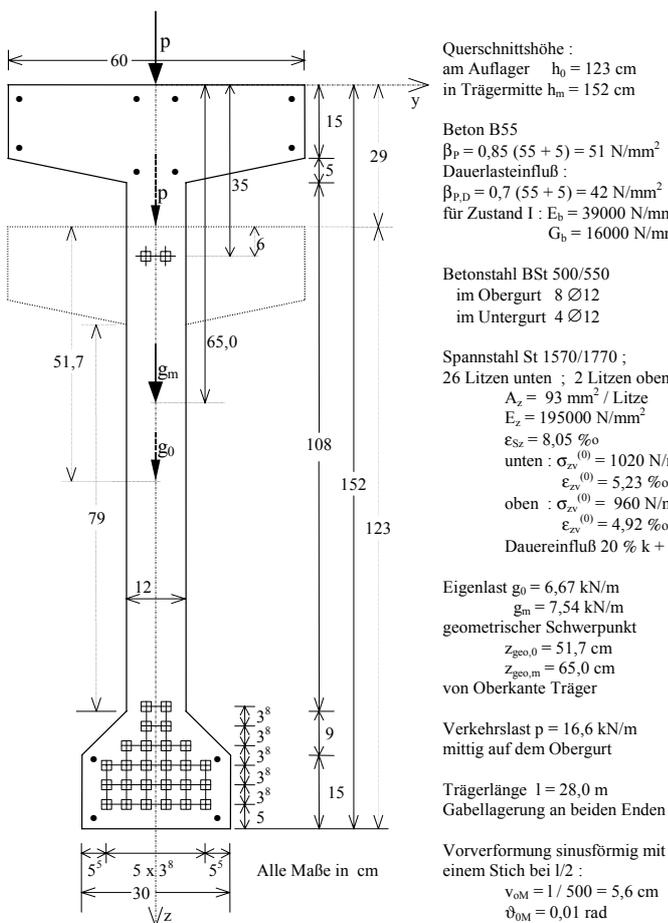
Tabelle 2a : Zusammenstellung der Ergebnisse der Zahlenrechnung für Beispiel 1– vorhandene Last
 Table 2a : Results of numeric example 1 – existing load

d.h. die berechneten Verschiebungen werden größer als $l/50$, bzw. die Verdrehungen größer als 0,1 rad. Bei diesem Beispiel ist also nicht das Versagen des Werkstoffs die Ursache für das Stabilitätsversagen, sondern der Träger verliert seine Tragfähigkeit durch einen Steifigkeitsabfall. Im letzten stabilen Gleichgewichtszustand liegt die berechnete horizontale Verschiebung mit 0,29 m geringfügig über dem Wert $l/100$. Die Verdrehung bleibt mit etwa 0,06 rad unter dem Grenzwert von 0,1 rad. Ein Vergleich der iterierten zulässigen Gleichlast auf dem Obergurt zwischen Näherungsverfahren und genauem Verfahren nach Theorie II. Ordnung zeigt, daß das Näherungsverfahren ein auf der sicheren Seite liegendes Ergebnis liefert, wenn ein parabelförmiger Steifigkeitsverlauf angesetzt wird (zul $p_{par} = 18,35 < \text{zul } p_{TheoII} = 20,2$ kN/m). Wird dagegen beim Näherungsverfahren ein sinusförmiger Steifigkeitsverlauf angenommen, so wird eine größere zulässige Last als nach dem genauen Verfahren ermittelt (zul $p_{sin} = 21,6 > \text{zul } p_{TheoII} = 20,2$ kN/m). Auch bei der Berechnung mit Teilsicherheitsbeiwerten liegt der sinusförmige Steifigkeitsansatz auf der unsicheren Seite (zul $p_{par} = 20,5 < \text{zul } p_{TheoII} = 22,6 < \text{zul } p_{sin} = 23,2$ kN/m).

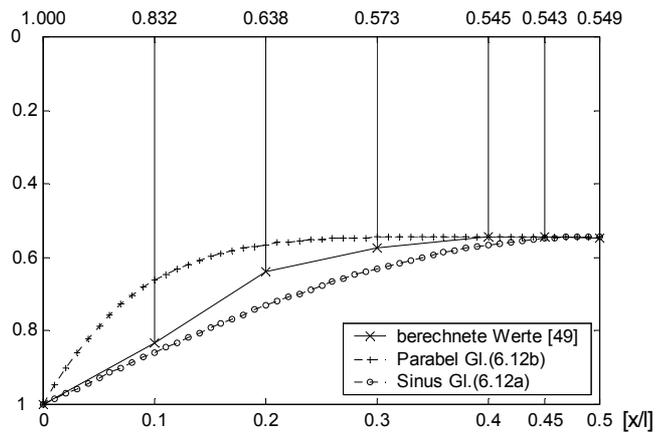
Beispiel 1 : Satteldachbinder Bild 9 - Iteration der maximalen Last																
Dimensionen in m und kN	Globale Sicherheitsbeiwerte					Teilsicherheitsbeiwerte										
	$\gamma_b=1,0$	$\gamma_s=1,0$	$\gamma_g=1,75$	$\gamma_p=1,75$		$\gamma_b=1,2$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_g=1,35$	$\gamma_p=1,5$							
Werkstoffkenngrößen	$\beta_R = 33000$	$\beta_{Ss} = 500000$	$\beta_{Sv} = 1570000$			$\beta_R = 27500$	$\beta_{Ss} = 435000$	$\beta_{Sv} = 1365000$								
Steifigkeiten Zustand I	$(EI_z)_0 = 232541$	$(GI_t)_0 = 44577$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 44850$			$(EI_z)_0 = 198224$	$(GI_t)_0 = 37148$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 37418$								
Belastung des Trägers und Momente in Trägermitte $\xi = 0,5$ aus Eigenlast $g_0 = 7,32$ und $\Delta g = 4,13$: $M_{m,0} = 702,55$ $\Delta M = 263,75$ $M_{m,g} = 966,30$ iteriertes Moment ($\Delta M_p = 0$) der Verkehrslast p_0 auf dem Obergurt für $\gamma_u=1$ (6.44)																
Approximation der Steifigkeitsverläufe																
	Parabel BT - IV		Sinus BT - III			Parabel BT - IV		Sinus BT - III								
$M_{y,kr}$ (6.44)	4773,4		5323,9			4254,7		4647,9								
$M_{m,p} = M_{v,kr} - \gamma_g M_{m,g}$	3082,4		3632,9			2950,2		3343,4								
Querschnittswerte im kritischen Schnitt $\xi = 0,35$																
M_{yI} (γ -fach)	4329,3		4830,2			3860,6		4218,4								
$(EI_z)_m$ ($\tilde{GI}_t)_m$ ($EI_t)_m$	92070	20218	94	87366	19214	183	81941	18333	-43	78528	17380	19				
z_S z_M bez. auf S	0,336 von OK		0,070		0,332 von OK		0,089		0,383 von OK		0,064		0,374 von OK		0,085	
Vorwerte für FormelAuswertung																
Bezugslinie z_{bez}	1,10 + 0,336 = 1,436		1,10 + 0,332 = 1,432			1,10 + 0,383 = 1,483		1,10 + 0,374 = 1,474								
für $g : z_{A,0} \Delta z_A$	+0,12	-0,545		+0,124	-0,545		+0,072	-0,545		+0,081	-0,545					
$\gamma_g g_0$ $\gamma_g \Delta g$	12,81	7,23		12,81	7,23		9,88	5,58		9,88	5,58					
für $p : z_{A,0} \Delta z_A$	-0,336	-1,10		-0,332	-1,10		-0,383	-1,10		-0,374	-1,10					
P_{kr}	32,13		37,87			30,76		34,86								
$M_{m,0}/M_m$ $\Delta M/M_m$	0,9033	0,0967		0,9133	0,0867		0,9163	0,0837		0,9234	0,0766					
$\frac{\Delta(EI_z)_m}{(EI_z)_0}$ $\frac{\Delta(\tilde{GI}_t)_m}{(\tilde{GI}_t)_0}$	0,6041	0,5492		0,6243	0,5716		0,5866	0,5101		0,6038	0,5355					
k_1 k_2 (6.23a-b)	1,2967	-0,1461		1,2952	-0,1152		1,2948	-0,1562		1,2938	-0,1276					
k_3 k_4 (6.23c-d)	0,1884	0,1582		0,2525	0,1299		0,2125	0,1670		0,2754	0,1409					
k_{5p} k_{5g} (6.23e)	0,1184	-0,3900		0,1296	-0,6174		0,1161	-2,7679		0,1275	-0,0251					
c_1 c (6.22b,a)	-0,0030	1,4117		-0,0030	1,6394		-0,0030	1,4848		-0,0032	1,6967					
$M_{m,kr}$ (6.22) η_{kr} (6.34)	5204	1,090		6044	1,135		4616	1,085		5275	1,135					
$v_{M,m}$ (6.35)	0,349			0,247			0,368			0,248						
z_1 z_2 z_3 (6.32a-c)	256,0	38,40	6,10	202,5	42,80	7,14	241,0	34,2	5,9	177,2	37,3	6,7				
n_1 n_2 n_3 (6.32d-f)	3680,6	-44,4	-609,6	4113,4	-59,0	-714,3	3326,9	-46,5	-593,2	3636,0	-61,2	-669,8				
ϑ_I (6.33) ϑ_{II} (6.36)	0,099	0,109		0,076	0,086		0,105	0,115		0,076	0,086					
M_t (6.39)	216			184			205			163						
Bruchsicherheitsnachweis im kritischen Schnitt $\xi = 0,35$ [$\sin(\pi\xi) = 0,891$ $M_z = \vartheta_{II} \sin(\pi\xi) M_{y,I}$]																
M_{yI} M_z $resM$	4329,3	421	4350	4830,2	368	4844	3860,6	394	3880	4218,4	324	4231				
ε_{bu} ε_{zu} Nulllinienwinkel	-3,5	+4,0	76°	-3,5	+4,3	71°	-3,5	+3,6	77°	-3,5	+3,7	74°				
M_u $\gamma_u = M_u / resM$	4350	1,000		4844	1,000		3881	1,000		4230	1,000					
Zulässige Verkehrslast des Näherungsverfahrens für die Iteration $\gamma_u = 1$ in Gleichung (6.43)																
zul $p = p_{kr}/\gamma_p$	18,35		21,6 > 20,2 (!)			20,5		23,3 > 21,6 (!)								
zul $p /$ zul p_{TheoII}	0,91		1,07			0,95		1,08								
Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung mit dem Rechenprogramm [8]																
zul p_{TheoII}	20,2					21,6										
$v_{M,m}$ ϑ_I M_t	0,285	0,056	138			0,294	0,056	126								

Tabelle 2b : Zusammenstellung der Ergebnisse der Zahlenrechnung für Beispiel 1-Iteration Maximallast
 Table 2b : Results of numeric example 1 - Iteration of maximum load

Bei Betrachtung der Steifigkeitsverläufe des Bildes 9b sind diese Ergebnisse nicht weiter verwunderlich, da die Parabel-Näherungskurven die berechneten Steifigkeitsverläufe geradezu perfekt wiedergeben. Die Sinus-Kurven täuschen demgegenüber zuviel Steifigkeit vor und machen dadurch den Träger steifer als in Wirklichkeit, was sich in geringeren Verformungen und schließlich in zu großen zulässigen Lasten auswirkt.



Verlauf der normierten Biegesteifigkeit $(EI_z)/(EI_z)_0$



Verlauf der normierten Torsionssteifigkeit $(GI_t)/(GI_t)_0$

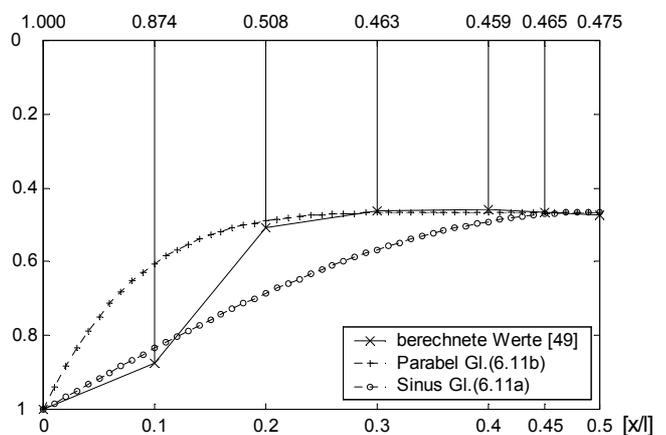


Bild 10a : Vorgespannter Satteldachbinder, Beispiel 2
 Fig. 10a : Prestressed saddle shaped girder, example 2

Bild 10b : Tangentensteifigkeiten für Satteldachbinder 2
 Fig. 10b : Tangent stiffnesses of saddle shaped girder 2

6.9.1.2 Vorgespannter Satteldachbinder Beispiel 2

Im Bild 10a ist ein weiterer Querschnitt eines Satteldachbinders mit allen Werkstoff-, Belastungs- und Imperfektionsangaben und im Bild 9b sind seine Steifigkeitsverläufe mit den entsprechenden parabel- oder sinusförmigen Approximationen dargestellt. Aufgrund dieser Angaben wird der kritische Schnitt nach Gl.(6.46) mit $a = 5,24$ und $\rho = 0,096$ zu $x_{krit} = 12,60$ m ($\xi_{krit} = 0,45$) ermittelt. Die Entscheidung, ob mit einer Sinus- oder Parabel-Approximation der Steifigkeitsverläufe zu rechnen ist, ist bei diesem Beispiel nicht so eindeutig wie beim Beispiel 1. Wie Bild 10b zeigt, liegt der berechnete Verlauf der Biegesteifigkeit (EI_z) ziemlich genau zwischen der Sinus- und der Parabelkurve. Der Verlauf der berechneten Torsionssteifigkeit (GI_t) wird am Trägeranfang besser von der Sinuskurve, zur Trägermitte hin dagegen besser von der Parabelkurve angenähert.

Die Ergebnisse sind in den Tabellen 3a und 3b angegeben. Bei diesem Beispiel liegt für den gegebenen Lastfall die berechnete Bruchsicherheit bei der parabelförmigen Approximation der Steifigkeitsverläufe deutlich unter eins, was eine nicht ausreichende Kippsicherheit anzeigt. Mit einer sinusförmigen Näherungskurve werden aber ausreichende Bruchsicherheiten $\gamma_u > 1$ ermittelt.

Als Ergebnis des genauen Verfahrens ergibt sich aus dem Rechenprogramm [8] eine zulässige Gleichlast auf dem Obergurt von $zul\ p = 17,2$ kN/m für globale Sicherheitsbeiwerte und von $zul\ p = 18,3$ kN/m für Teilsicherheitsbeiwerte.

Beispiel 2 : Satteldachbinder Bild 10 - Berechnung gegebener Lastfall										
Dimensionen in m und kN	Globale Sicherheitsbeiwerte					Teilsicherheitsbeiwerte				
	$\gamma_b=1,0$	$\gamma_s=1,0$	$\gamma_g=1,75$	$\gamma_p=1,75$		$\gamma_b=1,2$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_g=1,35$	$\gamma_p=1,5$	
Werkstoffkenngrößen	$\beta_R = 33000$	$\beta_{Ss} = 500000$	$\beta_{Sv} = 1570000$			$\beta_R = 27500$	$\beta_{Ss} = 435000$	$\beta_{Sv} = 1365000$		
Steifigkeiten Zustand I	$(EI_z)_0 = 144680$ $(GI_t)_0 = 30424$ $(\tilde{GI}_t)_0 = 31121$					$(EI_z)_0 = 122132$ $(GI_t)_0 = 25353$ $(\tilde{GI}_t)_0 = 26042$				
Belastung des Trägers und Momente in Trägermitte $\xi = 0,5$ aus Eigenlast $g_0 = 6,67$ und $\Delta g = 0,87$: $M_{m,0} = 653,42$ $\Delta M = 56,84$ $M_{m,g} = 710,26$ aus Verkehrslast $p_0 = 16,6$ und $\Delta p_z = 0$: $M_{m,0} = 1626,80$ $\Delta M = 0$ $M_{m,p} = 1626,80$										
γ -fache Momente (g+p)	$M_{m,0} = 3990,4$ $\Delta M = 99,5$ $M_m = 4089,9$					$M_{m,0} = 3322,3$ $\Delta M = 76,7$ $M_m = 3399,0$				
Querschnittswerte im kritischen Schnitt $\xi = 0,45$										
M_{yI} (γ -fach)	4048,5					3364,7				
$(EI_z)_m$ $(\tilde{GI}_t)_m$ $(EI_t)_m$	78603	14136	50			69817	12722	-77		
z_S z_M bez. auf S	+0,295 von OK			-0,089 von S		+0,337 von OK		-0,114 von S		
Vorwerte für FormelAuswertung										
Bezugslinie z_{bez}	0,29 + 0,295 = 0,585					0,29 + 0,337 = 0,627				
für g : $z_{A,0}$ Δz_A	0,223	-0,157				0,18	-0,157			
$\gamma_g g_0$ $\gamma_g \Delta g$	11,67	1,52				9,0	1,17			
für p : $z_{A,0}$ Δz_A	-0,295	-0,29				-0,337	-0,29			
$\gamma_p p_0$ $\gamma_p \Delta p_z$	29,05	0				24,9	0			
$M_{m,0}/M_m$ $\Delta M/M_m$	0,9757	0,0243				0,9774	0,0226			
$\frac{\Delta(EI_z)_m}{(EI_z)_0}$ $\frac{\Delta(\tilde{GI}_t)_m}{(\tilde{GI}_t)_0}$	0,4567	0,5458				0,4283	0,5115			
Approximation der Steifigkeitsverläufe										
	Parabel BT - IV		Sinus BT - III		Parabel BT - IV		Sinus BT - III			
k_1 k_2 (6.23a-b)	1,2861	-0,2289	1,2861	-0,2148	1,2858	-0,2434	1,2858	-0,2303		
k_3 k_4 (6.23c-d)	0,2567	0,2328	0,3360	0,2196	0,2890	0,2471	0,3666	0,2348		
k_{5p} k_{5g} (6.23e)	0,1107	0,0393	0,1212	0,0442	0,1119	0,0400	0,1215	0,0445		
c_1 c (6.22b,a)	0,0056	1,7797	0,0052	2,0408	0,0076	1,8879	0,0072	2,1307		
$M_{m,kr}$ (6.22) η_{kr} (6.34)	4265	1,043	4891	1,196	3803	1,118	4292	1,261		
$v_{M,m}$ (6.35)	0,695		0,186		0,281		0,151			
z_1 z_2 z_3 (6.32a-c)	434,7	32,8	1,3	116,5	32,8	1,3	146,3	27,2	1,2	
n_1 n_2 n_3 (6.32d-f)	2545,0	62,6	-130,0	2943,9	62,6	-130,0	2284,2	56,3	-123,8	
ϑ_1 (6.33) ϑ_{II} (6.36)	0,189 > 0,1 !	0,199	0,0524	0,0624	0,0789	0,0889	0,0423	0,0523		
M_t (6.39)	295		95		111		68			
Bruchsicherheitsnachweis im kritischen Schnitt $\xi = 0,45$ [$\sin(\pi\xi) = 0,988$ $M_z = \vartheta_{II} \sin(\pi\xi) M_{v,I}$]										
M_{yI} M_z $resM$	4048,5	797	4126	4048,5	249	4056	3364,6	296	3377	
ε_{bu} ε_{zu} Nulllinienwinkel	-3,5	+2,9	88°	-3,5	+3,2	66°	-3,5	+2,0	78°	
M_u $\gamma_u = M_u / resM$	2057	0,5 << 1 !		4057	1,0		3078	0,91 < 1 !		
Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung mit dem Rechenprogramm [8]										
$v_{M,m}$ ϑ_1 M_t		0,189	0,040	85,7			0,136	0,0291	57	

Tabelle 3a : Zusammenstellung der Ergebnisse der Zahlenrechnung für Beispiel 2 – vorhandene Last
 Table 3a : Results of numeric example 2 – existing load

Im Gegensatz zum Beispiel 1 ist beim Beispiel 2 das Erreichen des rechnerischen Bruchzustandes (Werkstoffbruch) im kritischen Schnitt für das Stabilitätsversagen maßgebend. Die berechnete horizontale Verformung liegt dabei mit 0,25 m etwas unterhalb von $l/100$. Die berechnete Verdrehung von ca. 0,05rad bleibt aber deutlich unter einer Verdrehung von 0,1 rad.

Die mit den Näherungsansätzen ermittelten zulässigen Belastungen liegen in allen vier Fällen unterhalb der mit dem genauen Verfahren berechneten. Nach Tabelle 3b ergibt sich für globale Sicherheitsbeiwerte $zul p_{par} = 15,1 < zul p_{sin} = 16,6 < zul p_{TheoII} = 17,2$ kN/m und für Teilsicherheitsbeiwerte $zul p_{par} = 16,25 < zul p_{sin} = 17,6 < zul p_{TheoII} = 18,3$ kN/m. Mit einem Blick auf die Steifigkeitsverläufe des Bildes 10b lassen sich diese Ergebnisse erklären. Im Vergleich mit den berechneten Steifigkeitsverläufen schneiden die Parabel-Approximationen im Trägeranfangsbereich sehr viel weg und machen dadurch trotz guter Näherung zur Trägermitte hin den Träger zu weich. Die Sinus-Approximationen erfassen die Steifigkeitsverläufe im Anfangsbereich wesentlich besser, setzen aber zur Mitte hin zuviel an Steifigkeit an.

Beispiel 2 : Satteldachbinder Bild 10 - Iteration der maximalen Last										
Dimensionen in m und kN	Globale Sicherheitsbeiwerte					Teilsicherheitsbeiwerte				
	$\gamma_b=1,0$	$\gamma_s=1,0$	$\gamma_g=1,75$	$\gamma_p=1,75$		$\gamma_b=1,2$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_g=1,35$	$\gamma_p=1,5$	
Werkstoffkenngrößen	$\beta_R = 33000$	$\beta_{SS} = 500000$	$\beta_{SV} = 1570000$			$\beta_R = 27500$	$\beta_{SS} = 435000$	$\beta_{SV} = 1365000$		
Steifigkeiten Zustand I	$(EI_z)_0 = 144680$ $(GI_t)_0 = 30424$ $(\tilde{GI}_t)_0 = 31121$					$(EI_z)_0 = 122132$ $(GI_t)_0 = 25353$ $(\tilde{GI}_t)_0 = 26042$				
Belastung des Trägers und Momente in Trägermitte $\xi = 0,5$ aus Eigenlast $g_0 = 6,67$ und $\Delta g = 0,87$: $M_{m,0} = 653,42$ $\Delta M = 56,84$ $M_{m,g} = 710,26$ iteriertes Moment ($\Delta M_p = 0$) der Verkehrslast p_0 auf dem Obergurt für $\gamma_u = 1$ (6.44)										
Approximation der Steifigkeitsverläufe										
	Parabel BT - IV		Sinus BT - III			Parabel BT - IV		Sinus BT - III		
$M_{y,kr}$ (6.44)	3833,3		4089,7			3346,6		3539,8		
$M_{m,p} = M_{y,kr} - \gamma_g M_{m,g}$	2590,4		2846,8			2387,8		2580,9		
Querschnittswerte im kritischen Schnitt $\xi = 0,45$										
M_{yI} (γ -fach)	3794,5		4048,4			3312,8		3504,0		
$(EI_z)_m$ $(\tilde{GI}_t)_m$ $(EI_r)_m$	82062	14544	20	78603	14136	50	70528	12832	-83	67923 12445 -61
z_S z_M bez. auf S	0,296 von OK -0,094		0,295 von OK -0,089			0,338 von OK -0,116		0,334 von OK -0,108		
Vorwerte für FormelAuswertung										
Bezugslinie z_{bez}	0,29 + 0,296 = 0,586		0,29 + 0,295 = 0,585			0,29 + 0,338 = 0,628		0,29 + 0,334 = 0,624		
für g : $z_{A,0}$ Δz_A	0,221	-0,157		0,222	-0,157		0,179	-0,157		0,183 -0,157
$\gamma_g g_0$ $\gamma_g \Delta g$	11,67	1,52		11,67	1,52		9,0	1,17		9,0 1,17
für p : $z_{A,0}$ Δz_A	-0,296	-0,29		-0,295	-0,29		-0,338	-0,29		-0,334 -0,29
p_{kr}	26,43		29,05			24,36		26,34		
$M_{m,0}/M_m$ $\Delta M/M_m$	0,9741	0,0259		0,9757	0,0243		0,9771	0,0229		0,9783 0,0217
$\frac{\Delta(EI_z)_m}{(EI_z)_0}$ $\frac{\Delta(\tilde{GI}_t)_m}{(\tilde{GI}_t)_0}$	0,4328	0,5327		0,4567	0,5458		0,4225	0,5073		0,4439 0,5221
k_1 k_2 (6.23a-b)	1,2863	-0,2406		1,2861	-0,2148		1,2859	-0,2462		1,2857 -0,2222
k_3 k_4 (6.23c-d)	0,2749	0,2449		0,3360	0,2196		0,2943	0,2501		0,3539 0,2265
k_{5p} k_{5g} (6.23e)	0,1167	-0,0413		0,1212	0,0442		0,1133	0,0405		0,1181 0,0433
c_1 c (6.22b,a)	0,0062	1,8505		0,0052	2,0408		0,0079	1,9076		0,0066 2,0873
$M_{m,kr}$ (6.22) η_{kr} (6.34)	4435	1,157		4891	1,196		3843	1,148		4204 1,188
$v_{M,m}$ (6.35)	0,222		0,186			0,232		0,192		
z_1 z_2 z_3 (6.32a-c)	129,8	30,8	1,10	116,5	32,8	1,3	71,4	26,8	1,2	104,2 28,4 1,3
n_1 n_2 n_3 (6.32d-f)	2615,7	59,9	-113,6	2943,9	62,6	-130,0	2613,5	56,1	-119,9	2555,6 56,8 -133,7
ϑ_I (6.33) ϑ_{II} (6.36)	0,063	0,073		0,0524	0,0624		0,039	0,049		0,054 0,064
M_t (6.39)	102		95			63		85		
Bruchsicherheitsnachweis im kritischen Schnitt $\xi = 0,45$ [$\sin(\pi\xi) = 0,988$ $M_z = \vartheta_{II} \sin(\pi\xi) M_{y,I}$]										
M_{yI} M_z $resM$	3794,5	274	3804	4048,5	249	4056	3312,8	247	3322	3504,0 221 3522
ϵ_{bu} ϵ_{zu} Nulllinienwinkel	-3,5	+2,9	70°	-3,5	+3,2	66°	-3,5	+2,3	74°	-3,5 +2,5 71°
M_u $\gamma_u = M_u / resM$	3807	1,001		4057	1,000		3322	1,000		3512 1,000
Zulässige Verkehrslast des Näherungsverfahrens für die Iteration $\gamma_u = 1$ in Gleichung (6.43)										
zul $p = p_{kr}/\gamma_p$	15,1		16,6			16,2		17,6		
zul $p /$ zul p_{TheoII}	0,88		0,965			0,88		0,96		
Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung mit dem Rechenprogramm [8]										
zul p_{TheoII}	17,2					18,3				
$v_{M,m}$ ϑ_I M_t	0,258	0,055	112			0,244	0,052	94		

Tabelle 3b : Zusammenstellung der Ergebnisse der Zahlenrechnung für Beispiel 2 – Iteration Maximallast
 Table 3b : Results of numeric example 2 – Iteration of maximum load

Trotz dieses Schwachpunktes zeigt die Sinus-Approximation bei diesem Beispiel deutlich bessere Ergebnisse als die Parabel. Auch dieses Verhalten läßt sich begründen. Gerade die Steifigkeiten im Auflagerbereich beeinflussen bekanntlich das Verformungsverhalten eines Trägers ganz wesentlich (große Steifigkeit → geringe Anfangsneigung der Verformungslinien → kleinere Verformungen in Trägermitte).

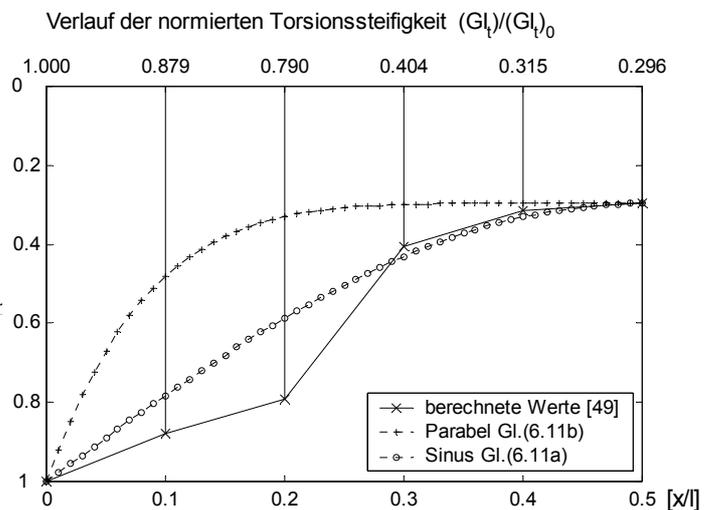
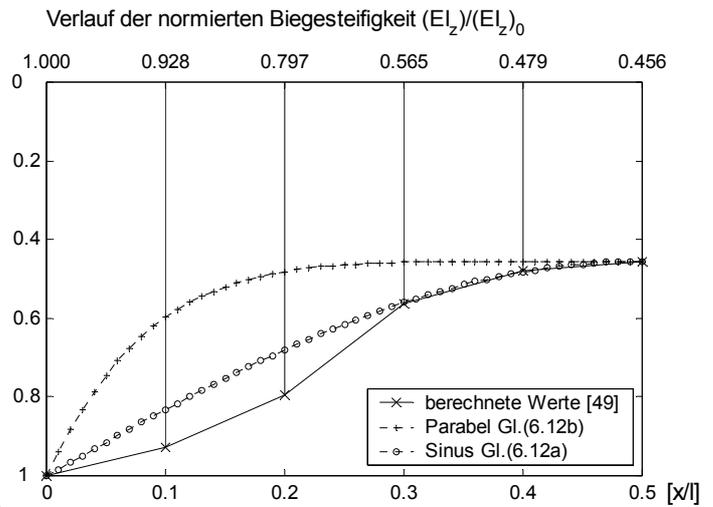
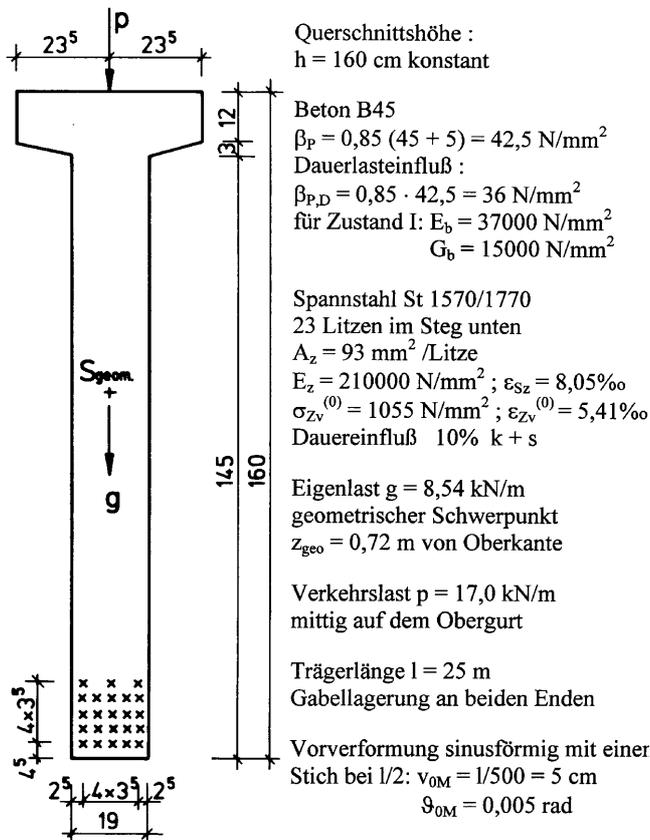


Bild 11a : Vorgespannter Parallelgurtbinder, Beispiel 3
 Fig. 11a : Prestressed parallel flanged girder, example 3

Bild 11b : Tangentensteifigkeiten für Parallelgurtbinder 3
 Fig. 11b : Tangent stiffnesses of parallel flanged girder 3

6.9.2 Ausgewählte Beispiele von Parallelgurtbindern

6.9.2.1 Vorgespannter Parallelgurtbinder

Bild 11a zeigt den Querschnitt eines vorgespannten parallelgurtigen Trägers mit allen erforderlichen Angaben zu den Werkstoffen, Belastungen und Imperfektionen. Der kritische Schnitt fällt bei Parallelgurtträgern immer mit dem Momentenmaximum in Trägermitte zusammen. Im Bild 11b sind die zugehörigen Steifigkeitsverläufe mit den beiden Approximationskurven dargestellt, wobei bei diesem Beispiel die Sinus-Approximation eindeutig die bessere Näherungslösung ist.

Die Ergebnisse der Zahlenrechnung in den Tabellen 4a und 4b bestätigen dies dann auch. Für globale Sicherheitsbeiwerte und die vorgegebene Belastung wird bei Ansatz eines parabelförmigen Steifigkeitsverlaufs bereits für den Beiwert η_{kr} eine Zahl kleiner eins berechnet, was ein Stabilitätsversagen (Überschreiten der Verzweigungslast) anzeigt. Die Parabelnäherung macht den Träger also zu weich, was bei Betrachtung des Bildes 11b auch sehr deutlich wird. Mit einer sinusförmigen Näherungskurve werden demgegenüber ausreichende Bruchsicherheiten $\gamma_u > 1$ ermittelt.

Beispiel 3 : Parallelgurtbinder Bild 11 - Berechnung gegebener Lastfall									
Dimensionen in m und kN		Globale Sicherheitsbeiwerte				Teilsicherheitsbeiwerte			
		$\gamma_b=1,0$	$\gamma_s=1,0$	$\gamma_g=1,75$	$\gamma_p=1,75$	$\gamma_b=1,2$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_g=1,35$	$\gamma_p=1,5$
Werkstoffkenngrößen		$\beta_R = 27000$	$\beta_{SS} = 500000$	$\beta_{SV} = 1570000$	$\beta_R = 22500$	$\beta_{SS} = 435000$	$\beta_{SV} = 1365000$		
Steifigkeiten Zustand I		$(EI_z)_0 = 77314$	$(GI_t)_0 = 50970$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 52147$	$(EI_z)_0 = 65303$	$(GI_t)_0 = 42475$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 43642$		
Belastung des Trägers und Momente in Trägermitte $\xi = 0,5$ aus Eigenlast $g_0 = 8,54$ und $\Delta g = 0$: $M_{m,0} = M_{m,g} = 667,6$ $\Delta M = 0$ aus Verkehrslast $p_0 = 17,0$ und $\Delta p_z = 0$: $M_{m,0} = M_{m,p} = 1328,1$ $\Delta M = 0$									
γ -fache Momente (g+p)		$M_{m,0} = M_m = 3492,5$ $\Delta M = 0$				$M_{m,0} = M_m = 2893,4$ $\Delta M = 0$			
Querschnittswerte im kritischen Schnitt $\xi = 0,5$									
M_{yI} (γ -fach)		3492,5				2893,4			
$(EI_z)_m$ ($\tilde{GI}_t)_m$ ($EI_r)_m$		35226	15453	-188	36170	18581	-234		
z_S z_M bez. auf S		+0,356 von OK				+0,447 von OK			
		-0,064 von S				-0,110 von S			
Vorwerte für FormelAuswertung									
Bezugslinie z_{bez}		0,356				0,447			
für g : $z_{A,0}$ Δz_A $\gamma_g g_0$		0,363	0	14,95	0,272	0	11,53		
für p : $z_{A,0}$ Δz_A $\gamma_p p_0$		-0,356	0	29,75	-0,447	0	25,5		
$\frac{\Delta(EI_z)_m}{(EI_z)_0}$ $\frac{\Delta(\tilde{GI}_t)_m}{(\tilde{GI}_t)_0}$		0,5444	0,7037			0,4461	0,5742		
Approximation der Steifigkeitsverläufe									
		Parabel	BT - II	Sinus	BT - I	Parabel	BT - II	Sinus	BT - I
k_1 k_2 (6.23a-b)		1,2825	-0,1884	1,2825	-0,1727	1,2825	-0,2381	1,2825	-0,2253
k_3 k_4 (6.23c-d)		0,1450	0,1884	0,2279	0,1727	0,2458	0,2381	0,3260	0,2253
k_5 (6.23e)		0,0472		0,0545		0,0569		0,0630	
c_1 c (6.22b,a)		0,0021	1,3530	0,0019	1,6975	0,0046	1,7634	0,0043	2,031
$M_{m,kr}$ (6.22) η_{kr} (6.34)		3436	0,984 < 1 !	4311	1,234	3766	1,301	4338	1,499
$v_{M,m}$ (6.35)		--		0,146		0,122		0,090	
z_1 z_2 z_3 (6.32a-c)				87,3	27,9	0,14	60,7	23,2	0,26
n_1 n_2 n_3 (6.32d-f)				4145,3	24,0	-28,8	3756,5	37,0	-52,4
ϑ_I (6.33) ϑ_{II} (6.36)				0,028	0,033		0,0225	0,0275	
M_t (6.39)				71			53		43
Bruchsicherheitsnachweis im kritischen Schnitt $\xi = 0,5$ [$\sin(\pi\xi) = 1,0$ $M_z = \vartheta_{II} \sin(\pi\xi) M_{yI}$]									
M_{yI} M_z $resM$				3493	115	3495	2894	80	2895
ϵ_{bu} ϵ_{zu} Nulllinienwinkel				-3,5	+3,1	68°	-3,5	+2,7	69°
M_u $\gamma_u = M_u / resM$				3926	1,12		3600	1,24	
Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung mit dem Rechenprogramm [8]									
$v_{M,m}$ ϑ_I M_t				0,073	0,011	43	0,042	0,0064	28

Tabelle 4a : Zusammenstellung der Ergebnisse der Zahlenrechnung für Beispiel 3 – vorhandene Last
 Table 4a : Results of numeric example 3 – existing load

Als Ergebnis des genauen Verfahrens ergibt sich aus dem Rechenprogramm [8] eine zulässige Gleichlast auf dem Obergurt von $zul\ p = 20,1$ kN/m für globale Sicherheitsbeiwerte und von $zul\ p = 22,9$ kN/m für Teilsicherheitsbeiwerte. Wie beim Beispiel 2 ist beim Beispiel 3 das Erreichen des rechnerischen Bruchzustandes (Werkstoffbruch) für das Stabilitätsversagen maßgebend. Die berechneten Verformungen bleiben mit etwa 0,23 m und 0,03 rad in der Größenordnung einer Verschiebung von 1/100., bzw.deutlich unter einer Verdrehung von 0,1 rad.

Beispiel 3 : Parallelgurtbinder Bild 11 - Iteration der maximalen Last										
Dimensionen in m und kN	Globale Sicherheitsbeiwerte					Teilsicherheitsbeiwerte				
	$\gamma_b=1,0$	$\gamma_s=1,0$	$\gamma_g=1,75$	$\gamma_p=1,75$		$\gamma_b=1,2$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_g=1,35$	$\gamma_p=1,5$	
Werkstoffkenngrößen	$\beta_R = 27000$	$\beta_{Ss} = 500000$	$\beta_{Sv} = 1570000$			$\beta_R = 22500$	$\beta_{Ss} = 435000$	$\beta_{Sv} = 1365000$		
Steifigkeiten Zustand I	$(EI_z)_0 = 77314$	$(GI_t)_0 = 50970$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 52147$			$(EI_z)_0 = 65303$	$(GI_t)_0 = 42475$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 43642$		
Belastung des Trägers und Momente in Trägermitte $\xi = 0,5$ aus Eigenlast $g_0 = 8,54$ und $\Delta g = 0$: $M_{m,0} = M_{m,g} = 667,6$ $\Delta M = 0$ iteriertes Moment ($\Delta M_p = 0$) der Verkehrslast p_0 auf dem Obergurt für $\gamma_u = 1$ (6.44)										
Approximation der Steifigkeitsverläufe										
	Parabel BT - II		Sinus BT - I			Parabel BT - II		Sinus BT - I		
$M_{y,kr}$ (6.44)	3309,3		3627,9			3067,5		3282,3		
$M_{m,p} = M_{y,kr} - \gamma_g M_{m,g}$	2141		2459,6			2166,3		2381,1		
Querschnittswerte im kritischen Schnitt $\xi = 0,5$										
M_{yI} (γ -fach)	3309,3		3627,9			3067,5		3282,3		
$(EI_z)_m$ $(\tilde{GI}_t)_m$ $(EI_t)_m$	37662	16764	-186	33583	14692	-191	33437	16597	-224	30498 14821 -221
z_S z_M bez. auf S	0,367 von OK -0,078		0,351 von OK -0,055			0,423 von OK -0,090		0,404 von OK -0,068		
Vorwerte für FormelAuswertung										
Bezugslinie z_{bez}	0,367		0,351			0,423		0,404		
für g : $z_{A,0}$ Δz_A $\gamma_g g_0$	0,352	0	14,95	0,368	0	14,95	0,296	0	11,53	0,315 0 11,53
für p : $z_{A,0}$ Δz_A p_{kr}	-0,367	0	27,40	-0,351	0	31,48	-0,423	0	27,73	-0,404 0 30,48
$\frac{\Delta(EI_z)_m}{(EI_z)_0}$ $\frac{\Delta(\tilde{GI}_t)_m}{(\tilde{GI}_t)_0}$	0,5129	0,6785		0,5656	0,7183		0,4880	0,6197		0,5330 0,6604
k_1 k_2 (6.23a-b)	1,2825	-0,2043		1,2825	-0,1613		1,2825	-0,2170		1,2825 -0,1788
k_3 k_4 (6.23c-d)	0,1667	0,2043		0,2149	0,1613		0,2048	0,2170		0,2510 0,1788
k_5 (6.23e)	0,0503			0,0527			0,0528			0,0555
c_1 c (6.22b,a)	0,00275	1,4554		0,00155	1,6453		0,0034	1,6035		0,0021 1,7703
$M_{m,kr}$ (6.22) η_{kr} (6.34)	3696	1,117		4179	1,1518		3424	1,1162		3780 1,1517
$v_{M,m}$ (6.35)	0,252			0,203			0,253			0,203
z_1 z_2 z_3 (6.32a-c)	143,1	26,5	0,1	126,4	29,0	0,2	133,3	24,5	0,3	114,5 26,3 0,4
n_1 n_2 n_3 (6.32d-f)	3434,3	30,1	-18,7	4017,8	19,3	-37,4	3371,8	29,8	-59,9	3785,6 20,5 -72,9
ϑ_I (6.33) ϑ_{II} (6.36)	0,049	0,054		0,039	0,044		0,047	0,052		0,038 0,043
M_t (6.39)	103			96			99			89
Bruchsicherheitsnachweis im kritischen Schnitt $\xi = 0,5$ [$\sin(\pi\xi) = 1,0$ $M_z = \vartheta_{II} \sin(\pi\xi) M_{y,I}$]										
M_{yI} M_z $resM$	3309,3	179	3314	3627,9	159	3631	3067,5	160	3072	3282,3 140 3285
ϵ_{bu} ϵ_{zu} Nulllinienwinkel	-3,5	+2,3	78°	-3,5	+2,7	73°	-3,5	+2,0	79°	-3,5 +2,2 75°
M_u $\gamma_u = M_u / resM$	3318	1,001		3634	1,001		3072	1,000		3287 1,000
Zulässige Verkehrslast des Näherungsverfahrens für die Iteration $\gamma_u = 1$ in Gleichung (6.43)										
zul $p = p_{kr}/\gamma_p$	15,6		18,0			18,5		20,3		
zul $p /$ zul p_{TheoII}	0,78		0,90			0,81		0,89		
Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung mit dem Rechenprogramm [8]										
zul p_{TheoII}	20,1					22,9				
$v_{M,m}$ ϑ_I M_t	0,230	0,034	106			0,211	0,030	91		

Tabelle 4b : Zusammenstellung der Ergebnisse der Zahlenrechnung für Beispiel 3 – Iteration Maximallast
 Table 4b : Results of numeric example 3 – Iteration of maximum load

Die mit den Näherungsansätzen ermittelten zulässigen Belastungen liegen in allen vier Fällen unterhalb der mit dem genauen Verfahren berechneten. Nach Tabelle 4b ergibt sich für globale Sicherheitsbeiwerte $zul p_{par} = 15,6 < zul p_{sin} = 18,0 < zul p_{TheoII} = 20,1$ kN/m und für Teilsicherheitsbeiwerte $zul p_{par} = 18,5 < zul p_{sin} = 20,36 < zul p_{TheoII} = 22,9$ kN/m.

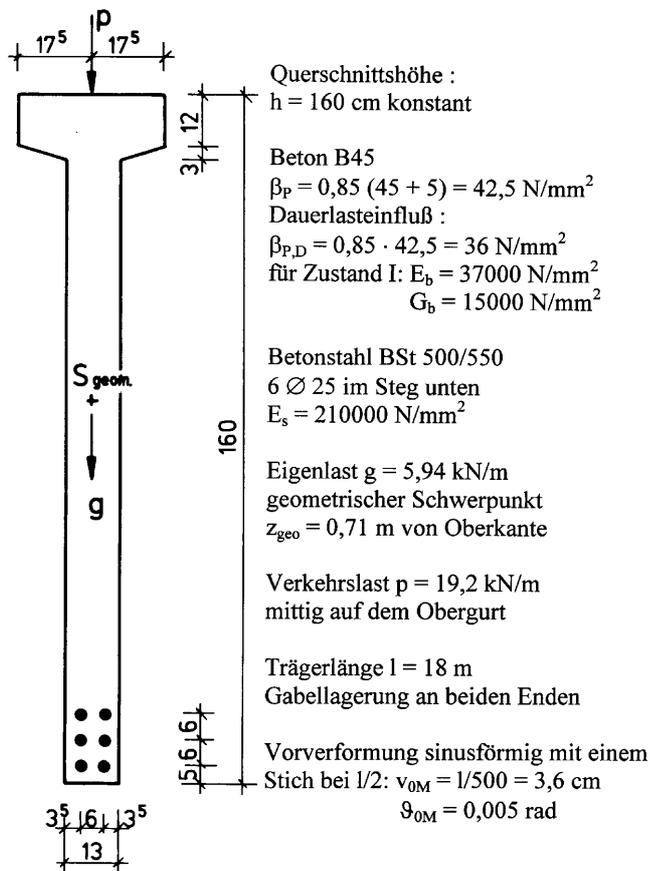


Bild 12a : Stahlbetonträger, Beispiel 4
 Fig. 12a : Reinforced concrete girder, example 4

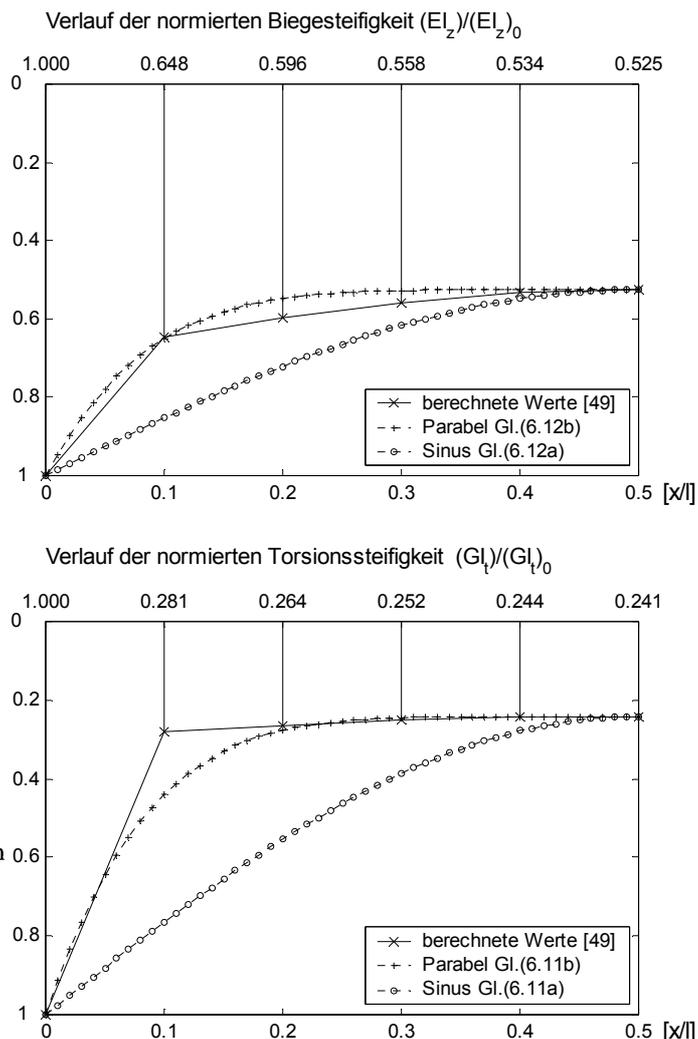


Bild 12b : Tangentensteifigkeiten für Stahlbetonträger 4
 Fig. 12b : Tangent stiffnesses of reinforced concrete girder 4

6.9.2.2 Stahlbetonträger Beispiel 4

Der Querschnitt und die Angaben zu den Werkstoffen, Belastungen und Imperfektionen für das Beispiel eines nicht vorgespannten Trägers wird im Bild 12a dargestellt. Das Bild 12b zeigt die berechneten Steifigkeitsverläufe mit den Näherungskurven. Ein Vergleich dieser Kurvenverläufe gibt einer Parabelapproximation für das Näherungsverfahren eindeutig den Vorzug.

Die Berechnungsergebnisse des vorgegebenen Lastfalles in Tabelle 5a weisen für eine Parabelnäherung der Steifigkeitsverläufe jedoch in beiden Sicherheitskonzepten keine ausreichende Kipp-sicherheit aus. Mit globalen Sicherheitsbeiwerten wird ein rechnerisches Versagen schon bei der Bestimmung des Beiwertes $\eta_{kr} = 1,012$ durch das Fast-Erreichen der Verzweigungslast ($\eta_{kr} = 1$) angedeutet und bei der folgenden Berechnung der Verdrehung ϑ_1 , die mit $0,47 \text{ rad}$ weit über der zulässigen Größe von $0,1 \text{ rad}$ liegt, zur Gewißheit. Ein Bruchsicherheitsnachweis ist damit nicht mehr zu führen. Bei der Berechnung mit Teilsicherheitsbeiwerten liegt die ermittelte Verdrehung $\vartheta_1 = 0,093 \text{ rad}$ sehr nahe am Grenzwert $0,1 \text{ rad}$, was einen Bruchsicherheitsnachweis noch ermöglicht.

Beispiel 4 : Stahlbetonträger Bild 12 - Berechnung gegebener Lastfall									
Dimensionen in m und kN		Globale Sicherheitsbeiwerte				Teilsicherheitsbeiwerte			
		$\gamma_b=1,0$	$\gamma_s=1,0$	$\gamma_g=1,75$	$\gamma_p=1,75$	$\gamma_b=1,2$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_g=1,35$	$\gamma_p=1,5$
Werkstoffkenngrößen		$\beta_R = 27000$	$\beta_{Ss} = 500000$	$\beta_{Sv} = ---$		$\beta_R = 22500$	$\beta_{Ss} = 435000$	$\beta_{Sv} = ---$	
Steifigkeiten Zustand I		$(EI_z)_0 = 29570$	$(GI_t)_0 = 18670$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 18670$		$(EI_z)_0 = 25114$	$(GI_t)_0 = 15550$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 15550$	
Belastung des Trägers und Momente in Trägermitte $\xi = 0,5$ aus Eigenlast $g_0 = 5,94$ und $\Delta g = 0$: $M_{m,0} = M_{m,g} = 240,7$ $\Delta M = 0$ aus Verkehrslast $p_0 = 19,2$ und $\Delta p_z = 0$: $M_{m,0} = M_{m,p} = 777,6$ $\Delta M = 0$									
γ -fache Momente (g+p)		$M_{m,0} = M_m = 1782$ $\Delta M = 0$				$M_{m,0} = M_m = 1491,3$ $\Delta M = 0$			
Querschnittswerte im kritischen Schnitt $\xi = 0,5$									
M_{yI} (γ -fach)		1782				1491,3			
$(EI_z)_m$ ($\tilde{GI}_t)_m$ ($EI_t)_m$		15536	4501	1199		13776	4084	900	
z_S z_M bez. auf S		+0,462 von OK		-0,135 von S		+0,500 von OK		-0,140 von S	
Vorwerte für FormelAuswertung									
Bezugslinie z_{bez}		0,462				0,500			
für g : $z_{A,0}$ Δz_A $\gamma_g g_0$		0,246	0	10,4		0,208	0	8,0	
für p : $z_{A,0}$ Δz_A $\gamma_p p_0$		-0,462	0	33,6		-0,500	0	28,8	
$\frac{\Delta(EI_z)_m}{(EI_z)_0}$ $\frac{\Delta(\tilde{GI}_t)_m}{(\tilde{GI}_t)_0}$		0,4746	0,7588			0,4515	0,7374		
Approximation der Steifigkeitsverläufe									
		Parabel BT - II		Sinus BT - I		Parabel BT - II		Sinus BT - I	
k_1 k_2 (6.23a-b)		1,2825	-0,2237	1,2825	-0,2100	1,2825	-0,2354	1,2825	-0,2224
k_3 k_4 (6.23c-d)		0,1372	0,2237	0,2232	0,2100	0,1546	0,2354	0,2406	0,2224
k_5 (6.23e)		0,0541		0,0605		0,0564		0,0625	
c_1 c (6.22b,a)		0,0075	1,3816	0,0070	1,7288	0,0083	1,4498	0,0078	1,7838
$M_{m,kr}$ (6.22) η_{kr} (6.34)		1803	1,012 $\approx 1!$	2256	1,266	1592	1,066	1958	1,3118
$v_{M,m}$ (6.35)		1,58		0,096		0,299		0,086	
z_1 z_2 z_3 (6.32a-c)		673,3	14,3	0,3		106,4	11,9	0,34	
n_1 n_2 n_3 (6.32d-f)		1303,7	213,6	-63,3		1176,1	167,6	-68,4	
ϑ_1 (6.33) ϑ_{II} (6.36)		0,47 $\gg 0,1!$		0,028	0,033	0,093	0,098	0,025	0,030
M_t (6.39)		36		79		28			
Bruchsicherheitsnachweis im kritischen Schnitt $\xi = 0,5$ [$\sin(\pi\xi) = 1,0$ $M_z = \vartheta_{II} \sin(\pi\xi) M_{yI}$]									
M_{yI} M_z $resM$		1782 59 1783				1491 146 1500			
ϵ_{bu} ϵ_{zu} Nulllinienwinkel		-3,5 +3,2 75°				-3,5 +2,5 87°			
M_u $\gamma_u = M_u / resM$		2387 1,34				1108 0,74 < 1!			
Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung mit dem Rechenprogramm [8]									
$v_{M,m}$ ϑ_1 M_t		0,093 0,025 32				0,072 0,02 23			

Tabelle 5a : Zusammenstellung der Ergebnisse der Zahlenrechnung für Beispiel 4 – vorhandene Last
 Table 5a : Results of numeric example 4 – existing load

Die berechnete Bruchsicherheit liegt mit $\gamma_u = 0,74$ aber sehr deutlich unter eins, was einem Trägerversagen gleichkommt. Demgegenüber werden mit einer sinusförmigen Approximation der Steifigkeitsverläufe, die den wirklichen Gegebenheiten nicht entspricht, ausreichende Sicherheiten ermittelt. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da die Sinusapproximation wesentlich mehr Steifigkeit vorgibt, als tatsächlich vorhanden ist.

Die Ergebnisse der Lastiteration in Tabelle 5b geben eine Erklärung für dieses Verhalten. Die ermittelte zulässige Verkehrslast des Näherungsverfahrens mit Parabelapproximation liefert für globale Sicherheitsbeiwerte zu $p = 17,6$ kN/m und für Teilsicherheitsbeiwerte zu $p = 18,6$ kN/m, die beide kleiner als die vorhandene Last von 19,2 kN/m sind. Die zulässigen Verkehrslasten des Näherungsverfahrens mit einer Sinusapproximation lauten zu $p = 21,6$ kN/m für globale Sicherheitsbeiwerte und zu $p = 22,4$ kN/m für Teilsicherheitsbeiwerte. Mit dem Rechenprogramm des genauen Verfahrens [8] werden zulässige Lasten von zu $p = 19,8$ kN/m, bzw. 21,3 kN/m für globale bzw. geteilte Sicherheitsbeiwerte berechnet.

Beispiel 4 : Stahlbetonträger Bild 12 - Iteration der maximalen Last																			
Dimensionen in m und kN	Globale Sicherheitsbeiwerte						Teilsicherheitsbeiwerte												
	$\gamma_b=1,0$	$\gamma_s=1,0$	$\gamma_g=1,75$	$\gamma_p=1,75$	$\gamma_b=1,2$	$\gamma_s=1,15$	$\gamma_g=1,35$	$\gamma_p=1,5$											
Werkstoffkenngrößen	$\beta_R = 27000$	$\beta_{SS} = 500000$	$\beta_{SV} = ---$				$\beta_R = 22500$	$\beta_{SS} = 435000$	$\beta_{SV} = ---$										
Steifigkeiten Zustand I	$(EI_z)_0 = 29570$	$(GI_t)_0 = 18670$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 18670$				$(EI_z)_0 = 25114$	$(GI_t)_0 = 15550$	$(\tilde{GI}_t)_0 = 15550$										
Belastung des Trägers und Momente in Trägermitte $\xi = 0,5$ aus Eigenlast $g_0 = 5,94$ und $\Delta g = 0$: $M_{m,0} = M_{m,g} = 240,7$ $\Delta M = 0$ iteriertes Moment ($\Delta M_p = 0$) der Verkehrslast p_0 auf dem Obergurt für $\gamma_u = 1$ (6.44)																			
Approximation der Steifigkeitsverläufe																			
	Parabel BT - II		Sinus BT - I			Parabel BT - II		Sinus BT - I											
$M_{y,kr}$ (6.44)	1668,9		1954,5			1453,5		1685,2											
$M_{m,p} = M_{y,kr} - \gamma_g M_{m,g}$	1247,7		1533,3			1128,6		1360,3											
Querschnittswerte im kritischen Schnitt $\xi = 0,5$																			
M_{yI} (γ -fach)	1668,9		1954,5			1453,5		1685,2											
$(EI_z)_m$ ($\tilde{GI}_t)_m$ ($EI_r)_m$	15922	4579	1130	14953	4378	1301	13907	4111	879	13144	3948	1000							
z_S z_M bez. auf S	0,459 von OK -0,138		0,466 von OK -0,129			0,499 von OK -0,141		0,506 von OK -0,131											
Vorwerte für FormelAuswertung																			
Bezugslinie z_{bez}	0,459		0,466			0,499		0,506											
für g : $z_{A,0}$ Δz_A $\gamma_g g_0$	0,250	0	10,4	0,242	0	10,4	0,210	0	8,02	0,208	0	8,02							
für p : $z_{A,0}$ Δz_A p_{kr}	-0,459	0	30,81	-0,466	0	21,63	-0,499	0	27,87	-0,506	0	33,59							
$\frac{\Delta(EI_z)_m}{(EI_z)_0}$ $\frac{\Delta(\tilde{GI}_t)_m}{(\tilde{GI}_t)_0}$	0,4615		0,7546			0,4943		0,7654			0,4463		0,7356		0,4766		0,7461		
k_1 k_2 (6.23a-b)	1,2825		-0,2303			1,2825		-0,1995			1,2825		-0,2381			1,2825		-0,2090	
k_3 k_4 (6.23c-d)	0,1427		0,2303			0,2145		0,1995			0,1570		0,2381			0,2288		0,2090	
k_5 (6.23e)	0,0554					0,0588					0,0569					0,0603			
c_1 c (6.22b,a)	0,0079		1,4110			0,0064		1,6890			0,0085		1,4621			0,0069		1,7302	
$M_{m,kr}$ (6.22) η_{kr} (6.34)	1841		1,103			2204		1,1277			1605		1,1044			1900		1,1272	
$v_{M,m}$ (6.35)	0,202					0,169					0,200					0,169			
z_1 z_2 z_3 (6.32a-c)	80,2	13,4	0,26	78,5	15,6	0,4	69,2	11,6	0,3	67,9	13,5	0,4							
n_1 n_2 n_3 (6.32d-f)	1324,6	202,5	-52,7	1792,1	229,6	-80,2	1183,2	164,1	-64,4	1563,1	183,6	-89,1							
ϑ_I (6.33) ϑ_{II} (6.36)	0,064		0,069			0,049		0,054			0,063		0,068			0,049		0,054	
M_t (6.39)	61					62					54					55			
Bruchsicherheitsnachweis im kritischen Schnitt $\xi = 0,5$ [$\sin(\pi\xi) = 1,0$ $M_z = \vartheta_{II} \sin(\pi\xi) M_{yI}$]																			
M_{yI} M_z $resM$	1669	115	1673	1954,5	105	1957	1453,5	99	1457	1685	91	1687							
ϵ_{bu} ϵ_{zu} Nulllinienwinkel	-3,5	+2,2	83°	-3,5	+2,5	81°	-3,5	+2,0	84°	-3,5	+2,2	81°							
M_u $\gamma_u = M_u / resM$	1674		1,001			1955		0,999			1458		1,001			1687		1,000	
Zulässige Verkehrslast des Näherungsverfahrens für die Iteration $\gamma_u = 1$ in Gleichung (6.43)																			
zul $p = p_{kr}/\gamma_p$	17,6		21,6 > 19,8 (!)			18,6		22,4 > 21,3 (!)											
zul $p /$ zul p_{TheoII}	0,89		1,09			0,87		1,05											
Ergebnisse nach Theorie II. Ordnung mit dem Rechenprogramm [8]																			
zul p_{TheoII}	19,8		21,3																
$v_{M,m}$ ϑ_I M_t	0,127		0,034			42		0,130		0,034			37						

Tabelle 5b : Zusammenstellung der Ergebnisse der Zahlenrechnung für Beispiel 4 – Iteration Maximallast
 Table 5b : Results of numeric example 4 – Iteration of maximum load

Wie beim Beispiel 1 ist nicht das Überschreiten der Werkstoffestigkeiten die Ursache für das Stabilitätsversagen, sondern der Träger verliert seine Tragfähigkeit durch einen Steifigkeitsabfall. Dies macht sich rechnerisch durch divergierende Verformungen bemerkbar, d.h. die berechneten Verformungen nehmen bei Überschreiten der Grenzbelastung überproportional zu. Im letzten stabilen Gleichgewichtszustand liegt die berechnete horizontale Verschiebung mit 0,23 m geringfügig unter dem Wert $l/100$. Die Verdrehung bleibt mit etwa 0,03 rad aber deutlich unter dem Grenzwert von 0,1 rad.

Obwohl die vorgegebene Last noch unterhalb der zulässigen Lasten des genauen Verfahrens liegt, liefert das Näherungsverfahren mit einer richtigen parabelförmigen Steifigkeitsapproximation keine ausreichende Kippsicherheit. Zu beachten ist jedoch dabei, daß die vorgegebene Last von 19,2 kN/m nur sehr wenig (3 %) unterhalb der zulässigen Last des genauen Verfahrens von 19,8 kN/m liegt. Hier stößt das Näherungsverfahren ganz gezielt an seine Grenzen, da eine so dicht bei der kritischen Last liegende Belastungsvorgabe nur noch mit einem genauen Verfahren nach Theorie II. Ordnung behandelt werden sollte.

Vorsicht ist hier bei der Anwendung des Näherungsverfahrens mit der Sinusapproximation geboten, da die Ergebnisse der Lastiteration deutlich über denen des genauen Verfahrens und damit auf der unsicheren Seite liegen. Dies steht im übrigen nicht im Widerspruch mit den Aussagen im Aufsatz [38], wo dieses Beispiel ebenfalls behandelt worden ist. Damals in 1990 ist als einziger Punkt nur geprüft worden, ob für den gegebenen Lastfall das damals nur mit der Sinusapproximation ausgestattete Näherungsverfahren eine ausreichende Kippsicherheit liefert oder nicht. Dies ist damals bejaht worden und gilt auch jetzt noch, denn die vorhandene Belastung liegt unterhalb der mit dem genauen Verfahren ermittelten Grenzlast. Daß die Sinusapproximation der Steifigkeitsverläufe bei diesem Beispiel unzutreffend ist und sogar auf der unsicheren Seite liegt, ist erst wesentlich später bei den systematischen Untersuchungen zu den Steifigkeitsverläufen im Rahmen der Arbeiten zur Erweiterung des Näherungsverfahrens [49] festgestellt worden.

6.9.3 Zusammenfassende Bemerkungen zu den Beispielen 1 – 4

Die Gegenüberstellungen der Ergebnisse zeigen sehr deutlich, daß der richtige Approximationsansatz für die Steifigkeitsverläufe die Ergebnisse des Näherungsverfahrens ganz entscheidend beeinflusst. In den Tabellen 2b bis 5b zeigt der Vergleich der Versagenslasten des Näherungsverfahrens mit denen des genauen Verfahrens nach Theorie II. Ordnung [8], daß mit dem Näherungsverfahren bei einer zutreffenden Approximation der Steifigkeitsverläufe etwa 5-10% kleinere Versagenslasten berechnet werden.

Bei einer deutlichen Fehleinschätzung der Steifigkeitsverläufe liegen bei einer Unterschätzung der Steifigkeiten wie beim Beispiel 3, Tabelle 4b – Parabelnäherung , die ermittelten zulässigen Lasten des Näherungsverfahrens um etwa 20% niedriger als die des genauen Verfahrens. Dies ist nicht weiter schlimm, da die Ergebnisse auf der sicheren Seite liegen und auch noch nicht allzu weit von der kritischen Belastung entfernt sind. Bei einer Überschätzung der Steifigkeiten wie bei den Beispielen 1 und 4, Tabellen 2b und 5b – Sinusnäherung , ergeben sich mit dem Näherungsverfahren aber um bis zu 9% größere zulässige Belastungen als mit dem genauen Verfahren. Damit liegen diese Ergebnisse

deutlich auf der unsicheren Seite, was äußerst unangenehme Folgen haben kann. Es bieten sich zwei Möglichkeiten an, dieses Problem zu bewältigen. Entweder werden die Steifigkeitsverläufe über die Trägerlänge ermittelt und damit die zutreffende Approximation gewählt, oder es wird von vorn herein die bisher bei allen Untersuchungen immer auf der sicheren Seite liegende Parabel-Approximation genommen. Da ohne ein entsprechendes Rechenprogramm umfassende Steifigkeitsanalysen über die Trägerlänge nur schwierig zu bewerkstelligen sind, sollte für vereinzelte Anwendungen des Näherungsverfahrens die zweite Möglichkeit bevorzugt werden. Das zum Näherungsverfahren gehörende Rechenprogramm [50] nimmt eine Steifigkeitsanalyse über die Trägerlänge vor und gibt dann Hinweise, welche Approximation die zutreffendere ist.

7. Grundlegende Zusammenhänge und Hinweise

In diesem Abschnitt soll auf einige interessant erscheinende Ergebnisse und Erfahrungen eingegangen werden, die sich im Laufe der vergangenen Jahre bei den Stabilitätsuntersuchungen einer Vielzahl von Stahlbeton- und Spannbetontägern mit dem Rechenprogramm nach Röder [8] angesammelt haben. Weiterhin werden einige wesentliche grundlegende Zusammenhänge dargestellt und erläutert.

Ein wirklichkeitsnaher Kippnachweis zeichnet sich dadurch aus, daß geometrische Imperfektionen angesetzt werden, mit denen unter Zuhilfenahme von Berechnungsverfahren nach Theorie II. Ordnung ein Zusatzbiegemoment um die schwache Trägerachse ermittelt und dann ein Bruchsicherheitsnachweis auf zweiachsige Biegung geführt wird. Die Schwierigkeit besteht meist darin, daß diese Berechnungen nach Theorie II. Ordnung keine alltäglichen Ingenieuraufgaben sind, und daß Rechenprogramme, falls sie dem Ingenieur überhaupt zur Verfügung stehen, immer einen größeren numerischen Aufwand verlangen.

7.1 Kippstabilität im Zusammenhang mit durchgeführter Biegebemessung

Ausgangspunkt für eine Stabilitätsuntersuchung auf Kippen ist der bemessene Biegeträger, wobei diese Standardbemessung nur für eine normalerweise planmäßig in der Hauptbiegungsebene angreifende Belastung durchgeführt wird. Erst daran anschließend wird bei Erfordernis ein Kippnachweis geführt.

Ein erster Anhaltspunkt, ob ein zu untersuchender Träger zum Kippversagen neigt oder nicht, kann bereits an den Ergebnissen des Bruchsicherheitsnachweises im Rahmen der Bemessung auf einachsige Biegung abgelesen werden, und zwar hauptsächlich an der Beanspruchung der Betondruckzone im rechnerischen Bruchzustand. Üblicherweise sind die hier betrachteten Querschnitte so bemessen, daß auf der Biegezugseite die zulässige Dehnung von 5‰ ausgenutzt wird. Über die Gleichgewichtsbedingung Zugkraft in der Bewehrung gleich Druckkraft im Beton, stellt sich die zugehörige Randstauchung des Betons ein. Liegt nun diese Randstauchung etwa in einem Bereich von 0 bis -1‰, so kann mit ziemlicher Sicherheit davon ausgegangen werden, daß der Querschnitt über genügend Tragreserven verfügt und auch im Falle einer zweiachsigen Biegebeanspruchung in der beim Kippnachweis auftretenden

Größenordnung nicht versagt. Bewegt sich die Randstauchung aber schon im Bereich um -2‰ oder sogar darüber, so sind die Tragreserven eines Querschnitts für den Fall der zweiachsigen Biegung schnell erschöpft. Es zeichnet sich bereits hier an der Größe der Randstauchung bei einachsiger Biegebeanspruchung ab, daß der Träger bei Kippuntersuchungen mit sehr großer Wahrscheinlichkeit versagen wird. Dieses Verhaltensmuster der Träger für das Kippverhalten bei sehr geringer und bei sehr hoher Auslastung der Druckzone für einachsige Biegebeanspruchung ist weitestgehend unabhängig von der Querschnittsgeometrie. Für den Bereich der Randstauchungen zwischen etwa -1‰ und -2‰ spielt die Querschnittsgeometrie des betrachteten Trägers eine sehr viel entscheidendere Rolle, so daß dafür keine allgemeingültigen Aussagen gemacht werden können. Es dürfte jedoch klar sein, daß Träger mit ausgeprägten Obergurten weit weniger kippgefährdet sind, als solche, wo der Obergurt nur als "Stegverdickung" ausgebildet ist.

Vollständigkeitshalber soll an dieser Stelle noch erwähnt werden, daß Biegeträger, für die aufgrund der geometrischen Gegebenheit ein Stabilitätsnachweis zu führen ist, und bei denen die Biegedruckseite für das Bruchverhalten bei einachsiger Biegung maßgebend ist ("stark bewehrte" Querschnitte), aufgrund der vorstehenden Ausführung in höchstem Maße kippgefährdet sind.

Eine weitere Hilfestellung bei der Vorhersage einer Versagenstendenz für die Kippstabilität eines Trägers gibt die tatsächlich vorhandene Bruchsicherheit für einachsige Biegung. Bei der Bemessung wird bekanntlich für eine geforderte Bruchsicherheit die Bewehrungsfläche der Zugbewehrung ermittelt. Normalerweise ist es besonders unter Wahrung konstruktiver Vorgaben und Gesichtspunkten nicht immer möglich, genau die berechnete Bewehrungsfläche mit Bewehrungsstäben abzudecken. Meist wird eine größere Bewehrungsfläche als die rechnerisch erforderliche eingelegt, wodurch sich die rechnerische Bruchsicherheit vergrößert. Je größer nun die aufgrund der vorhandenen Zugbewehrung tatsächliche Bruchsicherheit im Vergleich zur geforderten ist, desto günstiger wirkt sich dies auf das Kippverhalten eines Trägers aus. Eine spürbare Wirkung wird natürlich nur dann erreicht, wenn eine deutliche Erhöhung der Bruchsicherheit zu verzeichnen ist. Um eine Zahl zu nennen, sollte bei einem geforderten globalen Sicherheitsbeiwert von 1,75 die tatsächliche Bruchsicherheit über 1,85 liegen.

7.1.1 Abhängigkeit des Bruchmoments von der Nulllinienneigung

Um die vorstehenden, mehr allgemeinen Ausführungen an einem Beispiel zu verdeutlichen, ist der im Bild 17 abgebildete Querschnitt (siehe Kap. 7.6.1) ausgewählt worden. Zur Veranschaulichung sind an diesem Querschnitt die Zusammenhänge zwischen rechnerischem Bruchmoment M_u des Querschnitts, Neigungswinkel α des resultierenden äußeren Momentenvektors, Neigungswinkel β der Verzerrungsnulllinie und Randverzerrungen ϵ_Z und ϵ_D auf der Zug- und Druckseite des Querschnitts untersucht worden. Bild 13 gibt die Definition der verwendeten Größen an.

Der Querschnitt zählt mit seinen Abmessungen von ca. 1,1 m Höhe, 35 cm Gurt- und 17 cm Stegbreite zu den gedungenen und damit erfahrungsgemäß zu den weniger kippgefährdeten Querschnittstypen. Für den Fall der planmäßig einachsigen Biegung ist der Querschnitt so bemessen, daß in Trägermitte die Sicherheit gegen rechnerisches Biegebruchversagen $\gamma_u = 2$ beträgt. Unter diesem Gesichtspunkt sind eigentlich ausreichende Tragreserven für den Stabilitätsnachweis vorhanden. In der Druckzone des Querschnitts tritt dabei jedoch eine Randstauchung des Betons von 2,75‰ auf. Dieser Querschnitt ist also schon für den Fall der einachsigen Biegung in der Betondruckzone sehr hoch ausgenutzt, da für den Bemessungsfall normalerweise die Druckzonen derartiger Biegeträger Randstauchungen von nur etwa 1‰ aufweisen. Durch diesen hohen Ausnutzungsgrad reagiert der Querschnitt deshalb besonders empfindlich auf die bei einer Berechnung nach Theorie II. Ordnung auftretende zweiachsige Biegung.

In den Bildern 14a-c sind die Ergebnisse der mit den Rechenprogrammen [8] und [29] durchgeführten systematischen Untersuchungen der rechnerischen Bruchzustände des Querschnitts dargestellt. Es sind zuerst der Zusammenhang des Neigungswinkels β der Verzerrungsnulllinie mit dem Neigungswinkel α des resultierenden äußeren Momentenvektors $\text{res}M$ ($\alpha \approx \tan \alpha = M_z/M_y$) und dann in Abhängigkeit des Winkels β das rechnerische Bruchmoment M_u und die zugehörigen Randverzerrungen ϵ_Z und ϵ_D auf der Zug- und Druckseite angegeben. Es zeigt sich, daß bei einer Zunahme des Winkels α (Drehung des äußeren Momentenvektors) bis auf etwa 7° der Neigungswinkel β der Verzerrungsnulllinie sehr schnell bis auf Werte zwischen 70° und 80° ansteigt.

Ausgehend vom Fall der einachsigen Biegung ($\alpha=0^\circ$; $\beta=0^\circ$) mit einem rechnerischen Bruchmoment von etwa 1890 kNm und den zugehörigen Randverzerrungen von +5‰ auf der Zug-, bzw. -2,75‰ auf der Druckseite nimmt mit der Drehung der Verzerrungsnulllinie zunächst die Betonrandstauchung stetig zu, wobei die zulässige Dehnung auf der Zugseite ausgenutzt wird. Das rechnerische Bruchmoment ändert sich in diesem Bereich nur geringfügig. Gleichzeitiges Erreichen der zulässigen Grenzrandverzerrungen von -3,5‰ auf der Druck- und +5‰ auf der Zugseite mit einem zugehörigen rechnerischen Bruchmoment $M_u \approx 820$ kNm tritt bei einem Neigungswinkel $\beta \approx 40^\circ$ auf, der durch eine Neigung des äußeren Momentenvektors $\alpha \approx 2^\circ$ ($M_z \approx 0,04 M_y$) hervorgerufen wird. Bei einer weiteren Drehung der Verzerrungsnulllinie in Richtung der vertikalen Achse wird nun die zulässige Betonstauchung mit 3,5‰ ausgenutzt und die Zugdehnung nimmt ab. Dieser Vorgang ist jedoch mit einer deutlichen Verringerung des rechnerischen Bruchmoments verbunden. Im ungünstigsten berechneten Fall betragen die Zahlenwerte:

$$\alpha = 0,13 \approx 7^\circ \rightarrow \beta \approx 77^\circ \rightarrow M_u \approx 1370 \text{ kNm}$$

mit $\epsilon_D = -3,5\text{‰}$ und $\epsilon_Z = +3,3\text{‰}$.

Dies ist eine Verkleinerung des rechnerischen Bruchmoments von etwa 30% gegenüber dem Fall der einachsigen Biegung.

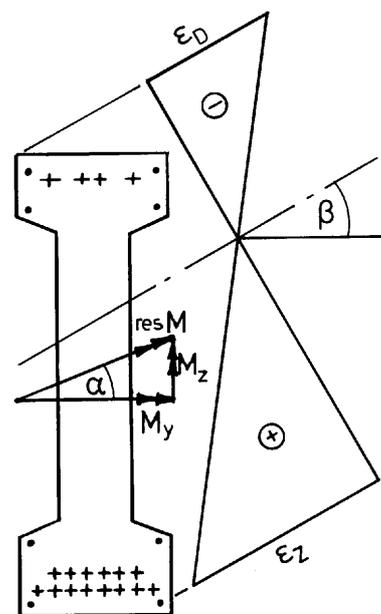


Bild 13 : Definition der Neigungswinkel und Stelle der Randverzerrungen
 Fig. 13 : Definition of angles and place of boundary strains

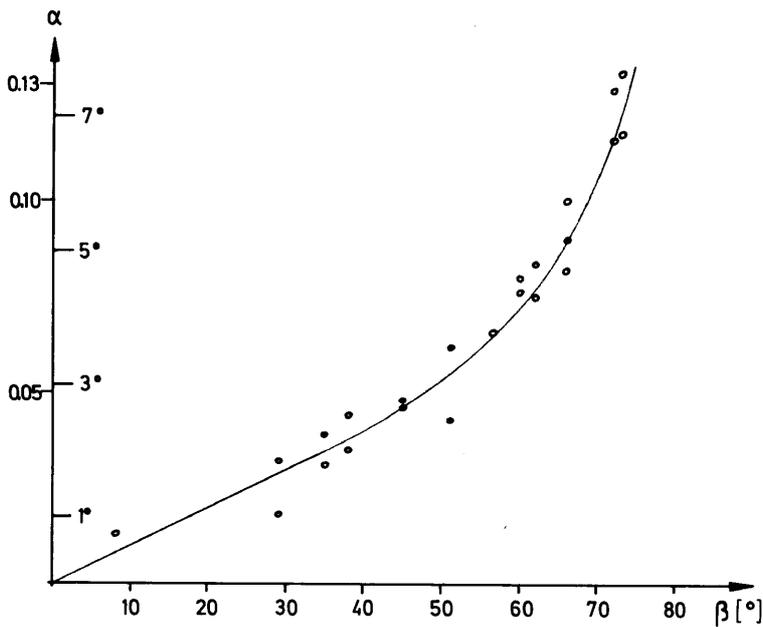


Bild 14a :
 Neigungswinkel β der Verzerrungsnulllinie in Abhängigkeit der Winkels α des resultierenden äußeren Momentenvektors
 Fig. 14a :
 Angle of inclination β of the neutral axis as a function of the angle α of the resultant external moment vector

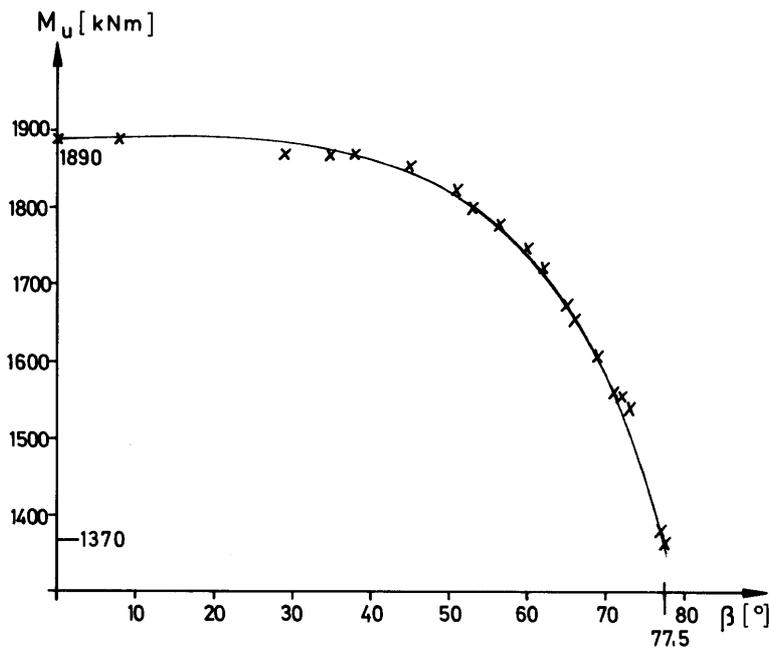


Bild 14b :
 Rechnerisches Bruchmoment M_u in Abhängigkeit des Neigungswinkels β
 Fig. 14b :
 Calculated failure moment M_u as a function of the angle of inclination β

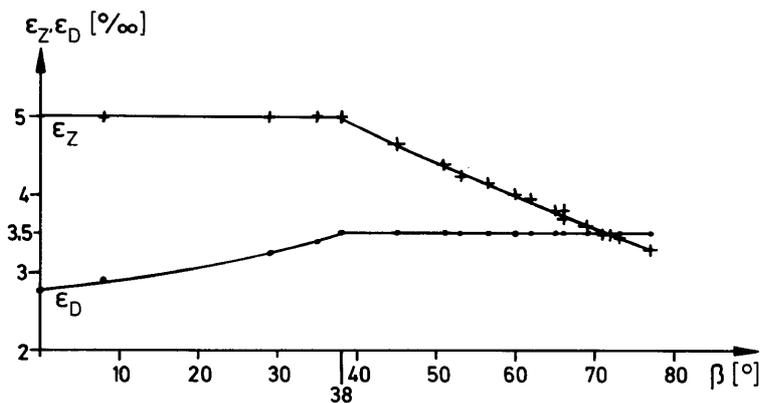


Bild 14c :
 Randdehnung ϵ_Z (+) und Randstauchung ϵ_D (-) des rechnerischen Bruchzustandes in Abhängigkeit des Neigungswinkels β der Nulllinie
 Fig. 14c :
 Boundary strains ϵ_Z (+) and ϵ_D (-) of the calculated failure state as a function of the angle of inclination β of the neutral axis

7.2 Abschätzung des Nebenbiegemoments

Vor allem im Planungszustand wird dem Kippverhalten eines Biegeträgers nur sehr wenig Aufmerksamkeit geschenkt, eben weil Kippuntersuchungen normalerweise einen verhältnismäßig großen Berechnungsaufwand erfordern. Aus diesem Grunde sind „Faustformeln“ zur realistischen Abschätzung des Kippverhaltens eines Biegeträgers sehr hilfreich, die mit geringem Aufwand und geläufigen Nachweisen ein brauchbares Ergebnis liefern. Aufgrund der Erkenntnisse der im Rahmen dieser Arbeit vorgenommenen systematischen Untersuchungen an einer Vielzahl von Betonträgern (s. Kap. 6.3) und der im Laufe der letzten 20 Jahre gesammelten Erfahrungen lassen sich Grenzbetrachtungen durchführen, die eine Aussage zum Kippverhalten eines Biegeträgers ermöglichen. Die folgenden Ausführungen gelten für die bei Stabilitätsberechnungen üblichen anzusetzenden Imperfektionen, z.B. in Form von sinus- oder parabelförmig verlaufenden Vorverformungen mit einem Stich in der Mitte von $v_{0,m} = 1/1000 \div 1/500$ für die seitliche Verschiebung und von $\vartheta_{0,m} = 0,5\% \div 1\%$ für die Verdrehung oder in Form anderer Ansätze (Lastausmitteln), die ähnliche Zusatzbeanspruchungen im Träger hervorrufen.

Wie bereits mehrfach gesagt, wird unter Beachtung wirklichkeitsnaher Ansätze der Nachweis der Kippstabilität mit einem Bruchsicherheitsnachweis auf zweiachsige Biegung geführt. Auch die genaueren Berechnungsmethoden, wie z.B. die hier beschriebene, lassen sich grundsätzlich auf diesen Nachweis in ihrem Kern zurückführen, wobei jedoch i.a. ein noch sehr viel größerer Berechnungsaufwand als bei dem hier vorgestellten Näherungsverfahren erforderlich ist. Da Rechenprogramme zur Durchführung eines Bruchsicherheitsnachweises im Stahlbetonbau, auch für den Fall der zweiachsigen Biegung, zum Standard eines jeden Ingenieurbüros gehören, können die folgenden Schritte von jedem, auch nicht mit der Materie vertrauten Ingenieur sehr leicht angewendet werden.

Für einen zu untersuchenden Trägerquerschnitt im kritischen Schnitt des Trägers sind dementsprechend mehrere Bruchsicherheitsnachweise auf zweiachsige Biegung zu führen, wobei die wesentliche Schwierigkeit, nämlich die Ermittlung des Nebenbiegemomentes, durch den Ansatz von Grenzwerten umgangen wird. Der Zusammenhang zwischen bekanntem Hauptbiegemoment $M_{y,1}$ und unbekanntem Nebenbiegemoment M_z wird über die Verdrehung ϑ in der Form $M_z = |\vartheta \cdot M_{y,1}|$ hergestellt (s. Kap. 6.7).

Für diese Verdrehung ϑ werden nun die folgenden Grenzwerte angesetzt :

1. oberer Grenzwert $\vartheta = 0,1$

Die Festlegung dieses Wertes liegt darin begründet, daß bei der Behandlung des Kippproblems nach Theorie II. Ordnung u.a. Vereinfachungen der Form $\sin\vartheta \approx \tan\vartheta \approx \vartheta$ und $\cos\vartheta \approx 1$ getroffen werden. Diese Annahmen sind nur bis etwa $\vartheta = 5^\circ \approx 0,1$ vertretbar. Größere berechnete Verdrehungen sind im Rahmen der Theorie nicht zulässig und werden dazu verwendet, ein Trägerversagen anzuzeigen. Die berechnete Verdrehung kann demnach also höchstens $\vartheta = 0,1$ betragen.

⇒ Es wird ein Bruchsicherheitsnachweis mit dem Hauptbiegemoment $M_{y,1}$ und dem Nebenbiegemoment $M_z = 0,1M_{y,1}$ geführt :

- a.) Liefert dieser Nachweis eine ausreichende Bruchsicherheit, so ist der untersuchte Träger normalerweise nicht kipgefährdet, und ein Nachweis der Kippsicherheit könnte deshalb entfallen. Ist eine Berechnung der Kippstabilität jedoch erforderlich, so ist auf jeden Fall das Näherungsverfahren ausreichend.
- b.) Ist die Bruchsicherheit nicht vorhanden, so ist ein weiterer Schritt erforderlich :

2. mittlerer Wert $\vartheta = 0,05$

Die Festlegung dieses Zahlenwertes beruht auf Erfahrungen durch den langjährigen Umgang mit der Kippproblematik. Wenn ein Träger die bei Verdrehungen dieser Größenordnung entstehenden Nebenbiegemomente noch problemlos zusätzlich aufnehmen kann, weist er ein normales Kippverhalten auf. Es kann damit erfahrungsgemäß festgestellt werden, ob ein Näherungsverfahren oder ein genaueres Verfahren bei der Berechnung der Kippstabilität zum Ziele führt.

⇒ Es ist ein weiterer Bruchsicherheitsnachweis mit dem Hauptbiegemoment $M_{y,1}$ und einem Nebenbiegemoment $M_z = 0,05M_{y,1}$ zu führen :

- a.) Bei ausreichender Bruchsicherheit genügt für den Kippsicherheitsnachweis ein Näherungsverfahren.
- b.) Ist die Bruchsicherheit auch diesmal nicht vorhanden, so ist der untersuchte Träger als kritisch einzustufen, und es ist ein letzter Schritt angeraten :

3. unterer Grenzwert $\vartheta = 0,03$

Auch die Festlegung dieses Zahlenwertes beruht auf Erfahrungen durch den langjährigen Umgang mit der Kippproblematik.

- ⇒ Es ist ein Bruchsicherheitsnachweis mit dem Hauptbiegemoment $M_{y,I}$ und dem Nebenbiegemoment $M_z = 0,03M_{y,I}$ zu führen :
- Liefert der Nachweis diesmal schließlich eine ausreichende Bruchsicherheit, so weist der untersuchte Träger ein kritisches Kippverhalten auf. In diesem Falle wird ein Nachweis der Kippstabilität nur mit genauen Verfahren zu einem zufriedenstellenden Ergebnis führen.
 - Ist die Bruchsicherheit nicht gegeben, so ist der untersuchte Träger in höchstem Maße kippgefährdet. Es ist zu erwarten, daß auch ein genaues Verfahren zur Berechnung der Kippstabilität keine ausreichende Sicherheit liefert. Abhilfe schaffen hier nur einschneidende Maßnahmen wie eine Verringerung der Belastung oder eine Vergrößerung des Querschnitts (Verbreiterung des Obergurtes).

Mit diesen höchstens drei Bruchsicherheitsnachweisen kann die Kippstabilität eines Biegeträgers hinreichend genau abgeschätzt werden. Bei Parallelgurtbindern sind die Nachweise in Bindermitte, bei Satteldachträgern im kritischen Schnitt (s. Kap. 6.8.1) zu führen. Im Bild 15 sind die vorstehend beschriebenen Schritte schematisch zusammengestellt.

Die Anwendung dieser einfachen Abschätzung liefert für den Satteldachbinder des Beispiels 1 im kritischen Schnitt für globale Sicherheitsbeiwerte $M_y = 4320 \text{ kNm}$, $M_z = 0,1 \cdot M_y = 432 \text{ kNm}$ und $resM = 4341,5 \text{ kNm}$. Mit einem entsprechenden Rechenprogramm [29] ergibt sich das Bruchmoment des Querschnitts $M_u = 4342 \text{ kNm}$, was fast genau dem Lastmoment entspricht. Die geforderte Bruchsicherheit auf zweiachsige Biegung ist damit gerade vorhanden. Für Teilsicherheitsbeiwerte lauten die Momente $M_y = 3572 \text{ kNm}$, $M_z = 357,2 \text{ kNm}$, $resM = 3590 \text{ kNm}$ und $M_u = 3873 \text{ kNm}$. Die Bruchsicherheit ist in diesem Fall auch gegeben. Die Kippstabilität des Satteldachbinders kann deshalb in beiden Fällen mit einem Näherungsverfahren geführt werden, was ja im Kap. 6.9 bereits gezeigt worden ist. Dieses Beispiel stellt gerade den Grenzfall dar, wo bei globalen Sicherheitsbeiwerten unter der angesetzten Last genau die geforderte Bruchsicherheit erfüllt wird. Ob nun ein Kippsicherheitsnachweis in diesem Grenzfall erforderlich ist oder nicht, hängt von der Erfahrung

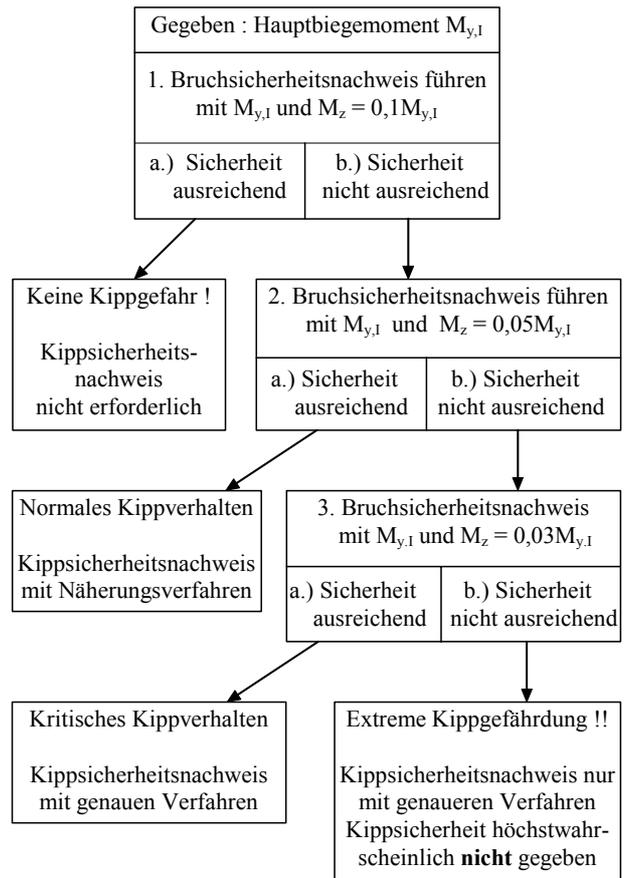


Bild 15 : Ablaufschema für einfache Abschätzung der Kippstabilität

Fig. 15 : Flow chart of simplified method for lateral buckling

des Ingenieurs ab. Im Zweifelsfall sollte der Nachweis geführt werden. Bei den Teilsicherheitsbeiwerten könnte der Kippsicherheitsnachweis aufgrund dieser Abschätzung auch entfallen.

Bei globalen Sicherheitsbeiwerten lauten für den Satteldachbinder Beispiel 2 die Lastmomente $M_y = 4048,5 \text{ kNm}$; $M_z = 0,1 \cdot M_y = 404,85 \text{ kNm}$ und $resM = 4069 \text{ kNm}$ und das rechnerische Bruchmoment $M_u = 3271 \text{ kNm}$. Die Bruchsicherheit auf zweiachsige Biegung ist für diesen Fall nicht gegeben. Damit ist ein Kippsicherheitsnachweis erforderlich. Für den zweiten Schritt ergibt sich bei gleichem Hauptbiegemoment $M_y = 4048,5 \text{ kNm}$ ein Nebenbiegemoment $M_z = 0,05M_y = 202,4 \text{ kNm}$ und ein resultierendes Moment $resM = 4053,5 \text{ kNm}$. Das rechnerische Bruchmoment wird zu $M_u = 4360 \text{ kNm}$ ermittelt und ist größer als das angesetzte Lastmoment. Die Bruchsicherheit ist damit gegeben, und folglich kann der Kippsicherheitsnachweis mit einem Näherungsverfahren erfolgen. Beim Ansatz von Teilsicherheitsbeiwerten lauten die Momente $M_y = 3364,6 \text{ kNm}$, $M_z = 336,5 \text{ kNm}$, $resM = 3381 \text{ kNm}$ und $M_u = 2841 \text{ kNm}$.

Die erforderliche Bruchsicherheit ist für den ersten Schritt ebenfalls nicht vorhanden. Im zweiten Schritt lautet das Nebenbiegemoment $M_z = 168,23 \text{ kNm}$, das resultierende Moment $\text{resM} = 3369 \text{ kNm}$ und das Bruchmoment $M_u = 3810 \text{ kNm}$. Nun ist die Bruchsicherheit auch hier gegeben, und für einen Nachweis der Kippsicherheit reicht ein Näherungsverfahren aus.

Für den Parallelgurträger Beispiel 3 ergeben sich im Falle globaler Sicherheitsbeiwerte zunächst die Nachweismomente $M_y = 3492,5 \text{ kNm}$, $M_z = 0,1 \cdot M_y = 349,25 \text{ kNm}$ und $\text{resM} = 3510 \text{ kNm}$ und ein rechnerisches Bruchmoment $M_u = 2449 \text{ kNm}$. Da das Lastmoment größer als das Bruchmoment ist, folgt der zweite Schritt mit $M_z = 0,05M_y = 174,6 \text{ kNm}$ und einem resultierendem Moment $\text{resM} = 3497 \text{ kNm}$. Das rechnerische Bruchmoment lautet jetzt $M_u = 3495 \text{ kNm}$ und entspricht etwa dem Lastmoment. Für Teilsicherheitsbeiwerte ergibt sich zuerst $M_y = 2893,4 \text{ kNm}$, $M_z = 289,3 \text{ kNm}$ und $\text{resM} = 2908 \text{ kNm}$ und das rechnerische Bruchmoment $M_u = 2250 \text{ kNm} < \text{resM}$, sowie $M_y = 2893,4 \text{ kNm}$, $M_z = 144,7 \text{ kNm}$, $\text{resM} = 2897 \text{ kNm}$ und $M_u = 3137 \text{ kNm} > \text{resM}$. Damit kann in beiden Fällen ein Kippsicherheitsnachweis mit einem Näherungsverfahren geführt werden.

Bei dem nicht vorgespannten Stahlbetonträger Beispiel 4 wird zuerst für die globale Sicherheit ein Bruchsicherheitsnachweis mit $M_y = 1782 \text{ kNm}$, $M_z = 0,1 \cdot M_y = 178,2 \text{ kNm}$ und $\text{resM} = 1801 \text{ kNm}$ geführt und dabei ein nicht ausreichendes rechnerisches Bruchmoment $M_u = 1230 \text{ kNm}$ ermittelt. Mit $M_z = 0,05M_y = 98,6 \text{ kNm}$ und einem resultierendem Moment $\text{resM} = 1795 \text{ kNm}$ ergibt sich ein Bruchmoment $M_u = 1928 \text{ kNm}$. Bei den Teilsicherheiten führt der Nachweis mit $M_y = 1491,3 \text{ kNm}$, $M_z = 149,1 \text{ kNm}$ und $\text{resM} = 1499 \text{ kNm}$ auf ein rechnerisches Bruchmoment $M_u = 1089 \text{ kNm} < \text{resM}$, sowie mit $M_y = 1491,3 \text{ kNm}$, $M_z = 74,6 \text{ kNm}$ und $\text{resM} = 1493 \text{ kNm}$ auf $M_u = 2045 \text{ kNm} > \text{resM}$. Auch bei diesem Beispiel wird angezeigt, daß ein Näherungsverfahren ausreichend ist. Dies widerspricht jedoch den Ergebnissen des Näherungsverfahrens in Kap. 6.9 , wonach die Verwendung eines genaueren Verfahrens erforderlich ist. Daß die Abschätzung über die Bruchmomente hier nicht greift, liegt an der Versagensursache des Trägers. Dieser Stahlbetonträger weist ein ganz ausgeprägtes Divergenzverhalten auf, das mittels Abschätzung des rechnerischen Bruchversagens auf zweiachsige Biegung nur sehr unzureichend erfaßt werden kann.

7.3 Einfluß der maßgebenden Steifigkeiten

Einen grundlegenden Zusammenhang zwischen kritischem Biegemoment und maßgebenden Steifigkeiten läßt die Formel (6.22) erkennen. Mit diesem Ausdruck kann der Einfluß von Änderungen bei den Steifigkeiten mit guter Näherung abgeschätzt werden. Danach hängt das kritische Moment von der Quadratwurzel des Produkts aus seitlicher Biegesteifigkeit mal Torsionssteifigkeit ab ($M_{kr} = \text{Faktor} \cdot \sqrt{(EI_z)(GI_t)}$). Auf diese Abhängigkeit des kritischen Moments von beiden Steifigkeiten in gleichem Maße wird ausdrücklich hingewiesen, da konstruktive Maßnahmen, die eigentlich zu einer wesentlichen Verbesserung des Stabilitätsverhaltens eines Trägers gedacht sein sollen, nicht immer die gewünschte Wirkung in dem Maße zeigen, wie es den Vorstellungen entspricht. In diesem Zusammenhang ist die oft diskutierte Frage nach dem Sinn und Zweck einer Obergurtbewehrung, die deutlich über das konstruktive Maß hinausgeht, zu nennen.

Die Ausgangssituation stellt sich bekanntlich so dar, daß für einen betrachteten Träger die ermittelten lastabhängigen Steifigkeiten nicht ausreichen, um den Träger in einer stabilen Lage zu halten. Die Auswirkungen einer Obergurtbewehrung auf die Steifigkeiten lassen sich sehr einfach über den Gleichgewichtszustand an einem Querschnitt erklären. Die inneren und äußeren Schnittgrößen dieses Querschnitts stehen im Gleichgewicht ($\Sigma M=0$, $\Sigma H=0$), wobei dann eine in den Obergurt des Querschnitts eingelegte zusätzliche Druckbewehrung Kräfte vom Beton übernimmt. Da sich die äußeren Bedingungen nicht geändert haben, bewirkt diese Zusatzbewehrung eine Verringerung der Betonbeanspruchung, was zwar zu einer Erhöhung des maßgebenden Elastizitätsmoduls aber auch zu einer Verkleinerung der Betondruckzone führt. Alle bekannten Berechnungsverfahren zur Ermittlung der Steifigkeiten legen aber gerade diese Betondruckzone zugrunde. Diese gegenläufige Wirkung von Vergrößerung des Elastizitätsmoduls und Verkleinerung der wirksamen Betonfläche ist schwierig abzuschätzen. Eine Vielzahl von Vergleichsberechnungen hat jedoch gezeigt, daß bei den hier betrachteten Betonträgern mit den üblichen Querschnittsformen die Verkleinerung der wirksamen Betonfläche den wesentlicheren Einfluß auf die Steifigkeit besitzt. Eine Verkleinerung dieser wirksamen Fläche bedeutet demnach eine Abminderung des Betonanteils dieser Steifigkeiten. Durch die zusätzliche Bewehrung wird diese Wirkung bei den Biegesteifigkeiten mehr als kompensiert, so

daß für die hier maßgebende seitliche Biegesteifigkeit insgesamt meist eine deutliche Vergrößerung herauskommt. Bei der zweiten maßgebenden Steifigkeit, der Torsionssteifigkeit, trifft dies jedoch nicht zu, da die Torsionssteifigkeit ausschließlich über die Betondruckzone berechnet und somit kleiner wird. Zusammengenommen wird also durch eine deutliche Erhöhung der Druckbewehrung im Obergurt die seitliche Biegesteifigkeit zwar ebenfalls vergrößert, die Torsionssteifigkeit jedoch verkleinert. Durch die Abhängigkeit des Stabilitätsverhaltens von beiden Steifigkeiten ist damit der erhoffte Erfolg einer Bewehrungserhöhung im Obergurt meist sehr viel kleiner als zunächst angenommen.

Im Rahmen des Versuchsprogramms von *König/Pauli* [33] ist man ebenfalls der Frage nach der Wirkung einer erhöhten Obergurtbewehrung nachgegangen und hat einen Versuchsträger dementsprechend ausgebildet. Bei den mit dem Rechenprogramm nach *Röder* [8] vorgenommenen Nachrechnungen der Versuche, deren Ergebnisse gemeinsam mit den Versuchsergebnissen im Anhang C angegeben werden, sind mehrere Vergleichsberechnungen besonders zu diesem Themenbereich durchgeführt worden. Im Kap. C1.7 (Anhang C, S.166, 2. Absatz, Bemerkungen zu Versuch 4) werden die Ergebnisse dieser rechnerischen Untersuchungen vorgestellt, und die erzielten Versuchsergebnisse unter Beachtung der versuchseigenen Besonderheiten miteinander verglichen. Die berechneten Zahlenwerte für die Steifigkeiten bestätigen die vorstehenden Ausführungen: bei dem Querschnitt mit konstruktiver Obergurtbewehrung 4Ø12 betragen die Steifigkeiten $(EI_z) = 10400 \text{ kNm}^2$ und $(GI_t) = 4700 \text{ kNm}^2$, bei dem mit erhöhter Obergurtbewehrung 4Ø25 ergibt sich $(EI_z) = 12600 \text{ kNm}^2$ und $(GI_t) = 4400 \text{ kNm}^2$; also seitliche Biegesteifigkeit +21%, Torsionssteifigkeit -6% und damit $\sqrt{1,21 \cdot 0,94} = \sqrt{1,14} = 1,07$. Von der deutlichen Erhöhung der seitlichen Biegesteifigkeit bleibt demnach näherungsweise noch etwa ein Drittel übrig, das sich traglast erhöhend auswirkt.

Stellt sich als Ergebnis einer Stabilitätsuntersuchung also heraus, daß der betrachtete Träger nicht die erforderliche Kippsicherheit aufweist, so müssen geeignete Maßnahmen zur Beseitigung dieses Mißstandes ergriffen werden. Die wirkungsvollste Maßnahme ist eine deutliche Erhöhung der das maßgebende Verformungsverhalten beeinflussenden Größen, also eine Vergrößerung der seitlichen Biegesteifigkeit (EI_z) und der Torsionssteifigkeit (GI_t) . Beides ist nur

durch eine Vergrößerung der zur Steifigkeitsermittlung herangezogenen Querschnittsfläche, im allgemeinen die Betondruckzone, zu erreichen. Dabei wirkt sich eine Vergrößerung des Obergurtes sehr günstig auf beide Steifigkeiten aus, wobei einer Verbreiterung des Obergurtes der Vorzug vor einer Erhöhung der Obergurtdicke zu geben ist. Am besten ist natürlich beides. Dies ist sicherlich auch eine wesentlich wirtschaftlichere Lösung als ein "Begraben" von Bewehrung im Druckgurt eines Biegeträgers, die dort im Grunde genommen nichts zu suchen hat. Denn einen Grundgedanken des Stahlbetonbaus sollte man nicht ganz aus den Augen verlieren, daß nämlich die Bewehrung hauptsächlich zur Aufnahme von Zugkräften vorgesehen ist. Bei den hier behandelten, vorwiegend auf Biegung beanspruchten Trägern gehört die für das Tragverhalten maßgebende Bewehrung nun einmal in den Zuggurt.

7.4 Versagensursachen

Meinungsunterschiede bestehen oft über die Versagensursache von Stahlbetontägern. Dabei wird meist die Vorstellung vertreten, daß grundsätzlich der Beton an der am meisten beanspruchten Ecke im Obergurt zuerst versagt und damit den Versagensvorgang einleitet. Hierbei wird dann auch gleich auf in Augenschein genommene, ausgekippte Träger verwiesen (z.B. die Versuchsträger *König/Pauli* [33]), wo natürlich am Ende des Versagensvorgangs schwerwiegende Schäden in der Betondruckzone zu sehen sind. In diesem Zusammenhang wird dann die Antwort auf die Frage, zu welchem Zeitpunkt des Versagensvorgangs der Beton zu Bruch gegangen ist, gern verschwiegen.

Bei den Berechnungen mit dem Rechenverfahren nach *Röder* [8] lassen sich ganz eindeutig zwei Versagensursachen, nämlich Stabilitätsfall und Werkstoffbruch, unterscheiden (s. Kap. 5). Der Fall des Werkstoffbruchs ist dadurch gekennzeichnet, daß die rechnerische Bruchfestigkeit des Betons in der am höchsten beanspruchten Ecke des Obergurtes erreicht, bzw. überschritten und dadurch ein Trägerversagen angezeigt wird. Bei dieser Laststufe bleiben die zugehörigen maßgebenden Trägerverformungen, wie seitliche Verschiebung und Verdrehung, verhältnismäßig klein. Wird rein rechnerisch die Last noch weiter gesteigert, so tritt als Folge des bereichsweise vorhandenen Betonbruchs eine deutliche Verringerung der noch intakten Betonfläche auf, was eine spürbare Abminderung der wirksamen Steifigkeiten und damit einen sprunghaften Anstieg der Verformungen über das zulässige Maß hinaus bewirkt. Dagegen treten beim als Stabilitätsfall bezeichneten

Versagen im Bereich des Lastmaximums zunächst überproportionale Verformungen auf, ohne daß die Betondruckzone Anzeichen eines rechnerischen Bruchs aufweist. Erst bei weiterer Laststeigerung mit entsprechenden Verformungszunahmen verursacht die Vergrößerung der Verdrehung einen deutlichen Anstieg der Neigung des resultierenden Momentenvektors aus der Horizontalen heraus, was ebenfalls mit einer großen Drehung der Verzerrungsnulie verbunden ist. Dadurch wird die Betondruckzone immer höher ausgelastet, und schließlich ein Betonversagen herbeigeführt.

Diese vorstehenden Kurzbeschreibungen des rechnerischen Versagensablaufs beim Kippen zeigen, daß demnach grundsätzlich große Verformungen und der Bruch der Betondruckzone im Endzustand eines Kippvorgangs zu verzeichnen sind. Der wesentliche Unterschied liegt jedoch im zeitlichen Ablauf des Versagensvorgangs. Als Versagensursache ist dabei immer der Zustand definiert, der den Beginn des Versagens beschreibt. Hat also ein Stahlbetonträger auf Kippen versagt, so ist anhand des ausgekippten Zustands durch bloßes Besichtigen des Trägers hinterher nicht mehr feststellbar, welche Versagensursache den Schaden ausgelöst hat.

7.5 Imperfektionen

Beim Stabilitätsnachweis eines Stahlbetonträgers in wirklichkeitsnaher Form sind immer Imperfektionen anzusetzen, über deren Art und Größe oft Unklarheiten bestehen. Diese Imperfektionen können auf der Lastseite aus ungewollten Exzentrizitäten und auf der Herstellungsseite aus unvermeidbaren geometrischen Ungenauigkeiten bestehen. Normalerweise wird mit geometrischen Imperfektionen in Form von seitlichen Verschiebungen und Verdrehungen um die Trägerlängsachse gerechnet. Der Verlauf dieser Vorverformungen über die Trägerlänge kann sinus- oder parabelförmig angenommen werden. Als Stich einer seitlichen Vorausslenkung in Trägermitte haben sich Werte zwischen $l/500$ für Trägerlängen um 25m und $l/1000$ für Trägerlängen über 30m als sinnvoll und angemessen erwiesen. Zusätzlich sollte immer eine Vorverdrehung angesetzt werden, was einer unterschiedlichen Vorausslenkung von Ober- und Untergurt entspricht. Eine weitere Vorverdrehung ergibt sich aus einer durch das Lagerspiel möglichen Schiefstellung des Trägers in der Gabel. Vom rechnerischen Ansatz her gesehen, entspricht dies einer Starrkörperdrehung um die Lagerlinie, die konstant über die Trägerlinie verläuft. Beide Vorverdrehungen sind immer zu überlagern. Die

Größenordnung für die Vorverdrehung in Trägermitte sollte insgesamt etwa bei 0,01 bis 0,02rad (ca. $0,5^\circ - 1^\circ$) liegen.

Als absolutes Maß einer seitlichen Vorverschiebung am Obergurt als Lastangriffsstelle hat sich ein Wert von etwa 5–6 cm bei vielen bisher durchgeführten Berechnungen mit dem Rechenprogramm nach Röder[8] als ausreichend erwiesen. Dieser Zahlenwert sollte sich aus der Überlagerung aller Vorverformungseinflüsse ergeben. Zur Verdeutlichung dieser Überlagerung soll das folgende Zahlenbeispiel dienen:

gegeben: Trägerlänge $l = 30$ m; Trägerhöhe $h = 2$ m
Lagerspiel in der Gabel 2 cm
gewählt: Vorverschiebung $v_0 = l/1000$;
Vorverdrehung $\vartheta_0 = 0,005$

damit anteilig :

aus $v_0 = l/1000$	$\rightarrow v_{OG} = +3$ cm	$v_{UG} = +3$ cm
aus $\vartheta_0 = 0,005$	$\rightarrow v_{OG} = +0,5$ cm	$v_{UG} = -0,5$ cm
aus Lagerspiel	$\rightarrow v_{OG} = +2$ cm	$v_{UG} = 0$ cm
		$\vartheta = 0,01$
überlagert	$\rightarrow v_{OG} = +5,5$ cm	$v_{UG} = +2,5$ cm
		$\vartheta = 0,015$

Für Näherungsverfahren, bei denen eine Berücksichtigung aller Einzelheiten der Vorverformungsverläufe nicht möglich ist, ergibt sich damit eine mittlere Verschiebung von $v_{0m} = 4$ cm und eine Verdrehung von $\vartheta_0 = 0,015$ jeweils in Trägermitte.

Eine weitere mögliche Imperfektion ist eine exzentrische Lage der Bewehrungen, insbesondere der Spannbewehrungen. Bei den für Stabilitätsberechnungen üblichen Imperfektionsansätzen wird diese Möglichkeit eigentlich nie explizit berücksichtigt. Zweifellos wird der Einfluß einer ausmittig liegenden, nicht vorgespannten Bewehrung nur von untergeordneter Bedeutung sein, wenn die baupraktisch unvermeidbaren Abweichungen von der Sollage nicht überschritten werden. Bei einer exzentrischen Lage der Spannbewehrung können aber schon sehr kleine, im Millimeterbereich liegende Abweichungen von der mittigen Sollage zu rechnerisch deutlichen Traglastverlusten führen. Dies soll beispielhaft an einem Träger mit dem im Bild B8 des Anhangs B dargestellten Querschnitt gezeigt werden. Im Rahmen der im Anhang B getroffenen Vorgaben sind für dieses Beispiel zusätzliche Berechnungen mit exzentrisch liegenden Spannlitzen durchgeführt worden. Als Imperfektion sind drei Exzentrizitäten von 2 mm, von 5 mm und von 10 mm gewählt worden, wobei die Trägerachse als ideal gerade angenommen worden ist. Die Ergebnisse dieser Berechnungen sind im Anhang B, Bilder B8d und Tabelle B9, grafisch und tabellarisch angegeben. Ein Vergleich der Zahlenwerte der

Tabellen B8 und B9 zeigt, daß eine exzentrische Spannritzenlage durchaus mit den üblichen Vorverformungen gleichzusetzen ist. So entspricht bei dem gewählten Beispiel eine Spannritzen-Exzentrizität von 2 mm etwa einer Vorverformung $v_0 = 1/1000$, eine Spannritzen-Exzentrizität von 5 mm etwa einer Vorverformung zwischen $v_0 = 1/500$ und $v_0 = 1/250$ und eine Spannritzen-Exzentrizität von 10 mm etwa einer Vorverformung $v_0 = 1/500 + \vartheta_0 = 0,01$. In diesem Zusammenhang sind noch Untersuchungen zur Überlagerung von Imperfektionen, die jede einzeln für sich rechnerisch unkritischen sind, durchgeführt worden. In der Tabelle B9 des Anhangs B sind entsprechende Beispiele angegeben. Werden z.B. bei dem Träger mit dem Querschnitt nach Bild B8 Vorverformungen $v_0 = 1/2000$ und $\vartheta_0 = 0,005$ mit einer Spannritzen-Exzentrizität von nur 1 mm überlagert, so entspricht dies etwa einem reinen Vorverformungsansatz zwischen $v_0 = 1/500$ und $v_0 = 1/250$. Daß Vorverformungen in der Größenordnung von $v_0 \approx 1/2000$ und $\vartheta_0 \approx 0,005$ bei Fertigteilträgern auftreten können, bestätigen die gemessenen Vorverformungen der Versuchsträger 1-4 und 6 (Anhangs C, Bild C1). Die für einen Nachweis der Kippstabilität vorgeschlagenen Vorverformungsansätze von $v_0 = 1/1000 - 1/500$ und $\vartheta_0 = 0,01 - 0,02$ sind daher zur Abdeckung aller unbekanntener Imperfektionen gerechtfertigt.

7.6 Lagerbedingungen

Eine wesentliche Randbedingung bei einer Stabilitätsuntersuchung ist die angenommene Lagerbedingung, wobei für einen Kippnachweis normalerweise eine starre Gabellagerung an beiden Enden eines Trägers angesetzt wird. Diese rechnerische Lagervorgabe muß aber auch am Bauwerk verwirklicht werden, da sonst u.U. eine aufwendige Berechnung der Kippstabilität eines betrachteten Trägers unzutreffend wird. Unter einer starren Gabellagerung ist dabei zu verstehen, daß der Träger an seinen Enden gegen seitliche Verschiebungen am Ober- und Untergurt festgehalten wird. Dadurch wird auch ein Verdrehen der Trägerendquerschnitte verhindert. Wie diese Festhaltungen konstruktiv auszubilden sind, ist stark vom Einzelfall abhängig. Im Bild 16 sind dabei von links gesehen drei mögliche Lagerausführungen an Stützenköpfen für eine Kipphalterung schematisch dargestellt. Die rechte durchgestrichene Skizze einer Lagerung mittels eines Dorns, auf den der Träger gesteckt wird, ist vereinzelt aufgetaucht und

grundsätzlich keine starre Gabellagerung. Diese Lagerform ist eigentlich nur vollständigkeithalber hier als unzutreffendes Beispiel aufgeführt. Es wird dringendst geraten, auf solch eine Lagerung zu verzichten. Auch bei einer Ausführung gemäß der linken Skizze, die der herkömmlichen Vorstellung einer Gabellagerung entspricht, ist möglicherweise Vorsicht geboten, da je nach Abmessungsverhältnissen die Kragarme der Gabel nicht in jedem Fall eine starre Lagerung darstellen. Hier kann eventuell die Berücksichtigung einer nur elastischen Torsionseinspannung erforderlich werden. Lagerausführungen in der Form der mittleren beiden Skizzen des Bildes 16 sind als starre Gabellager zu bezeichnen und sollten eigentlich der Standard für eine Kipphalterung sein.

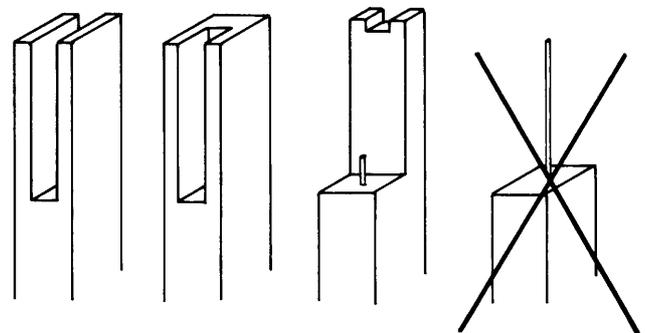


Bild 16 : Schematische Darstellung unterschiedlicher Kipplager

Fig. 16 : Schematic view of different supports with torsion fixing

Im Zusammenhang mit den erörterten Punkten zur Trägerlagerung steht auch das bei der Trägerberechnung durch die Verhinderung der Verdrehung an den Enden ermittelte Torsionsmoment. Dieses Torsionsmoment besitzt ein wechselndes Vorzeichen und ist von der Lagerkonstruktion aufzunehmen und weiterzuleiten. Für die häufig vorkommende Trägerlagerung auf Stützen bei Hallen tritt damit das berechnete Trägertorsionsmoment am Lager als Kopfbiegemoment der Stütze auf. Bei weichen Stützen können dadurch Stützenkopfverdrehungen hervorgerufen werden, die wiederum Rückwirkungen auf die Trägerberechnung in Form von Schiefstellungen haben. Hierauf ist schon bei der Trägerberechnung z.B. durch die Berücksichtigung entsprechender Vorverformungen zu achten. An dieser Stelle soll auf den Aufsatz von *Streit/Gottschalk*[30] hingewiesen werden, in dem zu Fragen der Lagerbedingungen bei auf Kippen beanspruchten Trägern Stellung genommen und ein Lösungsvorschlag zur Bemessung vorgestellt wird.

7.6.1 Einfluß der Lagerbedingungen anhand eines Beispiels

Als Beispiel ist ein parallelgurtiger Spannbetonträger mit einer Stützweite von 19,40 m ausgewählt worden, der im Jahre 1988 bei einer Hallenerweiterung verwendet worden ist. Die Besonderheit bei dieser Hallenerweiterung bestand darin, daß der Dachbinder auf die bereits vorhandenen alten Stützen mit aufgelagert werden sollte und an diesen Stützenköpfen keine Gabellagerungen, sondern ohne sehr aufwendige Konstruktionen nur eine unverschiebliche Lagerung der Binderuntergurte zu verwirklichen war. Es liegt also der sehr seltene Fall einer einseitigen Gabellagerung vor, wobei das andere Lager zwar unverschieblich aber für Biegung und Torsion als frei drehbar zu betrachten ist.

Der Querschnitt des Spannbetonbinders mit allen weiteren Angaben zu den verwendeten Werkstoffen ist im Bild 17 dargestellt. Im Bereich der beiden Auflager ist der Träger auf einer Länge von 1,0 m zwischen den äußeren Eckpunkten als Rechteckquerschnitt ausgebildet. Dies wird im Rechenprogramm [8] berücksichtigt. Eine konstruktiv vorhandene Mattenbewehrung R131 der Gurte und des Steges bleibt bei der Berechnung jedoch unberücksichtigt. Vergleichsberechnungen, bei denen eine entsprechende Torsionsbewehrung (Längsbewehrung $\varnothing 4$ mm im Abstand 25 cm und Bügel $\varnothing 5$ mm im Abstand 15 cm) berücksichtigt worden ist, zeigten eine nur unwesentliche Vergrößerung der Torsionssteifigkeit um ca. 3-5 % ohne einen nennenswerten Einfluß auf das Tragverhalten. Bei den durchgeführten Berechnungen sind Iterationsschranken von $0,5^\circ$ für Winkel und 1% für alle übrigen Größen (Kräfte, Momente, Verformungen usw.) zugrunde gelegt worden.

Aus der Dachkonstruktion mit Schneelast ergibt sich eine mittig auf dem Obergurt angreifende Belastung von $p = 13,6$ kN/m. Hinzu kommt eine

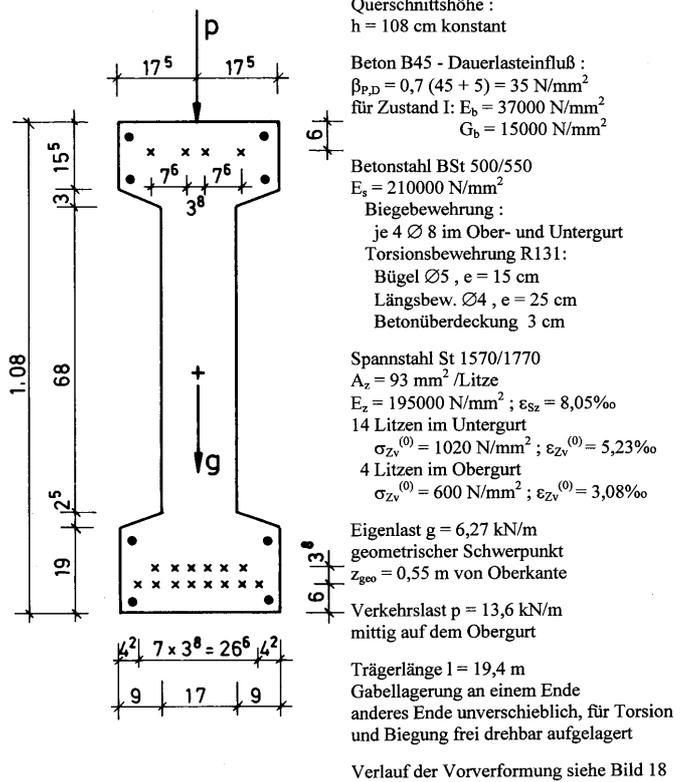


Bild 17 : Parallelgurtiger Spannbetonträger
 Fig. 17 : Prestressed concrete girder

im geometrischen Schwerpunkt anzusetzende Eigenlast von $g = 6,3$ kN/m. Im Bereich der Auflagerverstärkung erhöht sich die Eigenlast auf 9,45 kN/m.

Als Imperfektionen sind eine parabelförmig verlaufende horizontale Verschiebung des Ober- und Untergurtes mit einem Stich von $1/500$ in Trägermitte und zusätzlich eine konstante Schiefstellung des Trägers um die Lagerlinie (Trägerunterkante) von $0,01$ rad angesetzt worden. Dadurch sind der Ober- und Untergurt unterschiedlich vorverformt. Der Verlauf dieser Vorverformungen über die Trägerlänge ist im Bild 18 dargestellt.

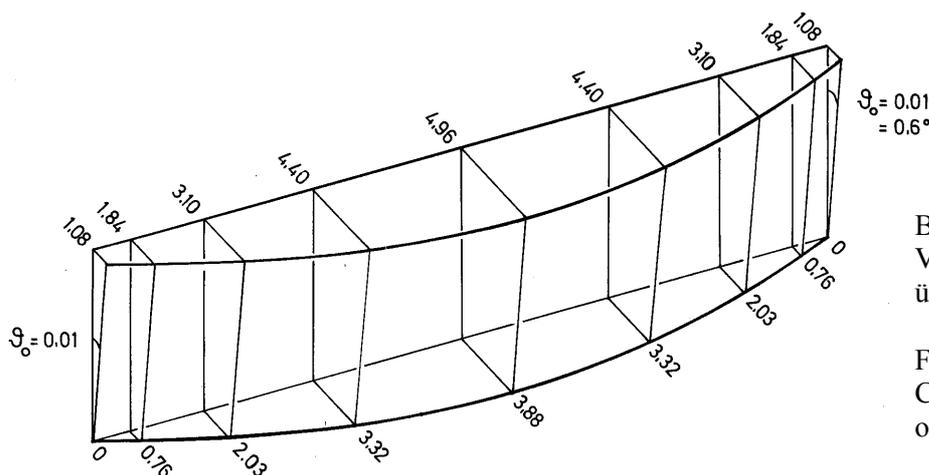


Bild 18 :
 Verlauf der Vorverformungen
 über die Trägerlänge

Fig. 18 :
 Course of pre-deformations
 over girder length

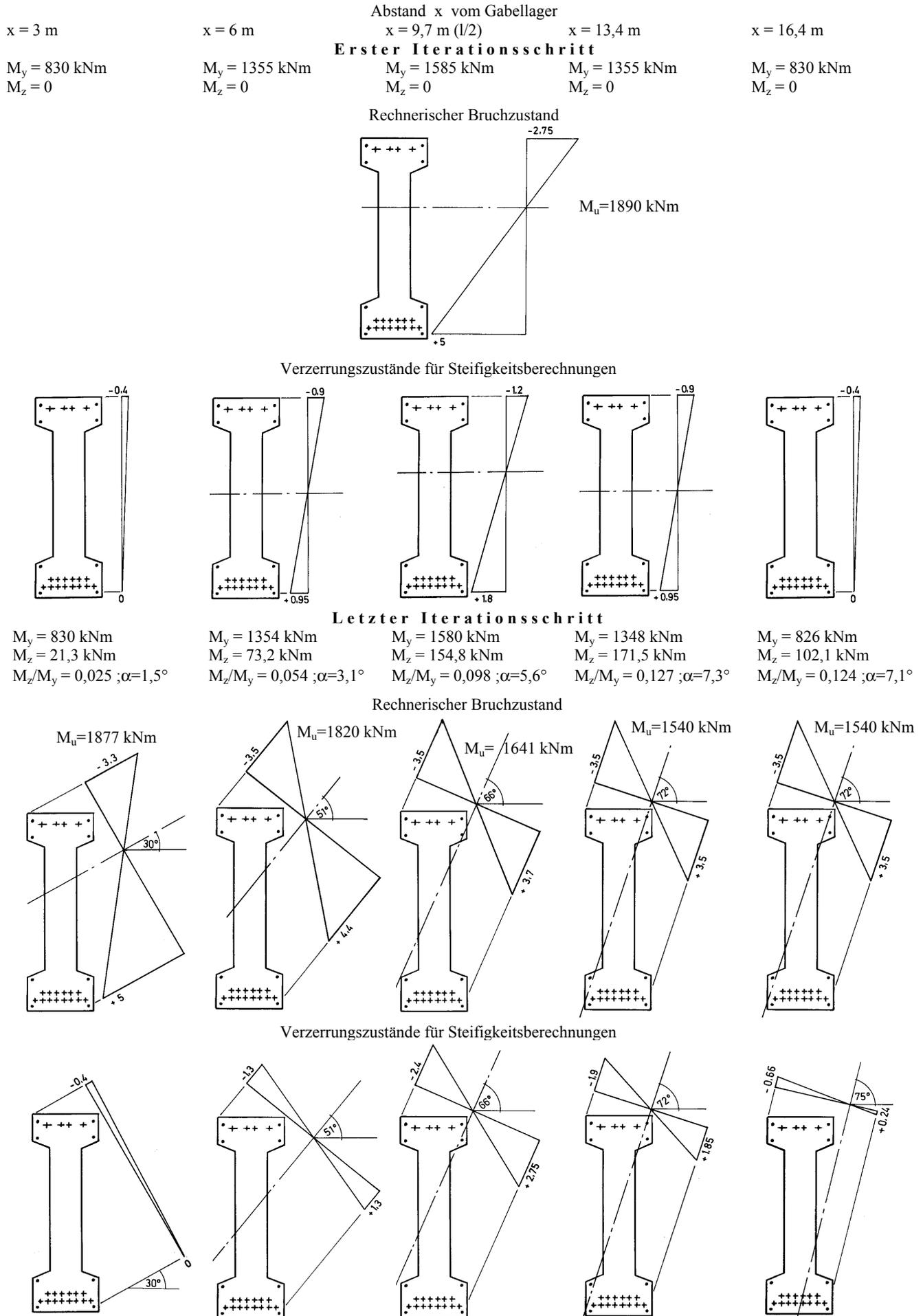


Bild 19 : Berechnete Verzerrungszustände

Fig. 19 : Calculated strain states

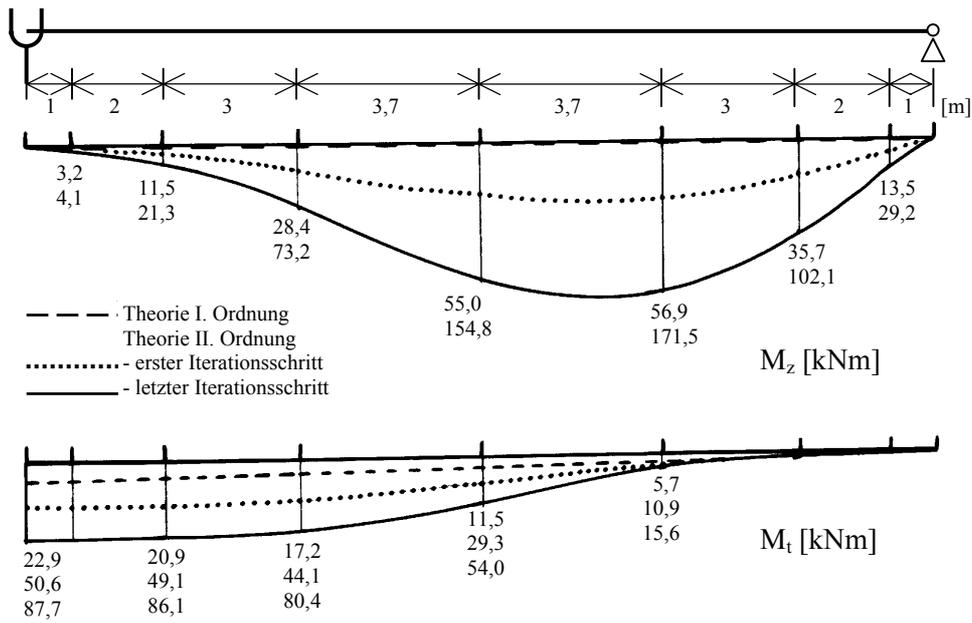


Bild 20a : Verlauf des Biegemoments M_z um die schwache Trägheitsachse und des Torsionsmoments M_t um die Längsachse
 Fig. 20a : Course of bending moment M_z round the weak axis of inertia and of twisting moment M_t round the longitudinal axis

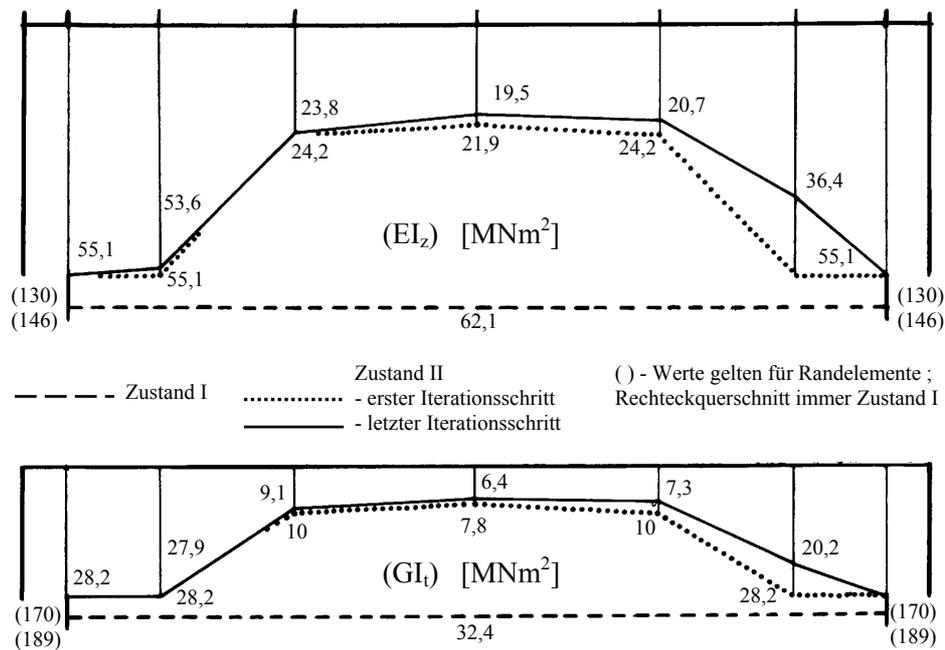


Bild 20b : Verlauf der Biegesteifigkeit (EI_z) um die schwache Trägheitsachse und der Torsionssteifigkeit (GI_t)
 Fig. 20b : Course of bending stiffness (EI_z) around the weak axis of inertia and of the torsion stiffness (GI_t)

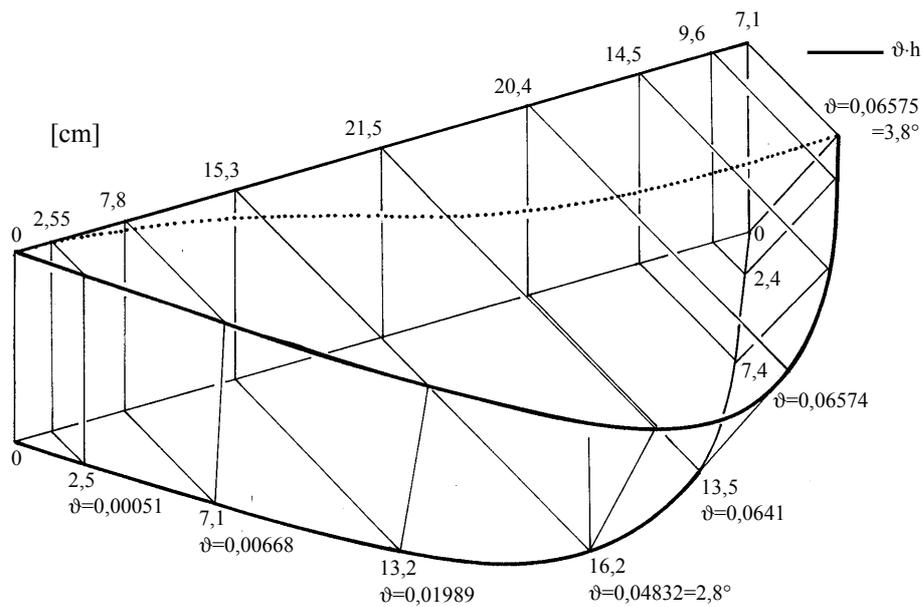


Bild 21 :
Verlauf der berechneten
seitlichen Verschiebungen

Fig. 21 :
Course of calculated
transverse displacements

Für die bereits erwähnte einseitige Gabellagerung mit gegenüberliegender unverschieblicher, freidrehbarer Lagerung und den im Bild 18 vorgegebenen horizontalen Vorverformungen ergibt sich eine rechnerisch zulässige Belastung von 1,693 (g+p), wobei Stabilitätsversagen und Werkstoffbruch etwa zusammenfallen. Die Lastiteration zeigt zwar ein Versagen infolge divergierender Verformungen an, wobei jedoch das Lastmoment nur noch etwa 3% unterhalb des rechnerischen Bruchmoments liegt. Zur Verdeutlichung der Ausführungen im Kap. 7.1.1 sind für die größtmögliche Laststufe 1,693 (g+p) noch weitere Berechnungsergebnisse dargestellt.

Im Bild 19 werden für einige Schnitte in Trägerlängsrichtung die berechneten Biegemomente und die zugehörigen Verzerrungszustände des rechnerischen Bruchzustandes und des vorhandenen Lastzustandes der Steifigkeitsberechnung jeweils für den ersten und letzten Iterationsschritt angegeben.

Die Verläufe des Biegemoments M_z um die schwache Trägheitsachse und des Torsionsmoments M_t werden im Bild 20a jeweils für die Berechnung nach Theorie I. Ordnung und für den ersten und letzten Iterationsschritt der Berechnung nach Theorie II. Ordnung wiedergegeben.

Bild 20b zeigt die zugehörigen Steifigkeitsverläufe (EI_z) und (GI_t) für den ungerissenen Zustand I des Querschnitts, sowie für den gerissenen Zustand II im Falle der einachsigen Biegung (erster Iterationsschritt) und der zweiachsigen Biegung (letzter Iterationsschritt). Charakteristische Verformungsgrößen bei der Berechnung nach Theorie II. Ordnung sind die seitliche Verschiebung (Biegung um die schwache Trägheitsachse) und die Verdrehung (Torsion um die Längsachse).

Im Bild 21 sind die berechneten horizontalen Verschiebungen der Querschnitts-Mittellinie an der Oberseite und der Unterseite über die Trägerlänge dargestellt, wobei auch die vorhandenen Verdrehungen deutlich werden. In den abgebildeten Verschiebungen sind die Vorverformungen des Bildes 18 nicht enthalten.

Es ist außerdem noch untersucht worden, wie sich eine Änderung der Lagerbedingungen auf die Traglast auswirkt. Dabei ist die Torsionseinspannung der beiden Lager in Form von Drehfedersteifigkeiten von $\hat{c} = 0$ (frei drehbar) $\rightarrow \hat{c} = \infty$ (starr eingespannt) stufenweise verändert worden. Für die vorstehend angegebene Belastung und die Imperfektionen aus Bild 18 werden als Ergebnis Lastfaktoren f in Abhängigkeit des Torsionseinspanngrades in der Tabelle 6 angegeben. Die Lastfaktoren f geben die Belastungsstufe an, bei der gerade noch ein stabiler Gleichgewichtszustand erreicht wird $\{ \text{zul } q = f \cdot (g+p) \}$. Der Träger versagt bei den starren Lagerungen durch einen Werkstoffbruch in Trägermitte. Wenn eine Lagerseite eine weiche Torsionseinspannung aufweist, divergieren die berechneten Verformungen (Stabilitätsversagen). Der Versuch, zusammen mit der Torsionseinspannung auch eine elastische Einspannung für das Hauptbiegemoment rechnerisch zu berücksichtigen, konnte wegen der fehlenden Bewehrung zur Aufnahme der Zugkräfte aus dem Einspannmoment nicht verwirklicht werden. Mit der vorhandenen, nur konstruktiven Bewehrung läßt sich nur ein Biege-Einspanngrad von etwa 10% erreichen, der das übrige Tragverhalten nur unwesentlich beeinflusst.

linkes Auflager \hat{c} [kNm/rad]	rechtes Auflager : Drehfedersteifigkeiten \hat{c} [kNm/rad] für Torsionseinspannung				
	∞	10^4	10^3	10^2	0
∞	1,96 (u)	1,96 (u)	1,86 (u)	1,73 (u)	1,69 (d)
10^4		1,94 (u)			1,63 (d)
10^3			1,60 (d)		1,23 (d)
10^2				< 1	

(u) = Versagen durch Werkstoffbruch in Trägermitte
 (d) = Stabilitätsversagen durch divergierende Verformungen

Tabelle 6 : Lastfaktoren in Abhängigkeit der Torsionseinspannung
 Table 6 : Loading factors depending on torsion fixing

8. Zusammenfassende Bemerkungen und Ausblick

Der vorliegende Bericht behandelt einen wesentlichen Teilbereich zur Thematik der Kippstabilität von Stahlbeton- und Spannbetonträgern. Die maßgebenden Differentialgleichungen werden unter Anwendung der Theorie II. Ordnung (Gleichgewichtsbetrachtungen am verformten System) abgeleitet. Besondere Berücksichtigung finden die physikalischen Nichtlinearitäten des Verbundwerkstoffs Stahlbeton (gerissene Betonzugzone, nichtlineare Werkstoffbeziehungen für Beton und für Bewehrungen, lastabhängige Steifigkeiten), die für eine wirklichkeitsnahe Behandlung dieses Themenbereichs unbedingt erforderlich sind.

Im Hauptteil wird besonders auf die Ableitung eines Näherungsverfahrens zur Abschätzung der Kippstabilität von Satteldach- und Parallelgurtträgern eingegangen. Aus den mit dem genauen Berechnungsverfahren nach Theorie II. Ordnung gewonnenen Erkenntnissen wird eine anschauliche Lösung für den in der Praxis häufig vorkommenden Fall eines beidseitigen gabelgelagerten Einfeldträgers unter Gleichstreckenlast auf dem Obergurt und Eigenlast im Schwerpunkt abgeleitet. Im Rahmen dieses Nachweises wird sowohl der Stabilitätsfall über Formeln des Verzweigungsproblems, d.h. aufgrund der Steifigkeiten treten zu große Verformungen aber kein Werkstoffbruch auf, als auch das rechnerische Bruchversagen für die auftretende zweiachsige Biegung überprüft. Die Brauchbarkeit und verhältnismäßig einfache Handhabung des Näherungsverfahrens wird an vier Beispielen unter Berücksichtigung unterschiedlicher Sicherheitskonzepte ausführlich gezeigt.

Anschließend werden einige grundsätzliche Zusammenhänge zur Thematik der Kippstabilität angesprochen und zu einigen wesentlichen Punkten Stellung bezogen. Außerdem werden Erfahrungen mitgeteilt, die sich aus einer Vielzahl von mit dem Rechenprogramm durchgeführten Berechnungen ergeben haben. Anhand eines Beispiels wird der Einfluß der Lagerbedingungen auf das Kippverhalten eines Spannbetonträgers aufgezeigt. Im Hinblick auf eine im Rahmen von Vordimensionierungen oft erforderliche Aussage zum Kippverhalten eines Betonträgers wird eine Möglichkeit angegeben, die Kippstabilität eines Trägers besonders einfach, aber dennoch zuverlässig abzuschätzen.

Im Anhang A wird in wesentlichen Teilen die Dissertation *Röder* [8] in überarbeiteter Form wiedergegeben, wobei die theoretischen Grundlagen des Berechnungsverfahrens zusammengestellt sind. Das für diese angegebenen Beziehungen aufgestellte Rechenprogramm ist besonders auf die Belange von Trägern aus Stahlbeton und Spannbeton abgestellt. Dies gilt vor allem bei der Wahl der nichtlinearen Werkstoffbeziehungen für den Beton und für die Bewehrungen, bei der Iteration des inneren belastungsabhängigen Beanspruchungszustands und bei der Ermittlung der Querschnittswerte und Steifigkeiten. Das Rechenprogramm berücksichtigt sowohl starre als auch elastische Lager und Trägersaufhängungen an vertikalen oder geneigten Seilen. Als Belastungen sind Streckenlasten, Einzelmomente, richtungstreue und poltreue Einzellasten an beliebigen Angriffspunkten möglich. Vorverformungen können global mit parabelförmigem Verlauf unter Angabe des Größtwertes in Trägermitte oder diskret an Einzelpunkten, getrennt für Ober- und Untergurt, angegeben werden. Diese diskrete Eingabe ermöglicht vor allem die wirklichkeitsnahe Erfassung gemessener Vorverformungsverläufe.

Zusätzlich zu den Beispielen im Hauptteil sind im Anhang B die Berechnungsergebnisse von fünf Spannbeton- und einem Stahlbetonträger sowohl in grafischer Form als auch in Tabellen angegeben. Die erzielten Ergebnisse zeigen die Leistungsfähigkeit des vorliegenden Rechenprogramms.

Im Anhang C sind die Ergebnisse der Nachberechnungen der bisher bekannten Kippversuche an zwei vorgespannten Satteldachbindern [31], zwei parallelgurtigen Spannbetonträgern und vier parallelgurtigen Stahlbetonträgern [32,33] zusammengestellt. Der Vergleich der berechneten Ergebnisse mit den entsprechenden gemessenen Versuchswerten zeigt, daß eine zutreffende Berechnung möglich ist, wenn die Eingangsparameter des Rechenprogramms die Versuchswirklichkeit gut abbilden können. Die Qualität des vorliegenden Rechenprogramms wird mit den Versuchsnachrechnungen in eindrucksvoller Form bestätigt.

Die im Rahmen dieses Berichts betrachteten Punkte behandeln nur die kurzzeitigen Einwirkungen und Bauteilzustände. Üblicherweise werden bei solchen Verfahren die dauerhaft wirkenden Einflüsse durch Abminderungsfaktoren auf der Werkstoffseite und entsprechende Lastfaktoren berücksichtigt. Eine explizite Berechnung des Langzeitverhaltens von Betonträgern ist mit dem hier vorgestellten Verfahren ohne Erweiterungen nicht möglich. Es ist noch nicht ausreichend geklärt, ob eine entsprechende Erweiterung im Einklang mit den vorhandenen Berechnungsabläufen in vertretbarem Rahmen überhaupt machbar und sinnvoll ist. Eine Fortsetzung der in den Arbeiten von *Wienecke* [9] und *Ehret* [37] eingeschlagenen Wege zur Behandlung des Langzeitverhaltens von Betonträgern ist wünschenswert. Weitere Verbesserungsmöglichkeiten liegen auf dem Gebiet einer wirklichkeitsnäheren Ermittlung der Torsionskennwerte, die jedoch so praktikabel sein sollte, daß sie sich in den numerischen Rahmen des vorliegenden Rechenverfahrens einfügt.

Einen Überblick über die Behandlung der Kippstabilität von Stahlbeton- und Spannbetonträgern in der Literatur und den Stand der Entwicklung von diesbezüglichen Nachweisverfahren bis zum Jahr 1984 geben *Deneke, Holz, Litzner* [35]. Dort werden entsprechende Einteilungen vorgenommen, kurze Beurteilungen gegeben und Kriterien zur Anwendung der Verfahren aufgezeigt. Weitere Veröffentlichungen seit 1984 sind hier in den Literaturstellen [30], [32 - 34], [36 - 43] und [9] aufgeführt. Auf umfassende Analysen und vergleichende Besprechungen aller dieser Arbeiten wird hier bewußt verzichtet. Der interessierte Leser möge sich diesbezüglich bei Bedarf selbst ein Bild verschaffen. Eine Wertung der Verfahren untereinander sollte unabhängigen Dritten vorbehalten sein.

Literaturverzeichnis

- [1] Prandtl, Ludwig :
Kipp-Erscheinungen
Dissertation, München, 1899
- [1a] Michell, A.:
Elastic stability of long beams under transverse forces
Phil. Magazine 48 (1899), S. 298 - 303
- [2] Timoschenko, Stefan P.:
Kipperscheinungen des I-Trägers
Zeitschrift für Mathematik und Physik 1910, S. 360
- [3] Chwalla, Ernst :
Kippung von Trägern mit einfach-symmetrischen, dünnwandigen und offenen Querschnitten
Sitzungsbericht Akademie der Wissenschaften Wien Ila, Band 153 (1944), S. 25
- [4] Mehlhorn, Gerhard :
Ein Beitrag zum Kipp-Problem bei Stahlbeton- und Spannbetonträgern
Dissertation D17, Darmstadt 1970 abgedruckt in Heft 238 DAfStb
- [5] Mehlhorn, Gerhard :
Näherungsverfahren zur Abschätzung der Kippstabilität vorgespannter Träger
Beton- und Stahlbeton, 1974, S.7
- [6] Wlassow, W. S.:
Dünnwandige elastische Stäbe
VEB Verlag für Bauwesen, Berlin, Bd. 1, 1964, Bd.2, 1965.
- [7] Steinbach, W.:
Die Theorie II. Ordnung für den räumlich belasteten Stab mit dünnwandigem offenem Querschnitt .
In: Grengg, Pelikan, Reintzhuber: Stahlbau und Baustatik, S. 292 - 335, Springer- Verlag Wien, 1965
- [8] Röder, Friedrich-Karl :
Berechnung von Stahlbeton- und Spannbetonträgern nach Theorie II. Ordnung
Dissertation D17, Darmstadt 1982
Rechenprogramm KIPPEN (Version 3.1-03.09.1999)
Fachgebiet Massivbau, Fachbereich Bauingenieurwesen , Universität Gesamthochschule Kassel, 1999
- [9] Wienecke, Ulrich :
Zur wirklichkeitsnahen Berechnung von Stahlbeton- und Spannbetonstäben nach einer konsequenten Theorie
II. Ordnung unter allgemeiner Belastung
Dissertation D17, Darmstadt 1985
- [10] Hartmann, Stefan :
Einfluß der Koeffizienten des nichtlinearen Differentialgleichungssystems für Biegedrillknickprobleme von
Spann- und Stahlbetonträgern auf die Lösung des zugehörigen Randwertproblems
Diplomarbeit am Fachgebiet Massivbau ,FB Bauingenieurwesen der Gesamthochschule Kassel, 1987
(unveröffentlicht)
- [11] Grasser, Emil :
Darstellung und kritische Analyse der Grundlagen für eine wirklichkeitsnahe Bemessung von
Stahlbetonquerschnitten bei einachsigen Spannungszuständen.
Dissertation TU München 1968

- [12] Sauer, Ernst :
Schub und Torsion bei elastischen prismatischen Balken
Dissertation D17, Darmstadt 1979 , Heft 29 der "Mitteilungen aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt" Verlag W. Ernst & Sohn, Berlin-München 1980
- [13] Strippel, Reiner; Schulz, J.-U.; Mehlhorn, G.:
Ermittlung der Torsionssteifigkeit und der Schubmittelpunktslage dickwandiger Querschnitte bei nichtlinearem Werkstoffverhalten mit der Methode der Finiten Elemente
Forschungsbericht Nr.13 , Fachgebiet Massivbau , Universität Gesamthochschule Kassel, 1990,
und
Determination of torsional stiffness and shear center of thick-walled cross section with material parameters changeable over the cross section with the aid of finite element method
Second international conference on computer aided analysis and design of concrete structures,
Zell am See - Austria, april 1990
- [14] Leonhardt, Fritz :
Vorlesungen über Massivbau, Teil 4, 3. Auflage
Springer Verlag 1984
- [15] Stüssi, Fritz:
Exzentrisches Kippen
Schweizer Bauzeitung, Jahrg.1935, Band 105, Nr. 11, S. 123-125 und Nr. 17, S. 194-195 (Zuschrift)
- [16] Zurmühl, Rudolf:
Praktische Mathematik für Ingenieure und Physiker
Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York
- [17] Vianello, L.:
Graphische Untersuchungen der Knickfestigkeit gerader Stäbe
Z. Ver. Dt. Ing. 42 (1898), S. 1436 - 1443
- [18] Schäfer, Horst :
Die Ermittlung von Steifigkeiten und Verformungen ausmittig belasteter, gerader Stäbe mit nichtlinear-elastischem Werkstoffverhalten.
Forschungsbericht der Arbeitsgruppe Massivbau der TH Darmstadt, Nr. 4, 1972
- [19] Ambos, Gerd und Dietz, Hans-Dieter :
Zur Frage der Biege- und Dehnsteifigkeit von Stahlbeton- Querschnitten bei Berücksichtigung wirklichkeitsnaher Werkstoffgesetze.
Forschungsbericht aus dem Institut für Massivbau der TH Darmstadt, Nr. 21, 1974
- [20] Labib, Fayrouz Fahim :
Knicken und Biegedrillknicken von Druckstäben mit einfach-symmetrischem Querschnitt und nichtlinearem Werkstoffgesetz.
Dissertation TU Karlsruhe 1975, Fakultät für Bauingenieur- und Vermessungswesen
- [21] Galgoul, Nelson S.:
Beitrag zur Bemessung von schlanken Stahlbetonstützen für schiefe Biegung und Achsdruck unter Kurzzeit- und Dauerbelastung.
Dissertation TU München 1978
- [22] Heil, Wolfgang :
Traglastermittlung von räumlich belasteten Durchlaufträgern mit offenem, dünnwandigem Querschnitt bei beliebigem Werkstoffgesetz
Dissertation TU Karlsruhe 1979 - Institut für Baustatik und Meßtechnik, Schriftenreihe, H.3

- [23] Roik, Karlheinz; Carl, J.; Lindner, J. :
Biegetorsionsmoment gerader dünnwandiger Stäbe
W. Ernst & Sohn, Berlin, München, Düsseldorf 1972
- [24] Leonhardt, Fritz :
Vorlesungen über Massivbau, Teil 1, 3. Auflage,
Springer Verlag 1984
- [25] Deutscher Ausschuß für Stahlbeton, Heft 220:
Bemessung von Beton- und Stahlbetonbauteilen nach DIN 1045,
Ausgabe Dezember 1978 [2. überarbeitete Auflage (1979)]- Biegung mit Längskraft, Schub und Torsion.
Beuth Verlag, Berlin, Köln
- [26] Röder, Friedrich-Karl ; Mehlhorn, G. :
Kippstabilität ausgewählter Spannbeton- und Stahlbetonträger
Abschlußbericht eines vom Hauptverband der Deutschen Bauindustrie geförderten Forschungsvorhabens,
Institut für Massivbau, TH Darmstadt, 1981
- [27] Röder, Friedrich-Karl :
Ermittlung wirklichkeitsnaher Querschnittswerte und Steifigkeiten für vorgespannte oder nicht vorgespannte
Rechteck- und T-Querschnitte aus Stahlbeton
Beton- und Stahlbetonbau 85 (1990), H.6, S. 154 - 159 ; H.7, S. 180 – 185 und
Forschungsbericht Nr. 11 , Fachgebiet Massivbau, Fachbereich Bauingenieurwesen ,
Universität Gesamthochschule Kassel, 1990
- [28] Litzner, U. :
Grundlagen der Bemessung nach Eurocode 2 - Vergleich mit DIN 1045 und DIN 4227,
in Betonkalender 1990, Teil 1 , S.708 ff.
- [29] Röder, Friedrich-Karl:
QUERWERT - Programm zur Berechnung von Bruchzustand, Verformungszustand und Querschnittswerten
für polygonartig begrenzte Querschnitte für zweiachsige Biegung mit und ohne Normalkraft
(Version 6.2-03.08.1998)
Fachgebiet Massivbau, Fachbereich Bauingenieurwesen , Universität Gesamthochschule Kassel, 1998
- [30] Streit, Walter; Gottschalk, H.:
Überschlägige Bemessung von Kipphalterungen für Stahlbeton- und Spannbetonbinder
Bauingenieur 61 (1986), S. 555-559.
- [31] Frenzel, Dieter; Rafla, K.:
Kippversuche an zwei schlanken Spannbetonträgern
Beton- und Stahlbetonbau 1976, H.2, S. 42-47.
- [32] König, Gert; Pauli, W.:
Ergebnisse von Kippversuchen an schlanken Fertigteilträgern
Beton- und Stahlbetonbau 85 (1990), H. 10, S. 253-258.
- [33] Pauli, Walter:
Versuche zur Kippstabilität an praxisgerechten Fertigteilträgern aus Stahlbeton und Spannbeton
AIF-Abschlußbericht mit Anhang, Nr. 6672 ; Institut für Massivbau der TH Darmstadt, 1989.
- [34] Pauli, Walter:
Versuche zur Kippstabilität an praxisgerechten Fertigteilträgern aus Stahlbeton und Spannbeton
Dissertation D17, Darmstadt 1990.

- [35] Deneke, Otto; Holz, K.; Litzner, U.:
Übersicht über praktische Verfahren zum Nachweis der Kippsicherheit schlanker Stahlbeton- und Spannbetonträger
Beton- und Stahlbetonbau 80 (1985); H. 9, S. 238 -243; H. 10, S. 274-280; H. 11, S. 299-304
- [36] Rosemeier, Gustav-Erich; Helbig, S.:
EDV-Programm zur Kippuntersuchung von Stahlbeton- und Spannbetonträgern
Beton- und Stahlbetonbau 83 (1988), H. 12, S. 327-330
- [37] Ehret, Karl-Heinz:
Ein Beitrag zur Theorie II. Ordnung bei kippgefährdeten Stahl- und Spannbetonträgern
Dissertation, Universität der Bundeswehr, München 1989.
- [38] Mehlhorn, Gerhard; Röder, F.-K.; Schulz, J.-U.:
Zur Kippstabilität vorgespannter und nicht vorgespannter , parallelgurtiger Stahlbetonträger mit einfach symmetrischem Querschnitt
Beton- und Stahlbetonbau 86 (1991), H. 2, S. 25-32 und H. 3, S. 59-64.
- [39] Stiglat, Klaus:
Zur Näherungsberechnung der Kippplasten von Stahlbeton- und Spannbetonträgern über Vergleichsschlankheiten
Beton- und Stahlbetonbau 86 (1991), H. 10, S. 237-240.
- [40] König, Gert; Pauli, W.:
Nachweis der Kippstabilität von schlanken Fertigteilträgern aus Stahlbeton und Spannbeton
Beton- und Stahlbeton 87 (1992), H. 5, S. 109-112, H. 6, S. 149-151.
- [41] Kraus, Dieter; Ehret, K.-H.:
Berechnung kippgefährdeter Stahlbeton- und Spannbetonträger nach Theorie II. Ordnung
Beton- und Stahlbetonbau 87 (1992), H. 5, S. 113-118.
- [42] Backes, Werner :
Ein Beitrag zur geometrisch und physikalisch nichtlinearen Berechnung von Stabtragwerken unter besonderer Berücksichtigung räumlicher Stabilitätsprobleme des Massivbaus
Dissertation, Universität Kaiserslautern 1994, D386
- [43] Backes, Werner :
Überprüfung der Güte eines praxisgerechten Näherungsverfahrens zum Nachweis der Kippsicherheit schlanker Stahlbeton- und Spannbetonträger
Beton- und Stahlbetonbau 90 (1995), H. 7, S. 176-180, H. 8, S. 208-213.
- [44] Schroeter, Heinrich :
Berechnung idealer Kippplasten von Trägern linear veränderlicher Höhe mit Hilfe Hermitescher Polynome
Mitteilungen aus dem Institut für Bauingenieurwesen I TU München, 1980, H.5
- [45] Rafla, Kamal :
Näherungsverfahren zur Berechnung der Kippplasten von Trägern mit in Längsrichtung beliebig veränderlichem Querschnitt
Die Bautechnik 8/1975, S.269-275
- [46] Mucha, Alois :
Kippen gabelgelagerter Träger von linear veränderlicher Höhe
Die Bautechnik 8/1973, S.278-286

[47] Hildenbrand, Peter :

Die Kippstabilität auf Biegung beanspruchter einfach- oder doppelsymmetrischer ,
eingespannter oder gabelgelagerter Träger mit linear veränderlicher Querschnittshöhe
Dissertation 1970, TU Stuttgart

[48] Schleusner, Arno :

Kippsicherheit eines gleichmäßig belasteten Trägers mit linear veränderlicher Höhe
Der Stahlbau 22, 1953, S.55-56

[49] Röder, Friedrich-Karl :

Ein Näherungsverfahren zur Beurteilung der Kippstabilität von Satteldachbindern aus Stahlbeton oder
Spannbeton

Beton- und Stahlbetonbau 92 (1997), H. 11, S. 301-307, und H. 12, S. 341-347

[50] Röder, Friedrich-Karl :

Kippnachweis parallelgurtiger oder satteldachförmiger gabelgelagerter Einfeldträger aus Stahlbeton oder
Spannbeton als Näherungsverfahren nach Theorie II. Ordnung

Rechenprogramm KIPNT2 Version 3.2-28.04.99

Fachgebiet Massivbau, Fachbereich Bauingenieurwesen , Universität Gesamthochschule Kassel, 1999

[51] DIN 1045 - Tragwerke aus Beton, Stahlbeton und Spannbeton - Teil 1 : Bemessung und Konstruktion

Entwurf Fassung Februar 1997

Entwurf Fassung November 1998

Normenausschuß Bauwesen (NaBau) im DIN Deutsches Institut für Normung e.V.



Anhang A

Aufstellen und Lösung der maßgebenden Differentialgleichungen
nach Theorie II. Ordnung

und

Analyse eines Stahlbetonquerschnitts unter Berücksichtigung
wirklichkeitsnaher Werkstoffbeziehungen

A1. Die Differentialgleichungen nach Theorie II. Ordnung für den räumlich belasteten, geraden und dünnwandigen Stab mit offenem unsymmetrischem Querschnitt

Im Anhang werden die grundlegenden Gleichungen und Ansätze für die Behandlung des Stabilitätsproblems nach Theorie II. Ordnung in Anlehnung an Röder[8] zusammengestellt.

A1.1 Bezeichnungen, Abkürzungen

Koordinatensysteme :

Es wird mit rechtsdrehenden Koordinatensystemen gearbeitet, wobei die x-Achse in Trägerlängsrichtung und bei Blickrichtung in +x die z-Achse nach unten und die y-Achse nach rechts zeigt (siehe Bild A1). Diese Anordnung der Koordinatenachsenrichtungen wird grundsätzlich beibehalten, wobei der Ursprung des Systems in verschiedenen Punkten der Querschnittsebene liegen kann:
 x, y, z = Schwerpunktsachsen des unverformten Systems

ξ, η, ζ = Schwerpunktsachsen des verformten Systems

x^G, y^G, z^G = Koordinatenachsen des globalen Bezugssystems

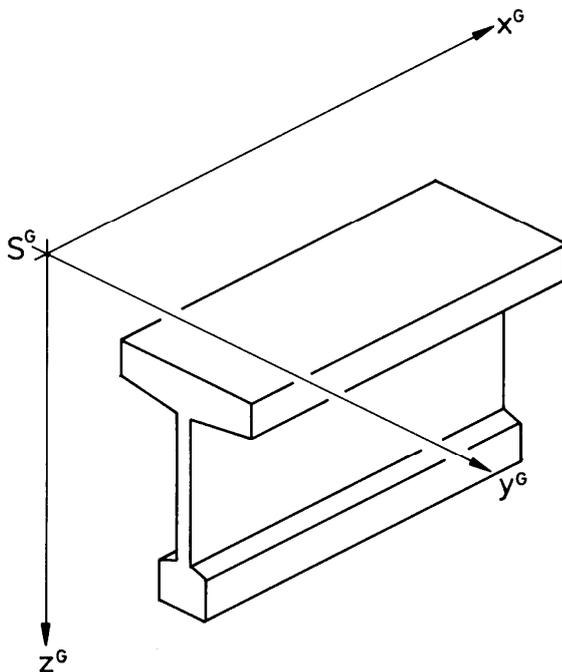


Bild A1 : Lage des Bezugskoordinatensystems
 Fig. A1 : Position of reference coordinate system

Verformungen :

u, v, w = Verschiebungen in Richtung x, y, z

ϑ = Verdrehung um die x-Achse

u', v', w' = Neigung der Achsen

ϑ' = Verdrillung

Positive Richtungen siehe Bild A2, Bild A14 und Bild A15.

Schnittgrößen :

Es gilt generell, daß am positiven Schnittpfeil die Pfeilrichtungen positiver Schnittgrößen in Richtung der positiven Koordinatenachsen zeigen.

nach Theorie I. Ordnung :

Q_{yI}, Q_{zI} = Querkräfte

M_{yI}, M_{zI} = Biegemomente

M_{tI} = Torsionsmoment

bezogen auf die verformten Hauptachsen :

Q_{η}, Q_{ζ} = Querkräfte

M_{η}, M_{ζ} = Biegemomente

M_{ξ}, M_w = Torsionsmoment, Wölbmoment

bezogen auf die Richtung der unverformten Hauptachsen :

V_y, V_z = Querkräfte

B_y, B_z = Biegemomente

T, W = Torsionsmoment, Wölbmoment

Belastungen :

Positive Lasten zeigen in Richtung positiver Koordinatenachsen.

p_y, p_z = Streckenlasten, Bild A16, (A4.1)

p_v = Umlenkraft aus parabelförmigem Spanngliedverlauf (A4.6)

m_t = Streckentorsionsmoment (A1.19)

p_t = Streckentorsionsmoment 2. Ordnung abhängig von ϑ (A1.29)

v_0, w_0, ϑ_0 = Vorverformungen der Achsen (A4.10)

f = Stich der Abschnittsmitte bei parabelförmigem Verlauf, Bild A17

P_y, P_z = Richtungstreue Einzellasten, Bild A23

P = Poltreue Einzellast, Bild A24

$\Delta B_y, \Delta B_z,$

$\Delta T, \Delta W$ = Einzelmomente

N = Normalkraft, Bild A27

F_y, F_z = Federkonstanten einer Dehnfeder, Bild A28

F = Federkonstante einer Drehfeder (Biegung, Torsion, Wölb torsion)

S = Seilkraft bei einer Aufhängung, Bild A31

Z_v = Vorspannkraft

Querschnittsgrößen :

S = Schwerpunkt

M = Schubmittelpunkt

A = beliebiger Querschnittspunkt

Die Indizes S, M, A kennzeichnen Abstände oder Verformungen der betreffenden Punkte im jeweiligen Koordinatensystem.

Weitere Indizes :

- b = bezogen auf Beton
- s = bezogen auf nicht vorgespannte Bewehrung
- v, z = bezogen auf vorgespannte Bewehrung
- id = bezogen auf ideellen Querschnitt
(Beton und nicht vorgespannte Bewehrung)
- sek = Sekanten
- tan = Tangenten

mit Werkstoff zusammenhängend

- E = Elastizitätsmodul
- G = Gleitmodul
- v = Querdehnungszahl
- σ, τ = Normalspannung, Schubspannung
- ϵ = Verzerrung
- β_W = Würfeldruckfestigkeit des Betons
- β_P = Prismenfestigkeit des Betons
- β_R = Rechenfestigkeit des Betons
- β_S = Fließspannung der Bewehrung

Steifigkeiten :

- (EA) = Dehnsteifigkeit (A3.2), (A3.3)
- (EI_y), (EI_z) = Biegesteifigkeiten
- (GI_t) = St. Venantsche Torsionssteifigkeit
- (GI_t), (GI_t^{*}) = erweiterte Torsionssteifigkeiten
(A2.12), (A2.19)
- (EC_M) = Wölbsteifigkeit

Querschnittsstrecken :

- (i_p)_{id}, (i_M)_{id}
- (r_y)_{id}, (r_z)_{id}
- (r_{M,y})_{id}, (r_{M,z})_{id}

Definitionen siehe (A2.10), (A3.8)

Matrizenschreibweise :

Eine Matrix wird durch einen Doppelstrich, ein Vektor durch einen einfachen Strich unter dem Buchstaben gekennzeichnet.

Die verwendeten Bezeichnungen werden an den entsprechenden Stellen der folgenden Kapitel erläutert.

A1.2 Voraussetzungen

Für die Untersuchungen des Stabilitätsverhaltens werden folgende Voraussetzungen getroffen:

1. Die Trägerachse befindet sich im unausgelenkten Zustand ideal in ihrer Biegungebene (ausgenommen kleine Vorverformungen)
2. Der Träger hat in Längsrichtung abschnittsweise konstante Steifigkeiten
3. Die Querschnittsgestalt bleibt erhalten

4. Die Querschnitte bleiben bei Beanspruchung durch Biegung und Normalkraft eben (*Euler-Bernoulli*)
5. Die auftretenden Verformungen werden als klein angesehen, daß Produkte oder Quadrate von Verformungsgrößen gegen die Verformungsgrößen selbst vernachlässigbar klein sind (Linearisierte Geometrie)
6. Es besteht ein eindeutiger, mathematisch formulierbarer Zusammenhang zwischen Spannung σ und Verzerrung ϵ
$$\sigma = \sigma(\epsilon).$$
Dieser Zusammenhang ist bereichsweise differenzierbar und gilt für Belastung und Entlastung.
7. Die *Poissonsche* Querdehnungszahl ν ist konstant
8. Für den Schubmodul G gilt für alle Spannungen

$$G = G(\epsilon) = \frac{E(\epsilon)}{2(1 + \nu)}$$

9. Die Schubverformungen infolge Querkraft und Wölbkrafttorsion werden entsprechend den in der Stabstatik geltenden Bedingungen vernachlässigt.
10. Die Normalkraft ist unabhängig von der übrigen Belastung und wird als gegebene äußere Last angesehen. Die Verformungen des Systems haben keinen Einfluß auf ihre Größe und Verteilung. Die Stablängenänderung wird deshalb ebenfalls vernachlässigt.
11. Es werden vorwiegend auf Biegung beanspruchte Träger behandelt, bei denen eine meist nur vorhandene Mindesttorsionsbewehrung keinen Einfluß auf die Lage des Schubmittelpunktes hat.

A1.3 Aufstellen der differentiellen Beziehungen

Um die grundsätzlichen Zusammenhänge der Theorie II. Ordnung aufzuzeigen, wird zunächst von einem homogenen, linear elastischen Werkstoff ausgegangen. Die so ermittelten maßgebenden Gleichungen werden daran anschließend auf die Besonderheiten des Verbundwerkstoffes Stahlbeton erweitert.

A1.3.1 Koordinatensystem, Verformungen

Es wird ein rechtwinkliges, rechtsorientiertes Koordinatensystem gewählt. Die Lage des Nullpunktes ist i.a. beliebig, jedoch lassen sich die differentiellen Beziehungen der folgenden Abschnitte am einfachsten darstellen, wenn der

Schwerpunkt S des Querschnitts als Nullpunkt des Koordinatensystems gewählt wird und die unbekannten Verformungsgrößen auf den Schubmittelpunkt M bezogen werden. Die Koordinatenachsen y und z sind die Hauptträgheitsachsen des Querschnitts; die Stabachse ist die x-Achse. Aufgrund der Voraussetzung, daß die Querschnittsform erhalten bleibt, können die Verformungen des Querschnitts infolge einer allgemeinen Belastung durch die Verschiebungen in Richtung der drei Koordinatenachsen und die Verdrehung um die drei Koordinatenachsen ausgedrückt werden. Die Verschiebungen in Richtung der Koordinaten x, y, z werden mit u, v, w bezeichnet. Durch die Vernachlässigung der Schubverformungen können die Verdrehungen um die y- und z-Achse mit den Neigungen $\frac{dw}{dx} = w'$ und $\frac{dv}{dx} = v'$ dieser Achsen gleichgesetzt werden. Die Verdrehung um die Längsachse x wird ϑ genannt. Alle drei Verdrehungen haben Längsverschiebungen u zur Folge, wobei sich die Längsverschiebungen infolge der Verdrehung ϑ nach der Theorie der Wölbkrafttorsion aus der Verwindung des Stabes $\frac{d\vartheta}{dx} = \vartheta'$ ergeben. Die positiven Verformungsgrößen sind im Bild A2 dargestellt.

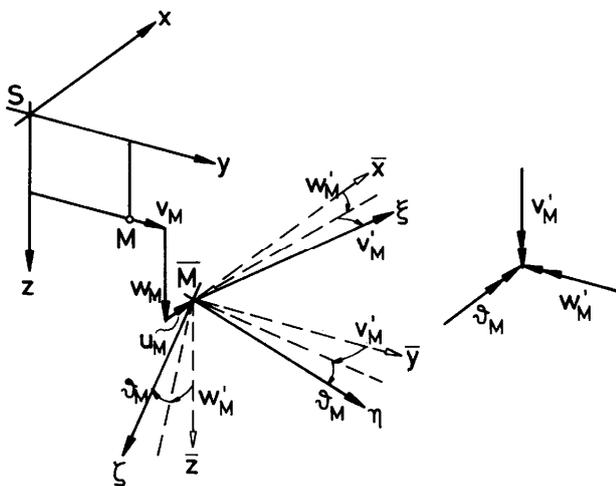


Bild A2 : Definition der positiven Verformungsgrößen am Element

Fig. A2 : Definition of the positive Deformation at the element

In der Querschnittsebene (y-z-Ebene) gilt für die Verschiebungen eines beliebigen Querschnittspunktes:

$$\begin{aligned} v &= v_M - (z - z_M) \vartheta \\ w &= w_M + (y - y_M) \vartheta \end{aligned} \quad (A1.1)$$

Die Verschiebung u in Richtung der Stablängsachse x setzt sich aus mehreren Anteilen zusammen und ergibt sich nach der Theorie der Wölbkrafttorsion zu:

$$u = u_M + \omega_M \vartheta' - (y - y_M) v_M' - (z - z_M) w_M' \quad (A1.2)$$

Hierin ist ω_M die auf den Schubmittelpunkt M bezogene, normierte Hauptverwölbung.

A1.3.2 Beziehungen zwischen Spannungen und Verformungen

Die Verknüpfung auftretender Verformungen mit den zugehörigen Spannungen innerhalb des betrachteten Querschnitts geschieht über eine Werkstoffbeziehung. An dieser Stelle ist die Kenntnis des Werkstoffverhaltens eines Verbundquerschnitts aus Stahl- oder Spannbeton noch nicht erforderlich, da bei entsprechender Definition der charakteristischen Querschnittswerte, wie z.B. Schwerpunkt, Hauptachsen, Trägheitsmomente usw., ein Verbundquerschnitt ebenso als Einheit wie ein Querschnitt aus Hookeschem Material betrachtet werden kann. Die weiteren Abhandlungen werden deshalb wegen besserer Übersichtlichkeit für einen homogenen Querschnitt und für eine ideal elastische Werkstoffbeziehung vorgenommen. Die grundsätzlichen Überlegungen ändern sich dadurch nicht.

Für die Normalspannungen σ_ξ in Richtung der verformten Achse gilt:

$$\sigma_\xi = E \frac{\partial u}{\partial x} \quad (A1.3)$$

und mit einmal differenzierter Gleichung (A1.2)

$$\sigma_\xi = E (u_M' + \omega_M \vartheta'' - y v_M'' - z w_M'') \quad (A1.4)$$

Für die Schubspannungen läßt sich wegen der Voraussetzung, daß die Schubverformungen aus Querkraft und Wölbkrafttorsion vernachlässigt werden, kein Elastizitätsgesetz wie für die Normalspannungen (A1.3) angeben. Die Schubspannungen werden deshalb aus Gleichgewichtsbetrachtungen am Element erhalten. (Ableitung der Dübelformel der Stabstatik). Danach ergibt sich

$$\tau_{\xi S} t(s) = E (S_o^M \vartheta''' - S_z v_M''' - S_y w_M''') \quad (A1.5)$$

mit den bekannten Ausdrücken für die statischen Flächenmomente

$$S_y = \int_{s_0}^s z dA, \quad S_z = \int_{s_0}^s y dA \quad \text{und} \quad S_o^M = \int_{s_0}^s \omega_M dA$$

Dabei ist s ist die Laufvariable der Profilmittellinie und t(s) die Profildicke.

Außer diesen "sekundären" Schubspannungen infolge Querkraft und Wölb torsion sind noch die "primären" Schubspannungen aus *St. Venantscher* Torsion, die nur von der Verwindung ϑ' abhängen, zu berücksichtigen:

$$\tau_{St.V} = G t(s) \vartheta' \quad (A1.6)$$

A1.3.3 Schnittgrößen bezogen auf die verformten Achsen

Aus den im vorigen Abschnitt ermittelten Spannungen lassen sich durch Integration über die Querschnittsfläche entsprechende Schnittkräfte und unter Berücksichtigung der Hebelarme entsprechende Schnittmomente ermitteln. Liegt der Koordinatennullpunkt im Schwerpunkt S, werden die unbekannt Verformungsgrößen auf den Schubmittelpunkt M bezogen und fallen die Koordinatenachsen mit den Hauptträgheitsachsen zusammen, so ergeben sich die bekannten Formeln für die Querkraft und Biegemomente nach den Regeln der Stabstatik zu:

$$\begin{aligned} N &= \int \sigma_{\xi} dA = (EA) u'_M \\ Q_{\eta} &= \int \tau_{\xi S} t(s) dy = -(EI_z) v'''_M \\ Q_{\zeta} &= \int \tau_{\xi S} t(s) dz = -(EI_y) w'''_M \\ M_{\zeta} &= - \int y \sigma_{\xi} dA = (EI_z) v''_M \\ M_{\eta} &= \int z \sigma_{\xi} dA = -(EI_y) w''_M \end{aligned} \quad (A1.7)$$

Die Normalkraft wird als äußere Last vorgegeben. Eine Berechnung über die Normalspannungen ist somit nicht erforderlich. Diese Formel ist nur vollständigheitshalber hier angegeben.

Die Biegemomente und die Normalkraft greifen im Schwerpunkt S, die Querkraft und das noch zu bestimmende Torsionsmoment im Schubmittelpunkt M an. Die Wirkungsrichtungen zeigen am positiven Schnittpufer in Richtung der positiven Koordinatenachsen.

Das Torsionsmoment M_{ξ} wird aus insgesamt drei Anteilen gebildet. Die ersten beiden entstehen aus der Integration der *St. Venantschen* Schubspannungen und Wölbschubspannungen über die Querschnittsfläche und lauten:

$$M_{\xi 1} = (GI_t) \vartheta' \quad (A1.8)$$

$$M_{\xi 2} = \int \tau_{\xi S} r_M(s) dA = -(EC_M) \vartheta''' \quad (A1.9)$$

Dabei ist $r_M(s)$ der senkrechte Abstand der Wirkungslinie von $\tau_{\xi S}$ vom Schubmittelpunkt M.

Bei Anwendung der Theorie II. Ordnung muß berücksichtigt werden, daß innerhalb einer Schnittfläche $x = \text{konstant}$ die Normalspannungen σ immer in Richtung der verformten Längsfasern zeigen und damit in jedem Punkt der Schnittfläche eine andere Richtung haben. Daraus ergeben sich Komponenten der Normalspannungen, die in der Schnittfläche liegen (Abtriebskräfte) und die bezogen auf die verformte Stabachse ξ einen Beitrag zum Torsionsmoment $M_{\xi 3}$ liefern:

$$M_{\xi 3} = \vartheta' \int \rho_M^2 \sigma_{\xi} dA \quad (A1.10)$$

ρ_M ist der radiale Abstand der Normalspannungen vom Schubmittelpunkt M.

Wird für die Normalspannungen σ_{ξ} die Beziehung (A1.4) eingesetzt, so ergeben sich Produkte der unbekannt Verformungsgrößen untereinander, da das Integral über die Querschnittsfläche noch mit der Verwindung ϑ' zu multiplizieren ist. Die Glieder des Torsionsmomentanteils $M_{\xi 3}$ werden dann nichtlinear. Um dies zu vermeiden, setzt man näherungsweise die Normalspannung σ_{xI} nach Theorie I. Ordnung in Gleichung (A1.10) ein. Für diese Längsspannung gilt bekanntlich:

$$\sigma_{xI} = \frac{N}{A} - \frac{M_{zI}}{I_z} y + \frac{M_{yI}}{I_y} z + \frac{M_{wI}}{C_M} \omega_M \quad (A1.11)$$

Der Wölbmomentenanteil dieser Normalspannung wird beim Einsetzen meist vernachlässigt.

Der radiale Abstand ρ_M der betrachteten Faser vom Schubmittelpunkt M wird in kartesischen Koordinaten ausgedrückt:

$$\rho_M^2 = (y - y_M)^2 + (z - z_M)^2 \quad (A1.12)$$

Beim Einsetzen von (A1.11) und (A1.12) in (A1.10) ergeben sich unter Beachtung der Orthogonalitätsbedingungen für die Flächenintegrale die folgenden Ausdrücke:

$$i_M^2 = \frac{I_y + I_z}{A} + y_M^2 + z_M^2$$

$$r_{M,z} = \frac{1}{I_y} \int y (y^2 + z^2) dA - 2 y_M \quad (A1.13)$$

$$r_{M,y} = \frac{1}{I_z} \int z (y^2 + z^2) dA - 2 z_M$$

Der Anteil $M_{\xi 3}$ vom Gesamttorsionsmoment lautet damit:

$$M_{\xi 3} = \left[N i_M^2 - M_{zI} r_{M,z} + M_{yI} r_{M,y} \right] \vartheta' \quad (A1.14)$$

Das gesamte Torsionsmoment M_ξ folgt aus der Aufsummierung der drei Anteile (A1.8), (A1.9) und (A1.14)

$$M_\xi = -(EC_M) \vartheta''' + [(GI_t) + Ni_M^2 - M_{zI} r_{M,z} + M_{yI} r_{M,y}] \vartheta' \quad (A1.15)$$

Nach der Theorie der Wölbkrafttorsion ergibt sich schließlich noch das Wölbmoment M_w :

$$M_w = -(EC_M) \vartheta'' \quad (A1.16)$$

Die Aufstellung der Gleichgewichtsbedingungen am verformten Stabelement wird dadurch erschwert, daß die über die Gleichungen (A1.7) und (A1.15) ermittelten Schnittgrößen in Richtung der verformten Achsen $\xi \eta \zeta$ weisen, deren Richtung sich zudem noch mit fortschreitendem x über die Elementlänge dx ändert.

Die Gleichgewichtsbedingungen lassen sich einfacher aufstellen, wenn man zuvor die Schnittgrößen auf die ursprünglichen unverformten Achsen $x y z$ transformiert.

A1.3.4 Schnittgrößen bezogen auf die Richtungen der unverformten Achsen

Um beim Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen am verformten System die dauernden Änderungen der Wirkungsrichtungen der Schnittgrößen nicht berücksichtigen zu müssen, werden die Schnittgrößen auf die Richtungen der unverformten Achsen transformiert.

Diese Umrechnung erfolgt analog zur Transformation der Verformung vom verformten in das unverformte Koordinatensystem. Die zugehörige Transformationsmatrix ist z.B. in [23] angegeben.

Danach ergibt sich:

$$\begin{bmatrix} B_y \\ B_z \\ T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\vartheta & v' \\ \vartheta & 1 & w' \\ -v' & -w' & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_\eta \\ M_\zeta \\ M_\xi \end{bmatrix} \quad (A1.17)$$

Da in diesen Beziehungen jeweils Produkte zweier unbekannter Größen auftauchen und die Gleichungen damit nichtlinear sind, werden für die Momente an diesen Stellen näherungsweise die entsprechenden Momente nach Theorie I. Ordnung eingesetzt. Dies entspricht der gleichen Vorgehensweise wie das Einsetzen der Normalspannung σ nach Theorie I. Ordnung beim Torsionsmoment $M_{\xi 3}$ nach (A1.10). Da hier vorwiegend auf Biegung beanspruchte Träger behandelt werden, sind die Torsionsmomente nach Theorie I. Ordnung wesentlich kleiner als die auftretenden

Biegemomente. Diese Torsionsmomente werden bei der Umrechnung dann noch mit klein vorausgesetzten Verdrehungen multipliziert, wodurch schließlich Produkte zweier verhältnismäßig kleiner Größen auftreten. Deshalb wird der Einfluß der Torsionsmomente auf die Biegemomente bei der Transformation der Schnittgrößen von den verformten auf die unverformten Achsen vernachlässigt. Die unterschiedlichen Angriffspunkte der Biegemomente (Schwerpunkt S) und des Torsionsmoments (Schubmittelpunkt M) bewirken, daß bei der Umrechnung des Torsionsmoments von den verformten auf unverformten Achsen nach (A1.17) die auf den Schubmittelpunkt M bezogenen Biegemomente nach Theorie I. Ordnung eingesetzt werden müssen. Diese auf die Richtungen der unverformten Achsen bezogenen Momente lauten damit:

$$B_y = M_\eta - M_{zI} \vartheta \quad (A1.18)$$

$$B_z = M_\zeta + M_{yI} \vartheta$$

$$T = M_\xi - (M_{yI} - N z_M) v'_M - (M_{zI} + N y_M) w'_M$$

Die Bestimmung der auf die unverformten Achsen bezogenen Querkräfte V_y und V_z aus den auf die verformten Achsen bezogenen Querkräften Q_η und Q_ζ ist nicht erforderlich, da die Schubspannungen $\tau_{\xi S}$ nicht über ein Werkstoffgesetz, sondern ohnehin nur aus Gleichgewichtsbetrachtungen berechnet werden. Die Querkräfte werden deshalb mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen am Stabelement über die Momente direkt ermittelt. Das auf die unverformte Achse bezogene Wölbmoment W wird mit dem auf die verformte Achse bezogenen Wölbmoment M_w gleichgesetzt.

A1.3.5 Gleichgewichtsbetrachtung am Stabelement

Wie bereits erwähnt ist es von Vorteil, die Gleichgewichtsbedingungen mit denjenigen Schnittgrößen, die auf die Richtungen der unverformten Achsen bezogen sind, aufzustellen. Es brauchen dann nur noch die Verschiebungen ihrer Angriffspunkte berücksichtigt zu werden. Es wird ein durch äußere Lasten verformtes Stabelement der Länge dx betrachtet. An seinen Schnittufern greifen die Schnittmomente $B_y, B_z, B_y + dB_y$ und $B_z + dB_z$ und die Normalkräfte N und $N + dN$ im Schwerpunkt S , die Schnittkräfte $V_y, V_z, V_y + dV_y$ und $V_z + dV_z$ und die Schnittmomente T und $T + dT$ im Schubmittelpunkt M an. Zusätzlich sind am Element die äußeren, in Richtung der Koordinatenachsen y und z wirkenden Linienlasten $p_y(x)$ und $p_z(x)$ vorhanden. Das Element verdreht sich zwischen den Schnitten x und $x + dx$ um den Drehwinkel ϑ .

Bevor die Gleichgewichtsbedingungen angegeben werden, wird der Einfluß der am Element angreifenden Streckenlasten festgestellt. Diese Streckenlasten verlaufen am Element stetig und greifen im Punkt A(y_A, z_A) an. Bezogen auf den Schubmittelpunkt M verursachen die Streckenlasten p_y und p_z bereits am unverformten Element ein Streckentorsionsmoment:

$$m_{II} = p_z (y_A - y_M) - p_y (z_A - z_M) \quad (A1.19)$$

Der zusätzliche Hebelarm der Streckenlasten am verformten System ergibt sich aus der Relativverschiebung zwischen dem Schubmittelpunkt M und dem Angriffspunkt A, die nur vom Drehwinkel ϑ abhängt. Dieses Zusatztorsionsmoment nach Theorie II. Ordnung lautet:

$$m_{III} = - p_z (z_A - z_M) \vartheta - p_y (y_A - y_M) \vartheta \quad (A1.20)$$

Das gesamte Streckentorsionsmoment m_t ist die Summe aus beiden Anteilen.

Die sechs Gleichgewichtsbedingungen am verformten Stabelement liefern die folgenden differentiellen Beziehungen , siehe [23]:

$$\begin{aligned} \Sigma X &: dN = 0 & (a) \\ \Sigma Z &: dV_z + p_z dx = 0 & (b) \\ \Sigma Y &: dV_y + p_y dx = 0 & (c)(A1.21) \\ \Sigma B_y &: dB_y + N dw_s - V_z dx = 0 & (d) \\ \Sigma B_z &: dB_z - N dv_s + V_y dx = 0 & (e) \\ \Sigma T &: dT + V_z dv_M - V_y dw_M + m_t dx = 0 & (f) \end{aligned}$$

Da die Normalkraft als äußere Last vorgegeben wird, bleibt Gleichung (a) bei den weiteren Betrachtungen unberücksichtigt. Zudem ist sie nicht mit den übrigen Gleichungen gekoppelt und kann getrennt behandelt werden.

A1.3.6 Differentialgleichungen nach Theorie II. Ordnung für den wölbsteifen Stab

Die Gleichungen (A1.21) lassen sich zu den bekannten Differentialgleichungen IV. Ordnung für das Biege- Torsions-Problem nach Theorie II. Ordnung zusammenfassen. Zunächst wird Gleichung (d) einmal differenziert und in (b) eingesetzt, ebenso (e) in (c). Nach Einsetzen der entsprechend zu differenzierenden Gleichungen (A1.18) und (A1.7) erhält man:

$$[(EI_z) v_M'''] + (M_{yI} \vartheta)'' - N v_M'' - N z_M \vartheta'' - p_y = 0 \quad (A1.22)$$

$$[(EI_y) w_M'''] + (M_{zI} \vartheta)'' - N w_M'' + N y_M \vartheta'' - p_z = 0 \quad (A1.23)$$

Bei der Torsionsgleichung werden für die Querkräfte V_y und V_z wiederum diejenigen nach Theorie I. Ordnung eingesetzt. Mit den bekannten Beziehungen $M'_{yI} = Q_{zI}$ und $M'_{zI} = -Q_{yI}$ und unter Beachtung der Gleichungen (A1.18) und (A1.15) ergibt sich die Differentialgleichung

$$\begin{aligned} [(EC_M) \vartheta'''] - [(GI_t) + N i_M^2] \vartheta'' - \\ [r_{M,y} M_{yI} \vartheta'] + [r_{M,z} M_{zI} \vartheta'] + \\ [M_{yI} - N z_M] v_M'' + [M_{zI} + N y_M] w_M'' - m_t = 0 \end{aligned} \quad (A1.24)$$

Diese drei Differentialgleichungen haben normalerweise keine konstanten Koeffizienten. Durch die Koppelung ist eine geschlossene Lösung nur für wenige Sonderfälle möglich (z.B. [4]). Für den allgemeinen Fall kommt zur Lösung dieser drei Differentialgleichungen nur ein numerisches Lösungsverfahren in Frage.

A1.3.7 Differentialgleichungssystem I. Ordnung

Die drei Differentialgleichungen IV. Ordnung (A1.22) bis (A1.24) sind aus der Verknüpfung der Gleichgewichts- und Verträglichkeitsbedingungen entstanden. Diese Bedingungen enthalten bereits die zur Lösung des Problems benötigten differentiellen Beziehungen I. Ordnung, wenn als Unbekannte die zwölf mechanisch sinnvollen Zustandsgrößen des räumlich beanspruchten Balkenelements gewählt werden, und zwar:

- a.) die Verformungen v, w, ϑ
- b.) die Neigungen v' und w' bzw. die Verwindung ϑ'
- c.) die Schnittgrößen bezogen auf die unverformten Achsen B_z, V_y, B_y, V_z, T, W

Zur Formulierung der differentiellen Zusammenhänge stehen zunächst die fünf Gleichgewichtsbedingungen (A1.21 b-f) zur Verfügung, die eine Beziehung zwischen Schnittgrößen und deren Ableitungen herstellen . Drei weitere Verknüpfungen erhält man aus (A1.18) mit (A1.7) und mit (A1.15), eine vierte aus (A1.16). Die fehlenden drei werden aus den bekannten differentiellen Beziehungen zwischen den Verformungen und den Neigungen bzw. der Verdrehung und der Verwindung hergeleitet. Die 12 Differentialgleichungen I. Ordnung lauten im einzelnen:

$$\begin{aligned}
 V'_z &= -p_z \\
 V'_y &= -p_y \\
 B'_y &= V_z - N w'_M + N y_M \vartheta' \\
 B'_z &= -V_y + N v'_M + N z_M \vartheta' \\
 T' &= -M_{yI} v'_M - M_{zI} w'_M + \\
 &\quad [p_z(z_A - z_M) + p_y(y_A - y_M)]\vartheta - m_{II} \\
 (EI_y)w''_M &= -B_y - M_{zI}\vartheta \\
 (EI_z)v''_M &= +B_z - M_{yI}\vartheta \\
 (EC_M)\vartheta'' &= -W \\
 [(EC_M)\vartheta'']' &= -W' = \\
 &\quad T - [(GI_t) + Ni_M^2 + r_{M,y} M_{yI} - r_{M,z} M_{zI}]\vartheta' \\
 &\quad + [M_{yI} - N z_M]v'_M + [M_{zI} + N y_M]w'_M \\
 v'_M &= \frac{dv_M}{dx} \\
 w'_M &= \frac{dw_M}{dx} \\
 \vartheta' &= \frac{d\vartheta}{dx}
 \end{aligned}
 \tag{A1.25}$$

Diese 12 Gleichungen stellen ein Dgl-System der Form

$$\frac{d}{dx}(\underline{R}) = \underline{A} \cdot \underline{R} + \underline{L}
 \tag{A1.26}$$

dar, wobei der Vektor der unbekannt Zustandsgrößen \underline{R} und der Lastvektor \underline{L} wie folgt aussehen:

$$\underline{R} = \{v_M \ v'_M \ w_M \ w'_M \ \vartheta \ \vartheta' \ V_y \ B_z \ V_z \ B_y \ T \ W\}
 \tag{A1.27}$$

$$\underline{L} = \{0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0 \ -p_y \ 0 \ -p_z \ 0 \ -m_{II} \ 0\}
 \tag{A1.28}$$

Die Koeffizientenmatrix \underline{A} ist im Bild A3 dargestellt. In der Koeffizientenmatrix \underline{A} sind folgende Abkürzungen verwendet worden :

$$\begin{aligned}
 (GI_t^*) &= (GI_t) + Ni_M^2 + M_{yI} r_{M,y} - M_{zI} r_{M,z} \\
 p_t &= p_z(z_A - z_M) + p_y(y_A - y_M)
 \end{aligned}
 \tag{A1.29}$$

	v_M	v'_M	w_M	w'_M	ϑ	ϑ'	V_y	B_z	V_z	B_y	T	W	L_i
v'_M		1											
v''_M					$-\frac{M_{yI}}{(EI_z)}$			$\frac{1}{(EI_z)}$					
w'_M				1									
w''_M					$-\frac{M_{zI}}{(EI_y)}$				$-\frac{1}{(EI_y)}$				
ϑ'						1							
ϑ''												$-\frac{1}{(EC_M)}$	
V'_y													$-p_y$
B'_z		N				$N z_M$	-1						
V'_z													$-p_z$
B'_y				-N		$N y_M$			1				
T'		$-M'_{yI}$		$-M'_{zI}$	p_t								$-m_{II}$
W'		$M_{yI} - N z_M$		$M_{zI} + N y_M$		$-(GI_t^*)$					1		

(GI_t^*) und p_t nach Gl.(A1.29)

Bild A3 : Koeffizientenmatrix \underline{A} für den wölbesteifen Querschnitt

Fig. A3 : Matrix of coefficients \underline{A} for a cross section with warping torsion

A1.3.8 Beziehungen zwischen den auf die unverformten und den auf die verformten Achsen bezogenen Schnittgrößen

Die Integration des Gleichungssystems (A1.26) liefert als Lösung die auf die Richtungen der unverformten Achsen bezogenen Schnittgrößen und Verformungen. Zur Durchführung eines Spannungsnachweises sind jedoch die auf die verformten Achsen bezogenen Schnittgrößen erforderlich. In den Gleichungen (A1.7), (A1.15) und (A1.16) sind diese Schnittgrößen als Funktion der Verformungen angegeben. Die berechneten Verformungen müßten bei Verwendung dieser Formeln entsprechend umgerechnet, differenziert und eingesetzt werden. Einfacher ist es jedoch, die auf die verformten Achsen bezogenen Schnittgrößen aus den ebenfalls berechneten, auf die unverformten Achsen bezogenen Schnittgrößen zu bestimmen.

Für die Momente ergeben sich dann unter Verwendung von (A1.18) und (A1.16) folgende Formeln:

$$\begin{aligned} M_{\zeta} &= B_z - M_{yI} \vartheta \\ M_{\eta} &= B_y + M_{zI} \vartheta \\ M_{\xi} &= T + [M_{yI} - N z_M] v'_M + [M_{zI} + N y_M] w'_M \\ M_w &= - (EC_M) \vartheta'' = W \end{aligned} \quad (A1.30)$$

Für die Querkräfte stehen die beiden Gleichgewichtsbedingungen (A1.21d) und (A1.21e) zur Verfügung, in die die einmal differenzierten Gleichungen (A1.18) eingesetzt werden. Die Querkräfte ergeben sich dann als die Ableitung der Momente:

$$\begin{aligned} Q_{\eta} &= V_y + (M_{yI} \vartheta)' - N v'_M - N z_M \vartheta' \\ Q_{\zeta} &= V_z + (M_{zI} \vartheta)' - N w'_M + N y_M \vartheta' \end{aligned} \quad (A1.31)$$

A1.3.9 Der wölbfreie Querschnitt

Bei Streichung des Wölbanteils in der Differentialgleichung IV. Ordnung (A1.24) reduziert sich diese auf eine Dgl II. Ordnung. Die Zahl der unbekanntenen Größen verringert sich damit von zwölf auf zehn. Die bisher aufgestellten Gleichungen behalten ihre Gültigkeit. Es müssen nur an den entsprechenden Stellen die Wölbanteile gestrichen werden.

Aus Gleichung (A1.18) mit (A1.15) läßt sich eine Beziehung zwischen der Verwindung ϑ' und der Schnittgröße T angeben:

$$(GI_t^*) \vartheta' = T + (M_{yI} - N z_M) v'_M + (M_{zI} + N y_M) w'_M \quad (A1.32)$$

Diese Gleichung ist in die Gleichgewichtsbedingungen (A1.21d) und (A1.21e) einzusetzen:

$$\begin{aligned} B'_y &= V_z - N w'_M + \\ \frac{N y_M}{(GI_t^*)} & \left[T + (M_{yI} - N z_M) v'_M + (M_{zI} + N y_M) w'_M \right] \end{aligned} \quad (A1.33)$$

$$\begin{aligned} B'_z &= V_y + N v'_M + \\ \frac{N z_M}{(GI_t^*)} & \left[T + (M_{yI} - N z_M) v'_M + (M_{zI} + N y_M) w'_M \right] \end{aligned}$$

Der Vektor der unbekanntenen Zustandsgrößen und der des Lastvektors lautet damit

$$\underline{R} = \{ v_M \quad v'_M \quad w_M \quad w'_M \quad \vartheta \quad V_y \quad B_z \quad V_z \quad B_y \quad T \} \quad (A1.34)$$

$$\underline{L} = \{ 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -p_y \quad 0 \quad -p_z \quad 0 \quad -m_{II} \} \quad (A1.35)$$

Die neue Koeffizientenmatrix \underline{A} ist im Bild A4 dargestellt.

Die auf die verformten Achsen bezogenen Schnittgrößen ergeben sich aus den auf die unverformten Achsen bezogenen Schnittgrößen zu:

$$\begin{aligned} M_{\zeta} &= B_z - M_{yI} \vartheta \\ M_{\eta} &= B_y + M_{zI} \vartheta \\ M_{\xi} &= T + [M_{yI} - N z_M] v'_M + [M_{zI} + N y_M] w'_M \\ Q_{\eta} &= V_y + M'_{yI} \vartheta + \frac{M_{zI} + N y_M}{(GI_t^*)} (M_{yI} - N z_M) w'_M \\ &+ \left[\frac{(M_{yI} - N z_M)^2}{(GI_t^*)} - N \right] v'_M + (M_{yI} - N z_M) \frac{T}{(GI_t^*)} \\ Q_{\zeta} &= V_z + M'_{zI} \vartheta + \frac{M_{yI} - N z_M}{(GI_t^*)} (M_{zI} + N y_M) v'_M \\ &+ \left[\frac{(M_{zI} + N y_M)^2}{(GI_t^*)} - N \right] w'_M + (M_{zI} + N y_M) \frac{T}{(GI_t^*)} \end{aligned} \quad (A1.36)$$

	v_M	v'_M	w_M	w'_M	ϑ	V_y	B_z	V_z	B_y	T	L_i
v'_M		1									
v''_M					$-\frac{M_{yI}}{(EI_z)}$		$\frac{1}{(EI_z)}$				
w'_M				1							
w''_M					$-\frac{M_{zI}}{(EI_y)}$				$-\frac{1}{(EI_y)}$		
g'		$\frac{M_{yI} - N z_M}{(GI_t^*)}$		$\frac{M_{zI} + N y_M}{(GI_t^*)}$						$\frac{1}{(GI_t^*)}$	
V'_y											$-p_y$
B'_z		$\frac{N z_M}{(GI_t^*)}(M_{yI} - N z_M) + N$		$\frac{N z_M}{(GI_t^*)}(M_{zI} + N y_M)$			-1			$\frac{N z_M}{(GI_t^*)}$	
V'_z											$-p_z$
B'_y		$\frac{N y_M}{(GI_t^*)}(M_{yI} - N z_M)$		$\frac{N y_M}{(GI_t^*)}(M_{zI} + N y_M) - N$				1		$\frac{N y_M}{(GI_t^*)}$	
T'		$-M'_{yI}$		$-M'_{zI}$	p_t						$-m_{II}$

(GI_t^*) und p_t nach Gl.(A1.29)

Bild A4 : Koeffizientenmatrix $\underline{\underline{A}}$ für den wölbfreien Querschnitt

Fig. A4 : Matrix of coefficients $\underline{\underline{A}}$ for a cross section without warping torsion

A2. Erweiterung der Gleichungen nach Theorie II.Ordnung für den Stahlbetonquerschnitt

Die Schnittgrößen, mit denen die Gleichgewichtsbedingungen am Trägerelement (siehe Kap. A1.3.5) formuliert werden, werden durch Integration der Spannung über die Querschnittsfläche ermittelt. Diese Integrationen über die Querschnittsfläche führen bei einem homogenen Querschnitt zu den bekannten Gleichungen (A1.7). Darin stellen die Steifigkeiten (EI_y) und (EI_z) das Ergebnis der ausgeführten Integration über die Querschnittsflächen dar. Beim Stahlbeton-Verbundquerschnitt sind die Spannungen jedoch auf die drei Anteile Beton, nicht vorgespannte Bewehrung und Vorspannbewehrung verteilt. Eine Integration über die Querschnittsfläche ist in geschlossener Form nicht mehr möglich. Der Beton und die nicht vorgespannten Bewehrungsstäbe werden üblicherweise zum ideellen Querschnitt zusammengefaßt.

Aufgrund des idealisierten Verbundgesetzes ist die Verzerrung für einen Bewehrungsstab und den ihn umgebenden Beton gleich. Die Vorspannbewehrung bildet in dieser Einheit eine Störstelle, da durch die vorhandene Vordehnung im Spannstahl eine größere Verzerrung als im umgebenden Beton auftritt. Die konzentriert angreifende Vorspannkraft eines Spannstranges wirkt auf den Verbundquerschnitt wie eine " innere " Normalkraft, deren Einfluß bei den Integrationen über die Querschnittsfläche zu beachten ist. Das Hauptachsensystem für den Verbundquerschnitt wird mit den in Kap. A3.1 aufgeführten Gleichungen (A3.2) bis (A3.7) bestimmt, in denen ein nichtlineares Werkstoffverhalten des Betons nach den Ausführungen der Kap. A3.1 und A3.2 berücksichtigt wird.

A2.1 Schnittgrößen bezogen auf die verformten Achsen

Für das Biegemoment M_η gilt nach (A1.7) mit (A1.4)

$$M_\eta = \int_A E (u'_M + \omega_M \vartheta'' - y v''_M - z w''_M) dA$$

Aufgeteilt auf die Anteile von Beton und Bewehrung ergibt sich:

$$\begin{aligned} M_\eta = & (u'_M + \omega_M \vartheta'') \left[\iint_{A_b} E_b z dA_b + \sum_{i=1}^n E_{si} z_{si} A_{si} + \sum_{j=1}^m E_{vj} z_{vj} A_{vj} \right] \\ & - v''_M \left[\iint_{A_b} E_b y z dA_b + \sum_{i=1}^n E_{si} y_{si} z_{si} A_{si} + \sum_{j=1}^m E_{vj} y_{vj} z_{vj} A_{vj} \right] \\ & - w''_M \left[\iint_{A_b} E_b z^2 dA_b + \sum_{i=1}^n E_{si} z_{si}^2 A_{si} + \sum_{j=1}^m E_{vj} z_{vj}^2 A_{vj} \right] \end{aligned} \quad (A2.1)$$

Die Ausdrücke in den eckigen Klammern stellen das statische Moment (ES_y), das Deviationsträgheitsmoment (EI_{yz}) und das Biegeträgheitsmoment (EI_y) des Verbundquerschnitts dar. Von diesen werden die Terme für (ES_y) und (EI_{yz}) zur Bestimmung des Hauptachsensystems verwendet (s. Kap. A3.1). Da die Berechnung im Hauptachsensystem erfolgt, entfallen die ersten beiden Summanden in Glchg. (A2.1). Somit verbleibt für das Biegemoment M_η des Verbundquerschnitts formal der gleiche Ausdruck wie in Glchg. (A1.7) für den homogenen Querschnitt, jedoch mit dem Trägheitsmoment (EI_y) nach (A3.3 d). Für das Biegemoment M_ζ gilt dies analog.

Für das Torsionsmoment M_ξ bleiben der Wölbanteil und der *St. Venantsche* Anteil nach (A1.8) und (A1.9) unverändert. Die Schrägstellung der Längsfasern infolge der Verdrehung ϑ liefert nach (A1.10) mit (A1.12) noch einen zusätzlichen Anteil zum Gesamttorsionsmoment

$$M_{\zeta 3} = \vartheta' \iint_A \sigma_\xi [(y - y_M)^2 + (z - z_M)^2] dA \quad (A2.2)$$

Für den vorgespannten Verbundquerschnitt ist diese Integration über die ideelle Fläche A_{id} (Beton A_b + nicht vorgespannte Bewehrung A_s) und die Fläche der Vorspannbewehrung A_v durchzuführen:

$$\begin{aligned} M_{\zeta 3} = & \vartheta' \left\{ \iint_{A_{id}} \sigma_{\xi id} [(y - y_M)^2 + (z - z_M)^2] dA_{id} \right. \\ & \left. + \sum_{j=1}^m \sigma_{vj} [(y_{vj} - y_M)^2 + (z_{vj} - z_M)^2] A_{vj} \right\} \end{aligned} \quad (A2.3)$$

Für die Spannungen $\sigma_{\xi id}$ in der ideellen Fläche kann analog zur Biegung die Gleichung (A1.4) eingesetzt werden. Unter Beachtung der Orthogonalitätsbeziehungen für die Flächenintegrale ergibt sich der folgende Ausdruck :

$$\begin{aligned} \iint_{A_{id}} \sigma_{\xi id} [(y - y_M)^2 + (z - z_M)^2] dA_{id} = & (u'_M + \omega_M \vartheta'') \left[\iint E_{id} (y^2 + z^2) dA_{id} + (y_M^2 + z_M^2) \iint E_{id} dA_{id} \right] \\ & - v''_M \left[\iint E_{id} y (y^2 + z^2) dA_{id} - 2 y_M \iint E_{id} y^2 dA_{id} \right] \\ & - w''_M \left[\iint E_{id} z (y^2 + z^2) dA_{id} - 2 z_M \iint E_{id} z^2 dA_{id} \right] \end{aligned} \quad (A2.4)$$

Werden diese Ausdrücke (A2.4) noch mit der Verwindung ϑ' multipliziert, so treten Produkte der unbekanntenen Verformungsgrößen auf. Zur Vermeidung dieser Nichtlinearität werden für die Verformungen u'_M , v''_M und w''_M die entsprechenden Beziehungen nach Theorie I. Ordnung eingesetzt. Der Anteil der Verwölbung $\omega_M \vartheta''$ wird wie schon in Kap. A1.3.3 vernachlässigt. Außerdem ist noch zu beachten, daß die auf den ideellen Querschnitt wirkenden Schnittgrößen maßgebend für die Spannung $\sigma_{\xi id}$ sind. Diese Schnittgrößen sind von der Vorspannkraft abhängig und lauten:

$$\begin{aligned} N^{id} &= N + N_v \\ M_{zI}^{id} &= M_{zI} - N_v y_v \end{aligned} \quad (A2.5)$$

$M_{yI}^{id} = M_{yI} + N_v z_v$
 Die auf den ideellen Querschnitt wirkende Normalkraft N_v ist der Vorspannkraft Z_v der Spannglieder entgegengerichtet:

$$N_v = - \sum_{j=1}^m Z_{v,j} \quad (A2.6)$$

In den Gleichungen (A1.7) ist der Zusammenhang zwischen Verformungen und Schnittgrößen dargestellt. Diese Ausdrücke werden zusammen mit Glchg. (A2.5) in Glchg. (A2.4) eingesetzt und unter Verwendung der Abkürzungen (A3.2) umgeformt :

$$\begin{aligned} \iint_{A_{id}} \sigma_{\xi id} [(y - y_M)^2 + (z - z_M)^2] dA_{id} = (N + N_v) \left[\frac{(EI_y)_{id} + (EI_z)_{id}}{(EA)_{id}} + y_M^2 + z_M^2 \right] \\ - (M_{zI} - N_v y_v) \left[\frac{1}{(EI_z)_{id}} \iint E_{id} y (y^2 + z^2) dA_{id} - 2 y_M \right] \\ + (M_{yI} + N_v z_v) \left[\frac{1}{(EI_y)_{id}} \iint E_{id} z (y^2 + z^2) dA_{id} - 2 z_M \right] \end{aligned} \quad (A2.7)$$

Die Summation über die Spannbewehrung liefert mit der Spannung $\sigma_v = Z_v/A_v$ den folgenden Term :

$$\sum_{j=1}^m \sigma_{vj} [(y_{vj} - y_M)^2 + (z_{vj} - z_M)^2] A_{vj} = \sum_{j=1}^m Z_{vj} [y_{vj}^2 + z_{vj}^2 + y_M^2 + z_M^2 - 2 y_{vj} y_M - 2 z_{vj} z_M] \quad (A2.8)$$

Der Ausdruck (A2.8) wird zu (A2.7) addiert, und man erhält mit (A2.6) den Torsionsmomentanteil zu:

$$\begin{aligned} M_{\xi 3} = (i_M)_{id}^2 N - (i_p)_{id}^2 \sum_{j=1}^m Z_{vj} + \sum_{j=1}^m Z_{vj} (y_{vj}^2 + z_{vj}^2) \\ + (r_{M,y})_{id} M_{yI} - (r_{M,z})_{id} M_{zI} - (r_y)_{id} \sum_{j=1}^m Z_{vj} z_{vj} - (r_z)_{id} \sum_{j=1}^m Z_{vj} y_{vj} \end{aligned} \quad (A2.9)$$

mit den Abkürzungen :

$$\begin{aligned} (i_p)_{id}^2 = \frac{(EI_y)_{id} + (EI_z)_{id}}{(EA)_{id}} \quad (i_M)_{id}^2 = (i_p)_{id}^2 + y_M^2 + z_M^2 \\ (r_y)_{id} = \frac{1}{(EI_y)_{id}} \iint E_{id} z (y^2 + z^2) dA_{id} \quad (r_{M,y})_{id} = (r_y)_{id} - 2 z_M \\ (r_z)_{id} = \frac{1}{(EI_z)_{id}} \iint E_{id} y (y^2 + z^2) dA_{id} \quad (r_{M,z})_{id} = (r_z)_{id} - 2 y_M \end{aligned} \quad (A2.10)$$

Ein Vergleich der Beziehungen (A2.10) für den Verbundquerschnitt mit denen nach (A1.13) für einen linear elastischen Werkstoff zeigt den gleichen formalen Aufbau. Der Unterschied liegt in der direkten Berücksichtigung des Elastizitätsmodulverlaufs bei den Flächenintegrationen. Die Ausführung dieser Integrationen wird im Anhang A3 erläutert. Weit deutlicher tritt der Einfluß einer Vorspannkraft auf das Torsionsmoment $M_{\xi 3}$ zutage, wie der Vergleich der Ausdrücke (A2.9) mit (A1.14) zeigt. Außer über den Spannungsverlauf und damit über den E-Modul in den Querschnittswerten wird in (A2.9) eine eventuell vorhandene Vorspannkraft explizit berücksichtigt.

Die Schnittmomente des vorgespannten Verbundquerschnitts schreiben sich dann folgendermaßen :

$$\begin{aligned} M_{\eta} = - (EI_y) w_M'' \\ M_{\zeta} = + (EI_z) v_M'' \end{aligned} \quad (A2.11)$$

$$M_{\xi} = - (EC_M) \vartheta''' + \left[(\overline{GI}_t) + (r_{M,y})_{id} M_{yI} - (r_{M,z})_{id} M_{zI} - (r_y)_{id} \sum_{j=1}^m Z_{vj} z_{vj} - (r_z)_{id} \sum_{j=1}^m Z_{vj} y_{vj} \right] \vartheta'$$

$$\text{mit } (\overline{GI}_t) = (GI_t) + (i_M)_{id}^2 N - (i_p)_{id}^2 \sum_{j=1}^m Z_{vj} + \sum_{j=1}^m Z_{vj} (y_{vj}^2 + z_{vj}^2) \quad (A2.12)$$

Die Steifigkeiten werden nach (A3.2) und (A3.3) berechnet, die Abkürzungen sind (A2.10) zu entnehmen. Die Querkräfte Q_{η} und Q_{ζ} werden wieder über die Gleichgewichtsbedingungen bestimmt. Die Gleichung für das Wölbmoment (A1.16) bleibt unverändert. Die Wölbsteifigkeit kann für den Verbundquerschnitt nach dem in Kap. A3.3.4 erläuterten Verfahren ermittelt werden.

A2.2 Schnittgrößen bezogen auf die unverformten Achsen

Die Umrechnung der Schnittgrößen von der Richtung der verformten Achsen auf die Richtung der unverformten Achsen erfolgt in der in Kap. A1.3.4 beschriebenen Weise. Obwohl sich durch die Drehung der Bezugsachsen die Hebelarme einer Vorspannkraft Z_v ändern, hat dies wegen des Eigen-
 spannungscharakters der Vorspannung keinen Einfluß auf die Umrechnung der Schnittgrößen. Die durch die Vorspannung im ideellen Querschnitt hervorgerufenen Spannungen und die Spannungen im Spannglied heben sich auf. Die formalen Umrechnungen (A1.18) behalten auch für den Verbundquerschnitt ihre Gültigkeit. Es sind jedoch die Schnittgrößen nach den Gleichungen (A2.11) einzusetzen.

A2.3 Gleichgewichtsbetrachtungen

Nachdem in den beiden vorherigen Kapiteln A2.1 und A2.2 die Schnittgrößen des Verbundquerschnitts bestimmt worden sind, können nun die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt werden. Eine gekrümmte Spanngliedführung im Element kann am einfachsten durch die zugehörige Umlenkkraft erfaßt werden. Für den allgemeinen Fall ergeben sich damit Streckenlasten in Richtung

der Koordinatenachsen ähnlich denjenigen, die bereits in Kap. A1.3.5 behandelt worden sind:

$$p_{z,v} = \sum_{j=1}^m Z_{vj} z''_{vj}$$

$$p_{y,v} = \sum_{j=1}^m Z_{vj} y''_{vj}$$
(A2.13)

Es gibt jedoch, wie in [8] gezeigt wird, für die Umlenkkräfte kein Zusatztorsionsmoment nach Theorie II. Ordnung wie bei den richtungstreuen Streckenlasten. Mit den Komponenten der Umlenkkraft nach (A2.13) schreibt sich dieses Torsionsmoment :

$$m_{t,v} = p_{z,v}(y_v - y_M) - p_{y,v}(z_v - z_M) \quad (A2.14)$$

Werden die Umlenkkräfte in den Gleichgewichtsbedingungen (A1.21) berücksichtigt, so ergeben sich folgende Gleichungen:

$$V'_z + p_z + p_{z,v} = 0$$

$$V'_y + p_y + p_{y,v} = 0$$

$$B'_y + N(w'_M - y_M \vartheta) - V_z = 0 \quad (A2.15)$$

$$B'_z - N(v'_M - z_M \vartheta) + V_y = 0$$

$$T' + V_z v'_M - V_y w'_M + m_t + m_{t,v} = 0$$

Verläuft das Spannglied im betrachteten Element geradlinig, so sind an den Enden des Elements Knotenkräfte bzw. Knotenmomente einzuführen.

A2.4 Differentialgleichungen nach Theorie II. Ordnung für den vorgespannten Stahlbetonquerschnitt

Aus den Gleichgewichtsbedingungen (A2.15) lassen sich wie in Kap. A1.3.6 Differentialgleichungen IV. Ordnung gewinnen. Diese Dgln. schreiben sich wie folgt:

$$[(EI_z) v''_M]'' + (M_{yI} \vartheta)'' - N v''_M - N z_M \vartheta'' - p_y - p_{y,v} = 0$$

$$[(EI_y) w''_M]'' + (M_{zI} \vartheta)'' - N w''_M + N y_M \vartheta'' - p_z - p_{z,v} = 0$$

$$(EC_M) \vartheta''' - [(GI_t) + N(i_M)_{id}^2 - (i_p)_{id}^2 \sum_{j=1}^m Z_{vj}] \vartheta''$$

$$- \left\{ [M_{yI}(r_{M,y})_{id} - M_{zI}(r_{M,z})_{id} + \sum_{j=1}^m Z_{vj} (y_{vj}^2 + z_{vj}^2) - (r_y)_{id} \sum_{j=1}^m Z_{vj} z_{vj} - (r_z)_{id} \sum_{j=1}^m Z_{vj} y_{vj}] \vartheta' \right\}$$

$$+ (M_{yI} - N z_M) v''_M + (M_{zI} + N y_M) w''_M - m_t - m_{t,v} = 0$$
(A2.16) – (A2.18)

Die Abkürzungen sind in (A2.10) und (A2.14) zusammengestellt.

A2.5 Einfluß der Vorspannung auf das Dgl-System I. Ordnung

In der Koeffizientenmatrix \underline{A} nach Bild A3, die das Dgl-System für einen wölbesteifen Querschnitt beschreibt, ändert sich durch die Vorspannung zunächst ein Koeffizient in der Gleichung für die Ableitung des Wölbmoments. Dort ist der folgende neue Ausdruck (\overline{GI}_t^*) , der sich aus der Beziehung (A2.12) ergibt, anstelle von (GI_t^*) einzusetzen:

$$\begin{aligned} (\overline{GI}_t^*) = & (\overline{GI}_t) + (r_{M,y})_{id} M_{yI} - (r_{M,z})_{id} M_{zI} \\ & - (r_y)_{id} \sum_{j=1}^m Z_{vj} z_{vj} - (r_z)_{id} \sum_{j=1}^m Z_{vj} y_{vj} \end{aligned} \quad (A2.19)$$

Die hierin enthaltenen Abkürzungen sind den Ausdrücken (A2.10) und (A2.12) zu entnehmen.

Der Lastvektor \underline{L} ändert sich gegenüber (A1.28) zu:

$$\begin{aligned} \underline{L} = & \{0, 0, 0, 0, 0, 0, \\ & -p_y - p_{y,v}, 0, -p_z - p_{z,v}, 0, -m_t - m_{t,v}, 0\} \end{aligned} \quad (A2.20)$$

Die Zusatzlasten aus Umlenkkräften sind in den Beziehungen (A2.13) und (A2.14) aufgeführt. Für den wölbfreien Querschnitt sind die Koeffizientenmatrix \underline{A} nach Bild A4 und der Lastvektor \underline{L} nach (A1.35) entsprechend zu ändern bzw. zu ergänzen.

A2.6 Umrechnung der auf die unverformten Achsen bezogenen Schnittgrößen

Die für den Spannungsnachweis benötigten, auf die verformten Achsen bezogenen Schnittgrößen ergeben sich, wie bereits in Kap. A1.3.8 beschrieben, aus den berechneten, auf die unverformten Achsen bezogenen Schnittgrößen. Die hier vorgenommene Berücksichtigung der Vorspannung über Umlenkkräfte bedeutet jedoch für die rechnerische Behandlung des Problems, daß mit einer quasi "äußeren" Streckenlast gerechnet wird. Durch diese rechnerisch gleiche Behandlung der Umlenkkräfte mit den tatsächlich vorhandenen äußeren Streckenlasten wird das Verformungsverhalten richtig erfaßt, aber es resultieren aus den Umlenkkräften auch Schnittgrößen, die durch den Eigenspannungscharakter der Vorspannung natürlich nicht vorhanden sein können. Die auf die unverformten Achsen bezogenen Schnittgrößen müssen deshalb entsprechend korrigiert werden. Für die Biegemomente und Querkräfte gilt:

$$\begin{aligned} \overline{V}_y &= V_y + \sum_{j=1}^m Z_{vj} y'_{vj} \\ \overline{B}_z &= B_z - \sum_{j=1}^m Z_{vj} y_{vj} \\ \overline{V}_z &= V_z + \sum_{j=1}^m Z_{vj} z'_{vj} \\ \overline{B}_y &= B_y + \sum_{j=1}^m Z_{vj} z_{vj} \end{aligned} \quad (A2.21)$$

Das Torsionsmoment T und Wölbmoment W bleiben unverändert. Die korrigierten Schnittgrößen (A2.21) werden an entsprechender Stelle in die Gleichungen (A1.30) und (A1.31) eingesetzt. Für den wölbfreien Querschnitt sind die Gleichungen (A1.36) für die Umrechnung heranzuziehen.

A2.7 Zusammenfassende Bemerkungen

Ein Vergleich der maßgebenden Differentialgleichungen für einen homogenen Querschnitt mit linear elastischem Werkstoffverhalten (A1.22) bis (A1.24) mit denen für einen vorgespannten Stahlbeton-Verbundquerschnitt mit nichtlinear elastischem Werkstoffverhalten (A2.16) bis (A2.18) zeigt vom formalen Aufbau her kaum einen Unterschied. Besonders deutlich treten Koppelungen einer Vorspannkraft mit einer unbekanntem Verformungsgröße in der Differentialgleichung (A2.18) auf. Die Vorspannung beeinflusst damit die Koeffizientenmatrix des entsprechenden Dgl-Systems I. Ordnung.

Für einen nicht vorgespannten Stahlbeton-Verbundquerschnitt mit nichtlinear elastischem Werkstoffverhalten ergeben sich formal die gleichen differentiellen Beziehungen wie für einen Querschnitt mit linear elastischem Werkstoffverhalten. Bei der Bestimmung der Querschnittswerte und Steifigkeiten unter Berücksichtigung einer nichtlinear elastischen Werkstoffbeziehung kann eine Trennung zwischen Querschnittsgeometrie und Werkstoff nicht mehr erfolgen, wie dies bei Ansatz eines linear elastischen Werkstoffverhaltens gegeben ist. Der Querschnitt und der Werkstoff sind vielmehr als Einheit zu betrachten, über die die Integration auszuführen ist.

Durch die Eigenschaften des Betons, wie das nichtlinear elastische Werkstoffverhalten in der Druckzone und die stark eingeschränkte Aufnahmefähigkeit von Zugspannungen, sind die Querschnittswerte und Steifigkeiten für einen Stahlbeton-Verbundquerschnitt bei Berücksichtigung dieses Werkstoffverhaltens des Betons allgemein in Abschnitt 3 und ausführlich im folgenden Abschnitt A3 behandelt.

A3. Berechnung der Querschnittswerte und Steifigkeiten eines Stahlbetonquerschnitts für wirklichkeitsnahes Werkstoffverhalten

A3.1 Querschnittswerte für Biegebeanspruchung

Wie bereits erwähnt werden für die Berechnung der Querschnittswerte des Verbundquerschnitts nur die ungerissene Betonfläche und die punktweise angeordneten Bewehrungsstäbe herangezogen. Der Beton und die nicht vorgespannte Bewehrung werden zu einer ideellen Fläche zusammengefaßt :

$$A_{id} = A_b + A_s \quad (A3.1)$$

Da mit einem nichtlinearen Betonwerkstoffverhalten gearbeitet wird, ist bei den auszuführenden Flächenintegrationen über den E-Modul zu integrieren. Für die ideelle Fläche des Verbundquerschnitts werden die folgenden Werte bestimmt:

$$\begin{aligned} (EA)_{id} &= \iint_{A_{id}} E dA_{id} = \iint_{A_b} E_b dA_b + \sum_{i=1}^n E_{si} A_{si} \\ (ES_y)_{id} &= \iint_{A_{id}} E z dA_{id} = \iint_{A_b} E_b z dA_b + \sum_{i=1}^n E_{si} z_{si} A_{si} \\ (ES_z)_{id} &= \iint_{A_{id}} E y dA_{id} = \iint_{A_b} E_b y dA_b + \sum_{i=1}^n E_{si} y_{si} A_{si} \\ (EI_y)_{id} &= \iint_{A_{id}} E z^2 dA_{id} = \iint_{A_b} E_b z^2 dA_b + \sum_{i=1}^n E_{si} z_{si}^2 A_{si} \\ (EI_z)_{id} &= \iint_{A_{id}} E y^2 dA_{id} = \iint_{A_b} E_b y^2 dA_b + \sum_{i=1}^n E_{si} y_{si}^2 A_{si} \\ (EI_{yz})_{id} &= \iint_{A_{id}} E y z dA_{id} = \iint_{A_b} E_b y z dA_b + \sum_{i=1}^n E_{si} y_{si} z_{si} A_{si} \end{aligned} \quad (A3.2 a-f)$$

Der Verlauf des Elastizitätsmoduls E_b des Betons wird über das Werkstoffverhalten aus den vorhandenen Spannungen und Verzerrungen ermittelt (siehe Kap. 3.1). Der E-Modul E_s der nicht vorgespannten Bewehrungsstäbe ergibt sich ebenfalls über die Werkstoffbeziehung aus der an der betreffenden Stelle auftretenden Verzerrung.

Beim vorgespannten Querschnitt kommen noch Anteile der Vorspannbewehrung hinzu, so daß sich die Formeln (A3.2) erweitern auf :

$$\begin{aligned} (EA) &= (EA)_{id} + \sum_{j=1}^m E_{vj} A_{vj} \\ (ES_y) &= (ES_y)_{id} + \sum_{j=1}^m E_{vj} z_{vj} A_{vj} \\ (ES_z) &= (ES_z)_{id} + \sum_{j=1}^m E_{vj} y_{vj} A_{vj} \\ (EI_y) &= (EI_y)_{id} + \sum_{j=1}^m E_{vj} z_{vj}^2 A_{vj} \\ (EI_z) &= (EI_z)_{id} + \sum_{j=1}^m E_{vj} y_{vj}^2 A_{vj} \\ (EI_{yz}) &= (EI_{yz})_{id} + \sum_{j=1}^m E_{vj} y_{vj} z_{vj} A_{vj} \end{aligned} \quad (A3.3a-f)$$

Bei der Bestimmung des Elastizitätsmoduls E_v der Spannbewehrung ist die Vordehnung des Spannstahls zu berücksichtigen. Die Berechnung des elastischen Schwerpunkts und der Lage der Hauptachsen wird mit den bekannten Formeln der Elastomechanik vorgenommen. Mit den Gleichungen (A3.3) ergeben sich die Koordinaten des elastischen Schwerpunkts aus den Beziehungen

$$z_s = \frac{(ES_y)}{(EA)} \quad \text{und} \quad y_s = \frac{(ES_z)}{(EA)} \quad (A3.4)$$

Diese Koordinaten gelten für das bei Angabe der Querschnittskontur gewählte Achsensystem. Bezogen auf den Schwerpunkt, aber noch auf die Richtung der Eingabeachsen, lauten die Trägheitsmomente :

$$\begin{aligned} (EI_y)_s &= (EI_y) - (EA) z_s^2 \\ (EI_z)_s &= (EI_z) - (EA) y_s^2 \\ (EI_{yz})_s &= (EI_{yz}) - (EA) y_s z_s \end{aligned} \quad (A3.5)$$

Die Drehung der Hauptachsen errechnet sich aus

$$\varphi = 0,5 \arctan \frac{2(EI_{yz})_s}{(EI_z)_s - (EI_y)_s} \quad (A3.6)$$

Mit diesem Winkel φ bestimmt man schließlich die Hauptträgheitsmomente :

$$\begin{aligned} (EI_y)_{S,H} &= 0,5 [(EI_y)_S + (EI_z)_S] + \\ & 0,5 [(EI_y)_S + (EI_z)_S] \cos(2\varphi) - (EI_{yz})_S \sin(2\varphi) \\ (EI_z)_{S,H} &= 0,5 [(EI_y)_S + (EI_z)_S] - \\ & 0,5 [(EI_y)_S + (EI_z)_S] \cos(2\varphi) + (EI_{yz})_S \sin(2\varphi) \end{aligned} \quad (A3.7)$$

In dem Ausdruck nach Gleichg. (A1.20) kommen Flächenintegrationen vor, die in der Bestimmungsgleichung für das Torsionsmoment (A1.22) verwendet werden. Da diese Gleichungen für das Hauptachsensystem gelten und die Integrationen vom Koordinatensystem abhängen, empfiehlt es sich, alle Querschnittskordinaten einschließlich der Bewehrungen ins Hauptachsensystem zu transformieren. In Analogie zu den Biegesteifigkeiten werden folgende Größen ermittelt :

$$\begin{aligned} (EI_y)_{id} &= \frac{1}{(EI_y)_{id}} \iint_{A_{id}} E_{id} z (y^2 + z^2) dA_{id} = \\ & \frac{1}{(EI_y)_{id}} \left[\iint_{A_b} E_b z (y^2 + z^2) dA_b + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^n E_{si} z_{si} (y_{si}^2 + z_{si}^2) A_{si} \right] \quad (A3.8) \\ (EI_z)_{id} &= \frac{1}{(EI_z)_{id}} \iint_{A_{id}} E_{id} y (y^2 + z^2) dA_{id} = \\ & \frac{1}{(EI_z)_{id}} \left[\iint_{A_b} E_b y (y^2 + z^2) dA_b + \right. \\ & \left. \sum_{i=1}^n E_{si} y_{si} (y_{si}^2 + z_{si}^2) A_{si} \right] \end{aligned}$$

Die Vorspannbewehrung ist in diesen beiden Ausdrücken nicht enthalten, da sie im Torsionsmoment (A2.9) direkt berücksichtigt wird.

A3.2 Flächenintegrale der ungerissenen Betonzone

Bei jedem zu ermittelnden Querschnittswert des Verbundquerschnitts wird ein Anteil durch eine Integration über die Fläche der ungerissenen Betonzone gewonnen. Da jede Faser dieser Fläche mit einem unterschiedlichen Elastizitätsmodul behaftet sein kann, muß dies bei den Integrationen berücksichtigt werden. Der Verlauf des hier maßgebenden Sekanten-Elastizitätsmoduls ergibt sich aus dem Quotienten der in jeder Faser gültigen

Spannung, dividiert durch die jeweilige Verzerrung nach der Gleichung b.) aus Tabelle 1 zu

$$E_b(\epsilon) = \frac{\sigma}{\epsilon} = \beta_p \sum_{n=1}^4 A_n \epsilon^{n-1} \quad (A3.9)$$

Maßgebend für die Bestimmung der Verzerrung ϵ ist der senkrechte Abstand zur Nulllinie, die im allgemeinen Fall weder parallel zu einer Hauptachse des Querschnitts liegt, noch durch den Koordinatennullpunkt geht. Da die Querschnittswerte auf bestimmte Achsen bezogen werden, der Verlauf der Verzerrungsebene aber festliegt, ist eine Umrechnung in Abhängigkeit eines allgemeinen Koordinatensystems erforderlich. Nach Bild A5 ergibt sich die Verzerrung ϵ zu

$$\epsilon(y, z) = \kappa (z \cos \delta - y \sin \delta - r) \quad (A3.10)$$

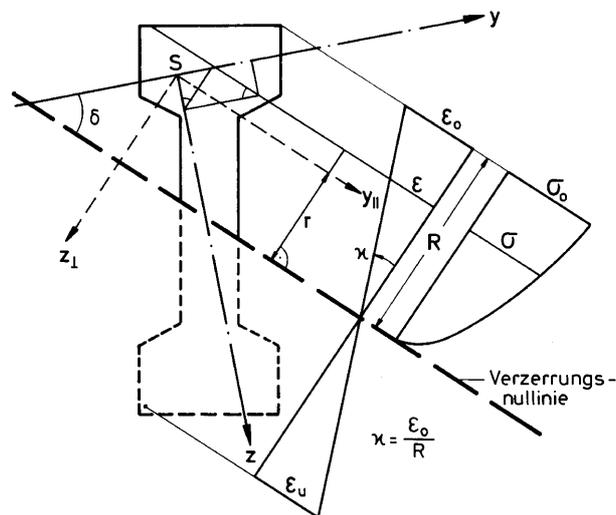


Bild A5 : Umrechnung der Verzerrung ϵ in das Hauptachsensystem

Fig. A5 : Transformation of strain ϵ into the system of principal axis

Setzt man (A3.10) in (A3.9) ein, so folgt für den E-Modul in allgemeiner Form :

$$E_b(y, z) = B_1 + B_2 \bar{\epsilon} + B_3 \bar{\epsilon}^2 + B_4 \bar{\epsilon}^3 \quad (A3.11)$$

mit der Abkürzung $\bar{\epsilon} = z \cos \delta - y \sin \delta - r$,

wobei die Faktoren B_i wie folgt zu setzen sind:

Sekantenmodul :	Tangentenmodul :
$B_1 = \beta_p A_1$	$B_1 = \beta_p A_1$
$B_2 = \beta_p A_2 \kappa$	$B_2 = \beta_p 2 A_2 \kappa$
$B_3 = \beta_p A_3 \kappa^2$	$B_3 = \beta_p 3 A_3 \kappa^2$
$B_4 = \beta_p A_4 \kappa^3$	$B_4 = \beta_p 4 A_4 \kappa^3$

(A3.12)

Anhand eines Beispiels sollen die weiteren Schritte kurz erläutert werden. Für die Dehnsteifigkeit der Betondruckzone gilt :

$$(EA)_b = \iint_{A_b} E_b(y, z) dA_b \quad (A3.13)$$

Einsetzen von Gleichung (A3.11) mit den Abkürzungen nach Gleichung (A3.12) in Gleichung (A3.13) liefert mit einigen Umformungen :

$$\begin{aligned} (EA)_b = & (B_1 - B_2r + B_3r^2 - B_4r^3) \iint_{A_b} dA_b + (B_2 - 2B_3r + 3B_4r^2)(\cos \delta \iint_{A_b} z dA_b - \sin \delta \iint_{A_b} y dA_b) + \\ & (B_3 - 3B_4r)(\cos^2 \delta \iint_{A_b} z^2 dA_b - 2 \cos \delta \sin \delta \iint_{A_b} y z dA_b + \sin^2 \delta \iint_{A_b} y^2 dA_b) + \\ & B_4 \cos^3 \delta \iint_{A_b} z^3 dA_b - 3B_4 \cos^2 \delta \sin \delta \iint_{A_b} y z^2 dA_b + 3B_4 \cos \delta \sin^2 \delta \iint_{A_b} y^2 z dA_b - B_4 \sin^3 \delta \iint_{A_b} y^3 dA_b \end{aligned} \quad (A3.14)$$

In diesem Ausdruck (A3.14) kommen die unterschiedlichsten Flächenintegrationen vor, die mit Hilfe des Greenschen Integralsatzes in Konturintegrale umgeformt werden. Der Greensche Integralsatz lautet :

$$\iint_A \left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \frac{\partial V_y}{\partial z} \right) dydz = \oint_K (V_y dy + V_z dz) \quad (A3.15)$$

oder vereinfacht $\iint_A \frac{\partial V_z}{\partial y} dydz = \oint_K V_z dz \quad (A3.16)$

Angewendet auf das Integral $\iint y^2 dA$ ergibt sich

$$\frac{\partial V_z}{\partial y} = y^2 \Rightarrow V_z = \frac{1}{3} y^3 \quad (A3.17)$$

und damit $\iint_A y^2 dydz = \frac{1}{3} \oint_K y^3 dz \quad (A3.18)$

Diese Konturintegration wird nun in Teilintegrationen über die einzelnen Polygonseiten aufgelöst. Die Integration über eine Seite ist relativ einfach durchzuführen, da durch die Geradengleichung der formelmäßige Zusammenhang zwischen y und z bekannt ist :

$$z = m y \text{ mit } m = \frac{z_{i+1} - z_i}{y_{i+1} - y_i} \text{ und } dz = m dy \quad (A3.19)$$

Diese Beziehung wird in Gleichung (A3.18) eingesetzt und anschließend die Integration über eine Seite ausgeführt:

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} \int y^3 dz &= \frac{m}{3} \int_{y_i}^{y_{i+1}} y^3 dy = \frac{m}{12} y^4 \Big|_{y_i}^{y_{i+1}} \\ &= \frac{1}{12} \frac{z_{i+1} - z_i}{y_{i+1} - y_i} (y_{i+1}^4 - y_i^4) \end{aligned} \quad (A3.20)$$

Nach einigen Zwischenrechnungen erhält man für das Flächenintegral folgenden Summenausdruck :

$$\iint y^2 dA = \frac{1}{12} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) (y_i^2 + y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) \quad (A3.21)$$

In diesem Summenausdruck sind die Koordinaten der Eckpunkte fortlaufend in positivem Umlaufsinn einzusetzen. Der Anfangspunkt ist beliebig, da der Endpunkt n+1 dem Anfangspunkt 1 entspricht (geschlossene Kontur). Mit dem entsprechenden Faktor (siehe Gleichung (A3.14)) versehen, liefert diese Summation einen Beitrag zum Gesamtausdruck der Gleichung (A3.14).

In dieser Weise werden alle auftretenden Flächenintegrationen behandelt und in Summenausdrücke überführt. Man erhält zwar sehr lange, aber verhältnismäßig einfach aufgebaute und leicht zu handhabende Formeln, deren numerische Lösung sich gut für Rechenautomaten eignet.

In Tabelle A1 sind alle benötigten Querschnittswerte, aufgelöst in einzelne Flächenintegrationen, zusammengestellt. In der Tabelle A3 werden die Summenausdrücke der Konturintegrationen für die vorkommenden Einzelintegrationen angegeben.

	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅	F ₆	F ₇	F ₈	F ₉	F ₁₀
$(EA)_b = \iint E_b dA$	$\iint dA$	$\iint z dA$	$\iint y dA$	$\iint z^2 dA$	$\iint yz dA$	$\iint y^2 dA$	$\iint z^3 dA$	$\iint yz^2 dA$	$\iint y^2 z dA$	$\iint y^3 dA$
$(ES_z)_b = \iint E_b y dA$	$\iint y dA$	$\iint yz dA$	$\iint y^2 dA$	$\iint yz^2 dA$	$\iint y^2 z dA$	$\iint y^3 dA$	$\iint yz^3 dA$	$\iint y^2 z^2 dA$	$\iint y^3 z dA$	$\iint y^4 dA$
$(ES_y)_b = \iint E_b z dA$	$\iint z dA$	$\iint z^2 dA$	$\iint yz dA$	$\iint z^3 dA$	$\iint yz^2 dA$	$\iint y^2 z dA$	$\iint z^4 dA$	$\iint yz^3 dA$	$\iint y^2 z^2 dA$	$\iint y^3 z dA$
$(EI_z)_b = \iint E_b y^2 dA$	$\iint y^2 dA$	$\iint y^2 z dA$	$\iint y^3 dA$	$\iint y^2 z^2 dA$	$\iint y^3 z dA$	$\iint y^4 dA$	$\iint y^2 z^3 dA$	$\iint y^3 z^2 dA$	$\iint y^4 z dA$	$\iint y^5 dA$
$(EI_y)_b = \iint E_b z^2 dA$	$\iint z^2 dA$	$\iint z^3 dA$	$\iint yz^2 dA$	$\iint z^4 dA$	$\iint yz^3 dA$	$\iint y^2 z^2 dA$	$\iint yz^4 dA$	$\iint y^2 z^3 dA$	$\iint y^3 z^2 dA$	$\iint y^4 z dA$
$(EI_{yz})_b = \iint E_b yz dA$	$\iint yz dA$	$\iint yz^2 dA$	$\iint y^2 z dA$	$\iint yz^3 dA$	$\iint y^2 z^2 dA$	$\iint y^3 z dA$	$\iint yz^4 dA$	$\iint y^2 z^3 dA$	$\iint y^3 z^2 dA$	$\iint y^4 z dA$
$(Er_y)_b = \iint E_b y^2 z dA$	$\iint y^2 z dA$	$\iint y^2 z^2 dA$	$\iint y^3 z dA$	$\iint y^2 z^3 dA$	$\iint y^3 z^2 dA$	$\iint y^4 z dA$	$\iint y^2 z^4 dA$	$\iint y^3 z^3 dA$	$\iint y^4 z^2 dA$	$\iint y^5 z dA$
$+ \iint E_b z^3 dA$	$+ \iint z^3 dA$	$+ \iint z^4 dA$	$+ \iint yz^3 dA$	$+ \iint z^5 dA$	$+ \iint yz^4 dA$	$+ \iint y^2 z^3 dA$	$+ \iint z^6 dA$	$+ \iint yz^5 dA$	$+ \iint y^2 z^4 dA$	$+ \iint y^3 z^3 dA$
$(Er_z)_b = \iint E_b y^3 dA$	$\iint y^3 dA$	$\iint y^3 z dA$	$\iint y^4 dA$	$\iint y^3 z^2 dA$	$\iint y^4 z dA$	$\iint y^5 dA$	$\iint y^3 z^3 dA$	$\iint y^4 z^2 dA$	$\iint y^5 z dA$	$\iint y^6 dA$
$+ \iint E_b yz^2 dA$	$+ \iint yz^2 dA$	$+ \iint yz^3 dA$	$+ \iint y^2 z^2 dA$	$+ \iint yz^4 dA$	$+ \iint y^2 z^3 dA$	$+ \iint y^3 z^2 dA$	$+ \iint yz^5 dA$	$+ \iint y^2 z^4 dA$	$+ \iint y^3 z^3 dA$	$+ \iint y^4 z^2 dA$

$$\begin{aligned}
 F_1 &= B_1 - r B_2 + r^2 B_3 - r^3 B_4 & F_4 &= (B_3 - 3r B_4) \cos^2 \delta & F_7 &= B_4 \cos^3 \delta & F_9 &= 3B_4 \cos \delta \sin^2 \delta \\
 \text{Vorfaktoren : } F_2 &= (B_2 - 2r B_3 + 3r^2 B_4) \cos \delta & F_5 &= -2(B_3 - 3r B_4) \cos \delta \sin \delta & F_8 &= -3B_4 \cos^2 \delta \sin \delta & F_{10} &= -B_4 \sin^3 \delta \\
 F_3 &= -(B_2 - 2r B_3 + 3r^2 B_4) \sin \delta & F_6 &= (B_3 - 3r B_4) \sin^2 \delta & & & & \text{(Werte } B_i \text{ nach Gl.(A3.12) mit } r \text{ nach Bild A5)}
 \end{aligned}$$

Tabelle A1 : Zusammenstellung aller E-Modul behafteten Flächenintegrale
 Table A1 : Synopsis of all integrals with modulus of elasticity

A3.2.1 Berechnung der Betondruckkraft
 und ihrer Momente

Die Betondruckkraft und deren Momente werden auf die gleiche Art, wie es im vorstehenden Kapitel beschrieben wird, bestimmt. Die Berechnung vereinfacht sich, wenn man das Koordinatensystem vorab so dreht, daß die y-Achse parallel zur Nulllinie liegt. Mit Bild A5 und aus Gleichung (A3.10) erhält man für den Winkel $\delta=0$ die Verzerrung ϵ

$$\epsilon(\bar{z}) = \kappa(\bar{z} - r) \tag{A3.22}$$

\bar{z} ist dabei die um δ gedrehte z-Koordinate. Der Verlauf der Betonspannung σ_b folgt aus Formel b Tabelle 1 mit (A3.22)

$$\sigma_b(\bar{z}) = C_1(\bar{z} - r) + C_2(\bar{z} - r)^2 + C_3(\bar{z} - r)^3 + C_4(\bar{z} - r)^4 \tag{A3.23}$$

mit den Abkürzungen

$$\begin{aligned} C_1 &= \beta_p A_1 \kappa \\ C_2 &= \beta_p A_2 \kappa^2 \\ C_3 &= \beta_p A_3 \kappa^3 \\ C_4 &= \beta_p A_4 \kappa^4 \end{aligned} \tag{A3.24}$$

Die Betondruckkraft D_b bezogen auf die Koordinatenachsen ergibt sich aus der Integration der Spannung über die Betondruckzone. Bei der Berechnung der Momente BMZ und BMY der Betondruckkraft ist der jeweilige Hebelarm zu berücksichtigen. Es gilt :

$$D_b = \iint \sigma_b dA$$

$$BMZ = D_b \bar{y} = \iint \sigma_b \bar{y} dA \tag{A3.25 a-c}$$

$$BMY = D_b \bar{z} = \iint \sigma_b \bar{z} dA$$

Die Aufspaltung in Einzelintegrationen ist der Tabelle A2 zu entnehmen. Die Umwandlung in Konturintegrale ist in Tabelle A3 zusammengestellt.

	F ₁	F ₂	F ₃	F ₄	F ₅
$D_b = \iint \sigma_b dA$	$\iint dA$	$\iint z dA$	$\iint z^2 dA$	$\iint z^3 dA$	$\iint z^4 dA$
$BMY = \iint \sigma_b z dA$	$\iint z dA$	$\iint z^2 dA$	$\iint z^3 dA$	$\iint z^4 dA$	$\iint z^5 dA$
$BMZ = \iint \sigma_b y dA$	$\iint y dA$	$\iint yz dA$	$\iint yz^2 dA$	$\iint yz^3 dA$	$\iint yz^4 dA$

Vorwerte :

$$\begin{aligned} F_1 &= -r C_1 + r^2 C_2 - r^3 C_3 + r^4 C_4 & F_4 &= C_3 - 4r C_4 \\ F_2 &= C_1 - 2r C_2 + 3r^2 C_3 - 4r^3 C_4 & F_5 &= C_4 \\ F_3 &= C_2 - 3r C_3 + 6r^2 C_4 & & \text{(Werte } C_i \text{ nach (A3.24) mit } r \text{ nach Bild A5)} \end{aligned}$$

Tabelle A2 : Flächenintegrale der Betondruckkraft und ihrer Biegemomente
 Table A2 : Integrals of concrete compressive force and its bending moments

$$\iint y^k dy dz = \frac{1}{(k+1)(k+2)} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \left\{ y_i^k + y_i^{k-1} y_{i+1} + y_i^{k-2} y_{i+1}^2 + \dots + y_i^2 y_{i+1}^{k-2} + y_i y_{i+1}^{k-1} + y_{i+1}^k \right\}$$

Summe der Exponenten pro Summand ist k : für y_i fällt der Exponent von $k \rightarrow 0$; für y_{i+1} steigt der Exponent von $0 \rightarrow k$

$$\iint y^k z dy dz = \frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \left\{ z_i \left[(k+1) y_i^k + k y_i^{k-1} y_{i+1} + (k-1) y_i^{k-2} y_{i+1}^2 + \dots + 3 y_i^2 y_{i+1}^{k-2} + 2 y_i y_{i+1}^{k-1} + y_{i+1}^k \right] \right.$$

$$\left. + z_{i+1} \left[y_i^k + 2 y_i^{k-1} y_{i+1} + 3 y_i^{k-2} y_{i+1}^2 + \dots + (k-1) y_i^2 y_{i+1}^{k-2} + k y_i y_{i+1}^{k-1} + (k+1) y_{i+1}^k \right] \right\}$$

$\iint z^k dy dz$ aus $\iint y^k dy dz$ } durch Vertauschen von y und z in der geschweiften Klammer
 $\iint z^k y dy dz$ aus $\iint y^k z dy dz$ }

$$\iint y^2 z^2 dy dz = \frac{1}{180} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \left\{ z_i^2 (6 y_i^2 + 3 y_i y_{i+1} + y_{i+1}^2) + z_i z_{i+1} (3 y_i^2 + 4 y_i y_{i+1} + 3 y_{i+1}^2) + z_{i+1}^2 (y_i^2 + 3 y_i y_{i+1} + 6 y_{i+1}^2) \right\}$$

$$\iint y^3 z^2 dy dz = \frac{1}{420} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \left\{ z_i^2 (10 y_i^3 + 6 y_i^2 y_{i+1} + 3 y_i y_{i+1}^2 + y_{i+1}^3) + z_i z_{i+1} (4 y_i^3 + 6 y_i^2 y_{i+1} + 6 y_i y_{i+1}^2 + 4 y_{i+1}^3) + z_{i+1}^2 (y_i^3 + 3 y_i^2 y_{i+1} + 6 y_i y_{i+1}^2 + 10 y_{i+1}^3) \right\}$$

$$\iint y^4 z^2 dy dz = \frac{1}{840} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \left\{ z_i^2 (15 y_i^4 + 10 y_i^3 y_{i+1} + 6 y_i^2 y_{i+1}^2 + 3 y_i y_{i+1}^3 + y_{i+1}^4) + z_i z_{i+1} (5 y_i^4 + 8 y_i^3 y_{i+1} + 9 y_i^2 y_{i+1}^2 + 8 y_i y_{i+1}^3 + 5 y_{i+1}^4) \right.$$

$$\left. + z_{i+1}^2 (y_i^4 + 3 y_i^3 y_{i+1} + 6 y_i^2 y_{i+1}^2 + 10 y_i y_{i+1}^3 + 15 y_{i+1}^4) \right\}$$

$$\iint y^3 z^3 dy dz = \frac{1}{1120} \sum_{i=1}^n (y_i z_{i+1} - y_{i+1} z_i) \left\{ z_i^3 (20 y_i^3 + 10 y_i^2 y_{i+1} + 4 y_i y_{i+1}^2 + y_{i+1}^3) + z_i^2 z_{i+1} (10 y_i^3 + 12 y_i^2 y_{i+1} + 9 y_i y_{i+1}^2 + 4 y_{i+1}^3) \right.$$

$$\left. + z_i z_{i+1} (4 y_i^3 + 9 y_i^2 y_{i+1} + 12 y_i y_{i+1}^2 + 10 y_{i+1}^3) + z_{i+1}^2 (y_i^3 + 4 y_i^2 y_{i+1} + 10 y_i y_{i+1}^2 + 20 y_{i+1}^3) \right\}$$

$\iint y^2 z^3 dy dz$ aus $\iint y^3 z^2 dy dz$ } durch Vertauschen von y und z in der geschweiften Klammer
 $\iint y^2 z^4 dy dz$ aus $\iint y^4 z^2 dy dz$ }

Tabelle A3 : Lösungen von Flächenintegrationen aus Konturintegrationen über einen Polygonzug

Table A3 : Results of surface integrations by means of line integrations around the polygonal boundary

A3.3 Querschnittswerte für Torsionsbeanspruchung

Wie im Kap.3.3 beschrieben, führt die Behandlung des Torsionsproblems bereits für einen linear elastischen und homogenen Werkstoff auf komplizierte differentielle Beziehungen, die für allgemeine Querschnittsformen nur mit aufwendigen numerischen Methoden zu lösen sind.

Zur Bestimmung der Torsionskenngrößen (Schubmittelpunkt, *St. Venantsche* Torsionssteifigkeit und Wölbsteifigkeit) werden deshalb Näherungsverfahren angewendet, die mit möglichst einfachen Mitteln eine einigermaßen zutreffende Abschätzung erlauben. Die Vorgehensweise bei diesen Näherungen wird in allgemeiner Art ausführlich in Kap.3.3 erläutert. Grundsätzlich werden die hier betrachteten Querschnittsformen in einfache Bereiche, meist Rechtecke, unterteilt, und in diesen Teilbereichen wird ein gekrümmtes wirklichkeitsnahes Werkstoffverhalten entsprechend linearisiert. Die Ergebnisse der Teilbereiche werden anschließend aufsummiert.

A3.3.1 Gewichteter mittlerer Schubmodul

Der Schubmodul wird aus dem Elastizitätsmodul über die Querdehnungszahl bestimmt:

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (A3.26)$$

Der Elastizitätsmodul ist belastungsabhängig und kann über die Werkstoffbeziehung entweder als Sekanten- oder Tangentenmodul bestimmt werden. Auf die Unterschiede in der Anwendung dieser Moduln wird im Kap.3 hingewiesen. Aus den in Kap.3.3 beschriebenen Gründen wird näherungsweise ein bereichsweise linearer Verlauf des Schubmoduls angesetzt. Diese Linearisierung wird entsprechend den belastungsabhängigen Randbedingungen eines betrachteten Bereichs vorgenommen. Ein mittlerer Elastizitätsmodul \bar{E} ergibt sich allgemein sehr einfach aus einer Wichtung über die Fläche:

$$\bar{E} = \frac{\iint_A E(y, z) dA}{\iint_A dA} \quad (A3.27)$$

Im allgemeinen Fall fällt die Verzerrungsnulllinie nicht mit einer Hauptachse des betrachteten Bereichs zusammen (s. Bild A5), so daß die im Zähler stehende elastische Fläche nach Gl.(A3.14) berechnet werden muß. Für die Faktoren B_i sind die Ausdrücke nach Gl.(A3.12) einzusetzen, je nachdem ob ein Sekanten- oder Tangentenmodul bestimmt werden soll.

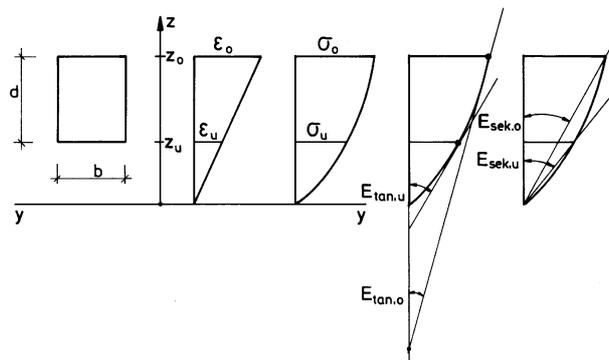


Bild A6 : Rechteckquerschnitt mit in z-Richtung veränderlicher Beanspruchung

Fig. A6 : Rectangular cross-section with varying load in z-direction

Für Sonderfälle vereinfacht sich diese Vorgehensweise erheblich. Der Fall eines Rechteckquerschnitts mit parallel zu einer Querschnittsseite verlaufender Verzerrungsnulllinie ist im Bild A6 dargestellt. Die Verläufe von Spannungen und Verzerrungen sind dabei nur noch von der angegebenen z-Richtung abhängig, die differentielle Fläche dA kann durch $b dz$ ausgedrückt werden, und die Integration ist damit nur noch in z-Richtung von z_u bis z_o auszuführen. Für einen mittleren Elastizitätsmodul gilt dann:

$$\bar{E} = \frac{b \int_{z_u}^{z_o} E(z) dz}{b \int_{z_u}^{z_o} dz} \quad (A3.28)$$

Die Integration kann auch direkt über die Verzerrung ϵ durchgeführt werden. Hierfür wird die Formel (A3.28) umgeformt. Der Zusammenhang zwischen ϵ und z lautet:

$$\epsilon(z) = \epsilon_u + \frac{\epsilon_o - \epsilon_u}{d} (z - z_u)$$

$$\text{Daraus folgt: } d\epsilon = \frac{\epsilon_o - \epsilon_u}{d} dz$$

Der mittlere Elastizitätsmodul ergibt sich dann zu

$$\bar{E} = \frac{\int_{\epsilon_u}^{\epsilon_o} E(\epsilon) d\epsilon}{\int_{\epsilon_u}^{\epsilon_o} d\epsilon} \quad (A3.29)$$

Für den Verlauf des Elastizitätsmoduls $E(\epsilon)$ kann nun der Tangenten- oder Sekantenmodul eingesetzt werden.

Für einen mittleren gewichteten Tangentenmodul

$$\bar{E}_{\tan}(\epsilon) = \frac{d\sigma}{d\epsilon} \text{ gilt dann :}$$

$$\bar{E}_{\tan} = \frac{\int_{\epsilon_u}^{\epsilon_o} \frac{d\sigma}{d\epsilon} d\epsilon}{\int_{\epsilon_u}^{\epsilon_o} d\epsilon} = \frac{\int_{\epsilon_u}^{\epsilon_o} d\sigma}{\int_{\epsilon_u}^{\epsilon_o} d\epsilon} = \frac{\sigma_o - \sigma_u}{\epsilon_o - \epsilon_u} \quad (\text{A3.30})$$

Der mittlere gewichtete Tangentenmodul \bar{E}_{\tan} ergibt sich also durch Division der Spannungsdifferenz durch die Verzerrungsdifferenz der Randfasern in dem jeweiligen Bereich. Für den hier behandelten, im Bild A6 dargestellten Sonderfall kann der mittlere Tangentenmodul demnach in Form eines Sekantenmoduls ermittelt werden. Es muß jedoch ausdrücklich darauf hingewiesen werden, daß dieses Ergebnis nicht allgemeingültig ist, sondern nur für den hier betrachteten Sonderfall gilt. Für diesen Sonderfall stellt dieses einfache Ergebnis sogar die exakte Lösung dar.

Wird in Gl.(A5.29) der Verlauf des Sekantenmoduls $\bar{E}_{\text{sek}}(\epsilon) = \frac{\sigma(\epsilon)}{\epsilon}$ mit dem Spannungsverlauf nach Gl.(3.1) eingesetzt, so folgt für einen gewichteten mittleren Sekantenmodul :

$$\bar{E}_{\text{sek}} = \frac{\int_{\epsilon_u}^{\epsilon_o} (A_1 + A_2\epsilon + A_3\epsilon^2 + A_4\epsilon^3) d\epsilon}{\epsilon_o - \epsilon_u} \beta_p$$

Nach Ausführung der Integration, Einsetzen der Integrationsgrenzen und Division durch $\epsilon_o - \epsilon_u$ ergibt sich :

$$\bar{E}_{\text{sek}} = \beta_p \left[A_1 + \frac{1}{2} A_2 (\epsilon_o + \epsilon_u) + \frac{1}{3} A_3 (\epsilon_o^2 + \epsilon_o \epsilon_u + \epsilon_u^2) + \frac{1}{4} A_4 (\epsilon_o^3 + \epsilon_o^2 \epsilon_u + \epsilon_o \epsilon_u^2 + \epsilon_u^3) \right] \quad (\text{A3.31})$$

Diese Wichtungen des Elastizitätsmoduls können sowohl für den gesamten Bereich der Betondruckzone, als auch für Teilbereiche vorgenommen werden. Näherungsweise gelten die für einen Rechteckquerschnitt abgeleiteten Formeln (A3.30) und (A3.31) auch für einen beliebigen kompakten Querschnitt ohne einspringende Ecken.

Wienecke[9] gibt eine Wichtung des Elastizitätsmoduls über die wirklichkeitsnahen Biegesteifigkeiten an :

$$\bar{E} = \frac{I_p (EI_y)(EI_z)}{(EI_p) I_y I_z} \quad (\text{A3.32})$$

mit

$(EI_y)(EI_z)$ = wirklichkeitsnahe Biegesteifigkeiten bezogen auf den elastischen Schwerpunkt
 $(EI_p) = (EI_y + EI_z)$

$I_y I_z$ = Flächenträgheitsmomente bezogen auf die geometrischen Schwerpunktsachsen

$$I_p = I_y + I_z$$

Diese Beziehung für einen mittleren Elastizitätsmodul \bar{E} ist das Ergebnis einer Literaturstudie, auf die in [9] näher eingegangen und auf die hier deshalb verwiesen wird.

A3.3.2 St.Venantsche Torsionssteifigkeit

Die St.Venantsche Torsionssteifigkeit (GI_t) wird näherungsweise aus dem St.Venantschen Torsionswiderstand, der mit einem mittleren gewichteten Gleitmodul \bar{G} nach Kap. A3.3.1 multipliziert wird, ermittelt. Für allgemeine Querschnittsformen lassen sich auch für den Torsionswiderstand keine geschlossenen Formeln angeben, so daß in einer weiteren Näherung ein allgemeiner Querschnitt in einfache Teilbereiche, normalerweise Rechtecke, unterteilt wird, für die dann auf bekannte Lösungen zurückgegriffen werden kann.

Für den Sonderfall einer rechteckigen Fläche b-d gilt die bekannte Formel für den Torsionswiderstand

$$I_t = \alpha_t b d^3 \quad \text{mit} \quad b \geq d \quad (\text{A3.33})$$

Der Faktor α_t hängt vom Seitenverhältnis b/d ab und wird über die folgende Reihenentwicklung der St.Venantschen Spannungsfunktion ermittelt:

$$\alpha_t = \frac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5} \frac{1}{b/d} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \tanh \left[(2n+1) \frac{\pi b}{2 d} \right] \quad (\text{A3.34})$$

Die Faktoren α_t sind in Tabelle A4 zusammengestellt. Es sei in diesem Zusammenhang erwähnt, daß diese Reihenentwicklung die exakte Lösung der Potentialfunktion des Torsionsproblems für eine rechteckige Grundfläche darstellt.

Es wird hier bewußt diese einfache und allgemein bekannte Formel angegeben, da sich die üblichen Betonquerschnitte normalerweise immer aus rechteckigen Teilbereichen zusammensetzen lassen, wobei Gurte mit Vouten oder schräg abgeschnittene Stegbereiche der Druckzone näherungsweise ebenfalls durch Rechtecke ersetzt werden können.

b/d	α_t	b/d	α_t	b/d	α_t	b/d	α_t	b/d	α_t
1.00	0.140577	2.50	0.249365	5.0	0.291317	22.	0.323784	70.	0.330332
1.05	0.147443	2.55	0.251002	5.1	0.292141	23.	0.324199	80.	0.330707
1.10	0.153984	2.60	0.252578	5.2	0.292933	24.	0.324580	90.	0.330999
1.15	0.160206	2.65	0.254095	5.3	0.293695	25.	0.324930	100.	0.331233
1.20	0.166119	2.70	0.255557	5.4	0.294429	26.	0.325253	150.	0.331933
1.25	0.171733	2.75	0.256966	5.5	0.295136	27.	0.325552	200.	0.332283
1.30	0.177059	2.80	0.258326	5.6	0.295819	28.	0.325830	250.	0.332493
1.35	0.182112	2.85	0.259639	5.7	0.296477	29.	0.326089	300.	0.332633
1.40	0.186904	2.90	0.260907	5.8	0.297112	30.	0.326331	350.	0.332733
1.45	0.191449	2.95	0.262132	5.9	0.297726	31.	0.326556	400.	0.332808
1.50	0.195761	3.00	0.263317	6.0	0.298320	32.	0.326768	450.	0.332866
1.55	0.199852	3.10	0.265573	6.5	0.301013	33.	0.326967	500.	0.332913
1.60	0.203736	3.20	0.267688	7.0	0.303322	34.	0.327154	550.	0.332951
1.65	0.207424	3.30	0.269676	7.5	0.305322	35.	0.327331	600.	0.332983
1.70	0.210929	3.40	0.271547	8.0	0.307073	36.	0.327498	650.	0.333010
1.75	0.214261	3.50	0.273312	8.5	0.308618	37.	0.327655	700.	0.333033
1.80	0.217431	3.60	0.274978	9.0	0.309991	38.	0.327805	750.	0.333053
1.85	0.220449	3.70	0.276555	9.5	0.311219	39.	0.327947	800.	0.333071
1.90	0.223325	3.80	0.278049	10.0	0.312325	40.	0.328081	850.	0.333086
1.95	0.226066	3.90	0.279466	11.0	0.314235	41.	0.328209	900.	0.333100
2.00	0.228682	4.00	0.280813	12.0	0.315826	42.	0.328331	950.	0.333112
2.05	0.231179	4.10	0.282094	13.0	0.317173	43.	0.328448	1000.	0.333123
2.10	0.233565	4.20	0.283314	14.0	0.318327	44.	0.328559	2000.	0.333228
2.15	0.235847	4.30	0.284477	15.0	0.319328	45.	0.328665	3000.	0.333263
2.20	0.238030	4.40	0.285587	16.0	0.320203	46.	0.328766	4000.	0.333281
2.25	0.240121	4.50	0.286648	17.0	0.320976	47.	0.328864	5000.	0.333291
2.30	0.242125	4.60	0.287663	18.0	0.321662	48.	0.328957	6000.	0.333298
2.35	0.244047	4.70	0.288635	19.0	0.322276	49.	0.329046	7000.	0.333303
2.40	0.245891	4.80	0.289566	20.0	0.322829	50.	0.329132	8000.	0.333307
2.45	0.247663	4.90	0.290459	21.0	0.323329	60.	0.329832	9000.	0.333310

Tabelle A4 : Beiwerte zur Berechnung des Torsionswiderstandes für Rechteckquerschnitte $I_t = \alpha_t b d^3$

Table A4 : coefficients to calculate the twisting resistance of a rectangular cross-section $I_t = \alpha_t b d^3$

Eine Berücksichtigung der Torsionsbewehrung bei der Torsionssteifigkeit kann mit der in [8] bereits angegebenen, auf Collins zurückgehenden Formel erfolgen:

$$(GI_t)_s = \frac{E_s}{2} \frac{4A_0^2}{U_0} \sqrt{\frac{A_{s,Bü}}{a_{Bü}} \frac{A_{s,L}}{a_L}} \quad (A3.35)$$

mit E_s = Elastizitätsmodul der Torsionsbewehrung
 A_0 = Fläche, die von den Verbindungslinien der Mittelpunkte der Eckbewehrungen umschlossen wird

U_0 = Umfang der Fläche A_0

$A_{s,Bü}$; $A_{s,L}$ = Querschnittsfläche eines Bügels bzw. Längsstabes

$a_{Bü}$; a_L = Abstand der Bügel bzw. Längsstäbe

Diese Formel stellt die Torsionssteifigkeit eines aus Bügeln und Längsstäben gebildeten Bewehrungskorbes für den völlig gerissenen Beton in Anlehnung an die bekannte *Bredtsche* Formel dar.

Es handelt sich dabei um eine Beziehung aus der Fachwerktheorie, wobei die zum Gleichgewicht benötigten Betondruckstreben vereinfacht als dehnstarr und unter 45° verlaufend angenommen werden.

Eine ähnliche Formel wird von Leonhardt [14] ebenfalls für einen "verschmierten" Bewehrungskorb, aber mit dehnsteifen 45°- Betondruckstreben angegeben :

$$(GI_t)_s = \frac{4E_s A_0^3}{U_0^2} \frac{1}{\frac{1}{\mu_L} + \frac{1}{\mu_{Bü}} + \frac{4nA_0}{U_0 t}} \quad (A3.36)$$

Für $n \rightarrow 0$ ($\hat{=}$ dehnstarr) ergibt sich :

$$(GI_t)_s = \frac{4E_s A_0^3}{U_0^2} \frac{\mu_L \cdot \mu_{Bü}}{\mu_L + \mu_{Bü}}$$

mit

$$\mu_L = \frac{A_{s,L} U_0}{a_L A_0} \quad \mu_{Bü} = \frac{A_{s,Bü} U_0}{a_{Bü} A_0}$$

$$n = E_s / E_b$$

t = Dicke der Betondruckstreben

weitere Bezeichnungen wie bei (A3.35)

Nur im Falle $n = 0$ und $\mu_L = \mu_{Bü}$ stimmen beide Formeln (A3.35) und (A3.36) überein. Beim zahlenmäßigen Vergleich liefert die Formel (A3.35) immer etwas größere Werte und liegt damit auf der unsicheren Seite. Bei einer über die konstruktiven Maßnahmen hinausgehenden Anordnung einer Torsionsbewehrung wird damit die Anwendung der einfacheren Formel (A3.35) problematisch und sollte durch die etwas aufwendigere Formel (A3.36) ersetzt werden. Für die hier betrachteten Träger mit einer nur konstruktiven Torsionsbewehrung sind die zahlenmäßigen Unterschiede von untergeordneter Bedeutung.

In Anlehnung an *St. Venant* verwendet *Wienecke*[9] folgende Näherungsformel für die Bestimmung des *St. Venantschen* Torsionswiderstandes:

$$I_t = \frac{A^4}{4\pi^2 I_p} f \quad (A3.37)$$

Darin bedeuten:

A = Fläche des wirksamen Querschnitts

I_p = polares Trägheitsmoment bezogen auf den geometrischen Schwerpunkt $I_p = I_y + I_z$

f = Korrekturfaktor, abhängig vom Umfang der Querschnittsfläche

Der Korrekturfaktor f wird in Abhängigkeit des Umfangs U der betrachteten Fläche A ermittelt, wobei zunächst ein weiterer Beiwert f_u folgendermaßen bestimmt wird:

$$f_u = \sqrt{R \frac{\pi A}{4 U^2} \left[\sqrt{1 + \sqrt{1 + \frac{1}{R^2}}} + \sqrt{1 - \sqrt{1 - \frac{1}{R^2}}} + 2 \right]}$$

$$\text{mit } R = \frac{I_p}{A^2} 2\pi \quad (A3.38)$$

Mit dem Beiwert f_u können schließlich die Korrekturwerte f in Abhängigkeit der Eckpunkte der Fläche A berechnet werden:

Für Dreiecke gilt:

$$f = 32,56 - 77,76 f_u + 47,79 f_u^2 \quad (A3.39a)$$

Für Vierecke gilt:

$$f = 26,87 + 27,35 f_u - 53,24 f_u^2 \quad (A3.39b)$$

Für Querschnitte mit mehr als 4 Ecken gilt:

$$f = 1,1 f_u^{2,30} \quad (A3.39c)$$

Die Zusammenhänge und Überlegungen, die auf diese Formel geführt haben, sind in [9] ausführlich dargestellt und werden hier nicht näher erläutert.

A3.3.3 Schubmittelpunkt

Die Bestimmung der Koordinaten des Schubmittelpunktes über die Gleichungen (3.6) oder (3.7) erfordert die Kenntnis der Wölbfunktion ϕ oder der homogenen Lösung ψ der Spannungsfunktion T, was für allgemeine dickwandige Querschnittsformen nur mit erheblichem numerischem Aufwand zu erreichen ist. Als Näherung kann aus bekannten Lösungen für Teilbereiche über eine entsprechende Wichtung ein für die Gesamtfläche verhältnismäßig zutreffendes Ergebnis erhalten werden. Dabei wird wie bei der Bestimmung des Torsionswiderstandes die gesamte wirksame Betonfläche in die Teilbereiche Obergurt, Steg und gegebenenfalls Untergurt getrennt. Näherungsweise wird für diese Teilbereiche angenommen, daß ihr Schubmittelpunkt mit dem Schwerpunkt zusammenfällt, was für rechteckige Querschnitte exakt stimmt. Aus der Definition des Schubmittelpunktes als Querkraftruhepunkt (s. Kap. 3.3), was eine Biegung in Hauptachsenrichtung ohne Verdrehung voraussetzt, kann der Schubmittelpunkt der Gesamtfläche über eine Wichtung der Schubmittelpunkte der Teilbereiche mittels der entsprechenden Teil-Biegesteifigkeiten vorgenommen werden. Unter der weiteren Voraussetzung, daß der Steg keinen wesentlichen Beitrag zu den Biegesteifigkeiten leistet, was bei den hier betrachteten Querschnitten meist der Fall ist, leitet *Mehlhorn*[4] für einen zur z-Achse symmetrischen I-Querschnitt folgende Formel für die Schubmittelpunktsordinate z_M ab:

$$z_M = \frac{z_{M,o} (EI_z)_o + z_{M,u} (EI_z)_u}{(EI_z)_o + (EI_z)_u} \quad (A3.40)$$

mit $z_{M,o}$; $z_{M,u}$ = Abstand des Schubmittelpunktes für den Ober- und Untergurt

$(EI_z)_o$ $(EI_z)_u$ = Biegesteifigkeit des Ober- und Untergurtes

Bei einfach symmetrischen Querschnitten liegt die andere Schubmittelpunktsordinate y_M auf der Symmetrieachse, so daß für *Mehlhorn* in [4] keine Notwendigkeit bestand, auch y_M zu berechnen.

Ein Ergebnis für beide Schubmittelpunktsabstände erhält man über die allgemein gültigen Formeln (3.7), wenn für die Wölbfunktion $\phi(y,z)$ näherungsweise, in Anlehnung an *Wlassow* [6], ein für dünnwandige Querschnitte geltender Ansatz

$\phi(y,z) = y \cdot z$ eingesetzt wird. Damit folgt aus den Formeln (3.7), wenn gleichzeitig noch mit dem Elastizitätsmodul erweitert wird:

$$\begin{aligned} z_M &= \frac{1}{(EI_z)} \iint E y^2 z \, dA \\ y_M &= -\frac{1}{(EI_y)} \iint E y z^2 \, dA \end{aligned} \quad (A3.41)$$

Diese Integralausdrücke treten bereits bei der Bestimmung der wirklichkeitsnahen Querschnittswerte für die Biegung in den Ausdrücken ($E r_y$) und ($E r_z$), siehe Formel (A3.8) und Tabelle A1, auf und erfordern deshalb keine neuen Überlegungen bei der expliziten Berechnung.

A3.3.4 Wölbsteifigkeit

Für allgemeine dickwandige Querschnittsformen kann der Wölbwiderstand nur durch Integration des Quadrates der Wölbordinaten über die betrachtete Fläche ermittelt werden. Zur Bestimmung der Wölbordinaten f ist die Lösung der Laplace-Dgl $\Delta\phi = 0$ erforderlich. Einige grundsätzliche Aussagen zu diesem Thema werden bereits im Kap. A3.3.3 gemacht, worauf hier verwiesen wird.

Wenn der Wölbwiderstand der ungerissenen Betonzone ermittelt worden ist, kann die Wölbsteifigkeit durch Multiplikation mit dem im Kap. A3.3.1 angegebenen gewichteten mittleren Elastizitätsmodul \bar{E} berechnet werden:

$$(EC_M)_b = \bar{E}_b C_{M,b} \quad (A3.42)$$

Der Einfluß der Bewehrung auf die Wölbsteifigkeit wird wie bei der *St. Venantschen* Torsionssteifigkeit gesondert erfaßt und dem Anteil aus der wirksamen Betonfläche hinzugefügt. Für bewehrte Betonquerschnitte sind nur wenige Untersuchungen über ihr Verhalten bei einer Beanspruchung aus Wölbkrafttorsion bekannt. Diese Arbeiten behandeln zudem nur dünnwandige Querschnitte. Bei den hier vorliegenden dickwandigen Querschnitten wird deshalb für die Berücksichtigung der Bewehrung bei der Bestimmung der Wölbsteifigkeit näherungsweise auf die Theorie für dünnwandige Querschnitte zurückgegriffen. Dabei wird die Methode der Sektorflächen von *Wlassow*[6] angewendet.

Der Berechnungsablauf ist im Bild A7 dargestellt und wird im folgenden erläutert. Die Lage des Schubmittelpunktes ist aus einer Berechnung nach Kap. A3.3.3 bekannt, ebenso die Lage der Bewehrung, für die die in Bild A7a skizzierten Mittellinien angenommen werden. Das Koordinatensystem wird nun so verschoben und gedreht, bis die z-Achse mit der Stegmittellinie zusammenfällt und die y-Achse durch den Schubmittelpunkt M geht. Die Sektorordinate $\omega_{M,A}$ des Punktes A bezogen auf M ist die doppelte Fläche, die der laufenden Radiusvektor r , beginnend am Anfangspunkt, bis zum Punkt A überstreicht (im Bild A7b schraffiert). Dabei ist $\omega_{M,A}$ positiv, wenn in Blickrichtung der positiven x-Achse (d.h. beim Blick auf die Bildebene) der Drehsinn des Radiusvektors entgegen der positiven Verdrehrichtung ϑ läuft. Da der richtige Anfangspunkt noch nicht bekannt ist, wird der Koordinatenursprung als Beginn gewählt und für diesen als Integrationskonstante der Wert $\omega_{M,0}$ angesetzt. Für einen beliebigen Bewehrungsstab j ergibt sich dann folgende Sektorordinate:

$$\omega_{M,j} = \omega_{M,0} + y_M z_j + y_j z_j = \omega_{M,0} + z_j(y_M + y_j) \quad (A3.43)$$

Der Verlauf der Sektorflächen ist in Bild A7c dargestellt. Die Konstante $\omega_{M,0}$ erhält man aus der Orthogonalitätsbedingung, wonach das statische Sektormoment aller Bewehrungsstäbe verschwinden muß:

$$S_\omega = \int \omega \, dA = \sum_{j=1}^n \omega_{M,j} A_j \quad (A3.44)$$

$$= \sum_{j=1}^n [\omega_{M,0} + z_j(y_M + y_j)] A_j = 0$$

$$\text{Daraus folgt: } \omega_{M,0} = \frac{\sum_{j=1}^n z_j(y_M + y_j) A_j}{n \sum_{j=1}^n A_j} \quad (A3.45)$$

Damit sind alle Sektorordinaten $\omega_{M,j}$ bekannt und der Beitrag der Bewehrung zur Wölbsteifigkeit ergibt sich zu:

$$(EC_M)_{s+v} = \sum_{j=1}^n E_j \omega_{M,j}^2 A_j \quad (A3.46)$$

Beide Anteile aus Beton (A3.42) und Bewehrung (A3.46) werden addiert und bilden die Wölbsteifigkeit des Stahlbeton- oder Spannbetonquerschnitts im Zustand II.

Für den Sonderfall des zur z-Achse symmetrischen Querschnitts, was meist bei Beginn der Iteration der Fall ist, kann die in [4] und [5] angegebene Formel zur Berechnung der Wölbsteifigkeit verwendet werden. Danach gilt:

$$(EC_M) = \frac{(EI_z)_o \cdot (EI_z)_u}{(EI_z)_o + (EI_z)_u} d^2 \quad (A3.47)$$

$(EI_z)_o$ und $(EI_z)_u$ sind die Biegesteifigkeiten um die z-Achse des Ober- bzw. Untergurtes, bei deren Bestimmung das nichtlineare Betonwerkstoffverhalten und die vorhandene Bewehrung nach den im Kap. A3.1 und A3.2 beschriebenen Verfahren berücksichtigt wird. d ist der gegenseitige Abstand der Einzelschubmittelpunkte von Ober- und Untergurt. Diese Formel stammt aus der Theorie für die dünnwandigen Querschnitte und ist in guter Näherung auch für dickwandige Querschnitte unter der Voraussetzung, daß der Steg keinen wesentlichen Beitrag liefert, anwendbar. Dies ist bei den im Betonbau üblichen Abmessungsverhältnissen von Gurten und Steg meist gegeben.

Ist die geforderte einfache Symmetrie zur z-Achse nicht vorhanden, und liegt eine zur y-Achse leicht geneigte Nulllinie vor, wodurch der Schubmittelpunkt nicht genau auf der z-Achse liegt, so kann der Ausdruck (A3.47) ebenfalls als gute Näherung verwendet werden. Der Vorteil gegenüber dem Integralverfahren liegt in der besseren Erfassung

des nichtlinearen Betonwerkstoffverhaltens.

Außerdem ist die Näherung weit weniger rechenintensiv. Die Formel (A3.47) ist auch auf einen I-Querschnitt mit völlig gerissenem Untergurt anwendbar, wenn die angegebenen Voraussetzungen erfüllt sind. Die Steifigkeit $(EI_z)_u$ wird dabei nur aus den Bewehrungsstäben berechnet. In diesem Fall stellt sich jedoch die Frage, ob die Berechnung einer Wölbsteifigkeit überhaupt noch sinnvoll ist.

Aus berechnungstechnischen Gründen kann jedoch die Ermittlung einer Wölbsteifigkeit erforderlich sein. Dazu wird auf die unterschiedlichen Differentialgleichungen für Systeme mit oder ohne Berücksichtigung einer Wölbsteifigkeit (Kap. A1.3.6 ; A1.3.9), auf die daraus resultierende, unterschiedliche Anzahl der Unbekannten an den Knoten und auf das ganze Lösungsverfahren des Dgl-Systems (Abschnitt A4) hingewiesen. Dort wird vorausgesetzt, daß benachbarte Elemente an demselben Knoten die gleiche Anzahl von Unbekannten haben. Es muß also vor Beginn einer Trägerberechnung abgeklärt sein, ob die Berechnung mit oder ohne Berücksichtigung der Wölbsteifigkeit erfolgen soll. Aus diesem Grunde muß auch eine Wölbsteifigkeit für den Fall des völlig gerissenen Untergurtes angegeben werden können.

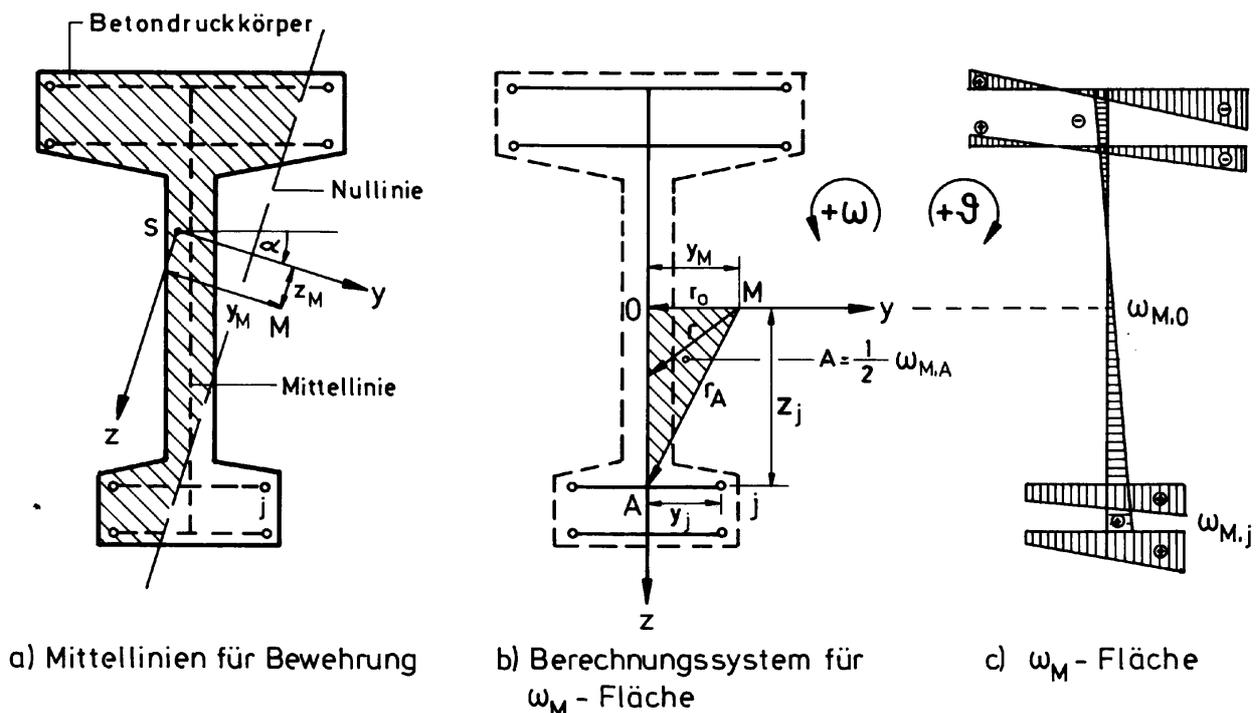


Bild A7 : Berechnungsablauf für den Anteil der Bewehrungen am Wölbwiderstand

Fig. A7 : Sequence of calculation for the part of the reinforcement for the warping resistance

A4. Numerische Lösungsmöglichkeit für das Differentialgleichungssystem

A4.1 Allgemeine Bemerkungen

Die aufgestellten Gleichungen gelten für das Hauptachsensystem des betrachteten Stabelements. Dabei wird u.a. vorausgesetzt, daß sich innerhalb des Elements die Richtungen der Hauptachsen nicht ändern und möglicherweise angreifende Lasten stetig verlaufen. Durch die Lastabhängigkeit der Querschnittswerte eines Stahlbetonquerschnitts ändern sich Lage und Richtung der Hauptachsen für den allgemeinen Fall kontinuierlich über die gesamte Trägerlänge. Der Träger wird deshalb in Abschnitte unterteilt, in denen sämtliche Querschnittswerte konstant gesetzt werden. Durch genügend feine Einteilungen ließe sich der "exakte" Verlauf der Querschnittswerte erreichen, wobei jedoch einer hierdurch erzielten "größeren" Genauigkeit durch z.B. die Näherungen der angenommenen Werkstoffbeziehungen und die Abbruchschranke bei der iterativen Bestimmung aller Zustandsgrößen Grenzen gesetzt sind. Zwangspunkte bei der Einteilung des Trägers sind Unstetigkeiten bei der Belastung, wie Knicke oder Sprünge im Verlauf von Streckenlasten und Angriffspunkte von Einzellasten oder Einzelmomenten, sowie besondere Lagerbedingungen innerhalb des Trägers, wie z.B. Federn oder eine Aufhängung. Diese aufgeführten Lastarten und alle Lagerbedingungen lassen sich also nur an den Knotenpunkten zwischen zwei Stabelementen oder am Anfangs- und Endknotenpunkt des Trägers berücksichtigen.

Die Einteilung des Trägers in Abschnitte mit jeweils konstanten, aber von Abschnitt zu Abschnitt veränderlichen Querschnittswerten hat an den Knotenpunkten Sprünge bei der Lage des Schwerpunktes (= Koordinatennullpunkt) und unterschiedliche Richtungen der entsprechenden Hauptachsen zur Folge. Jedes Stabelement besitzt demnach ein eigenes lokales Koordinatensystem, welches mit dem Hauptachsensystem des betreffenden Elements übereinstimmt, und für welches damit die aufgestellten differentiellen Beziehungen gelten. Zur Berechnung des Gesamttragwerks wird deshalb ein ortsfestes globales Koordinatensystem festgelegt, welches ein reines "Rechen"-

Koordinatensystem darstellt. Ziel dieser Maßnahme ist es, in diesem für alle Einzelelemente gleichermaßen geltenden Koordinatensystem ein Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannt GröÙen aufzustellen. Zunächst wird in dem betreffenden lokalen System für jedes Einzelelement die Übertragungsmatrix ermittelt. Hierfür

wird das Dgl-System numerisch integriert, wobei die element-spezifischen Eigenschaften in der Koeffizientenmatrix des Dgl-Systems eingefangen werden. Anschließend werden aus den Übertragungsmatrizen die Elementsteifigkeitsmatrizen berechnet und nach Umrechnung auf das globale System zur Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengesetzt. Im nächsten Schritt werden an den Knoten angreifende Lasten und die Lagerbedingungen in der Gesamtsteifigkeitsmatrix berücksichtigt. Die aufgestellte Matrix stellt ein lineares Gleichungssystem zur Berechnung der unbekannt VerformungsgröÙen dar. Nach Auflösung des Gleichungssystems erhält man den Lösungsvektor der "unbekannt" VerformungsgröÙen an den gewählten Knotenpunkten im globalen Koordinatensystem. Durch eine Rückrechnung ins lokale Koordinatensystem eines jeden Elements können die auf die Hauptachsen bezogenen SchnittgröÙen bestimmt werden. In den nächsten Kapiteln werden die eben kurz beschriebenen Schritte ausführlicher erläutert.

A4.2 Nichtkonstante GröÙen des Dgl-Systems für das Einzelelement

In den unter (A1.25) angegebenen differentiellen Beziehungen für den Querschnitt mit einer Wölbsteifigkeit bzw. den ergänzenden Gleichungen (A1.32) und (A1.33) für den wölbfreien Querschnitt und in den für einen vorgespannten Verbundquerschnitt erweiterten Differentialgleichungen (A2.15) bis (A2.19) haben die unbekannt VerformungsgröÙen Vorfaktoren, die normalerweise einen über die Trägerlänge nichtkonstanten Verlauf besitzen. Nachdem in Kap.A4.1 auf die Unterteilung des Trägers in Abschnitte mit konstanten Querschnittswerten hingewiesen worden ist, bleiben als nichtkonstante Glieder der Differentialgleichungen noch die SchnittgröÙen und die äußeren Lasten sowie der Verlauf der Vorspannung und einer möglichen Vorverformung übrig.

Streng genommen müÙten die SchnittgröÙen aus dem Ergebnis der noch durchzuführenden Berechnung eingesetzt werden. Da dies nicht möglich ist, werden näherungsweise die SchnittgröÙen nach Theorie I. Ordnung verwendet, wie dies bereits beim Aufstellen der Differentialgleichungen gehandhabt und erläutert worden ist.

Für die Integrationen des Differentialgleichungssystems über die Elementlänge müssen also der Verlauf der Schnittgrößen, der Lasten, der Vorspannung und der Vorverformung bekannt sein. Grundsätzlich können dafür beliebige Funktionen eingesetzt werden, sie müssen nur stetig und differenzierbar sein. Unstetigkeitsstellen dürfen nur an den Elementgrenzen vorhanden sein. Da die abgeleiteten Differentialgleichungen jeweils für das Hauptachsensystem der Einzelemente gelten, müssen die Lasten und der Verlauf von Vorspannung und Vorverformung aus dem gewählten Eingabe-Koordinatensystem in die einzelnen Hauptachsensysteme umgerechnet werden. Die in den folgenden Kapiteln gemachten Angaben sollen also für die jeweiligen Hauptachsen des Einzelementes gelten.

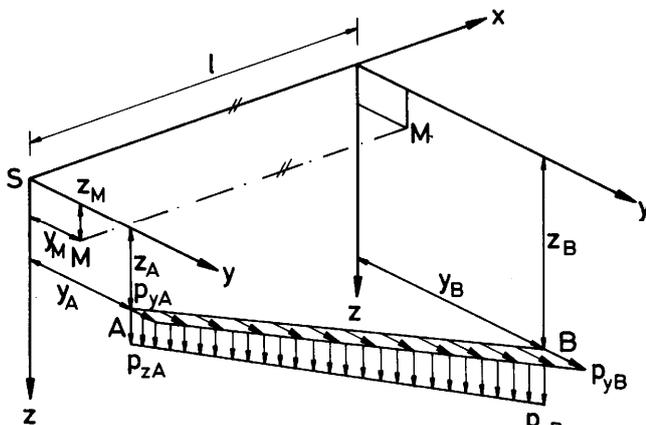


Bild A16 : Streckenlasten p_y und p_z
 Fig. A16 : Line loads p_y and p_z

A4.2.1 Streckenlasten

Die Größe einer Streckenlast und ihr Angriffspunkt werden im Element linear veränderlich angenommen (Bild A16). Die Last bleibt richtungstreu und zeigt in Richtung der unverformten Achsen y oder z . Für die Größe der Streckenlasten gilt :

$$p_y(x) = p_{yA} + (p_{yB} - p_{yA}) \frac{x}{l} \quad (A4.1)$$

$$p_z(x) = p_{zA} + (p_{zB} - p_{zA}) \frac{x}{l}$$

und für die Angriffspunkte:

$$y_p(x) = y_A + (y_B - y_A) \frac{x}{l} \quad (A4.2)$$

$$z_p(x) = z_A + (z_B - z_A) \frac{x}{l}$$

Werden diese Gleichungen für die Streckenlasten und die Angriffspunkte in die Beziehung (A1.19) und (A1.20) eingesetzt, so erhält man die verteilten Torsionsmomente m_{tI} und m_{tII} nach Theorie I. und II. Ordnung, die als Belastungsglied bzw. als Koeffizient ebenfalls benötigt werden.

A4.2.2 Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung

Als Koeffizienten des Differentialgleichungssystems nach Theorie II. Ordnung werden die Biegemomente und Querkräfte nach Theorie I. Ordnung benötigt. Diese Schnittgrößen hängen von der Belastung und den Lagerbedingungen ab. Vor der Berechnung eines Trägers nach Theorie II. Ordnung muß also eine Berechnung nach Theorie I. Ordnung durchgeführt werden, um die jeweiligen Schnittgrößen am Anfang eines jeden Elements zu erhalten. Der Verlauf der Schnittgrößen am Element selbst ist für die Streckenbelastung nach (A4.1) aus den nachfolgenden Formeln zu berechnen:

$$M_{yI}(x) = M_{yA} + Q_{zA}x - p_{zA} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} \right) - p_{zB} \frac{x^3}{6l}$$

$$M_{zI}(x) = M_{zA} + Q_{yA}x + p_{yA} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{6l} \right) + p_{yB} \frac{x^3}{6l}$$

$$Q_{yI}(x) = -Q_{yA} + p_{yA} \left(x - \frac{x^2}{2l} \right) + p_{yB} \frac{x^2}{2l}$$

$$Q_{zI}(x) = Q_{zA} - p_{zA} \left(x - \frac{x^2}{2l} \right) - p_{zB} \frac{x^2}{2l}$$

(A4.3)

Die Vorzeichen müssen den für die Theorie II. Ordnung gültigen Definitionen entsprechen.

A4.2.3 Vorspannung

Wie im Abschnitt A2 dargelegt, steht die Vorspannung zum einen explizit als Koeffizient im Dgl-System, zum anderen beeinflusst sie über ihre Umlenkkräfte den Lastvektor. Der Verlauf der Spannlieder über die Trägerlänge und die Größe der Vorspannkraft müssen deshalb bekannt sein, um deren Einfluß erfassen zu können. Die Vorspannkraft wird ebenso wie eine äußere Normalkraft konstant gesetzt, während die Spannlieder geradlinig oder parabelförmig über die Trägerlänge verlaufen können. Diese Verläufe entsprechen den in der Praxis am häufigsten angewendeten

Spanngliedführungen. Für die Einzelemente wird aus dem Gesamtverlauf eines Spanngliedes immer nur der Teil, der im betreffenden Element liegt, benötigt. Während bei geradliniger Spanngliedführung der Verlauf im Element durch den Anfangs- und Endwert bestimmt ist, muß beim parabelförmigen Verlauf zusätzlich noch der Stich in Elementmitte bekannt sein. Diese Werte am Elementanfang und -ende und bei Bedarf auch in der Elementmitte werden aus dem Spanngliedverlauf des kompletten Trägers ermittelt und auf das lokale Koordinatensystem umgerechnet. Dabei bleibt der parabelförmige Verlauf trotz Änderung des Bezugskoordinatensystems auch im Element erhalten.

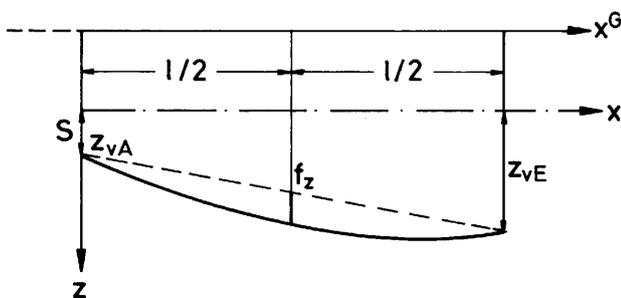


Bild A17 : Parabelförmiger Verlauf eines Spanngliedes im Element

Fig. A17 : Parabolic course of prestressed bar in the element

Für die quadratische Parabel gilt mit den Bezeichnungen nach Bild A17 in der z-x-Ebene die Beziehung:

$$z_v(x) = z_{vA} + (z_{vE} - z_{vA}) \frac{x}{l} + 4f_z \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (A4.4)$$

Für eine in der y-z-Ebene liegende Parabel folgt:

$$y_v(x) = y_{vA} + (y_{vE} - y_{vA}) \frac{x}{l} + 4f_y \left(\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2} \right) \quad (A4.5)$$

Der Fall einer geradlinigen Spanngliedführung ist in den Gleichungen (A4.4) und (A4.5) für den Sonderfall $f=0$ enthalten. Diese Gleichungen und ihre Ableitungen werden mit der Vorspannkraft Z_v multipliziert und an den entsprechenden Stellen des Dgl-Systems als Koeffizienten eingesetzt. Im Lastvektor wird der Einfluß der Vorspannung über Umlenkkräfte berücksichtigt. Aus den Gleichungen (A4.4) und (A4.5) ergeben sich durch zweimalige Differentiation die bekannten Formeln der Umlenkkräfte als Gleichstreckenlasten:

$$p_{zv} = -Z_v \frac{8f_z}{l^2} \quad \text{und} \quad p_{yv} = -Z_v \frac{8f_y}{l^2} \quad (A4.6)$$

Die Angriffslinie dieser Gleichstreckenlast ist der Verlauf des Spanngliedes über die Trägerlänge. Bei exzentrischer Lage des Spanngliedes zum Schubmittelpunkt M ergibt sich ein Streckentorsionsmoment $m_{t,v}$ nach (A2.14), das gemeinsam mit den Gleichstreckenlasten im Belastungsvektor \underline{L} des Dgl-Systems zu berücksichtigen ist.

Am Anfangs- und Endpunkt der Elemente sind aus der Vorspannung noch Umlenkkräfte als Einzelasten oder Einzelmomente vorhanden:

$$\begin{aligned} \Delta B_y &= Z_v z'_v(x) \\ \Delta B_z &= Z_v y'_v(x) \\ \Delta V_y &= Z_v z''_v(x) \\ \Delta V_z &= Z_v y''_v(x) \end{aligned} \quad (A4.7)$$

In die Beziehungen (A4.7) sind die Gleichungen (A4.4) und (A4.5) einzusetzen. Die Umlenkkräfte ergeben an den Stellen $x=0$ und $x=l$ Knotenkräfte, die unter Beachtung der getroffenen Vorzeichenregel gemäß den in Kap. A4.7 dargestellten Ausführungen im globalen Lastvektor des Gesamtsystems zu berücksichtigen sind.

4.2.4 Vorverformungen

Da ideal gerade Trägerachsen praktisch nicht verwirklicht werden können, wird die Vorverformung als ein weiterer Lastfall behandelt. Werden im Vergleich zu den Trägerabmessungen kleine Vorverformungen vorausgesetzt, können sie im Rahmen der hier behandelten Theorie berücksichtigt werden. Infolge Vorverformung des Trägers ändern sich die Gleichgewichtsbedingungen für die Differentialgleichungen. Allerdings brauchen diese Gleichgewichtsbedingungen nicht neu aufgestellt zu werden, sondern man kann die bereits in Kap. A1.3.5 aufgestellten Gleichungen verwenden, da kleine Verformungen vorausgesetzt werden. Als Ergebnis dieser Gleichgewichtsbetrachtung erhält man u.a. Beziehungen zwischen Schnittgrößen und Verformungen (A1.25), mit denen die gesuchten Zusatzlastglieder bestimmt werden. Es werden also in die Differentialgleichung nach (A1.25) bzw. (A1.33) anstelle der unbekanntenen Verformungen v_M, w_M, ϑ die bekannten Vorverformungen v_0, w_0, ϑ_0 eingesetzt. Diese Ausdrücke ergeben zusätzliche Belastungsglieder des Differentialgleichungssystems I. Ordnung. Hierbei sind die Vorverformungen des Schubmittelpunktes M einzusetzen. Diese Vorgehensweise liefert als Ergebnis der Berechnung die elastischen Verformungsanteile, die zur Ermittlung der Gesamtverformung den Vorverformungen hinzuzufügen sind.

Für einen wölbesteifen Querschnitt ergeben sich folgende Belastungsglieder aus einer Vorverformung :

$$\begin{aligned} \Delta B'_y &= -N w'_0 + N y_M \vartheta'_0 \\ \Delta B'_z &= N v'_0 + N z_M \vartheta'_0 \\ \Delta T' &= -M'_{yI} v'_0 - M'_{zI} w'_0 + p_t \vartheta_0 \\ \Delta W' &= - \left[N i_M^2 + M_{yI} r_{M,y} - M_{zI} r_{M,z} \right] \vartheta'_0 \quad (A4.8) \\ &\quad + (M_{yI} - N z_M) v'_0 + (M_{zI} + N y_M) w'_0 \\ \Delta v''_M &= - \frac{M_{yI}}{(EI_z)} \vartheta_0 \\ \Delta w''_M &= - \frac{M_{zI}}{(EI_y)} \vartheta_0 \end{aligned}$$

Für den wölbfreien Querschnitt wird aus obigen Zusatzgliedern der Term für $\Delta W'$ durch den Ausdruck

$$\Delta \vartheta' = \frac{(M_{yI} - N z_M)}{(GI_t^*)} v'_0 + \frac{(M_{zI} + N y_M)}{(GI_t^*)} w'_0 \quad (A4.9)$$

ersetzt.

Der Verlauf der Vorverformungen v_0, w_0, ϑ_0 muß im Einzelement als Funktion der Koordinate x bekannt sein. Zweckmäßigerweise wird für den Verlauf der Vorverformung eine quadratische Parabel wie bei der Vorspannung angesetzt. Damit ergeben sich für den Schubmittelpunkt eines Einzelements folgende Kurvenverläufe :

$$\begin{aligned} v_0(x) &= v_{0A} + (v_{0E} - v_{0A}) \frac{x}{1} + 4f_v \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{1^2} \right) \\ w_0(x) &= w_{0A} + (w_{0E} - w_{0A}) \frac{x}{1} + 4f_w \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{1^2} \right) \\ \vartheta_0(x) &= \vartheta_{0A} + (\vartheta_{0E} - \vartheta_{0A}) \frac{x}{1} + 4f_\vartheta \left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{1^2} \right) \end{aligned} \quad (A4.10)$$

Die Bezeichnungen sind dabei entsprechend Bild A17 gewählt. Die Werte am Elementanfang, -mitte und -ende werden aus dem vorzugebenden Verlauf der Vorverformung am Gesamtträger ermittelt. Zur Eingabe des Verlaufs der Vorverformung am Gesamtträger sollen im folgenden zum besseren Verständnis noch einige Anmerkungen gemacht werden. Die Vorverformung soll auch am Gesamtträger parabelförmig verlaufen. Es reicht dabei aus, nur eine horizontale Verschiebung des Trägers vorzusehen. Da die Lage des Schubmittelpunktes zu Beginn der Berechnung nicht bekannt

ist, werden die Verformungen der Oberkante und Unterkante des Trägers angegeben, deren Vorverformungen in der Praxis auch am leichtesten gemessen werden können. Da ein starrer Querschnitt vorliegt, können mit diesen beiden Angaben die Vorverformungen über die gesamte Trägerhöhe als zueinander affine Parabeln berechnet werden.

Ist im Verlauf der Berechnung die Lage des Schubmittelpunktes bekannt, wird seine horizontale Vorverformung \bar{v}_0 bestimmt, und, falls die Oberkante und Unterkante des Trägers unterschiedliche Verschiebungen aufweisen, noch eine Vorverdrehung ϑ_0 . Da die Richtungen der Hauptachsen i.a. von denen der Eingabeachsen abweichen, muß die horizontale Vorverformung \bar{v}_0 , die parallel zur Eingabeachse y verläuft, durch eine einfache Umrechnung in die benötigten Verformungen v_0 und w_0 des Schubmittelpunktes transformiert werden.

A4.3 Aufstellen der Übertragungsmatrix des Stabelements

Die Übertragungsmatrix \underline{U} verknüpft die Zustandsgrößen des linken Schnittufers an der Stelle $x = 0$ mit denen des rechten Schnittufers an der Stelle $x = 1$:

$$\underline{w}_R = \underline{U} \underline{w}_L + \underline{q} \quad (A.11)$$

Der Zustandsgrößenvektor \underline{w} setzt sich dabei aus den möglichen sechs Verformungen und sechs Schnittgrößen eines Schnittufers des ungefestelten Stabelements zusammen. Die Vorzeichen der Zustandsgrößen entsprechen dabei den beim Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen getroffenen Vereinbarungen. Dies ist in Bild A18 zur besseren Übersicht noch einmal dargestellt.

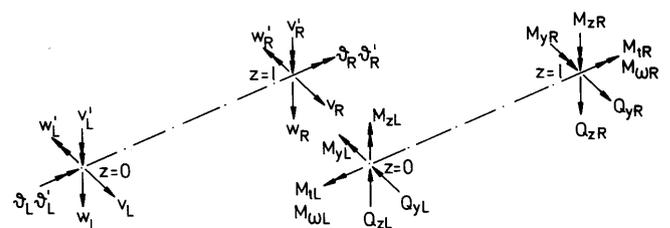


Bild A18 : Vorzeichenregelung der Größen des Zustandsvektors der Übertragungsmatrix
 Fig. A18 : Definition of signs of vector components of transfer matrix

Der Zustandsgrößenvektor \underline{w} lautet also

$$\underline{w} = \{v, v', w, w', \vartheta, \vartheta', Q_y, M_z, Q_z, M_y, M_t, M_\omega\} \quad (A4.12)$$

Der Vektor \underline{q} berücksichtigt innerhalb des Stabelements angreifende Streckenlasten, deren Verlauf stetig sein muß.

Der Verlauf der Zustandsgrößen im Stabelement wird durch das Dgl-System I. Ordnung (A1.25) beschrieben. Dieses Dgl-System entspricht bereits formal der Forderung (4.1). Der oben definierte Zustandsgrößenvektor \underline{w} ist so gewählt worden, daß er mit dem Vektor \underline{R} der auf die unverformten Achsen bezogenen Zustandsgrößen nach Gleichung (A1.27) übereinstimmt. Wäre dies nicht der Fall, so müßten zwischen den Vektoren \underline{w} und \underline{R} entsprechende Umrechnungen gefunden werden. Durch diese Identität enthält die Koeffizientenmatrix \underline{A} nach Bild A3 (wölbsteif) oder Bild A4 (wölbfrei) die zu integrierenden Beziehungen.

Für die weitere numerische Behandlung ist es zweckmäßig, im Gleichungssystem dimensionslose Größen einzuführen, um auf Matrixglieder gleicher Größenordnung zu kommen. Diese Maßnahmen sind aber nicht unbedingt erforderlich. Die Spaltenvektoren der Übertragungsmatrix \underline{U} werden durch numerische Integration des Dgl-Systems erster Ordnung gewonnen. Setzt man im Anfangsvektor jeweils ein Glied eins und alle übrigen null, integriert dann das Dgl-System über das Stabelement, so erhält man einen Endvektor, der der entsprechenden Spalte der Übertragungsmatrix \underline{U} entspricht:

$$Y_{L,i} \Rightarrow \begin{cases} Y_{L,1} = 0 \\ \downarrow \\ Y_{L,k} = 1 \\ \downarrow \\ Y_{L,n} = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{numerische Integration}} Y_{R,i} = U_{i,k} \quad (A4.13)$$

Bei den numerischen Integrationen für das Aufstellen der Übertragungsmatrix bleiben mögliche Belastungsglieder des Dgl-Systems (Vektor \underline{L} nach A1.28) unberücksichtigt. Den Belastungsvektor \underline{q} erhält man durch eine weitere Integration als Endvektor \underline{Y}_R , wobei alle Glieder des Anfangsvektors \underline{Y}_L null gesetzt werden und nur der Lastvektor \underline{L} (A1.28) berücksichtigt wird.

A4.4 Berechnung der Steifigkeitsmatrix für das Stabelement

Die Steifigkeitsmatrix \underline{S}_E eines Stabelements stellt die Verbindung zwischen den Schnittgrößen \underline{K}_j und den Verformungsgrößen \underline{V}_m her:

$$\underline{K} = \underline{S} \underline{V} + \underline{B} \quad (A4.14)$$

Die Vektoren der Schnittgrößen \underline{K} und Verformungsgrößen \underline{V} schreiben sich folgendermaßen:

$$\underline{K} = \left\{ \begin{array}{cccccc} Q_{y,L} & M_{z,L} & Q_{z,L} & M_{y,L} & M_{t,L} & M_{\omega,L} \\ Q_{y,R} & M_{z,R} & Q_{z,R} & M_{y,R} & M_{t,R} & M_{\omega,R} \end{array} \right\} \quad (A4.15)$$

$$\underline{V} = \left\{ \begin{array}{cccccc} v_L & v'_L & w_L & w'_L & \vartheta_L & \vartheta'_L \\ v_R & v'_R & w_R & w'_R & \vartheta_R & \vartheta'_R \end{array} \right\}$$

Der Belastungsvektor \underline{B} enthält wiederum den Einfluß angreifender Streckenlasten ("Starreinspannkraftgrößenvektor").

Die Spaltenvektoren der Elementsteifigkeitsmatrix können grundsätzlich in gleicher Weise wie bei der Übertragungsmatrix durch Integration eines Dgl-Systems aufgestellt werden. Viel einfacher jedoch sind sie aus der Übertragungsmatrix direkt zu berechnen. Die Zustandsgrößenvektoren \underline{w}_L und \underline{w}_R der beiden Schnittpuffer setzen sich nämlich aus Gliedern der Vektoren \underline{K} und \underline{V} zusammen und lassen sich demnach wie folgt ausdrücken:

$$\underline{w}_L = \begin{Bmatrix} \underline{V}_L \\ \underline{K}_L \end{Bmatrix} \quad \underline{w}_R = \begin{Bmatrix} \underline{V}_R \\ \underline{K}_R \end{Bmatrix} \quad \underline{q} = \begin{Bmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{K}_0 \end{Bmatrix} \quad (A4.16)$$

Diese Vektoren (A4.16) werden in die Beziehung (A4.11) eingesetzt:

$$\begin{Bmatrix} \underline{V}_R \\ \underline{K}_R \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \underline{U}_{11} & \underline{U}_{12} \\ \underline{U}_{21} & \underline{U}_{22} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{V}_L \\ \underline{K}_L \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \underline{V}_0 \\ \underline{K}_0 \end{Bmatrix} \quad (A4.17)$$

Diese zwei Matrizengleichungen gestatten die Bestimmung der Spaltenvektoren der Elementsteifigkeitsmatrix ohne eine aufwendige Integration des Dgl-Systems. Bei der Ermittlung der Spalten der Steifigkeitsmatrix bleibt der Lasteinfluß unberücksichtigt. Aus Gleichung (A4.17) folgt dann:

$$\begin{aligned} \underline{U}_{12} \underline{K}_L &= \underline{V}_R - \underline{U}_{11} \underline{V}_L & \text{a)} \\ \underline{K}_R &= \underline{U}_{21} \underline{V}_L + \underline{U}_{22} \underline{K}_L & \text{b)} \end{aligned} \quad (A4.18)$$

Nun wird wiederum jeweils eine Verformungsgröße V_j gleich eins, die restlichen werden null gesetzt. Aus dem linearen Gleichungssystem (A4.18) werden dann die Vektoren $\underline{K}_{L,j}$ und $\underline{K}_{R,j}$ ermittelt, die zusammengefaßt den Spaltenvektor \underline{j} der Steifigkeitsmatrix ergeben:

$$\underline{S}_{E,j} = \begin{Bmatrix} \underline{K}_{L,j} \\ \underline{K}_{R,j} \end{Bmatrix} \quad (\text{A4.19})$$

Für die Berechnung des Belastungsvektors \underline{B} werden alle Verformungsgrößen null gesetzt, der Lasteinfluß jedoch berücksichtigt. Aus (A4.17) ergibt sich dann:

$$\underline{U}_{12} \underline{K}_L = -\underline{V}_0 \quad (\text{A4.20})$$

$$\underline{K}_R = \underline{U}_{22} \underline{K}_L + \underline{K}_0$$

Die Lösungsvektoren $\underline{K}_{L,0}$ und $\underline{K}_{R,0}$ sind der gesuchte Belastungsvektor \underline{B} :

$$\underline{B} = \begin{Bmatrix} \underline{K}_{L,0} \\ \underline{K}_{R,0} \end{Bmatrix} \quad (\text{A4.21})$$

A4.5 Umrechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen in das globale Koordinatensystem

Für die im vorigen Kapitel aufgestellte Elementsteifigkeitsmatrix gilt noch die Vorzeichenregelung nach Bild A18. Die Richtung der Schnittgrößen am rechten Schnittufer ist der der Schnittgrößen am linken Schnittufer entgegengesetzt. Ein Vergleich der Schnittgrößen mit den ihnen zugeordneten Verformungen jeweils am gleichen Schnittufer zeigt auf der rechten Seite zwischen M_{yR} und w'_R nur eine unterschiedliche Richtung, wogegen auf der linken Seite nur eine Richtung, nämlich zwischen M_{yL} und w'_L , übereinstimmt.

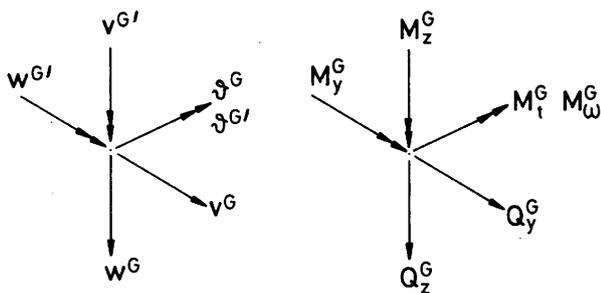


Bild A19 : Positive Richtungen der globalen Schnittgrößen

Fig. A19 : Positive directions of global intersection values

Die Beibehaltung dieser aus den Gleichgewichtsbetrachtungen stammenden Vorzeichendefinitionen würde den weiteren Berechnungsablauf unnötig komplizieren, so daß eine neue Vorzeichenregelung getroffen wird. Generell zeigen nun positive Schnittgrößen und Verformungen an den Elementknoten in Richtung der positiven

Koordinatenachsen gemäß Bild A19. Die entsprechenden Vorzeichenkorrekturen sind an dieser Stelle der Berechnung in der Elementsteifigkeitsmatrix ohne Schwierigkeiten durchzuführen. Durch diese Maßnahme gelten dann für beide Schnittufer die gleichen Umrechnungen vom lokalen ins globale Koordinatensystem.

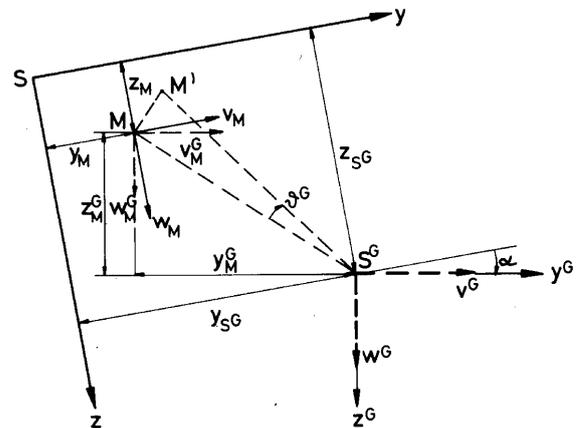


Bild A20 : Umrechnung zwischen lokalem und globalem Koordinatensystem

Fig. A20 : Transformation between the local and the global system of coordinates

Aus Bild A20 läßt sich unter Beachtung von Gleichung (A1.1) ablesen:

$$v_M^G = v^G - z_M^G \vartheta^G \quad (\text{A4.22})$$

$$w_M^G = w^G - y_M^G \vartheta^G$$

$$v_M = v^G \cos \alpha - w^G \sin \alpha \quad (\text{A4.23})$$

$$w_M = v^G \sin \alpha + w^G \cos \alpha$$

$$y_M^G = -[(y_{S^G} - y_M) \cos \alpha + (z_{S^G} - z_M) \sin \alpha]$$

$$z_M^G = -[(z_{S^G} - z_M) \cos \alpha - (y_{S^G} - y_M) \sin \alpha] \quad (\text{A4.24})$$

Zusammengefaßt ergibt sich für die Umrechnung der Verschiebungen nach einigen Zwischenschritten

$$v_M = v^G \cos \alpha - w^G \sin \alpha + (z_{S^G} - z_M) \vartheta^G \quad (\text{A4.25})$$

$$w_M = v^G \sin \alpha + w^G \cos \alpha - (y_{S^G} - y_M) \vartheta^G$$

Für die Neigungen der Biegelinien folgt aus Gleichung (A4.23) unter Beachtung der Übereinstimmung von v' mit der Richtung von w und w' mit der Richtung von v

$$v'_M = v^G \cos \alpha + w^G \sin \alpha \quad (\text{A4.26})$$

$$w'_M = -v^G \sin \alpha + w^G \cos \alpha$$

Durch eine einfache Rechnung läßt sich nachweisen, daß der Drehwinkel ϑ unabhängig vom Koordinatensystem und deshalb für alle Punkte gleich ist. Die Verwindung ϑ' bleibt ebenfalls unverändert, so daß gilt :

$$\begin{aligned} \vartheta_M &= \vartheta^G \\ \vartheta'_M &= \vartheta'^G \end{aligned} \quad (A4.27)$$

Mit diesen Beziehungen für die Umrechnung der Verformungen zwischen dem lokalen und globalen Koordinatensystem ergibt sich die Transformationsmatrix \underline{T} nach Bild A21. Mit dieser Matrix wird die Umrechnung mit der aus der Matrizenrechnung bekannten Ähnlichkeitstransformation [16] vorgenommen. Die neue globale Elementsteifigkeitsmatrix erhält man durch folgende Matrizenoperation :

$$\underline{S}_G = \underline{T}^t \underline{S}_E \underline{T} \quad (A4.28)$$

Die Matrix \underline{T}^t ist die transponierte Matrix \underline{T} , und wird aus \underline{T} durch Vertauschen der Zeilen und Spalten gewonnen. Für den Belastungsvektor \underline{B}_G folgt entsprechend

$$\underline{B}_G = \underline{T}^t \underline{B} \quad (A4.29)$$

Bezogen auf das globale System schreibt sich damit die Beziehung zwischen Schnittkräften und Verformungsgrößen

$$\underline{K}_G = \underline{S}_G \underline{V}_G + \underline{B}_G \quad (A4.30)$$

wobei die Vektoren \underline{K}_G und \underline{V}_G die gleichen Größen wie Gleichung (A4.15) enthalten, die aber nunmehr auf das globale System bezogen sind.

	v_L^G	$v_L^{G'}$	w_L^G	$w_L^{G'}$	ϑ_L^G	$\vartheta_L^{G'}$	v_R^G	$v_R^{G'}$	w_R^G	$w_R^{G'}$	ϑ_R^G	$\vartheta_R^{G'}$
$v_{M,L}$	$\cos\alpha$		$-\sin\alpha$		$(z_{S^G} - z_M)$							
$v_{M,L}'$		$\cos\alpha$		$\sin\alpha$								
$w_{M,L}$	$\sin\alpha$		$\cos\alpha$		$-(y_{S^G} - y_M)$							
$w_{M,L}'$		$-\sin\alpha$		$\cos\alpha$								
$\vartheta_{M,L}$					1							
$\vartheta_{M,L}'$						1						
$v_{M,R}$							$\cos\alpha$		$-\sin\alpha$		$(z_{S^G} - z_M)$	
$v_{M,R}'$								$\cos\alpha$		$\sin\alpha$		
$w_{M,R}$							$\sin\alpha$		$\cos\alpha$		$-(y_{S^G} - y_M)$	
$w_{M,R}'$								$-\sin\alpha$		$\cos\alpha$		
$\vartheta_{M,R}$											1	
$\vartheta_{M,R}'$												1

Bild A21 : Transformationsmatrix \underline{T}

Fig. A21 : Transformation matrix \underline{T}

A4.6 Bestimmung der Gesamtsteifigkeitsmatrix aus den globalen Elementsteifigkeitsmatrizen

Die Gesamtsteifigkeitsmatrix \underline{G} verknüpft alle an den Tragwerksknoten vorhandenen Kraftgrößen F_j mit den dazugehörigen Verformungen Q_i :

$$\underline{F} = \underline{G} \underline{Q} + \underline{F}_0 \quad (\text{A4.31})$$

Der Lastvektor \underline{F}_0 beinhaltet den Einfluß äußerer Lasten.

Ein Matrixelement G_{lm} entspricht der Kraftgröße F_l infolge der Verformungsgröße $Q_m = 1$ des an den Knoten aufgeschnittenen Gesamtsystems, wenn alle übrigen Verformungsgrößen Q_i gleichzeitig null sind. Hieraus ergibt sich, daß für die Kraftgrößen F_j eines Knotens nur die unmittelbar an dem betreffenden Knoten angrenzenden Elemente einen Beitrag liefern, oder anders ausgedrückt, daß nur die an den benachbarten Knoten und die an dem betrachteten Knoten selbst angreifenden Verformungsgrößen Q_i einen Einfluß haben. Diese Bestimmungsmöglichkeit der einzelnen Matrixkomponenten gilt natürlich sinngemäß auch für die Elementsteifigkeitsmatrizen. Somit kann aus den auf das globale Bezugssystem umgerechneten Elementsteifigkeitsmatrizen die Gesamtsteifigkeitsmatrix zusammengesetzt werden. Um in den Aufbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix eine gewisse Schematisierung zu bringen, werden weitere Berechnungsregeln festgelegt.

Betrachtet werden hier nur Einfeld- und Durchlaufträger. Die Einzelelemente und Knotenpunkte werden bei diesen Trägern in aufsteigender Reihenfolge in Richtung der positiven x-Achse numeriert. Ohne Berücksichtigung der Lagerung eines Trägers hat jeder Knoten die gleiche Anzahl von Verformungsmöglichkeiten. Je nachdem, ob ein wölbfreier Querschnitt vorliegt oder nicht, kann eine Aussage über die Verwindung ϑ' gemacht werden, so daß die Anzahl der Freiheitsgrade pro Knoten $n_u=5$ oder $n_u=6$ betragen kann. Diese Freiheitsgrade werden nach folgendem Schema numeriert, wobei k der Laufindex der Knotennummern ist:

- Verschiebung in y-Richtung =
 $v \rightarrow$ Index 1, 7 (6), $1 + n_u$ (k-1)
- Verdrehung um die z-Achse =
 $v' \rightarrow$ Index 2, 8 (7), $2 + n_u$ (k-1)
- Verschiebung in z-Richtung =
 $w \rightarrow$ Index 3, 9 (8), $3 + n_u$ (k-1)
- Verdrehung um die y-Achse =
 $w' \rightarrow$ Index 4, 10 (9), $4 + n_u$ (k-1)

- Verdrehung um die x-Achse =
 $\vartheta \rightarrow$ Index 5, 11 (10), $5 + n_u$ (k-1)
- Verwindung des Querschnitts =
 $\vartheta' \rightarrow$ Index 6, 12, $6 + n_u$ (k-1)

Im Bild A22 wird eine dementsprechende Indizierung dargestellt, wobei die positiven Richtungen den bereits im Bild A19 für die globalen Elementsteifigkeitsmatrizen festgelegten positiven Richtungen entsprechen.

Für die Kraftgrößen wird dasselbe Schema gewählt, wobei sich entsprechende Größen denselben Index erhalten. Diese Maßnahme bietet sich durch den gleichartigen Aufbau des Verformungsgrößen- und Kraftgrößenvektors an.

Legt man diese Indizierung auch an den Knoten der Einzelelemente zugrunde und numeriert die vorhandenen Größen durch, so ergibt sich z.B. für einen wölbfreien Querschnitt das ebenfalls in Bild A22 dargestellte, für jedes Einzelelement gleiche Schema. Die gewählte Indizierung entspricht hierbei der Zeilen- und Spaltennumerierung der Steifigkeitsmatrizen sowohl bei den Einzelelementen als auch beim Gesamtsystem.

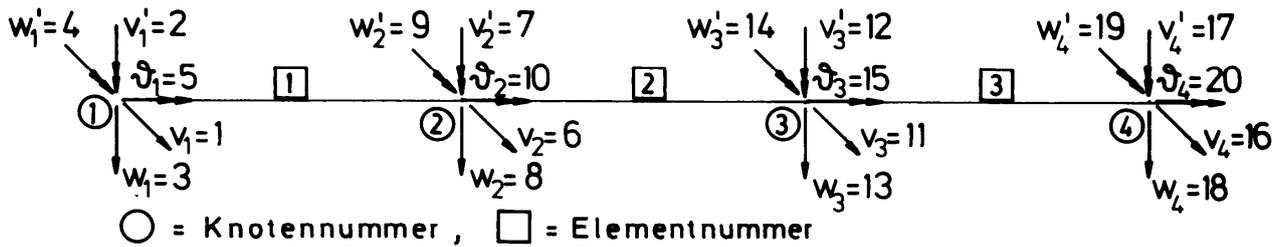
Durch den gewählten Aufbau des Verformungsgrößen- und Kraftgrößenvektors (A4.15) lassen sich die Elementsteifigkeitsmatrizen \underline{S}_G in Untermatrizen einteilen, die den jeweiligen Einfluß der an den beiden Elementknoten vorhandenen Verformungsgrößen V_1 bis V_{n_u} und V_{n_u+1} bis

$V_{n_u+n_u}$ auf die dort angreifenden Schnittkräfte K_1 bis K_{n_u} und K_{n_u+1} bis $K_{n_u+n_u}$ beinhalten. Entsprechend den am Beginn dieses Kapitels dargelegten Ausführungen wird die Gesamtsteifigkeitsmatrix aus den Untermatrizen der Elementsteifigkeitsmatrizen nach einem einfachen, im Bild A22 dargestellten Überlappungsschema zusammengesetzt.

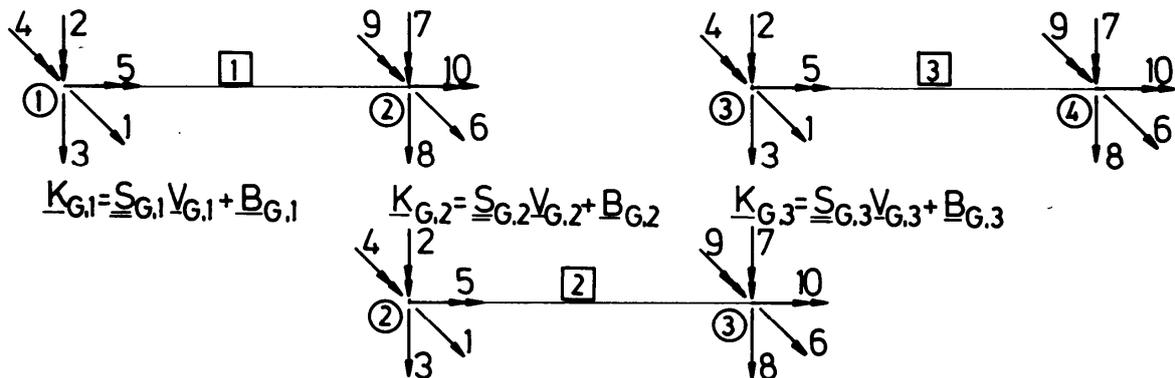
Werden in den Elementsteifigkeitsmatrizen jeweils dimensionslose Größen eingeführt, so können im Überlappungsbereich die entsprechenden Matrixkomponenten einfach summiert werden.

Dementsprechend wird der Gesamtlastvektor \underline{F}_0^S der Streckenlasten aus den Elementstreckenlastvektoren $\underline{B}_{G,E}$ durch Aufteilung in die beiden Untervektoren $\underline{B}_{G,E}^1$ und $\underline{B}_{G,E}^2$ und anschließender Überlagerung ermittelt.

Indizierung am Gesamtsystem:



Indizierung der Einzelemente:



Gesamtsteifigkeitsmatrix \underline{G} :

Verformungsgrößen Q_i

Kraftgrößen F_i	Verformungsgrößen Q_i				
	1 - 5	6 - 10	11 - 15	16 - 20	
1 - 5	$S_{G,1}^{11}$	$S_{G,1}^{12}$			F_0^S
6 - 10	$S_{G,1}^{21}$	$S_{G,1}^{22} + S_{G,2}^{11}$	$S_{G,2}^{12}$		$B_{G,1}^2 + B_{G,2}^1$
11 - 15		$S_{G,2}^{21}$	$S_{G,2}^{22} + S_{G,3}^{11}$	$S_{G,3}^{12}$	$B_{G,2}^2 + B_{G,3}^1$
16 - 20			$S_{G,3}^{21}$	$S_{G,3}^{22} + S_{G,4}^{11}$	$B_{G,3}^2 + B_{G,4}^1$

Bild A22 : Zusammenbau der Gesamtsteifigkeitsmatrix für Durchlaufträger
 Fig. A22 : Assembly of total stiffness matrix for continuous beams

A4.7 Berücksichtigung von Knotenlasten

Bis jetzt sind nur im Element stetig verlaufende, "äußere" Lasten behandelt worden. Einzellasten und Einzelmomente sind Unstetigkeitsstellen im Verlauf der Kraftgrößen und können bei dem hier beschriebenen Verfahren nur an Knotenpunkten berücksichtigt werden. Da die Normalkraft bei Ableitung des Dgl-Systems im Schwerpunkt angreift, muß eine exzentrische Normalkraft unter Beachtung vorhandener Versatzmomente in den Schwerpunkt verschoben werden. Unter dem gleichen Gesichtspunkt sind die Vorspannkräfte zu betrachten, die je nach Verlauf der Spannglieder Einzelkräfte und Einzelmomente an den Knoten sowie Gleichstreckenlasten im Element hervorrufen können. Diese Möglichkeiten der Lage eines Normalkraft-Angriffspunktes beeinflussen die Belastungsvektoren des Systems. Auch dem Angriffspunkt einer Einzellast kommt eine besondere Bedeutung zu, da über die Verdrehung zusätzliche Hebelarme auftreten, die eine Änderung eines Einzelelementes der Gesamtsteifigkeitsmatrix erfordern. Maßgebend zur Bestimmung der verschiedenen Knotenlasteinflüsse ist ihre Wirkung auf die Schnittgrößen im verformten Hauptachsensystem bzw. auf die entsprechenden , auf die Richtung der unverformten Hauptachsen bezogenen Schnittgrößen. Die Lasteinflüsse werden also im unverformten Hauptachsensystem, in dem auch die Gleichgewichtsbedingungen aufgestellt worden sind, berücksichtigt, die Ergebnisse anschließend in das globale Bezugssystem umgerechnet und eine Überlagerung aller Lasten durchgeführt.

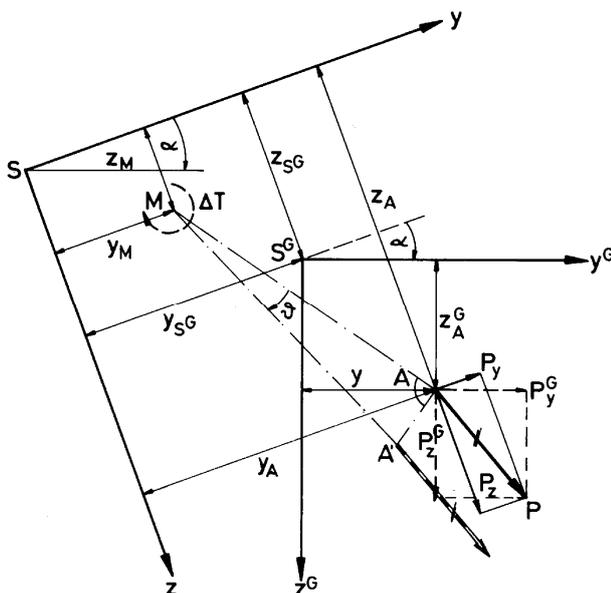


Bild A23 : Richtungstreue Einzellast
 Fig. A23 : Directionally stabled single load

A4.7.1 Richtungstreue Einzellasten

Betrachtet wird die richtungstreue Einzellast P mit dem Lastangriffspunkt A in der y-z-Hauptachsenebene nach Bild A23. Das von dieser Einzellast verursachte Torsionsmoment ΔT um den Schubmittelpunkt M zerfällt in einen Anteil ΔT_I , der den Einfluß der Einzellast nach Theorie I. Ordnung beinhaltet, und den Zusatzterm ΔT_{II} , der den zusätzlichen Hebelarm nach Theorie II. Ordnung aus der Relativverschiebung zwischen M und A berücksichtigt. Diese Relativverschiebung wird im folgenden Kapitel unter Gleichung (A4.43) ermittelt. Da sie vom unbekanntem Drehwinkel ϑ abhängt, ist eine Änderung an entsprechender Stelle der Gesamtsteifigkeitsmatrix nötig. Das Torsionsmoment ΔT um M lautet damit :

$$\Delta T_I = P_z(y_A - y_M) - P_y(z_A - z_M) \quad (A4.32)$$

$$\Delta T_{II} = [P_z(z_A - z_M) + P_y(y_A - y_M)] \vartheta$$

Außer beim Torsionsmoment ist die Einzellast P auch bei den Querkräften zu berücksichtigen. Der Zusatzlastvektor infolge einer richtungstreuen Einzellast P am Knoten k hat für das y-z-Hauptachsensystem folgende Form :

Zugehörige Kraftgröße	V_y	B_z	V_z	B_y	T
Zusatzvektor $\Delta \underline{B}$	P_y	0	P_z	0	ΔT_I
Index im Gesamtsystem	i+1	i+2	i+3	i+4	i+5

mit $i = (k - 1)n_u$ (A4.33)

Die Umrechnung in das globale Bezugssystem erfolgt mit Hilfe der transponierten Transformationsmatrix \underline{T}^t über die Beziehung nach Gleichung (A4.29). Eine Durchführung dieser Rechnung zeigt, daß die Glieder in (A4.33) formal erhalten bleiben, jedoch auf das globale System bezogen sind. Man kann daher die Aufstellung des Zusatzlastvektors im Hauptachsensystem mit anschließender Umrechnung dadurch ersetzen, daß der Zusatzlastvektor direkt im globalen Bezugssystem aufgestellt wird. Dieser Vektor hat folgende Komponenten :

$$\Delta F_{0,i+1} = P_y^G$$

$$\Delta F_{0,i+3} = P_z^G \quad (A4.34)$$

$$\Delta F_{0,i+5} = \Delta T_I^G = P_z^G y_A^G - P_y^G z_A^G$$

Durch den Bezug des Zusatzlastvektors auf das globale System erübrigen sich weitere Überlegungen, da die Achsen des globalen Systems keine Sprünge oder Richtungsänderungen aufweisen.

Aus dem schraffierten Dreieck ABD lassen sich die ursprünglichen Lastkomponenten vor einer Verschiebung des Lastangriffspunktes A ablesen :

$$\begin{aligned} P_H &= P \cos \beta \\ P_V &= P \sin \beta \end{aligned} \quad (A4.38)$$

Nach der Verschiebung können aus dem Dreieck A" B" D die Komponenten abgelesen werden :

$$\begin{aligned} P_H + \Delta H &= P \cos(\beta - \delta) \\ P_V + \Delta V &= P \sin(\beta - \delta) \end{aligned} \quad (A4.39)$$

Diese Ausdrücke ergeben mit $\cos \delta \approx 1$ und $\sin \delta \approx \tan \delta$ und den Gleichungen (A4.37) und (A4.38) die Änderungen der Lastkomponenten zu :

$$\begin{aligned} \Delta H &= P_V \frac{s}{r} \\ \Delta V &= -P_H \frac{s}{r} \end{aligned} \quad (A4.40)$$

Die Strecke s ist Gleichung (A4.36) zu entnehmen und hängt von den Verformungen v und w des Lastangriffspunktes ab, die nach Gleichung (A1.1) in Abhängigkeit der zu bestimmenden Verformungen des Schubmittelpunktes bekannt sind.

Für s gilt damit :

$$s = v_M \sin \beta - w_M \cos \beta - [(z_A - z_M) \sin \beta + (y_A - y_M) \cos \beta] \vartheta \quad (A4.41)$$

Das Torsionsmoment der poltreuen Einzellast P wird am verformten System aufgestellt (um M") und lautet :

$$\begin{aligned} \Delta T &= (P_z + \Delta V)(y_A - y_M + \bar{v}_A) \\ &\quad - (P_y + \Delta H)(z_A - z_M + \bar{w}_A) \end{aligned} \quad (A4.42)$$

\bar{v}_A und \bar{w}_A sind die Relativverschiebungen zwischen M" und A", für die mit Gleichung (A1.1) gelten :

$$\begin{aligned} \bar{v}_A &= v_A - v_M = -(z_A - z_M) \vartheta \\ \bar{w}_A &= w_A - w_M = (y_A - y_M) \vartheta \end{aligned} \quad (A4.43)$$

Dieses Torsionsmoment kann wieder in Terme nach Theorie I. Ordnung und nach Theorie II. Ordnung aufgespalten werden, wobei Gleichung (A4.43) und Gleichung (A4.40) in Gleichung (A4.42) eingesetzt werden:

$$\begin{aligned} \Delta T_I &= P_z (y_A - y_M) - P_y (z_A - z_M) \\ \Delta T_{II} &= [P_z (z_A - z_M) - P_y (y_A - y_M)] \vartheta + \\ &\quad P_y \frac{s}{r} (y_A - y_M) + P_z \frac{s}{r} (z_A - z_M) \end{aligned} \quad (A4.44)$$

$$\Delta T = \Delta T_I + \Delta T_{II}$$

In Gleichung (A4.44) sind die nichtlinearen Produkte $\Delta V \bar{v}_A$ und $\Delta H \bar{w}_A$ gemäß den getroffenen Voraussetzungen vernachlässigt worden.

Der gesamte Einfluß einer poltreuen Einzellast P auf die Kraftgrößen wird zum besseren Verständnis noch einmal zusammengestellt :

$$\begin{aligned} \Delta V_y &= P_y + P_z \left\{ v_M \frac{\sin \beta}{r} - w_M \frac{\cos \beta}{r} - \right. \\ &\quad \left. \left[(z_A - z_M) \frac{\sin \beta}{r} + (y_A - y_M) \frac{\cos \beta}{r} \right] \vartheta \right\} \\ \Delta V_z &= P_z - P_y \left\{ v_M \frac{\sin \beta}{r} - w_M \frac{\cos \beta}{r} - \right. \\ &\quad \left. \left[(z_A - z_M) \frac{\sin \beta}{r} + (y_A - y_M) \frac{\cos \beta}{r} \right] \vartheta \right\} \\ \Delta T &= P_z (y_A - y_M) + P_y (z_A - z_M) \\ &\quad - [P_y (y_A - y_M) + P_z (z_A - z_M)] \frac{\sin \beta}{r} v_M \\ &\quad + [P_y (y_A - y_M) + P_z (z_A - z_M)] \frac{\cos \beta}{r} w_M \\ &\quad - [P_y (y_A - y_M) + P_z (z_A - z_M)] \vartheta \quad \Leftarrow \\ &\quad + [P_y (y_A - y_M) + P_z (z_A - z_M)] \bullet \\ &\quad \bullet \left[(y_A - y_M) \frac{\cos \beta}{r} + (z_A - z_M) \frac{\sin \beta}{r} \right] \vartheta \end{aligned} \quad (A4.45)$$

In dieser Zusammenfassung zeigt sich, daß durch die Abhängigkeit der Zusatzkraftgrößen von den Verformungsgrößen umfangreiche Änderungen in der Gesamtsteifigkeitsmatrix erforderlich sind. Die von den Verformungsgrößen unabhängigen Summanden sind die Anteile nach Theorie I. Ordnung, die den Zusatzlastvektor ergeben.

Die Umrechnung in das globale Bezugssystem mit Hilfe der Matrix \underline{T}^t nach Gleichung (A4.29) bringt das gleiche Ergebnis wie in Kap. A4.7.1 . Alle Korrekturglieder werden im globalen Koordinatensystem berechnet , außer des in (A4.45) beim Torsionsmoment ΔT mit \Leftarrow gekennzeichnetem Terms, der weiterhin auf den Schubmittelpunkt M bezogen bleibt. Damit behalten die weiteren in Kap. A4.7.1 für die richtungstreuen Einzellasten dargestellten Ausführungen auch hier ihre Gültigkeit. Alle Änderungen in der Gesamtsteifigkeitsmatrix \underline{G} und im Lastvektor \underline{F}_0 sind für eine poltreue Last am Knoten k noch einmal in Matrixform im Bild A26 zusammengestellt.

zugehörige Kraftgröße	Index	zugehörige Verformungsgröße					Zusatzlastvektor
		v	v'	w	w'	ϑ	
		i + 1	i + 2	i + 3	i + 4	i + 5	
V _y	i + 1	$-P_z^G \frac{\sin \beta}{r}$		$P_z^G \frac{\cos \beta}{r}$		$A \cdot P_z^G$	P _y ^G
B _z	i + 2						
V _z	i + 3	$P_y^G \frac{\sin \beta}{r}$		$-P_y^G \frac{\cos \beta}{r}$		$-A \cdot P_y^G$	P _z ^G
B _y	i + 4						
T	i + 5	$B \frac{\sin \beta}{r}$		$-B \frac{\cos \beta}{r}$		$C - A \cdot B$	ΔT _I ^G

mit $i = (k-1) \cdot n_u$; $k =$ Knotennummer; $n_u =$ Anzahl der Unbekannten pro Knoten

verwendete Abkürzungen mit Bezeichnungen nach Bild A24 :

$$A = z_A^G \frac{\sin \beta}{r} + y_A^G \frac{\cos \beta}{r}$$

$$B = P_y^G y_A^G + P_z^G z_A^G$$

$$C = P_y^G (y_A^G - y_M^G) + P_z^G (z_A^G - z_M^G)$$

$$\Delta T_I^G = P_z^G y_A^G - P_y^G z_A^G$$

$$r = \sqrt{(y_A^G - y_{Pol}^G)^2 + (z_A^G - z_{Pol}^G)^2}$$

$$\beta = \arctan \frac{z_A^G - z_{Pol}^G}{y_A^G - y_{Pol}^G}$$

$P_y^G, P_z^G =$ Komponenten von P in Richtung der Koordinatenachsen y^G und z^G
 nach Theorie I. Ordnung

Bild A26 : Änderungen der Matrix \underline{G} durch eine poltreue Last

Fig. A26 : Modification of matrix \underline{G} by a pole stabled single load

A4.7.3 Einzelmomente

An den Tragwerksknoten angreifende Einzelmomente werden entsprechend ihrer zugeordneten globalen Kraftgröße im Lastvektor berücksichtigt. Sie werden ebenfalls gleich auf das globale System bezogen. Räumlich angreifende Einzelmomente sind in Richtung der drei Koordinatenachsen zu zerlegen. Die Indizierung im Gesamtsystem erfolgt nach Kap. A4.6. Einzelmomente am Knoten k erhalten für ein durchlaufendes Tragwerk folgende Indizes :

- Biegemoment um die z^G - Achse =
 $\Delta B_z \rightarrow$ Index $(k-1)n_u + 2$
- Biegemoment um die y^G - Achse =
 $\Delta B_y \rightarrow$ Index $(k-1)n_u + 4$
- Torsionsmoment um die x^G - Achse =
 $\Delta T \rightarrow$ Index $(k-1)n_u + 5$
- Wölbmoment =
 $\Delta W \rightarrow$ Index $(k-1)n_u + 6$

Positive Momente zeigen mit ihrem Pfeilsymbol in Richtung der positiven Koordinatenachsen.

A4.7.4 Normalkraft

Die Normalkraft wird bei dem hier angewandten Verfahren als äußere Last behandelt. Sie beeinflusst über die Verformung die Biege- und Wölbmomente und ist deshalb als Faktor in den Differentialgleichungen zu finden. Beim Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen am Element (Kap. A1.3.5) greift die Normalkraft im Schwerpunkt an, wodurch die abgeleiteten Gleichungen auch nur für diesen Fall gelten. Eine exzentrische Normalkraft muß deshalb unter Berücksichtigung der entsprechenden Versatzmomente in den Schwerpunkt eines jeden Einzelementes verschoben werden. Die Berechnung dieser Versatzmomente für die jeweiligen Hauptachsen der Einzelemente und die anschließend erforderliche Umrechnung auf das globale Bezugssystem zeigt das bereits in Kap. A4.7.1 beschriebene Verhalten, daß nämlich die Zusatzglieder gleich im globalen Bezugssystem ermittelt werden können. Bezugspunkte der Hebelarme für die Ermittlung der Versatzmomente bleiben dabei die Schwerpunkte der Einzelemente.

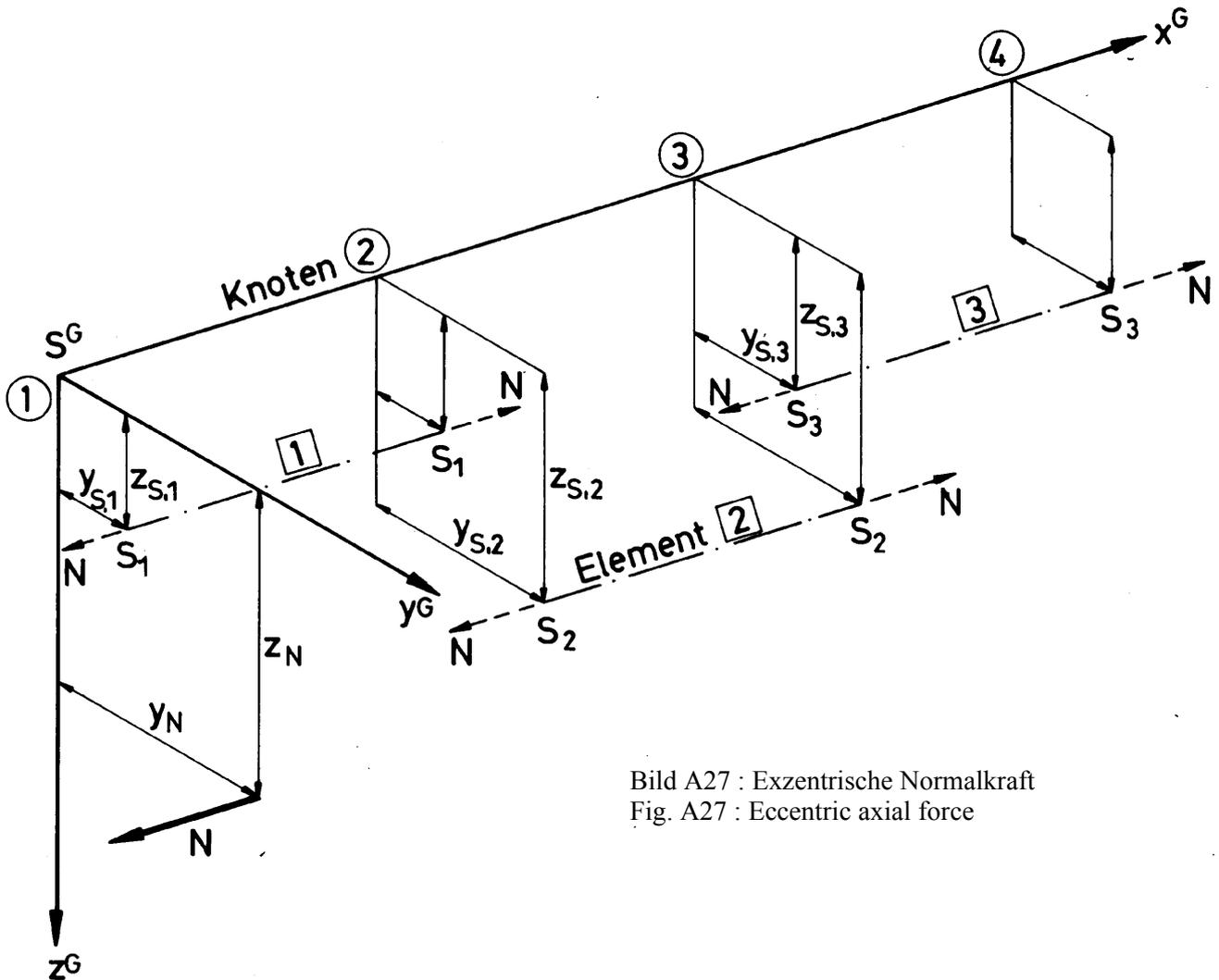


Bild A27 : Exzentrische Normalkraft
 Fig. A27 : Eccentric axial force

Nach Bild A27 ergeben sich folgende Versatzmomente an den Knotenpunkten :

- a.) Knoten <1> - Angriffsknoten der Normalkraft N
 $\Delta B_z = N (y_N - y_{S,1})$ globaler Index = 2
 $\Delta B_y = -N (z_N - z_{S,1})$ globaler Index = 4
- b.) Knoten <2→j> Sprungstellen der Schwerpunkte
 $\Delta B_z = N (y_{S,2} - y_{S,1})$ globaler Index = $n_u + 2$
 \Downarrow
 $\Delta B_z = N (y_{S,j} - y_{S,j-1})$ globaler Index = $(j-1)n_u + 2$
 $\Delta B_y = -N (z_{S,2} - z_{S,1})$ globaler Index = $n_u + 4$
 \Downarrow
 $\Delta B_y = -N (z_{S,j} - z_{S,j-1})$ globaler Index = $(j-1)n_u + 4$
- c.) Knoten <k> - Angriffsknoten der Normalkraft N
 $\Delta B_z = -N (y_N - y_{S,k-1})$ globaler Index = $(k-1)n_u + 2$
 $\Delta B_y = N (z_N - z_{S,k-1})$ globaler Index = $(k-1)n_u + 4$

A4.8 Lagerbedingungen

An den Knotenpunkten des Tragwerks können die sechs Verformungsmöglichkeiten durch starre Lager verhindert oder durch elastische Lager behindert werden. Bei den hier behandelten Einfeld- und Durchlaufträgern wird zunächst die Gesamtsteifigkeitsmatrix ohne Berücksichtigung irgendwelcher Lagerbedingungen nach dem in Kap. A4.6 angegebenen, einfachen Überlappungsschema aufgestellt. Damit sind alle möglichen Verformungen des globalen Systems als unbekannte Größen eingeführt worden. Erst anschließend wird die Berücksichtigung der Lagerbedingungen vorgenommen. Durch den schematisierten, ebenfalls "durchlaufenden" Aufbau des Verformungsgrößenvektors und der Gesamtsteifigkeitsmatrix erhält jeder Freiheitsgrad seinen festen Platz im Indizierungsschema an den Knoten, so daß das Auffinden der gesperrten Freiheitsgrade keine Schwierigkeiten bereitet.

In dem hier beschriebenen Lösungsverfahren ist eine beliebige Kombination der im folgenden aufgezeigten Lagerbedingungen möglich.

A4.8.1 Starre Lager

Starre Lager verhindern die betreffenden Verformungsmöglichkeiten eines Knotens. Die einem gesperrten Freiheitsgrad zugeordnete Verformung ist damit bekannt (= null). Die zu dieser "Nullverformung" an dem betreffenden Knoten gehörende Kraftgröße (= Lagerreaktion) bleibt jedoch weiterhin unbekannt. Für diese Kraftgröße kann keine Aussage mehr gemacht werden, da bereits über die zugeordnete Verformungsgröße verfügt worden ist. Dies bedeutet für das Gesamtsystem, daß die entsprechende Zeile und Spalte, die beide denselben Index besitzen, gestrichen werden kann. Es entsteht auf diesem Wege ein Gleichungssystem, das die verbleibenden unbekannt Verformungsgrößen enthält.

An dieser Stelle wird darauf hingewiesen, daß bei dem angegebenen Verfahren zur Berücksichtigung starrer Lager die Lagerreaktionen nicht direkt berechnet werden können. Dies ist jedoch im Zuge der Rückrechnung (s. Kap. A4.9) durch Gleichgewichtsbetrachtungen mit den ermittelten Schnittgrößen der an einem Knoten angrenzenden Einzelelemente möglich.

Durch die Koppelung der Verschiebungen eines beliebigen Querschnittspunktes an die ausgezeichneten unbekannt Verschiebungen des Schubmittelpunktes und die Verdrehung ϑ gemäß Gleichung (A1.1) sind bei der wechselseitigen Beziehung des globalen Systems (= System für die Berechnung) und des Hauptachsensystems und der hier angewendeten Methode zur Berücksichtigung starrer Lager noch einige Anmerkungen notwendig. Sollen an einem Knoten Verschiebungen verhindert werden, jedoch keine Verdrehungen, so ist genau zu beachten, welcher Punkt des Querschnitts in seinen Verschiebungsmöglichkeiten gehindert wird. Da das Dgl- System für die Verformungsgrößen des Schubmittelpunktes aufgestellt worden ist, würde für eine Berechnung im Hauptachsensystem (bei Tragwerken mit nur einem Element möglich) das hier angewendete Verfahren zur Berücksichtigung starrer Lager eine Sperrung der Freiheitsgrade des Schubmittelpunktes bedeuten. Die Berechnung der Verformungsgrößen des Schubmittelpunktes im Hauptachsensystem wird jedoch durch eine Berechnung globaler Verformungsgrößen eines ortsfesten Koordinatensystems aus den bereits erläuterten Gründen ersetzt. Die Sperrung entsprechender Freiheitsgrade im globalen System gilt dementsprechend für die Verfor-

mungen des Nullpunktes dieses Systems. Jeder andere Querschnittspunkt erhält bei der Rückrechnung der Verformungen zur Ermittlung der auf die Hauptachsen bezogenen Schnittkräfte über die verwendeten Umrechnungen (Transformationsmatrix \underline{T} nach Bild A21) Verschiebungen zugeordnet. Dem festgehaltenen Querschnittspunkt muß also der Ursprung des globalen Koordinatensystems zugeordnet werden. Damit können starre Lager an jedem Punkt der Querschnittsebene berücksichtigt werden.

Diese eben angestellten Überlegungen gelten für eine unbehinderte Verdrehung um die Längsachse x . Beim Fall der Gabellagerung, bei der zwei zueinander senkrechte Verschiebungen und die Verdrehung verhindert sind, erübrigen sich die vorstehenden Überlegungen. Sind nur eine Verschiebungsrichtung und die Verdrehung verhindert, so muß diese Richtung mit einer globalen Bezugsachse zusammenfallen.

A4.8.2 Elastische Lager

Elastische Lager können für jeden Knotenpunkt an jedem beliebigen Angriffspunkt der Querschnittsebene berücksichtigt werden. Charakteristisch für die elastischen Lager ist, daß sie erst durch Verformungen aktiviert werden. Deshalb verursachen sie Änderungen in der Gesamtsteifigkeitsmatrix, wie z.B. bei Einzellasten (s. Kap. A4.7.1 und A4.7.2). Grundsätzlich ist bei der Ermittlung der Zusatzterme der gleiche, wie bereits in Kap. A4.7.1 beschriebene Weg zu gehen. Die Federkräfte sind also für das Hauptachsensystem des betreffenden Elements, an dem der Angriffsknoten der Federn liegt, zu bestimmen und anschließend mit der bereits dargelegten Methode mit Hilfe der Transformationsmatrix \underline{T} auf das globale Bezugssystem umzurechnen (siehe Kap. A4.7.1, A4.7.2, A4.5). Die Ausführungen dieser Umrechnung bringt das schon von den Einzellasten her bekannte Ergebnis, daß nämlich alle Zusatzglieder direkt im globalen Bezugssystem ermittelt werden können. Dies gilt hier auch für das nur vom Drehwinkel ϑ abhängige Zusatztorsionsmoment. Dieses Verhalten ist mit der Abhängigkeit der Federkräfte von den im jeweiligen betrachteten System auftretenden Verschiebungen des Federangriffspunktes und mit den verwendeten Transformationsmatrizen zu erklären. Diese Matrizen enthalten nämlich die Umrechnungsvorschrift für die Verformungen der Hauptachsensysteme in das globale System. Die Änderungen in der Gesamtsteifigkeitsmatrix \underline{G} werden im folgenden für die beiden Federarten Dehnfeder und Drehfeder angegeben.

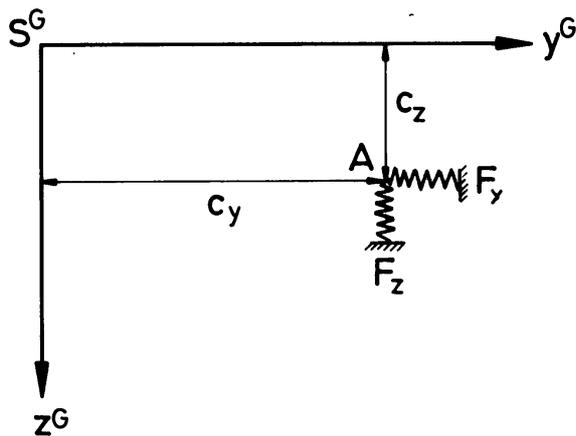


Bild A28 : Dehnfedern im Globalsystem
 Fig. A28 : Expansion spring in the global system

A4.8.2.1 Dehnfedern

Die Federkräfte werden durch die Verschiebungen des Federangriffspunktes in Richtung der Federachse hervorgerufen. Schräge Federn werden in die Komponenten in Richtung der globalen Koordinatenachsen zerlegt. Es gelten die Bezeichnungen nach Bild A28. Die Verschiebungen des Angriffspunktes A werden mit Gleichung (A1.1) bestimmt. Die Federkräfte in y- und z-Richtung sind das Produkt aus Federkonstante mal Federweg und sind bei der entsprechenden Kraftgröße zu berücksichtigen :

$$\begin{aligned} \Delta V_y &= -F_y v_A = -F_y (v_{S^G} - c_z \vartheta) \\ \Delta V_z &= -F_z w_A = -F_z (w_{S^G} - c_y \vartheta) \end{aligned} \quad (A4.46)$$

Bei exzentrischer Lage der Federn tritt noch ein Torsionsmoment auf:

$$\Delta T = F_y v_A (c_z + w_A) - F_z w_A (c_y + v_A) \quad (A4.47)$$

Die Hebelarme nach Theorie II. Ordnung multipliziert mit der entsprechenden Federkraft nach

Gleichung (A4.47) ergeben nichtlineare Anteile, da Produkte $v_A w_A$ unbekannter Verformungen auftreten. Diese Anteile werden gemäß den getroffenen Voraussetzungen vernachlässigt, so daß sich für das Torsionsmoment schließlich folgender Ausdruck ergibt :

$$\Delta T = F_y c_z v_{S^G} - F_z c_y w_{S^G} - (F_y c_z^2 + F_z c_y^2) \vartheta \quad (A4.48)$$

Greifen die Dehnfedern nach Bild A28 am Knoten k an, so ist die Gesamtsteifigkeitsmatrix $\underline{\underline{G}}$ an den im Bild A29 angegebenen Stellen zu ändern.

A4.8.2.2 Drehfedern

Drehfedern behindern die Verdrehung um die drei Koordinatenachsen. Sie sind entsprechend den Einzelmomenten nach Kap. A4.7.3 zu behandeln. Der Unterschied zu den Einzelmomenten besteht jedoch darin, daß Drehfedern durch die Abhängigkeit von den unbekanntem Verdrehungen noch zusätzlich die Gesamtsteifigkeitsmatrix beeinflussen. Mit den im Bild A29 angegebenen Indizierungen sind folgende Änderungen möglich, wenn mit F die jeweilige Drehfederkonstante bezeichnet wird :

- Verdrehung um die z^G - Achse behindert $\Delta G_{=i+2,i+2} = F_{i+2}$
- Verdrehung um die y^G - Achse behindert $\Delta G_{=i+4,i+4} = F_{i+4}$
- Verdrehung um die x^G - Achse behindert $\Delta G_{=i+5,i+5} = F_{i+5}$
- Verwölbung behindert $\Delta G_{=i+6,i+6} = F_{i+6}$

Die Drehfederkonstante ist also jeweils dem entsprechenden Glied der Matrix $\underline{\underline{G}}$ hinzuzufügen.

zugehörige Kraftgröße	Index	zugehörige Verformungsgröße				
		v	v'	w	w'	ϑ
V_y	i + 1	F_y				$-c_z F_y$
B_z	i + 2					
V_z	i + 3			F_z		$c_y F_z$
B_y	i + 4					
T	i + 5	$-c_z F_y$		$c_y F_z$		$F_y c_z^2 + F_z c_y^2$

mit $i = (k-1) \cdot n_u$; $k =$ Knotennummer ; $n_u =$ Anzahl der Unbekannten pro Knoten

Bild A29 : Änderungen der Matrix $\underline{\underline{G}}$ durch eine Dehnfeder

Fig. A29 : Modification of matrix $\underline{\underline{G}}$ by an expansion spring

A4.8.3 Der aufgehängte Träger

Die Aufhängung eines Trägers kann mit Ausführungen nach Kap. A4.8.1 über die Wahl des globalen Nullpunktes berücksichtigt werden. Bei einer gelenkigen Lagerung an der Oberseite eines Trägers nach Bild A30 wird die sich für den Aufhängepunkt A bei Drehung um den Schubmittelpunkt M ergebende Bedingung

$$v_M + z_M^G \vartheta = 0$$

durch die Lage des globalen Nullpunktes im Aufhängepunkt A und Sperrung der globalen Verschiebungsmöglichkeiten v_A^G und w_A^G des Aufhängepunktes automatisch erfüllt. Dieser Lagerungsfall bedarf also bei Beachtung der bereits dargelegten Angaben keiner weiteren Erläuterung.

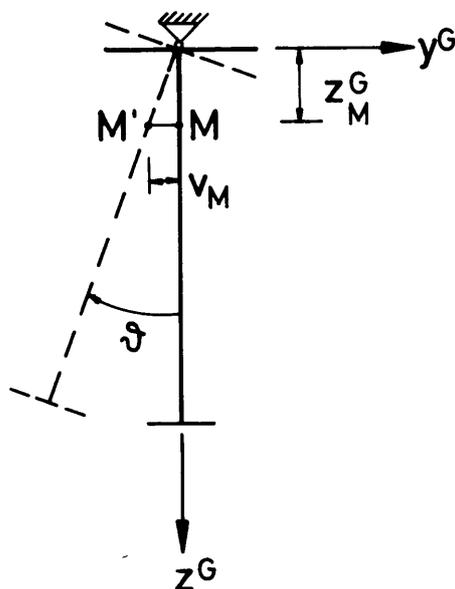


Bild A30 : Aufhängung als gelenkige Lagerung
 Fig. A30 : Hanging as movable support

Nun stellt jedoch die Aufhängung in Form einer gelenkigen, starren Lagerung nach Bild A30 nicht den häufig auftretenden Fall des aufgehängten Trägers im Montagezustand dar. Hier erfolgt die Aufhängung im Bereich der Trägerenden meist durch Seile, die vertikal oder auch geneigt zur Trägeroberkante verlaufen. Der allgemeinere Fall einer schrägen Seilaufhängung ist im Bild A31 dargestellt.

Der Aufhängepunkt A des Seiles am Träger kann sich also horizontal verschieben, während der Endpunkt des Seiles in Ruhe bleibt. Die Seilkraft S verhält sich demnach wie eine räumliche poltreue Einzellast. Durch eine Horizontalverschiebung des Punktes A wird eine Rückstellkraft ΔH hervorgerufen, die sich zu

$$\Delta H = \frac{v_A}{l} S \quad (A4.49)$$

ergibt.

Diese Rückstellkraft kann auch auf einem anderen Weg ermittelt werden. Zu diesem Zweck zerlegt man die Seilkraft S in eine in x-Richtung wirkende Normalkraft N und in eine in der Querschnittsebene wirkende Komponente P. Für eine in der y-

z-Ebene liegende, poltreue Einzellast $P = \frac{r_P}{l} S$ mit

zugehörigem Polabstand r_P (s. Bild A31) folgt mit Kap. A4.7.2 Gleichung (A4.40) für $\beta = 90^\circ$ eine horizontale Komponente

$$\Delta H_P = \frac{v_A}{r_P} P = \frac{v_A}{r_P} \frac{r_P}{l} S = \frac{v_A}{l} S = \Delta H \quad (A4.50)$$

Für eine in der x-y-Ebene liegende, poltreue

Normalkraft $N = \frac{r_N}{l} S$ mit zugehörigem Pol-

abstand r_N gilt analog :

$$\Delta H_N = \frac{v_A}{r_N} N = \frac{v_A}{r_N} \frac{r_N}{l} S = \frac{v_A}{l} S = \Delta H \quad (A4.51)$$

Die Identität der Ausdrücke (A4.49) bis (A4.51) läßt also den Schluß zu, daß eine schräge Aufhängung so erfaßt werden kann, daß die schräge Seilkraft S zunächst in eine in der Querschnittsebene wirkende Komponente und in eine in Längsrichtung wirkende Normalkraft zerlegt wird. Anschließend wird die eine als poltreue Last mit der entsprechenden Projektion der Seillänge als Polabstand, die andere als richtungstreue Last behandelt. Zweckmäßigerweise wird die in der Querschnittsebene liegende Komponente der Seilkraft als poltreue Einzellast angesetzt. Damit kann der in Kap. A4.7.2 beschrittene Weg auch hier unter Beachtung der Vorzeichenregelung beibehalten werden. Die richtungstreue Normalkraftkomponente ist dann entsprechend den in Kap. A4.7.4 dargelegten Ausführungen zu berücksichtigen. Beim Sonderfall der vertikalen Aufhängung durch Seile fällt die Normalkraftkomponente weg.

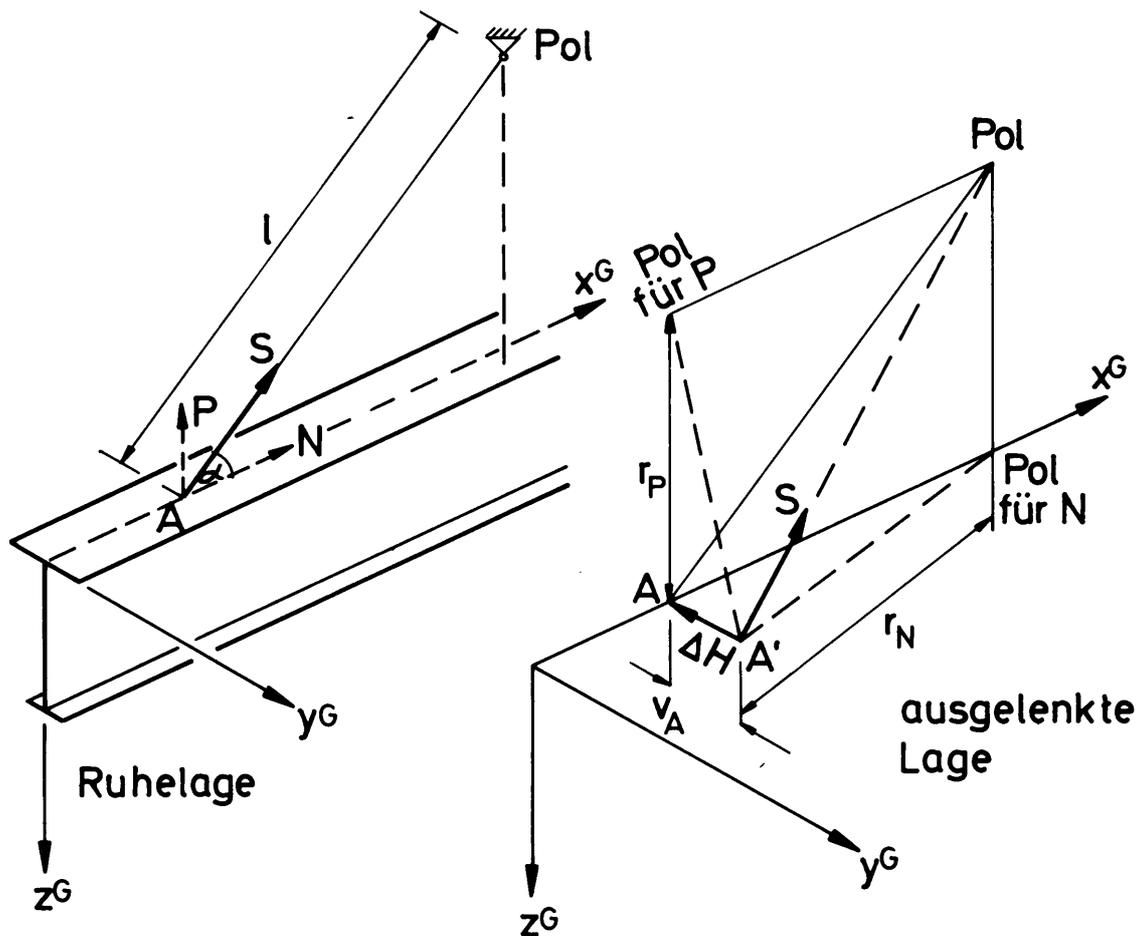


Bild A31 : Aufhängung durch Seile
 Fig. A23 : Inclined hanging by cables

A4.9 Rückrechnung

Die Auflösung des linearen Gleichungssystems liefert als Ergebnis den Vektor der globalen Knotenverformungen. Anschließend werden an jedem Knoten die dann bekannten Verformungen vom globalen in das jeweilige lokale Koordinatensystem mit Hilfe der Transformationsmatrix \underline{T} nach Bild A21 umgerechnet. Man erhält damit an jedem Elementknoten den lokalen Verformungsvektor \underline{v} und zusammen mit der Elementsteifigkeitsmatrix \underline{S} und dem Elementlastvektor \underline{B} über die Beziehung (A4.14) den Schnittgrößenvektor \underline{K} . Aus den Vektoren \underline{v} und \underline{K} wird der Anfangsvektor \underline{w}_L der Zustandsgrößen am

Elementanfang nach Gleichung (A4.16) zusammengestellt. Mit diesem Anfangsvektor kann der Verlauf der Schnittgrößen im Element durch numerische Integration des Dgl-Systems unter Berücksichtigung aller am Element angreifenden Lasten schrittweise ermittelt werden. Mit dem so gewonnenen Vektor am Elementende läßt sich die Güte der gesamten Berechnung kontrollieren, da dieser Endvektor mit dem rückgerechneten Vektor am Elementendknoten übereinstimmen muß. Das Ergebnis der Rückrechnung sind also die auf die Hauptachsen eines Elements bezogenen Schnittgrößen, die für einen Spannungsnachweis maßgebend sind.

A4.10 Iteration der Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung

Wie in Kap. A4.2 angegeben, wird für die nicht-konstanten Koeffizienten des Dgl-Systems näherungsweise der Schnittgrößenverlauf nach Theorie I. Ordnung angenommen. Sind die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung nach Abschluß der Berechnung bekannt, so können in einem weiteren Berechnungsschritt diese Schnittgrößen als neue Koeffizienten des Dgl-Systems eingesetzt werden. Diese Iteration kann solange fortgesetzt werden, bis eine vorgegebene Fehlerschranke erreicht wird.

Eine solche Iteration der Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung hat jedoch einen erhöhten Speicherplatzbedarf des Rechenautomaten während der Berechnung zur Folge, da die Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung nicht mehr als geschlossene Lösung entsprechend denen nach Theorie I. Ordnung (A4.3) zur Verfügung stehen. Da jedoch für die numerische Integration der Zustandsvektor der Schnittkräfte an jeder Stützstelle bekannt sein muß, bedingt dieser Iterationsablauf die Speicherung der Schnittkräfte an jedem Unterteilungspunkt des Gesamtträgers, die dann im nächsten Iterationsschritt entsprechend abgerufen werden.

A5. Beschreibung des Rechenprogramms nach Theorie II. Ordnung

Das mit den beschriebenen Grundlagen entwickelte Rechenprogramm ermöglicht die Beurteilung der Tragfähigkeit räumlich vorwiegend auf Biegung belasteter, beliebig gelagerter Stahlbeton- oder Spannbetontträger. Die Träger können in Längsrichtung veränderliche Querschnitte aufweisen, wie z.B. Satteldach- oder Trapezbinder. Die Querschnittsform ist beliebig, sie muß nur durch gerade Linien begrenzt sein (geschlossener Polygonzug). Eine gekrümmte Begrenzungslinie kann näherungsweise durch einen Geradenzug ersetzt werden. Die Berechnung erfolgt für nichtlineares Werkstoffverhalten. Imperfektionen in Form von Vorverformungen oder von exzentrischer Lage der Spannglieder können berücksichtigt werden.

Die Berechnung eines Trägers gliedert sich in drei ineinandergeschachtelte Iterationsabläufe.

Zunächst wird für eine gegebene Trägerlänge und Laststufe der Nachweis der Tragfähigkeit durchgeführt. Dabei werden die beiden Versagensmöglichkeiten Stabilitätsversagen und Werkstoffversagen (s. Kap. 5.1) überprüft. Der nächste übergeordnete Iterationsschritt variiert die Lasten solange, bis gerade kein Versagen eintritt. Daran anschließend wird schrittweise die Trägerlänge verändert. Durch eine entsprechende Steuerung ist es möglich, die Variation der Trägerlänge und der Laststufen auszuschalten.

Als Ergebnis können in Abhängigkeit von der jeweils vorgegebenen Trägerlänge l die zu der iterierten, kritischen Belastung gehörenden Haupt-Biegemomente M_{yI} nach Theorie I. Ordnung in Trägermitte in einem Diagramm aufgetragen werden. Die Verbindungslinie dieser Punkte liefert die $M_{yI} - l$ -Kurve für den untersuchten Träger (siehe Beispiele im Anhang B).

A5.1 Berechnung für eine gegebene Laststufe

Der in diesem Kapitel beschriebene Berechnungsablauf beinhaltet den Nachweis, ob der vorgegebene Träger eine bestimmte Belastung aufnehmen kann. Dieser Tragfähigkeitsnachweis bildet das Kernstück des gesamten Verfahrens und wird wegen der besseren Übersicht hier gesondert behandelt.

Die Berechnung des Trägers wird in der im Flußdiagramm Bild A32 angegebenen Reihenfolge vorgenommen, die im folgenden noch näher beschrieben und ergänzt wird. Die Numerierung entspricht den im Flußdiagramm angegebenen Punkten :

- 1.) Die Querschnittsgeometrie wird über die y-z-Koordinaten der Eckpunkte des Betonquerschnittes und der Mittelpunkte der Bewehrungen erfaßt, wobei der Durchmesser bzw. die Flächen und Vorspannkräfte der Bewehrungen mit anzugeben sind. Die für das nichtlineare Werkstoffverhalten des Betons benötigten Werte werden durch Angabe der Betonfestigkeitsklasse aus einem Unterprogramm entnommen. Die Streckgrenzen und E-Moduln der Bewehrungen sowie die Grenzrandverzerungen werden ebenfalls eingelesen. In Längsrichtung wird der Träger nach den in Abschnitt A4 gemachten Angaben in Elemente und Knotenpunkte unterteilt. Für die Einzellemente bzw. an den Knoten wird die Belastung des Trägers angegeben. Den Abschluß der Eingabe bilden die Lagerbedingungen, die nach den ebenfalls in Abschnitt A4 dargestellten Erläuterungen zu definieren sind.

- 2.) Zur Berechnung der Schnittgrößen nach Theorie I. Ordnung werden Querschnittswerte und Steifigkeiten für jedes Element benötigt. Diese Werte werden nach den Gleichungen (A3.1) bis (A3.7) für den ungerissenen Betonquerschnitt ermittelt. Für den Beton wird dabei ein der Betonfestigkeitsklasse entsprechender, konstanter Elastizitätsmodul E_b eingesetzt, der z.B. als Anfangstangentenmodul oder als mittlerer Sekantenmodul aus der Werkstoffbeziehung nach Bild 4 bestimmt werden kann.
- 3.) In diesem Schritt wird zunächst das rechnerische Bruchmoment des Querschnitts für das gegebene Verhältnis der Biegemomente bei konstant gehaltener Normalkraft ermittelt. Hierfür wird das in Kap. 5.1.1 angegebene Werkstoffverhalten verwendet. Anschließend wird ein den äußeren Schnittkräften entsprechender innerer Spannungs-Verzerrungszustand des Querschnitts an jedem Knotenpunkt bestimmt. Wegen der nichtlinearen Werkstoffbeziehung für den Beton nach Bild 4 und für die Bewehrungen nach Bild 3 ist dies nur iterativ über eine Variation der Nulllinienrotation und der Randverzerrung möglich. Mit den Randverzerrungen kann der Verlauf der Elastizitätsmoduln im Querschnitt bestimmt werden. Mit der in Abschnitt A3 dargelegten Vorgehensweise können dann alle erforderlichen Querschnittswerte und Steifigkeiten berechnet werden. Für die Elemente wird das arithmetische Mittel der entsprechenden Werte der beiden angrenzenden Knoten gebildet.
- 4.) Die Berechnung der Verformungen und Schnittgrößen nach Theorie II. Ordnung erfolgt mit dem im Abschnitt A4 beschriebenen Verfahren. Die Integration über die Stablänge wird auf numerischem Wege nach dem Verfahren von Runge-Kutta durchgeführt. Bei jedem Iterationsschritt werden verbesserte Steifigkeiten und Querschnittswerte verwendet, die dem aktuellen Schnittkraftverlauf angepaßt sind. An dieser Stelle der Rechnung wird ein Teil der als Stabilitätsfall definierten Versagensmöglichkeiten nach Kap. 5.1.2 überprüft. (Gleichungssystem zur Berechnung der Verformung; Größe des berechneten Drehwinkels)

- 5.) Nach jeder Berechnung des Trägers nach Theorie II. Ordnung werden für jedes Element die Lage des Hauptachsensystems, die Verformungen und die Schnittkräfte der Schritte i und $i-1$ miteinander verglichen. Zugleich erfolgt an dieser Stelle des Berechnungsablaufs eine weitere Überprüfung auf Stabilitätsversagen gemäß den in Kap 5.1.2 dargelegten Kriterien für die Verformungen. Unterscheiden sich alle aufgeführten Größen zweier aufeinander folgender Schritte weniger als eine vorgegebene Iterationsschranke, so wird die Berechnung beendet.

A5.2 Ermittlung der Traglast

In der dem Tragfähigkeitsnachweis übergeordneten Berechnungsschleife werden die Lasten mit dem Ziel verändert, die größte aufnehmbare Last zu bestimmen. Dabei ist eine Variation aller vorhandenen Lasten nicht immer wünschenswert. Es werden deshalb zwei unterschiedliche Lasttypen verwendet, von denen der eine konstant gehalten und der andere variiert wird. Als Beispiel hierfür wird auf eine Belastung durch Eigengewicht und Verkehrslast hingewiesen. Das Eigengewicht ist eine von der Querschnittsgeometrie abhängige feste Lastgröße, zu der z.B. die maximale Verkehrslast gesucht wird.

Es hat sich zur Verringerung der Iterationsschritte als zweckmäßig herausgestellt, daß die erste Laststufe weder oberhalb oder nahe bei der kritischen Last noch zu weit entfernt von ihr liegen sollte. Deshalb wird im Anschluß an die Berechnungen nach Theorie I. Ordnung für den Querschnitt mit den größten Biegemomenten das rechnerische Bruchmoment ermittelt, und die Belastung dahingehend geändert, daß das resultierende äußere Moment etwa dem halben rechnerischen Bruchmoment entspricht. Damit ist gewährleistet, daß die Lastiteration mit einer stabilen Gleichgewichtslage des Trägers begonnen wird. Die Belastung wird dann stufenweise erhöht, bis eines der im Kap. 5.1 dargelegten Versagenskriterien eintritt. In diesem Fall wird die Last wieder auf die vorhergehende Stufe zurückgenommen, und die Berechnung in kleineren Schritten fortgesetzt. Diese Lastiteration wird abgebrochen, wenn die Schrittweite kleiner als eine vorgegebene Schranke wird. Damit wird die Traglast mit ausreichender Genauigkeit als letzter, gerade noch möglicher, stabiler Gleichgewichtszustand vor dem Versagensfall bestimmt.

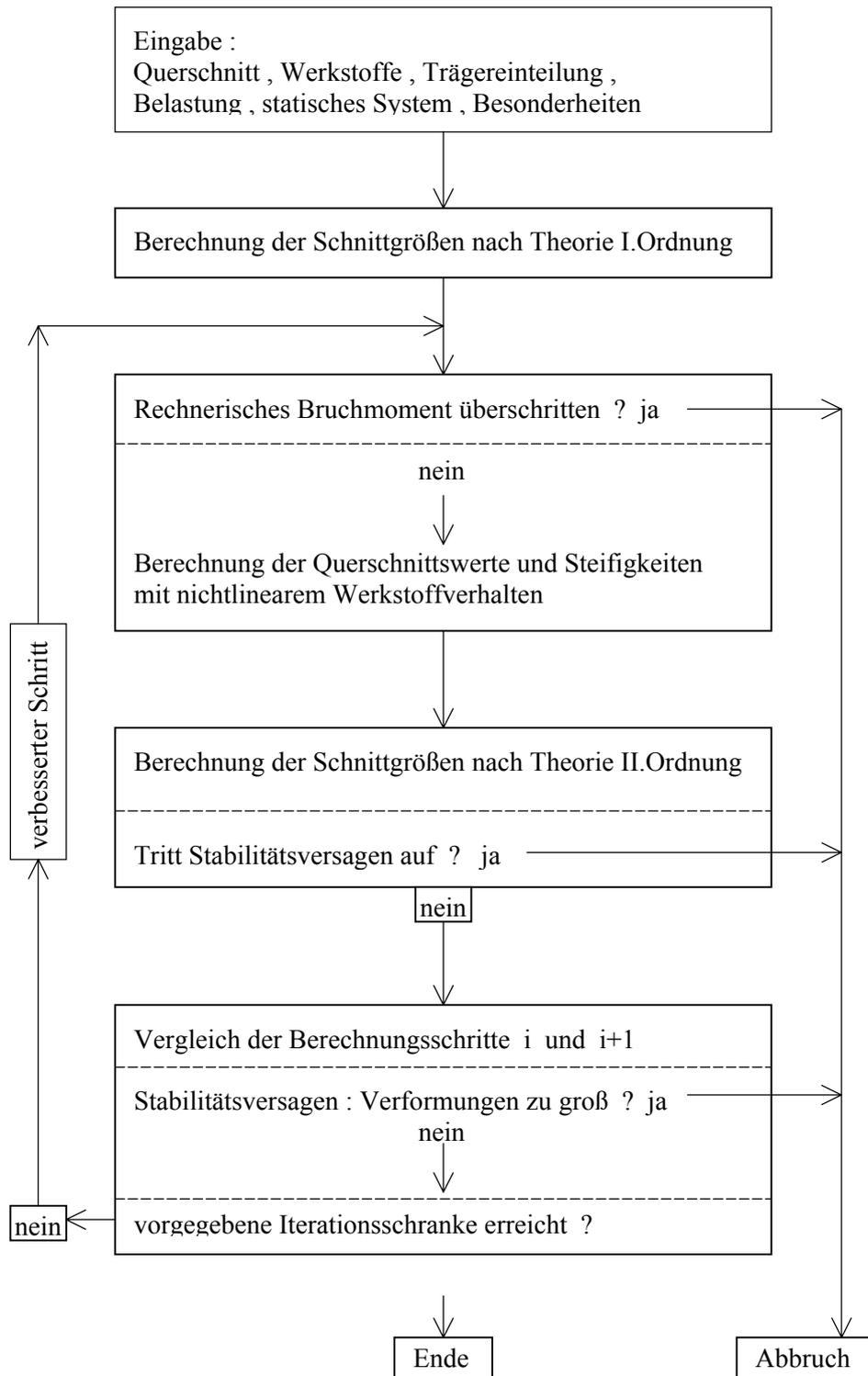


Bild A32 : Ablaufdiagramm für einen Tragfähigkeitsnachweis innerhalb einer Laststufe
 Fig. A32 : Flow chart for an analysis of load capacity within a load increment

Anhang B

Berechnungsbeispiele zur Kippstabilität ausgewählter Stahlbeton- und Spannbetonträger

Während den Arbeiten an der Dissertation *Röder* [8] ist der Abschlußbericht [26] fertiggestellt worden. Als Beispiele für die Leistungsfähigkeit des Berechnungsverfahrens sind dort für sechs charakteristische kippgefährdete Stahlbeton- und Spannbetonträger die Berechnungsergebnisse in Form von Kippkurven dargestellt worden. Anhand dieser Beispiele können die verschiedensten Einflüsse von z.B. Vorverformungen, Belastungsart, Lagerung, Querschnittsabmessungen, usw. verdeutlicht werden. Da dieser Abschlußbericht damals jedoch nur einem sehr kleinen Personenkreis von mit der Kippproblematik vertrauten Fachleuten zur Verfügung gestellt worden ist, werden diese sechs repräsentativen Beispiele hier nochmals behandelt. Ergänzt werden diese sechs Beispiele durch zwei weitere aus der Dissertation *Röder* [8].

Mit dem Rechenprogramm [8] sind die Traglasten für gabelgelagerte und an Seilen aufgehängte Träger mit den in den Bildern B1-B8 dargestellten Querschnitten erneut berechnet worden. Die Angaben über die werkstoffabhängigen Eigenschaften sind bei den Bildern angegeben. Bei den durchgeführten Berechnungen haben die Genauigkeitsschranken in den einzelnen Iterationsschritten 1% für Kräfte, Momente und Verschiebungen, sowie 0,5° für Winkel und Verdrehungen betragen.

B1. Beidseitig gabelgelagerte Träger

Bei der Gabellagerung sind die Träger in Längsrichtung in acht gleichlange Elemente unterteilt worden. Die Belastung besteht aus der Eigenlast g und entweder einer Gleichstreckenlast p über die gesamte Trägerlänge oder einer Einzellast P in Trägermitte. Die Eigenlast g greift im geometrischen Schwerpunkt des Betonquerschnitts, die anderen Lasten jeweils mittig auf dem Obergurt an. Als Imperfektionen werden fünf unterschiedliche Vorverformungen mit einem über die Trägerlänge parabelförmigen Verlauf angenommen. In der Legende der Bilder ist jeweils der Stich der Vorverformungen in Trägermitte angegeben. Innerhalb einer Kippkurve hängt eine Vorverschiebung v_0 dabei von der Trägerlänge ab, eine angegebene Vorverdrehung ϑ_0 bleibt für alle Trägerlängen unverändert. Die ausgewählten Vorverformungen entsprechen den bei Stabilitätsuntersuchungen üblichen Vorgaben.

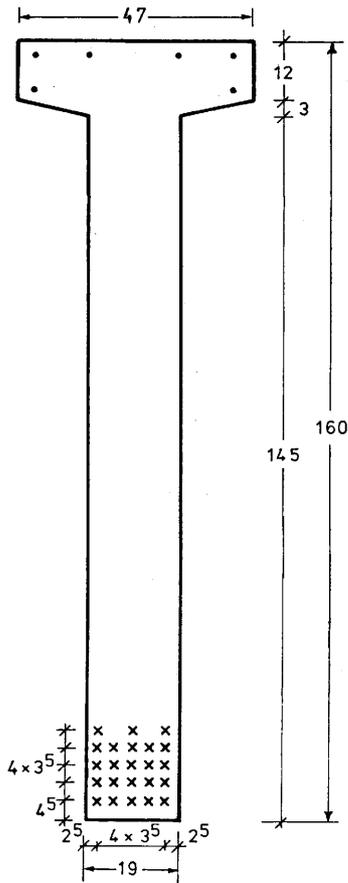
Die Ergebnisse der Berechnungen sind in den Tabellen B1-B8 zahlenmäßig angegeben und in den Bildern B1a-B8a und B1b-B8b grafisch dargestellt. Diese Kurven geben die zu den Trägerlängen l und gewählten Imperfektionen gehörenden Traglasten in Form der Biegemomente M_{y1} nach Theorie I. Ordnung in Trägermitte an. Die Lastiterationen sind für den Fall $(1,0 \cdot g + \text{Faktor} \cdot p)$, bzw. $(1,0 \cdot g + \text{Faktor} \cdot P)$ vorgenommen worden. Diese Vorgabe liegt auf der sicheren Seite, da die Eigenlast normalerweise unterhalb des Schubmittelpunktes angreift und somit bei der auftretenden Trägerverdrehung eine rückdrehende Wirkung (\Rightarrow Traglasterrhöhung) hat.

Beim Beispiel B8 sind zusätzliche Untersuchungen mit exzentrisch liegenden Spannlitzen als Imperfektion durchgeführt worden, deren Ergebnisse im Bild B8d und in der Tabelle B9 zusammengestellt sind (siehe auch Kap.7.5).

B2. An Seilen aufgehängte Träger

Dieser Montagelastfall, der meist kritischer als der Endzustand ist, wird für die Träger mit den Querschnitten der Bilder B1-B8 ebenfalls berechnet. Da es sich bei dieser Beanspruchung jedoch um einen kurzzeitig wirkenden Zustand handelt, wird im Gegensatz zu den gabelgelagerten Trägern mit einer Betonfestigkeit $\beta_p = 0,85 \cdot \beta_{wm}$ gerechnet. Die Träger sind in Längsrichtung in zehn gleichlange Abschnitte unterteilt worden. Es sind zwei Fälle der Lage der Aufhängepunkte am Träger mit jeweils drei unterschiedlichen Seilneigungen untersucht worden. Die Aufhängepunkte liegen an der Oberkante des Trägers und zwar einmal am Trägeranfang und Trägerende, bzw. jeweils in den Zehntelpunkten $0,1l$ vom Trägeranfang und Trägerende entfernt. Die Seilneigungen werden mit 90° , 60° und 45° , jeweils gemessen von der Trägeroberkante aus, angenommen. Als Imperfektion wird für alle betrachteten Fälle eine Exzentrizität der Aufhängepunkte zur Symmetrieachse des Querschnitts von 2 cm angesetzt. Die Belastung besteht nur in der Eigenlast g , die in der geometrischen Schwerlinie angreift. Die Lastiteration beginnt für jede Trägerlänge mit der einfachen Eigenlast. Bei den vorgespannten Trägern ergibt sich durch die geringe Auflast oft ein dem Endzustand entgegen gerichteter Verformungszustand, der zusammen mit der Aufhängung häufig einen rechnerisch instabilen Zustand des Trägers verursacht. Dies ist besonders bei den an den Enden aufgehängten Trägern der Fall.

Die Ergebnisse der Berechnungen sind in den Bildern B1c-B8c tabellarisch zusammengestellt. Dort werden Lastfaktoren angegeben, mit denen die Eigenlast höchstens multipliziert werden kann, ohne daß der Träger versagt, oder es wird auf den rechnerisch instabilen Zustand bereits für die einfache Eigenlast hingewiesen.



Beton B45 - Dauerlasteinfluß : $\beta_{p,D} = 0,7 (45 + 5) = 35 \text{ N/mm}^2$
 für Zustand I: $E_b = 37000 \text{ N/mm}^2$
 $G_b = 15000 \text{ N/mm}^2$

Betonstahl BSt 420/500 mit $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$
 Biegebewehrung : 6 Ø 12 im Obergurt
 Torsionsbewehrung : Bügel Ø 8, e = 50 cm
 Längsbew. Ø 8, e = 50 cm
 Betonüberdeckung 1,5 cm

Spannstahl St 1570/1770 - Litzen Ø 1/2"
 $A_z = 93 \text{ mm}^2 / \text{Litze}$ - $E_z = 195000 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{sz} = 8,05\text{‰}$
 23 Litzen unten im Steg
 $\sigma_{zv}^{(0)} = 1055 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{zv}^{(0)} = 5,41\text{‰}$
 Spannkraftverlust 10% infolge k+s

rechnerisches Bruchmoment $M_{ul} = 4530 \text{ kNm}$
 zugehörige Randverzerrungen $\epsilon = -2,6 / +5,0 \text{ ‰}$

Eigenlast $g = 8,54 \text{ kN/m}$
 im geometrischen Schwerpunkt 0,72 m von Oberkante

Bild B1 : Vorgespannter Stahlbetonquerschnitt B1
 Fig. B1 : Cross section of prestressed concrete B1

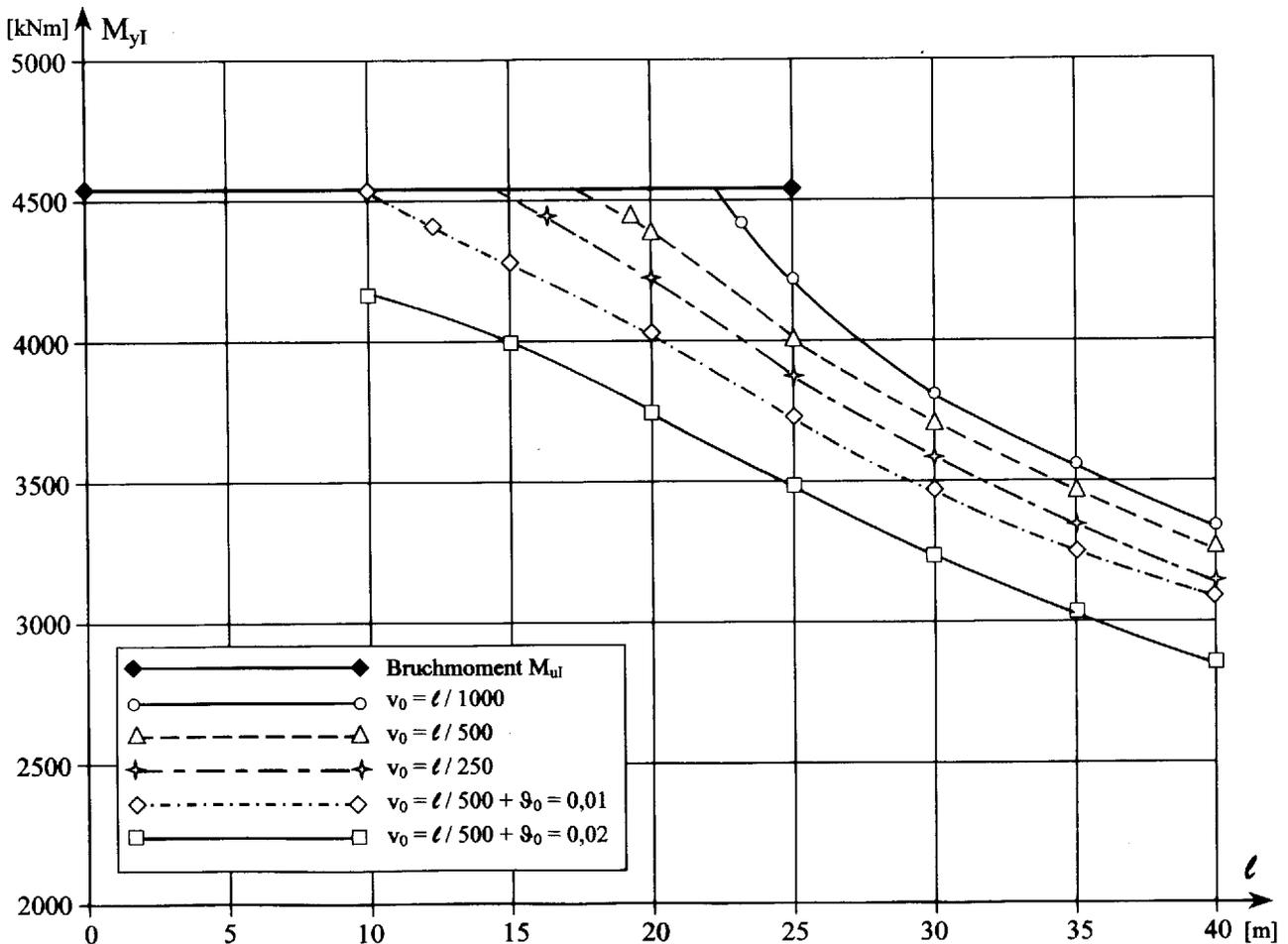


Bild B1a : Kippkurven für Querschnitt B1 - Gleichstreckenlast mittig auf dem Obergurt
 Fig. B1a : Course of lateral buckling to cross section B1 - central uniform loading on top flange

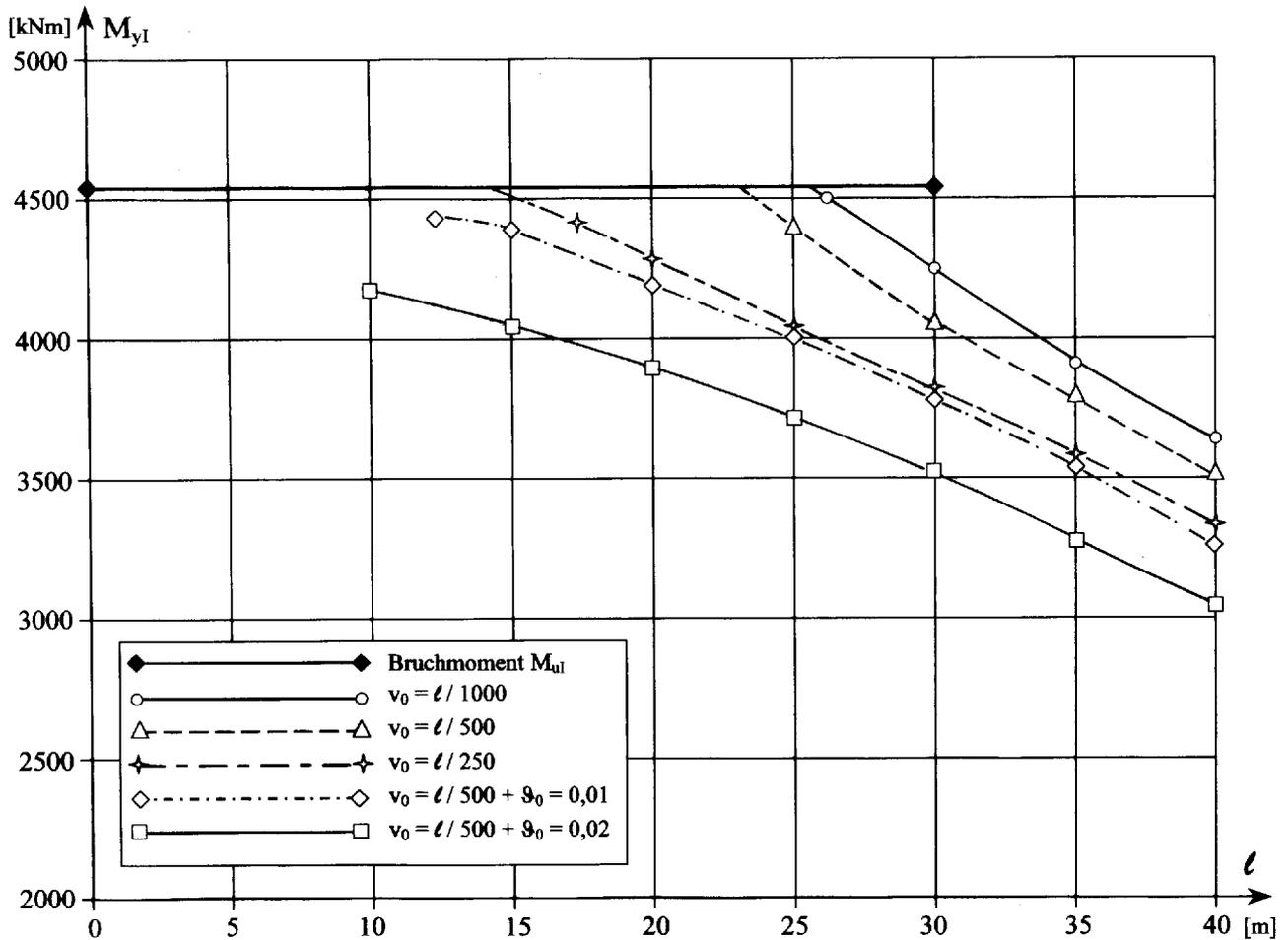
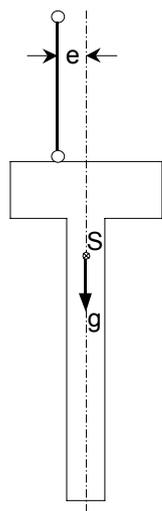


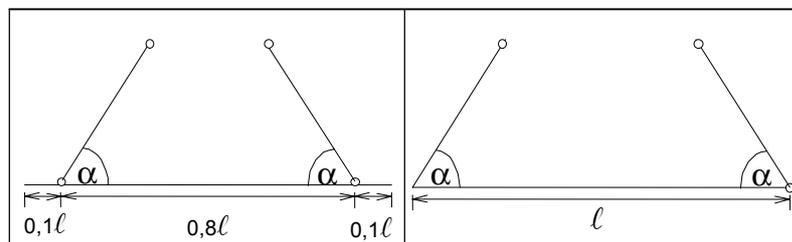
Bild B1b : Kippkurven für Querschnitt B1 - Einzellast mittig auf dem Obergurt bei $l/2$
 Fig. B1b : Course of lateral buckling to cross section B1 - central single load on top flange at $l/2$



Exzentrizität der Aufhängepunkte : $e = 2 \text{ cm}$

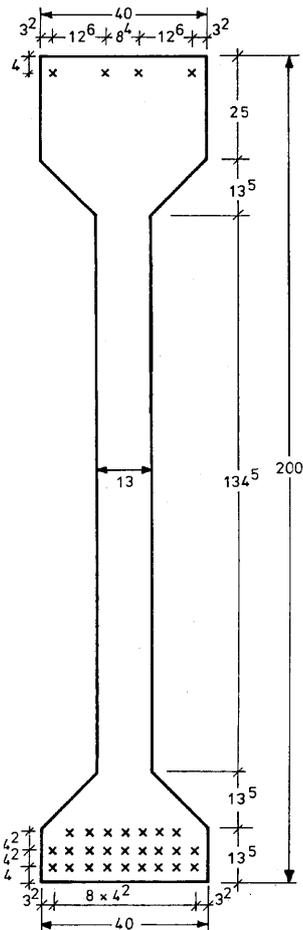
Belastung : Eigenlast g im geom. Schwerpunkt S

größtmögliche Last : $\max q = \text{Lastfaktor } f \cdot g$



Länge l	Seil-Neigungswinkel α			Seil-Neigungswinkel α		
	90°	60°	45°	90°	60°	45°
30 m	3,3	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
25 m	6,1	4,4	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
20 m	> 10	8,7	7,1	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
15 m	> 10	> 10	> 10	2,5	instabil bei g	instabil bei g

Bild B1c : Lastfaktoren f für den an Seilen aufgehängten Träger mit dem Querschnitt B1
 Fig. B1c : Loading factors f for a girder with cross section B1 hanging on ropes



Beton B45 - Dauerlasteinfluß : $\beta_{P,D} = 0,7 (45 + 5) = 35 \text{ N/mm}^2$
 für Zustand I: $E_b = 37000 \text{ N/mm}^2$
 $G_b = 15000 \text{ N/mm}^2$

Betonstahl BSt 420/500 - $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$
 Biegebewehrung : nicht vorhanden
 Torsionsbewehrung : Bügelmatte $\varnothing 7$, $e = 25 \text{ cm}$
 Betonüberdeckung 2 cm

Spannstahl St 1325/1470 - Vollquerschnitt $\varnothing 12 \text{ mm}$
 $A_z = 113 \text{ mm}^2/\text{Draht}$ - $E_z = 205000 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{Sz} = 6,46\%$
 25 Drähte im Untergurt
 $\sigma_{Zv}^{(0)} = 825 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{Zv}^{(0)} = 4,02\%$
 4 Drähte im Obergurt
 $\sigma_{Zv}^{(0)} = 295 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{Zv}^{(0)} = 1,44\%$
 Spannkraftverlust 10% infolge k+s

rechnerisches Bruchmoment $M_{ul} = 6570 \text{ kNm}$
 zugehörige Randverzerrungen $\epsilon = -2,3 / + 5,0 \%$

Eigenlast $g = 10,0 \text{ kN/m}$
 im geometrischen Schwerpunkt 0,94 m von Oberkante

Bild B2 : Vorgespannter Stahlbetonquerschnitt B2
 Fig. B2 : Cross section of prestressed concrete B2

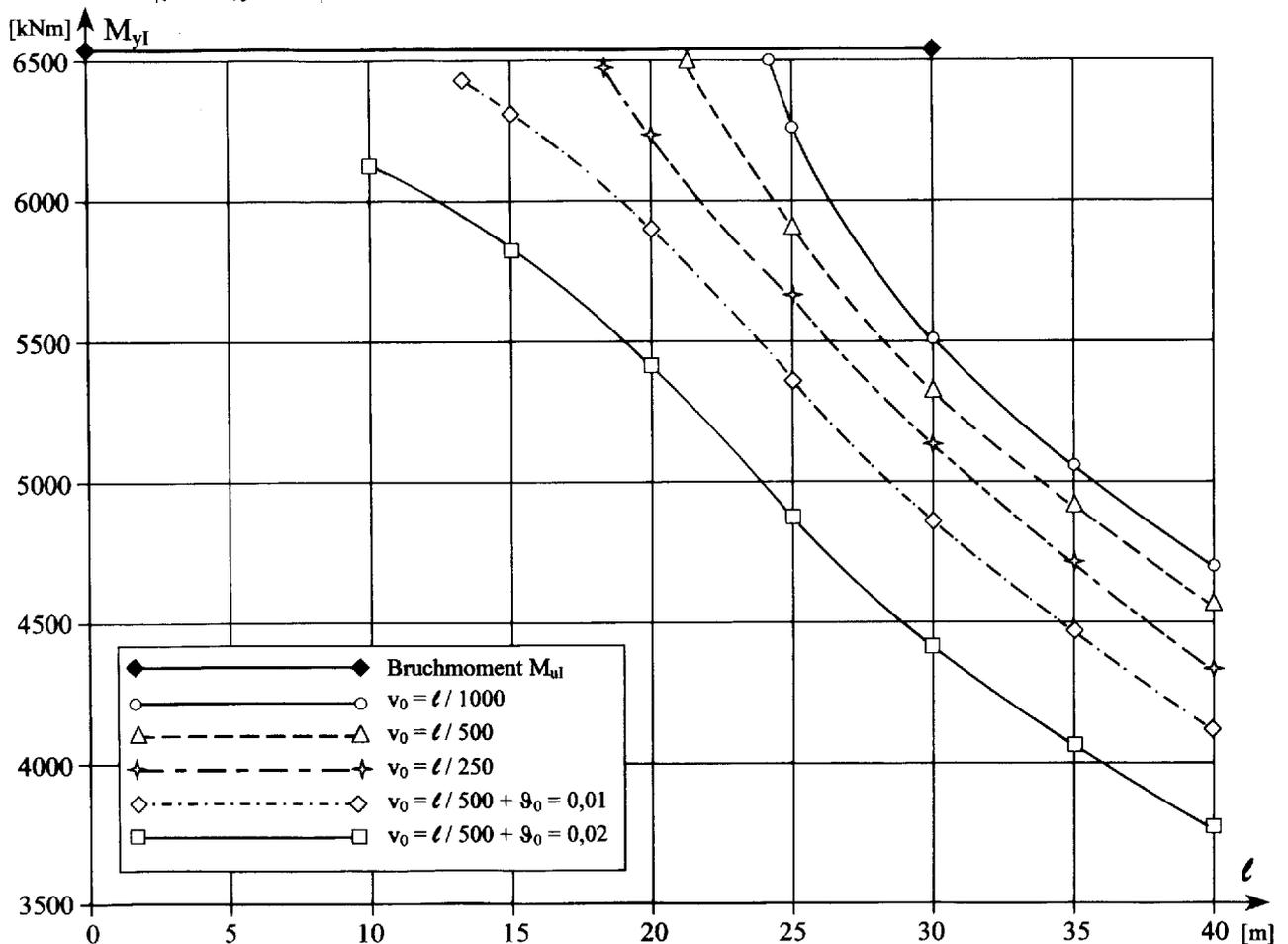


Bild B2a : Kippkurven für Querschnitt B2 - Gleichstreckenlast mittig auf dem Obergurt
 Fig. B2a : Course of lateral buckling to cross section B2 - central uniform loading on top flange

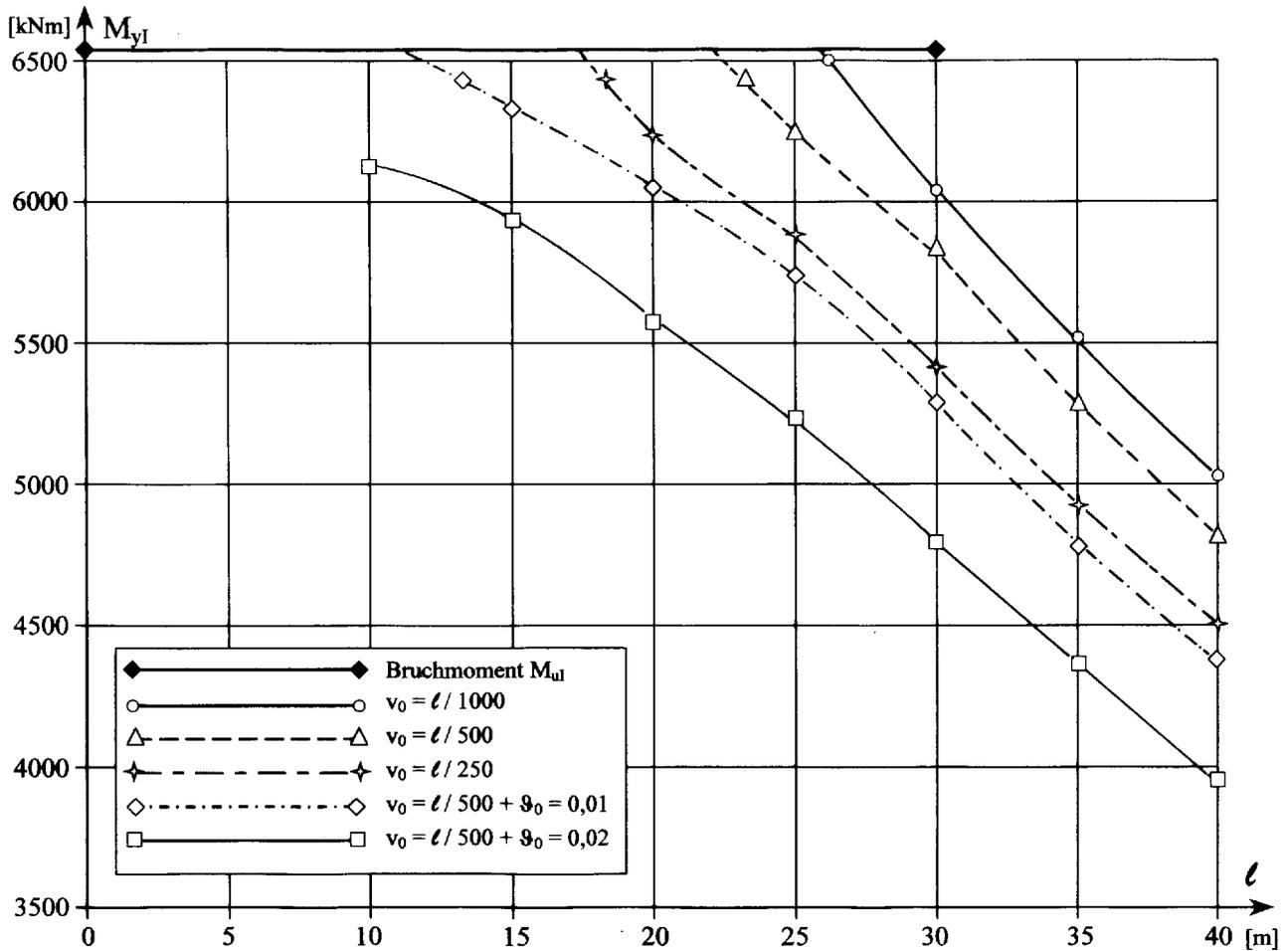
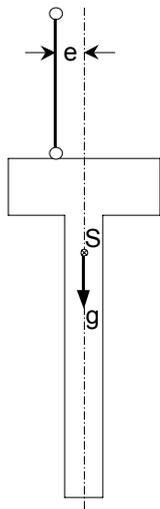


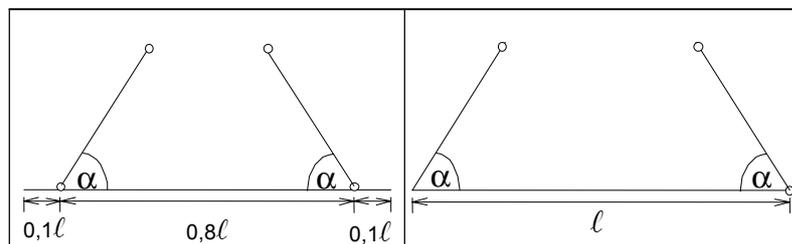
Bild B2b : Kippkurven für Querschnitt B2 - Einzellast mittig auf dem Obergurt bei $\ell/2$
 Fig. B2b : Course of lateral buckling to cross section B2 - central single load on top flange at $\ell/2$



Exzentrizität der Aufhängepunkte : $e = 2 \text{ cm}$

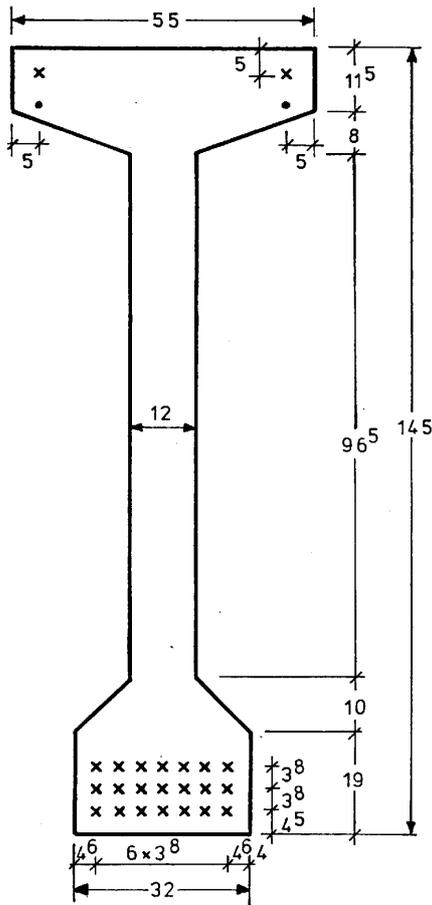
Belastung : Eigenlast g im geom. Schwerpunkt S

größtmögliche Last : $\max q = \text{Lastfaktor } f \cdot g$



Länge ℓ	Seil-Neigungswinkel α			Seil-Neigungswinkel α		
	90°	60°	45°	90°	60°	45°
40 m	1,6	1,3	1,05	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
35 m	2,7	1,9	1,6	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
30 m	4,8	3,5	2,6	1,5	1,0	instabil bei g
25 m	8,4	6,2	4,7	2,3	1,6	1,4
20 m	>10	>10	9,1	4,1	3,0	2,6

Bild B2c : Lastfaktoren f für den an Seilen aufgehängten Träger mit dem Querschnitt B2
 Fig. B2c : Loading factors f for a girder with cross section B2 hanging on ropes



Beton B45 - Dauerlasteinfluß : $\beta_{p,D} = 0,7 (45 + 5) = 35 \text{ N/mm}^2$
 für Zustand I: $E_b = 37000 \text{ N/mm}^2$
 $G_b = 15000 \text{ N/mm}^2$

Betonstahl BSt 420/500 mit $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$
 Biegebewehrung : 2 Ø 16 im Obergurt
 Torsionsbewehrung : nicht berücksichtigt

Spannstahl St 1570/1770 - Litzen Ø1/2"
 $A_z = 93 \text{ mm}^2 / \text{Litze}$ - $E_z = 195000 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{sz} = 8,05\%$
 21 Litzen im Untergurt
 $\sigma_{zv}^{(0)} = 1055 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{zv}^{(0)} = 5,41\%$
 2 Litzen im Obergurt
 $\sigma_{zv}^{(0)} = 633 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{zv}^{(0)} = 3,25\%$
 Spannkraftverlust 10% infolge k+s

rechnerisches Bruchmoment $M_{ul} = 3870 \text{ kNm}$
 zugehörige Randverzerrungen $\epsilon = -2,6 / +5,0 \text{ ‰}$

Eigenlast $g = 7,22 \text{ kN/m}$
 im geometrischen Schwerpunkt 0,67 m von Oberkante

Bild B3 : Vorgespannter Stahlbetonquerschnitt B3
 Fig. B3 : Cross section of prestressed concrete B3

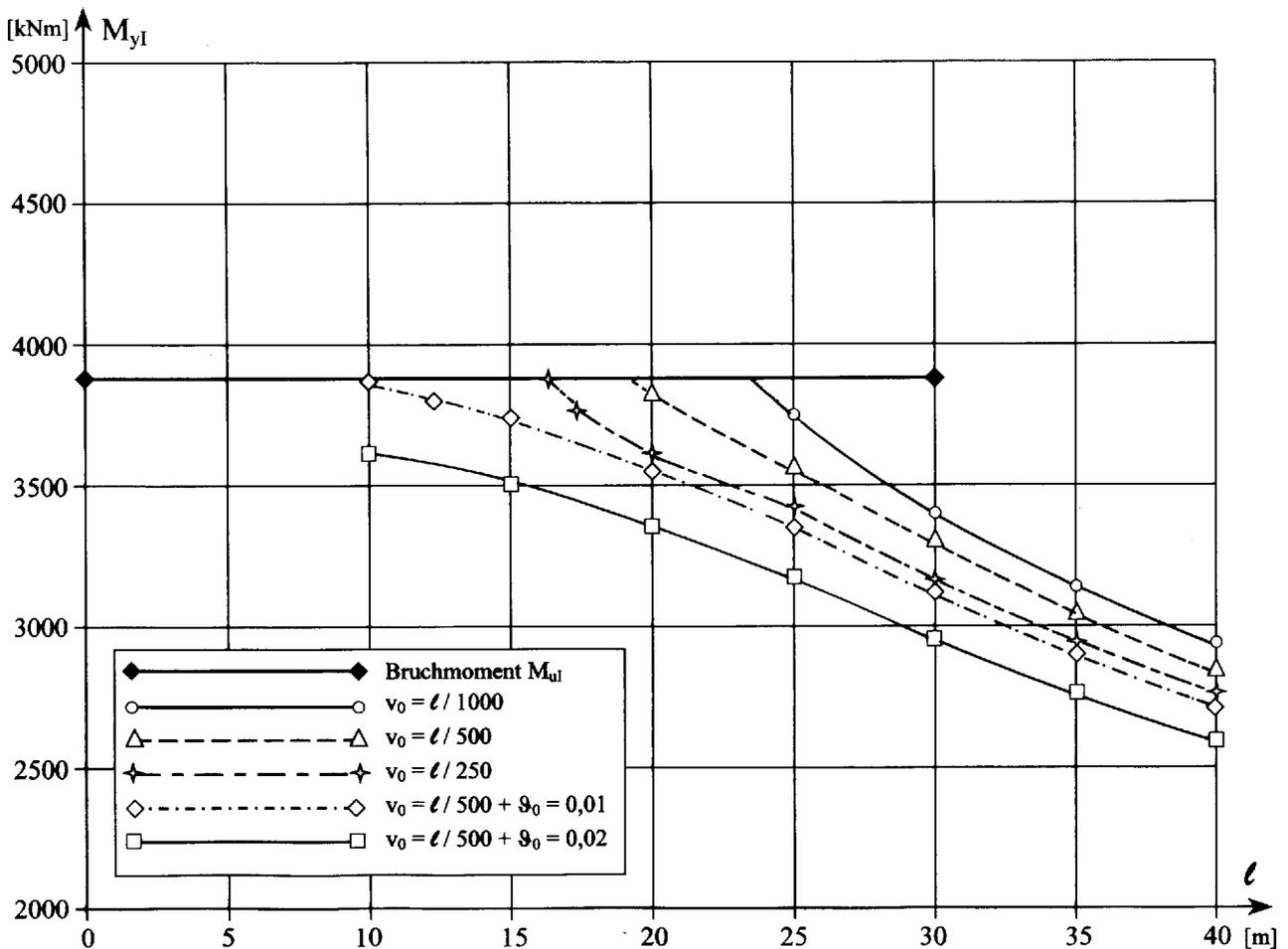


Bild B3a : Kippkurven für Querschnitt B3 - Gleichstreckenlast mittig auf dem Obergurt
 Fig. B3a : Course of lateral buckling to cross section B3 - central uniform loading on top flange

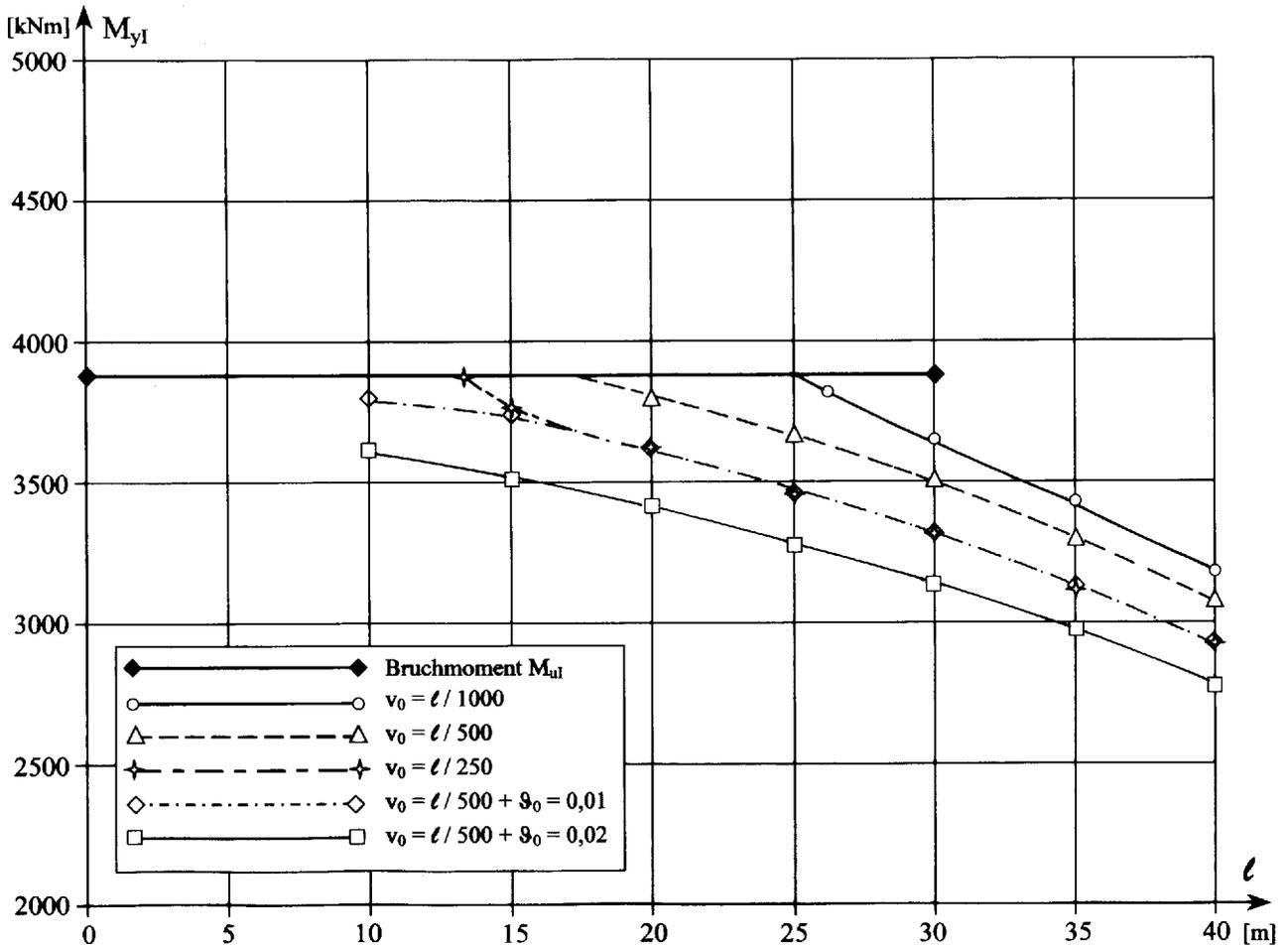
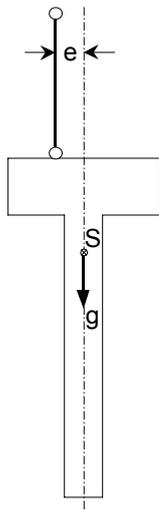


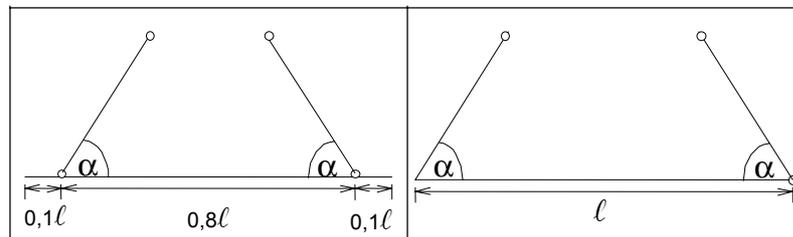
Bild B3b : Kippkurven für Querschnitt B3 - Einzellast mittig auf dem Obergurt bei $l/2$
 Fig. B3b : Course of lateral buckling to cross section B3 - central single load on top flange at $l/2$



Exzentrizität der Aufhängepunkte : $e = 2 \text{ cm}$

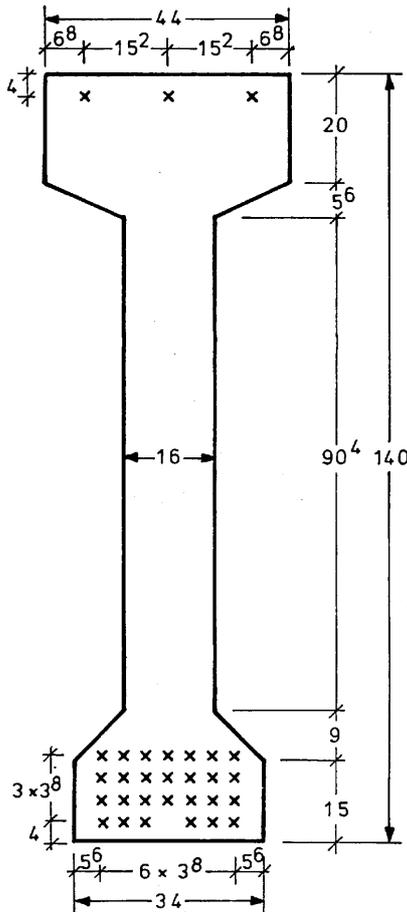
Belastung : Eigenlast g im geom. Schwerpunkt S

größtmögliche Last : $\max q = \text{Lastfaktor } f \cdot g$



Länge l	Seil-Neigungswinkel α			Seil-Neigungswinkel α		
	90°	60°	45°	90°	60°	45°
40 m	1,6	1,3	1,1	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
35 m	2,8	2,1	1,7	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
30 m	4,7	3,7	3,1	1,2	instabil bei g	instabil bei g
25 m	8,2	6,4	5,1	2,0	1,6	1,4
20 m	> 10	> 10	9,6	5,3	2,4	2,5

Bild B3c : Lastfaktoren f für den an Seilen aufgehängten Träger mit dem Querschnitt B3
 Fig. B3c : Loading factors f for a girder with cross section B3 hanging on ropes



Beton B55 - Dauerlasteinfluß : $\beta_{p,D} = 0,7 (55 + 5) = 42 \text{ N/mm}^2$
 für Zustand I: $E_b = 39000 \text{ N/mm}^2$
 $G_b = 16000 \text{ N/mm}^2$

Betonstahl BSt 420/500 mit $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$
 Biegebewehrung : nicht vorhanden
 Torsionsbewehrung : nicht berücksichtigt

Spannstahl St 1570/1770 - Litzen $\varnothing 1/2''$
 $A_z = 93 \text{ mm}^2 / \text{Litze} - E_z = 195000 \text{ N/mm}^2 ; \epsilon_{sz} = 8,05\%$
 27 Litzen im Untergurt
 $\sigma_{zv}^{(0)} = 1050 \text{ N/mm}^2 ; \epsilon_{zv}^{(0)} = 5,38\%$
 3 Litzen im Obergurt
 $\sigma_{zv}^{(0)} = 900 \text{ N/mm}^2 ; \epsilon_{zv}^{(0)} = 4,61\%$
 Spannkraftverlust 10% infolge k+s

rechnerisches Bruchmoment $M_{ul} = 4560 \text{ kNm}$
 zugehörige Randverzerrungen $\epsilon = -2,8 / +5,0 \%$

Eigenlast $g = 8,07 \text{ kN/m}$
 im geometrischen Schwerpunkt 0,65 m von Oberkante

Bild B4 : Vorgespannter Stahlbetonquerschnitt B4
 Fig. B4 : Cross section of prestressed concrete B4

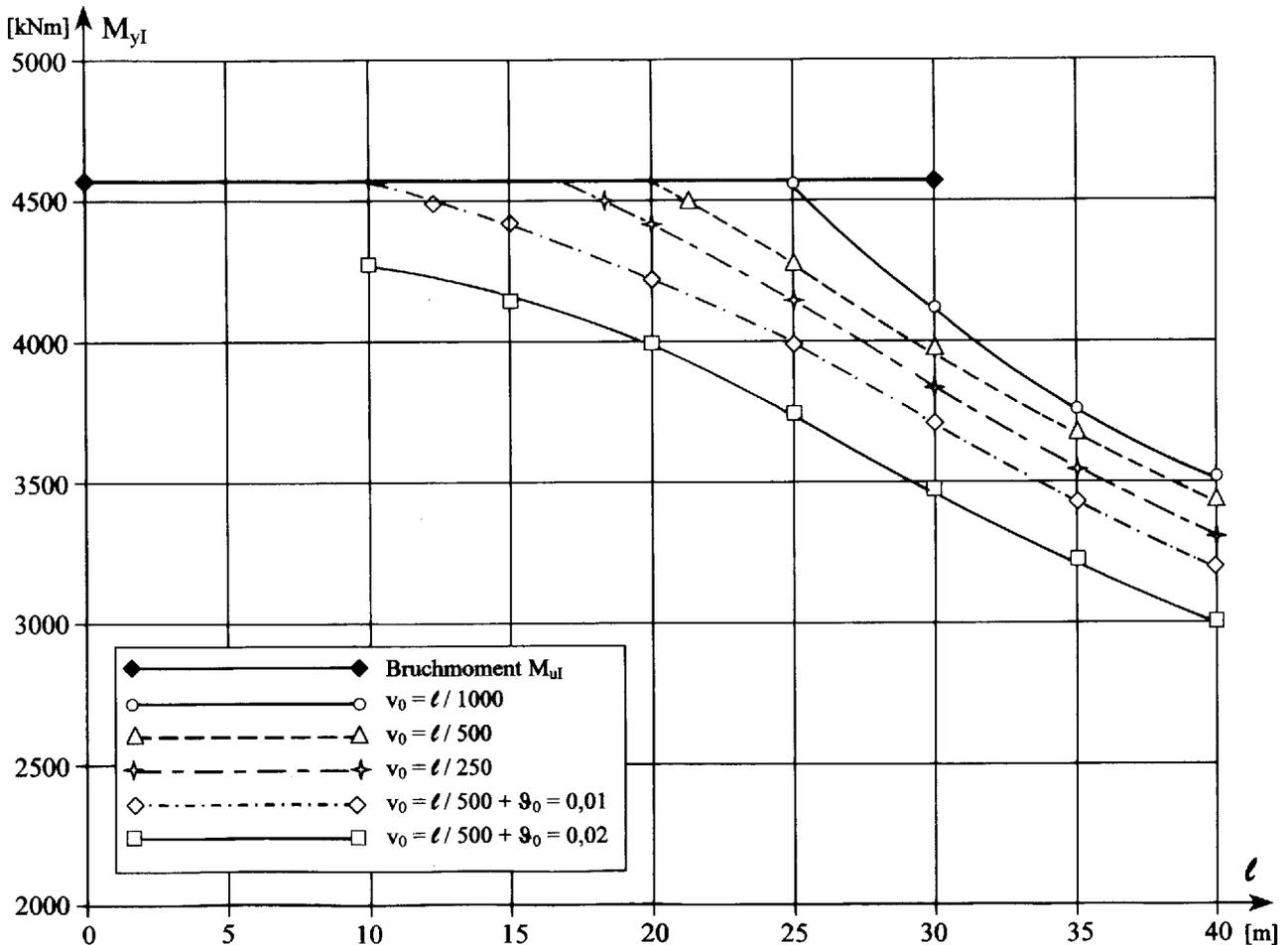


Bild B4a : Kippkurven für Querschnitt B4 - Gleichstreckenlast mittig auf dem Obergurt
 Fig. B4a : Course of lateral buckling to cross section B4 - central uniform loading on top flange

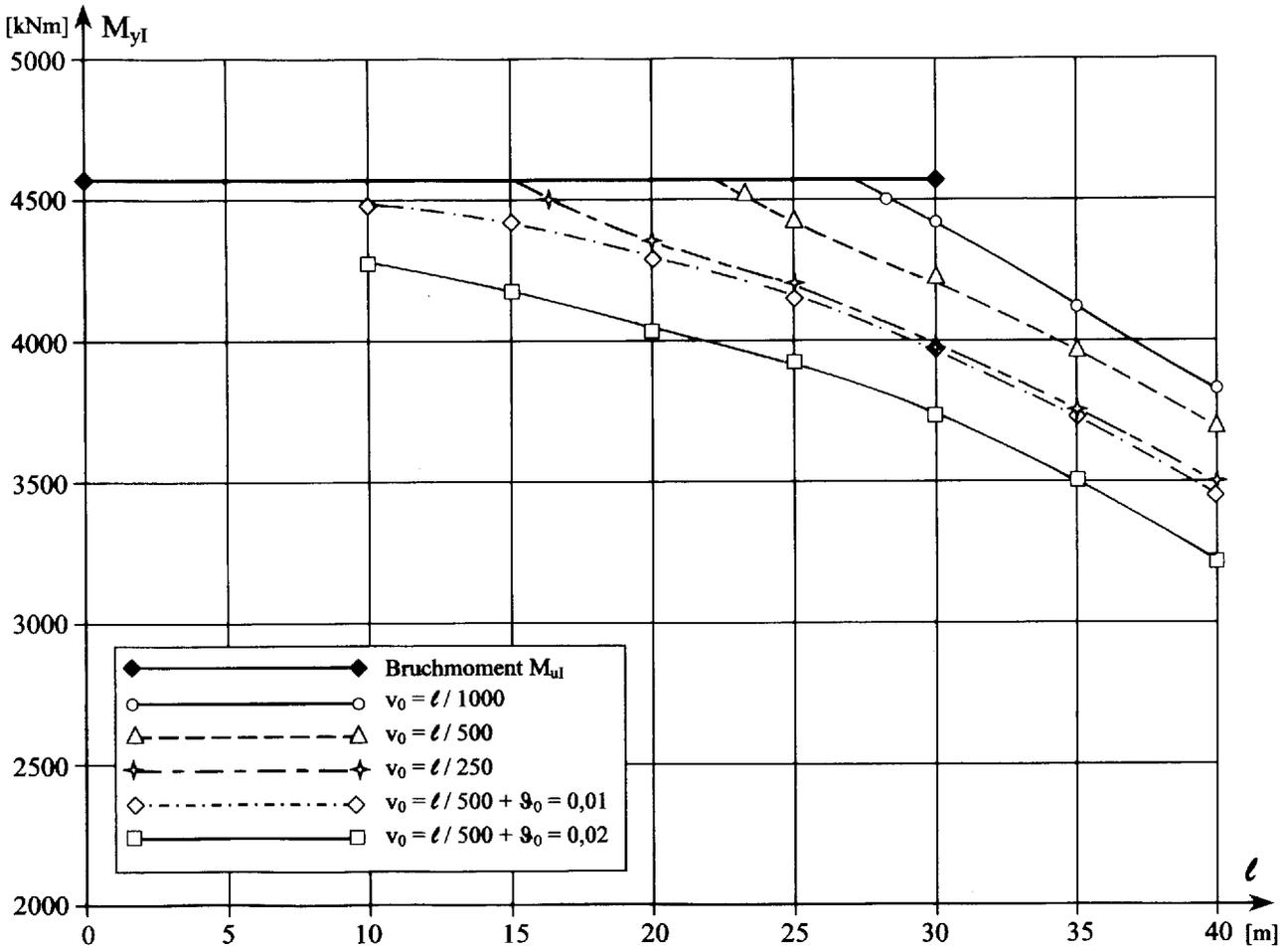
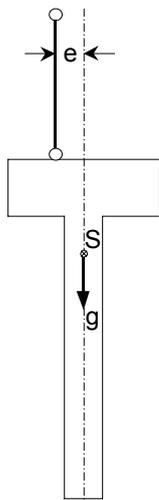


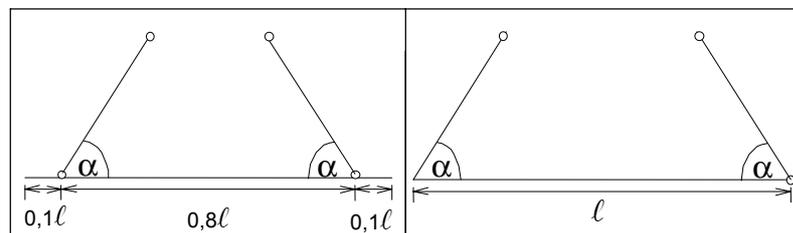
Bild B4b : Kippkurven für Querschnitt B4 - Einzellast mittig auf dem Obergurt bei $l/2$
 Fig. B4b : Course of lateral buckling to cross section B4 - central single load on top flange at $l/2$



Exzentrizität der Aufhängepunkte : $e = 2 \text{ cm}$

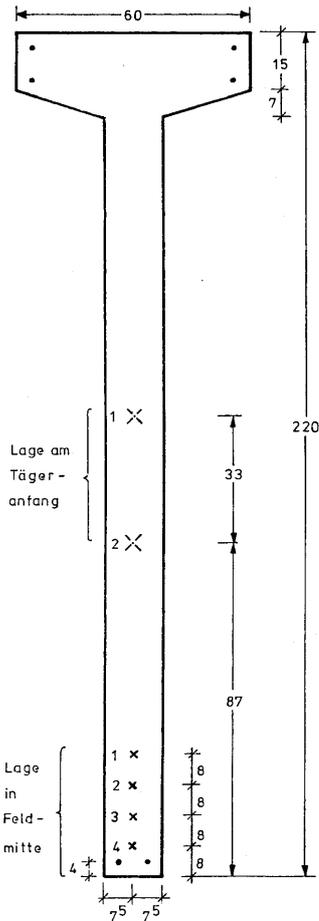
Belastung : Eigenlast g im geom. Schwerpunkt S

größtmögliche Last : $\max q = \text{Lastfaktor } f \cdot g$



Länge l	Seil-Neigungswinkel α			Seil-Neigungswinkel α		
	90°	60°	45°	90°	60°	45°
40 m	1,3	1,1	1,0	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
35 m	2,3	1,7	1,5	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
30 m	4,2	3,1	2,5	1,1	instabil bei g	instabil bei g
25 m	7,4	5,8	4,6	1,8	instabil bei g	instabil bei g
20 m	> 10	> 10	8,9	5,0	1,7	1,5

Bild B4c : Lastfaktoren f für den an Seilen aufgehängten Träger mit dem Querschnitt B4
 Fig. B4c : Loading factors f for a girder with cross section B4 hanging on ropes



Beton B55 - Dauerlasteinfluß : $\beta_{p,D} = 0,7 (55 + 5) = 42 \text{ N/mm}^2$
 für Zustand I: $E_b = 39000 \text{ N/mm}^2$
 $G_b = 16000 \text{ N/mm}^2$

Betonstahl BSt 420/500 mit $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$

Biegebewehrung : 4 $\varnothing 16$ im Obergurt
 2 $\varnothing 16$ unten im Steg

Torsionsbewehrung : Bügel $\varnothing 8$, $e = 25 \text{ cm}$
 Längsbew. $\varnothing 10$, $e = 30 \text{ cm}$
 Betonüberdeckung 1,5 cm

Spannstahl St 1080/1230 - Vollquerschnitt $\varnothing 32 \text{ mm}$

$A_z = 804 \text{ mm}^2 / \text{Strang}$ - $E_z = 205000 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{Sz} = 5,27\text{‰}$

$\sigma_{zV}^{(0)} = 675 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{zV}^{(0)} = 3,29\text{‰}$

Spannkraftverlust 10% infolge k+s

Spanngliedführung : Strang 1 parabelförmig, Stich=88 cm

Strang 2 parabelförmig, Stich=63 cm

Strang 3 und 4 : geradlinig

rechnerisches Bruchmoment $M_{ul} = 6900 \text{ kNm}$ in Trägermitte
 zugehörige Randverzerrungen $\epsilon = -1,4 / +5,0 \text{ ‰}$

Eigenlast $g = 10,33 \text{ kN/m}$

im geometrischen Schwerpunkt 0,90 m von Oberkante

Bild B5 : Vorgespannter Stahlbetonquerschnitt B5

Fig. B5 : Cross section of prestressed concrete B5

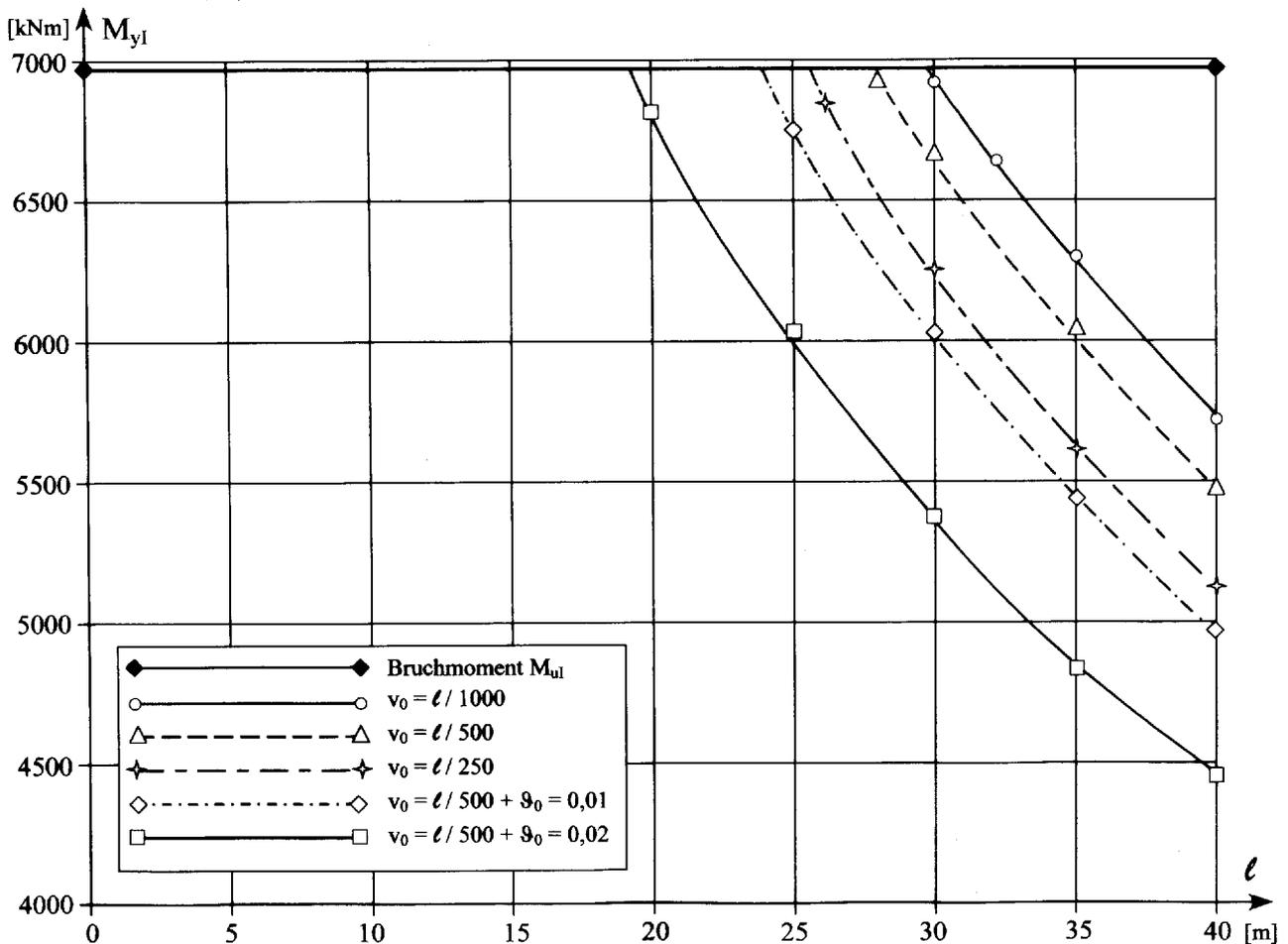


Bild B5a : Kippkurven für Querschnitt B5 - Gleichstreckenlast mittig auf dem Obergurt

Fig. B5a : Course of lateral buckling to cross section B5 - central uniform loading on top flange

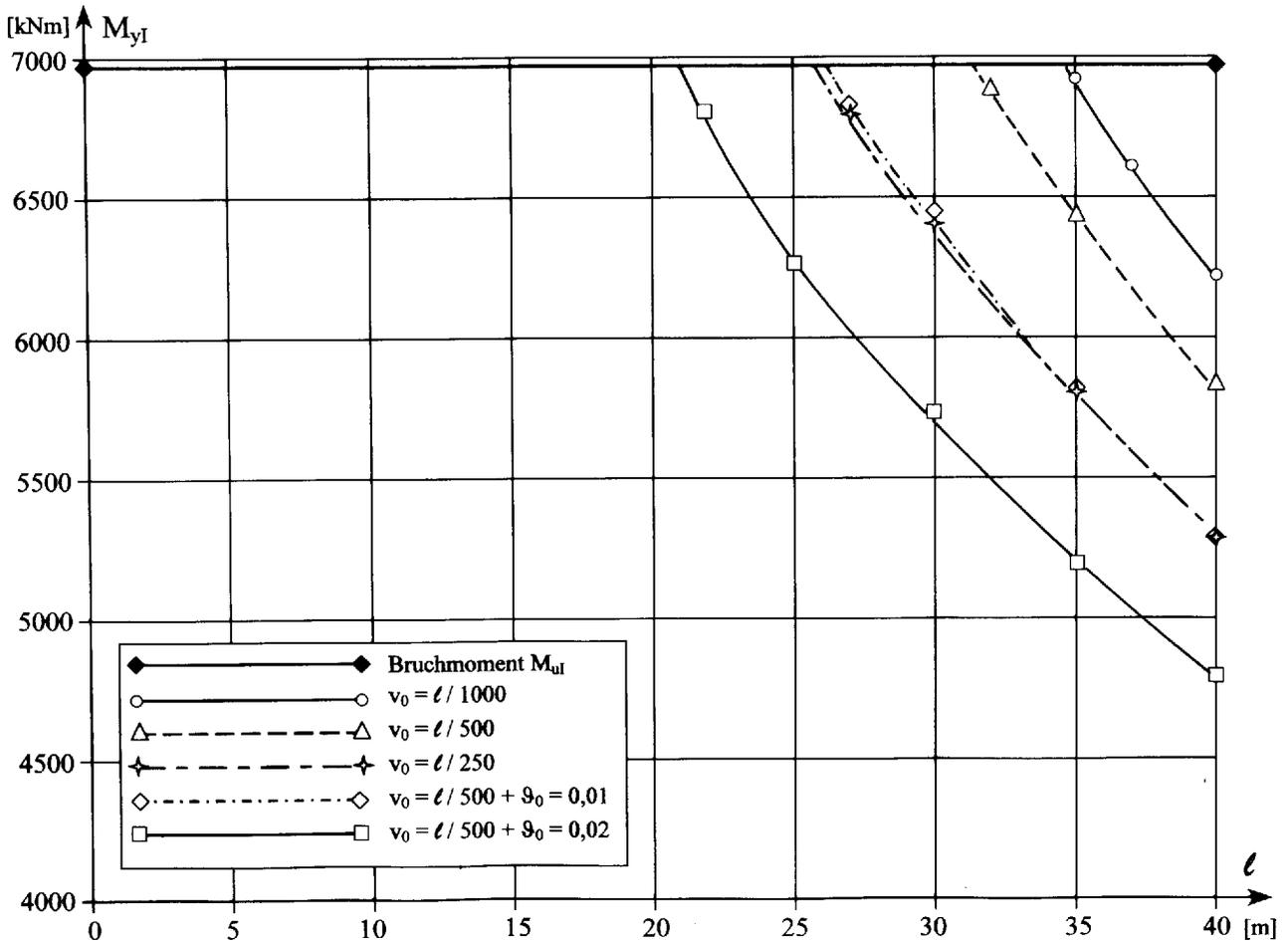
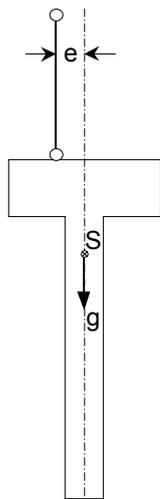


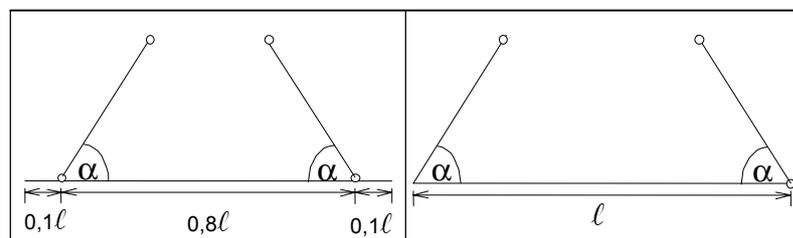
Bild B5b : Kippkurven für Querschnitt B5 - Einzellast mittig auf dem Obergurt bei $l/2$
 Fig. B5b : Course of lateral buckling to cross section B5 - central single load on top flange at $l/2$



Exzentrizität der Aufhängepunkte : $e = 2 \text{ cm}$

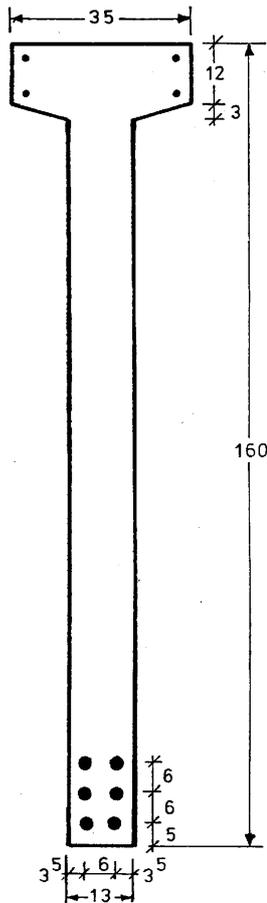
Belastung : Eigenlast g im geom. Schwerpunkt S

größtmögliche Last : $\max q = \text{Lastfaktor } f \cdot g$



Länge l	Seil-Neigungswinkel α			Seil-Neigungswinkel α		
	90°	60°	45°	90°	60°	45°
35 m	3,6	2,5	2,0	1,0	instabil bei g	instabil bei g
30 m	6,3	4,3	3,1	1,6	1,4	1,2
25 m	> 10	7,3	5,9	2,6	2,3	2,1

Bild B5c : Lastfaktoren f für den an Seilen aufgehängten Träger mit dem Querschnitt B5
 Fig. B5c : Loading factors f for a girder with cross section B5 hanging on ropes



Beton B45 - Dauerlasteinfluß : $\beta_{p,D} = 0,7 (45 + 5) = 35 \text{ N/mm}^2$
 für Zustand I: $E_b = 37000 \text{ N/mm}^2$
 $G_b = 15000 \text{ N/mm}^2$

Betonstahl BSt 420/500 mit $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$

Biegebewehrung : 4 $\varnothing 12$ im Obergurt

6 $\varnothing 28$ unten im Steg

Torsionsbewehrung : Bügel $\varnothing 8$, $e = 25 \text{ cm}$

Längsbew. $\varnothing 8$, $e = 40 \text{ cm}$

Betonüberdeckung 1,5 cm

Spannstahl nicht vorhanden

rechnerisches Bruchmoment $M_{ul} = 2160 \text{ kNm}$

zugehörige Randverzerrungen $\varepsilon = -1,6 / +5,0 \text{ ‰}$

Eigenlast $g = 5,94 \text{ kN/m}$

im geometrischen Schwerpunkt 0,71 m von Oberkante

Bild B6 : Stahlbetonquerschnitt B6

Fig. B6 : Cross section of non-prestressed concrete B6

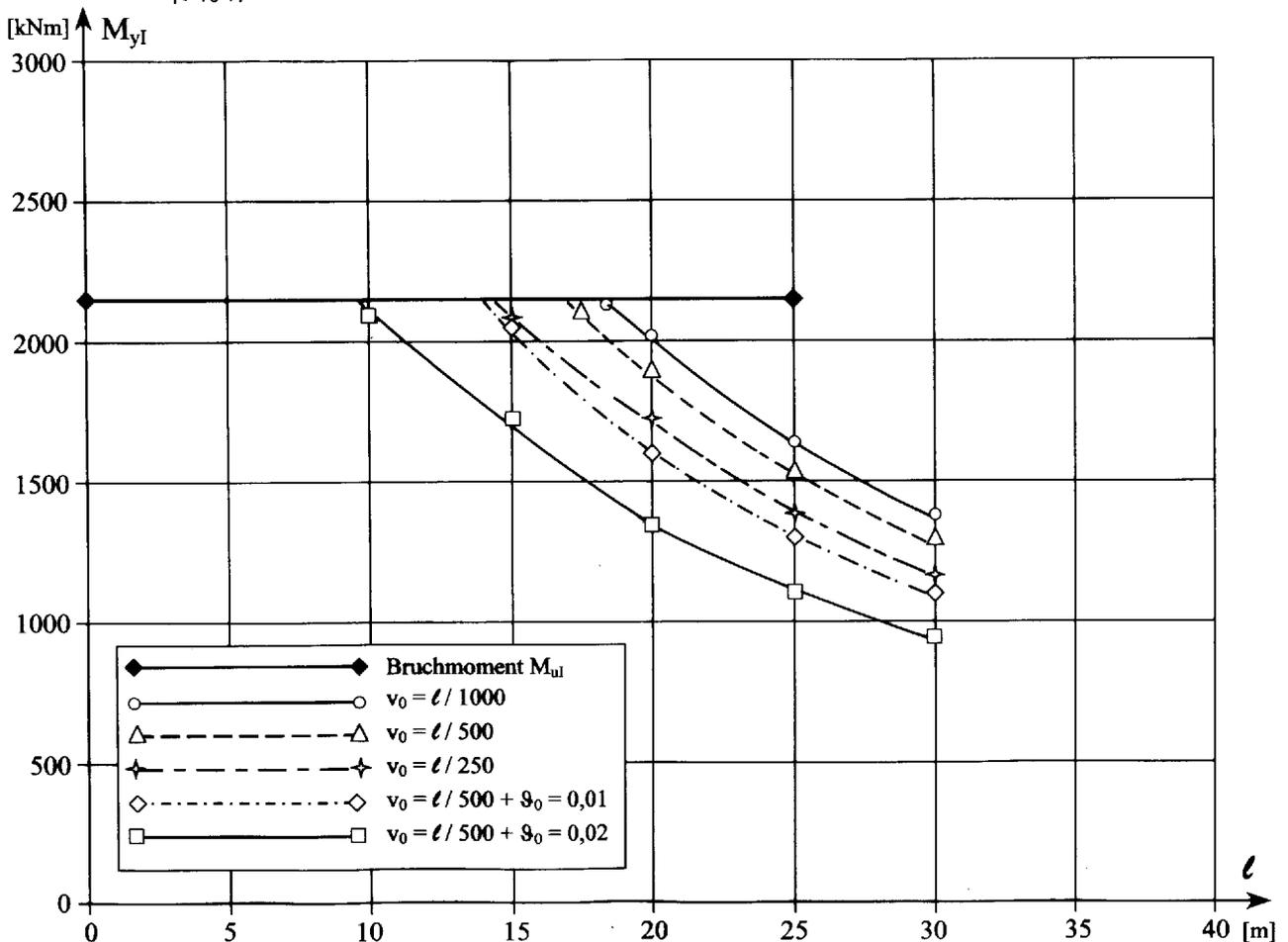


Bild B6a : Kippkurven für Querschnitt B6 - Gleichstreckenlast mittig auf dem Obergurt

Fig. B6a : Course of lateral buckling to cross section B6 - central uniform loading on top flange

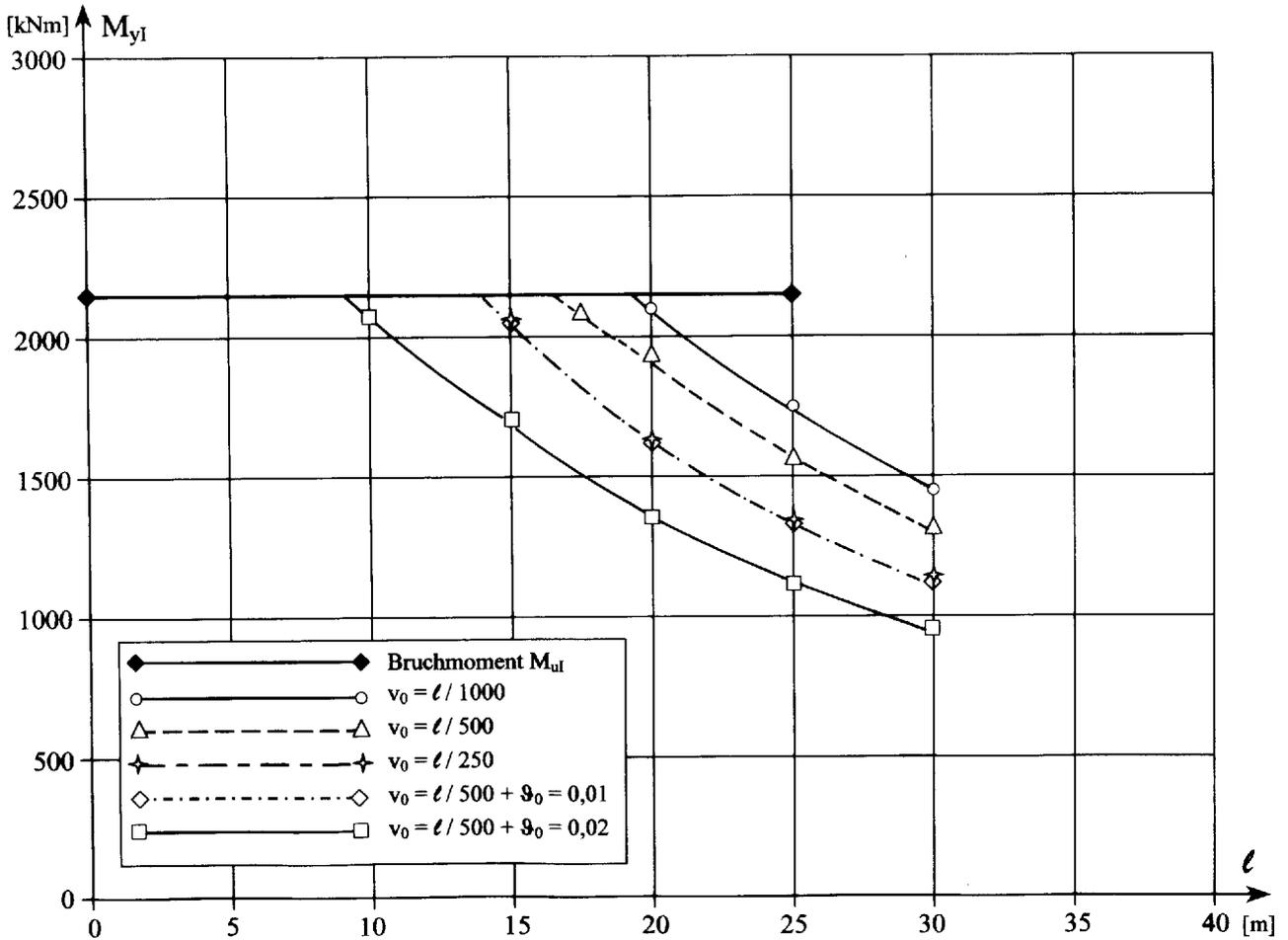
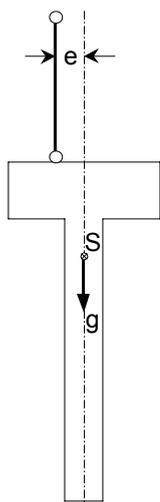


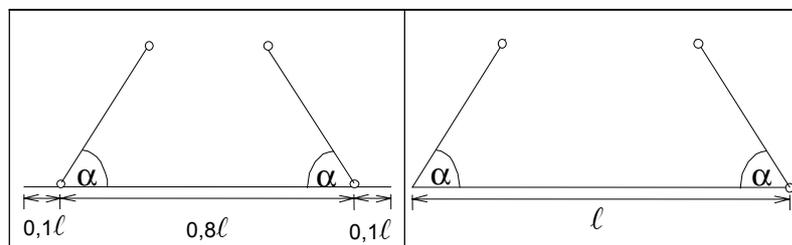
Bild B6b : Kippkurven für Querschnitt B6 - Einzellast mittig auf dem Obergurt bei $l/2$
 Fig. B6b : Course of lateral buckling to cross section B6 - central single load on top flange at $l/2$



Exzentrizität der Aufhängepunkte : $e = 2 \text{ cm}$

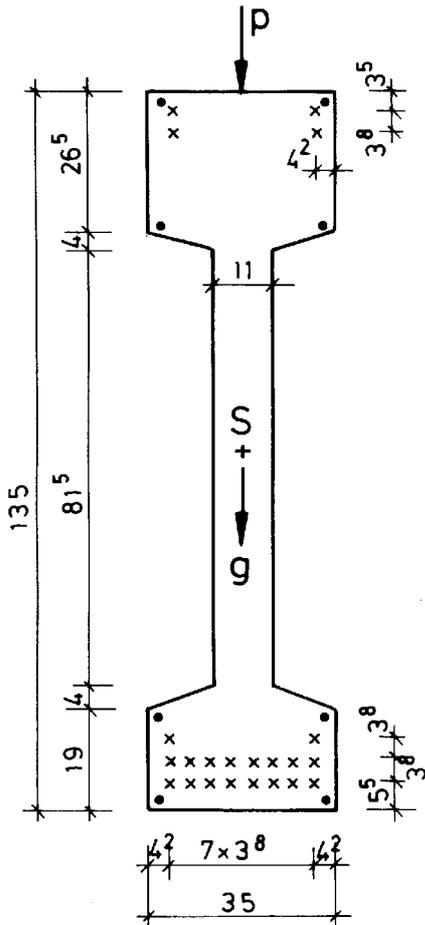
Belastung : Eigenlast g im geom. Schwerpunkt S

größtmögliche Last : $\max q = \text{Lastfaktor } f \cdot g$



Länge l	Seil-Neigungswinkel α			Seil-Neigungswinkel α		
	90°	60°	45°	90°	60°	45°
25 m	2,4	1,4	1,1	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
20 m	5,6	3,1	2,6	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
15 m	> 10	8,7	6,8	2,8	2,4	2,1
10 m	> 10	> 10	> 10	> 10	> 10	9,0

Bild B6c : Lastfaktoren f für den an Seilen aufgehängten Träger mit dem Querschnitt B6
 Fig. B6c : Loading factors f for a girder with cross section B6 hanging on ropes



Beton B45 - Dauerlasteinfluß : $\beta_{p,D} = 0,7 (45 + 5) = 35 \text{ N/mm}^2$
 für Zustand I: $E_b = 37000 \text{ N/mm}^2$
 $G_b = 15000 \text{ N/mm}^2$

Betonstahl BSt 420/500 mit $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$
 Biegebewehrung : je 4 $\varnothing 8$ im Obergurt und Untergurt
 Torsionsbewehrung : nicht berücksichtigt

Spannstahl St 1570/1770 - Litzen $\varnothing 1/2''$
 $A_z = 93 \text{ mm}^2 / \text{Litze}$ - $E_z = 195000 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{Sz} = 8,05\%$
 18 Litzen im Untergurt
 $\sigma_{ZV}^{(0)} = 1050 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{ZV}^{(0)} = 5,38\%$
 4 Litzen im Obergurt
 $\sigma_{ZV}^{(0)} = 450 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{ZV}^{(0)} = 2,31\%$
 Spannkraftverlust 10% infolge k+s

rechnerisches Bruchmoment $M_{ul} = 3019 \text{ kNm}$
 zugehörige Randverzerrungen $\epsilon = -2,5 / +5,0 \%$

Eigenlast $g = 6,68 \text{ kN/m}$
 im geometrischen Schwerpunkt 0,65 m von Oberkante

Bild B7 : Vorgespannter Stahlbetonquerschnitt B7
 Fig. B7 : Cross section of prestressed concrete B7

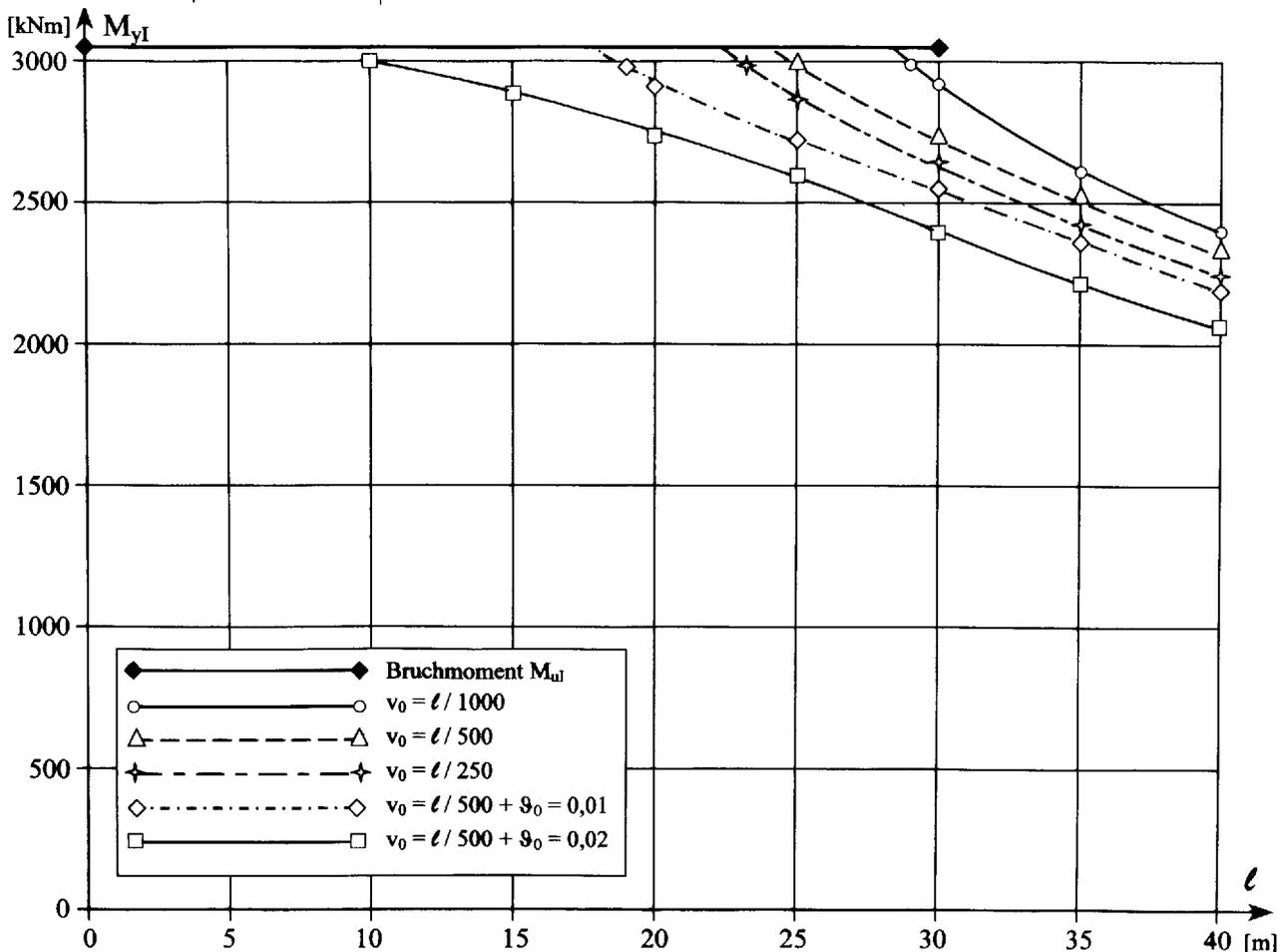


Bild B7a : Kippkurven für Querschnitt B7 - Gleichstreckenlast mittig auf dem Obergurt
 Fig. B7a : Course of lateral buckling to cross section B7 - central uniform loading on top flange

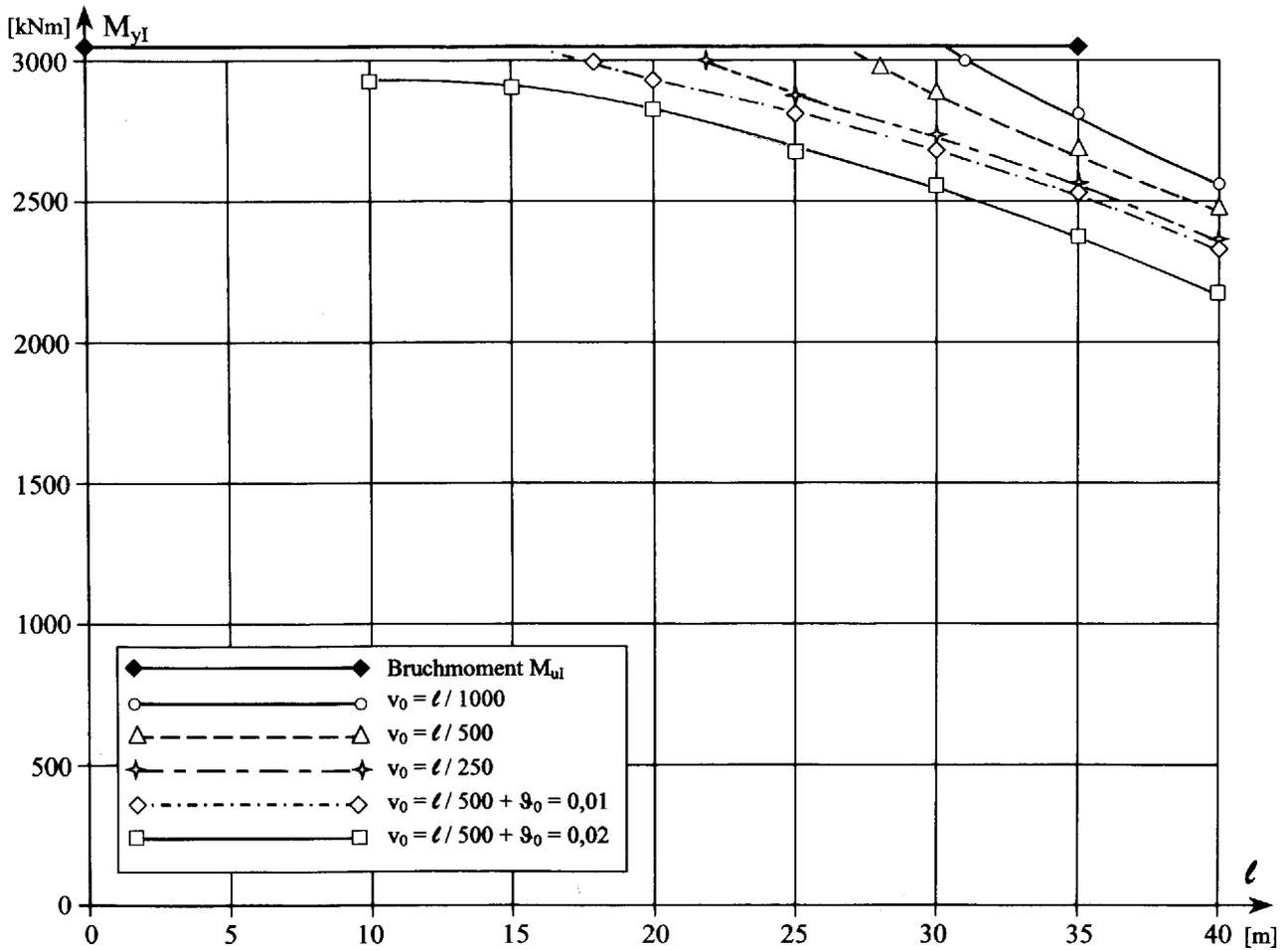
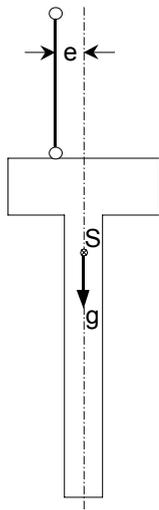


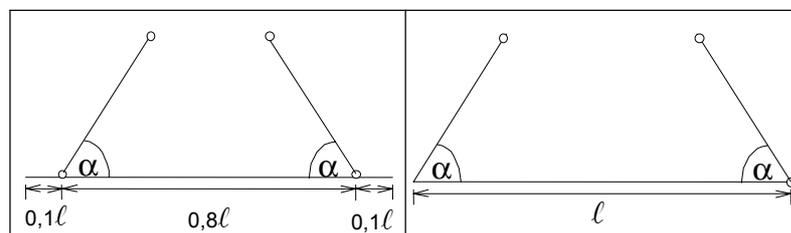
Bild B7b : Kippkurven für Querschnitt B7 - Einzellast mittig auf dem Obergurt bei $l/2$
 Fig. B7b : Course of lateral buckling to cross section B7 - central single load on top flange at $l/2$



Exzentrizität der Aufhängepunkte : $e = 2 \text{ cm}$

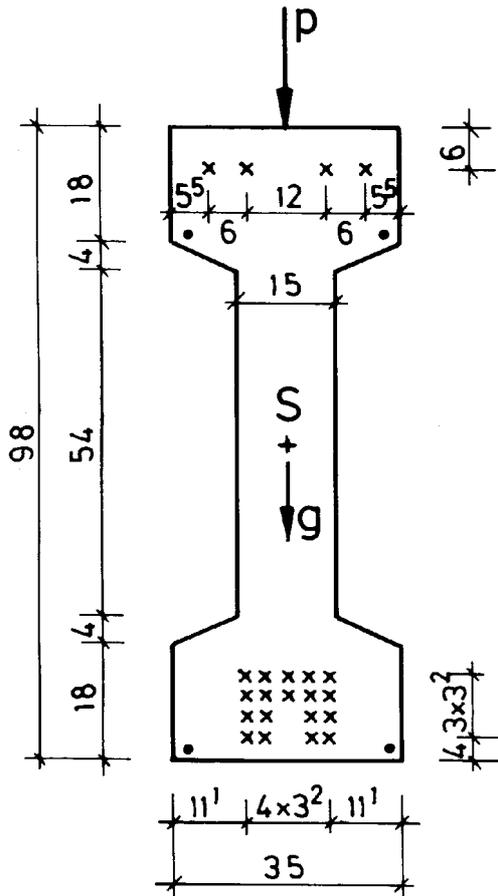
Belastung : Eigenlast g im geom. Schwerpunkt S

größtmögliche Last : $\max q = \text{Lastfaktor } f \cdot g$



Länge l	Seil-Neigungswinkel α			Seil-Neigungswinkel α		
	90°	60°	45°	90°	60°	45°
40 m	1,2	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
35 m	1,8	1,5	1,2	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
30 m	3,3	2,5	2,0	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
25 m	5,8	4,4	3,4	1,6	1,0	instabil bei g
20 m	> 10	8,3	7,1	4,0	2,0	1,8
15 m	> 10	> 10	> 10	9,1	5,6	4,8

Bild B7c : Lastfaktoren f für den an Seilen aufgehängten Träger mit dem Querschnitt B7
 Fig. B7c : Loading factors f for a girder with cross section B7 hanging on ropes



Beton B55 - Dauerlasteinfluß : $\beta_{p,D} = 0,7 (55 + 5) = 42 \text{ N/mm}^2$
 für Zustand I: $E_b = 39000 \text{ N/mm}^2$
 $G_b = 16000 \text{ N/mm}^2$

Betonstahl BSt 420/500 mit $E_s = 210000 \text{ N/mm}^2$
 Biegebewehrung : je 2 $\varnothing 8$ im Obergurt und Untergurt
 Torsionsbewehrung : Bügel $\varnothing 6$, $e = 15 \text{ cm}$
 Längsbew. $\varnothing 6$, $e = 8,5 \text{ cm}$
 Betonüberdeckung 2 cm

Spannstahl St 1570/1770 - $E_z = 195000 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{sz} = 8,05\text{‰}$
 im Untergurt : 18 Litzen $\varnothing 1/2''$ mit $A_z = 93 \text{ mm}^2/\text{Litze}$
 $\sigma_{zv}^{(0)} = 1043 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{zv}^{(0)} = 5,35\text{‰}$
 im Obergurt : 4 Drähte $\varnothing 4\text{mm}$ mit $A_z = 13 \text{ mm}^2/\text{Draht}$
 $\sigma_{zv}^{(0)} = 282 \text{ N/mm}^2$; $\epsilon_{zv}^{(0)} = 1,45\text{‰}$
 Spannkraftverlust 10% infolge k+s

rechnerisches Bruchmoment $M_{ul} = 2063 \text{ kNm}$
 zugehörige Randverzerrungen $\epsilon = -3,0/ +5,0 \text{ ‰}$

Eigenlast $g = 5,675 \text{ kN/m}$
 im geometrischen Schwerpunkt 0,49 m von Oberkante

Bild B8 : Vorgespannter Stahlbetonquerschnitt B8
 Fig. B8 : Cross section of prestressed concrete B8

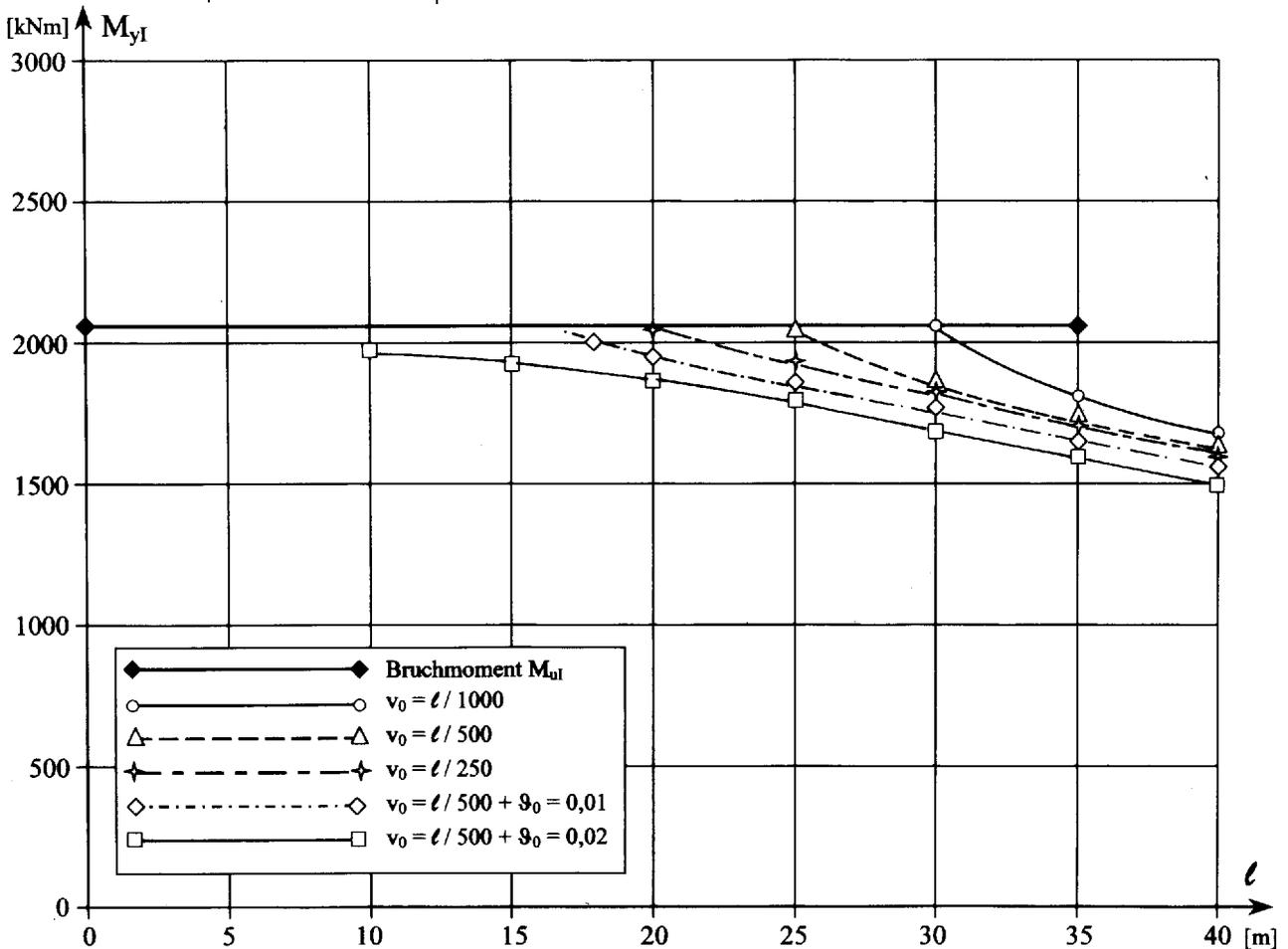


Bild B8a : Kippkurven für Querschnitt B8 - Gleichstreckenlast mittig auf dem Obergurt
 Fig. B8a : Course of lateral buckling to cross section B8 - central uniform loading on top flange

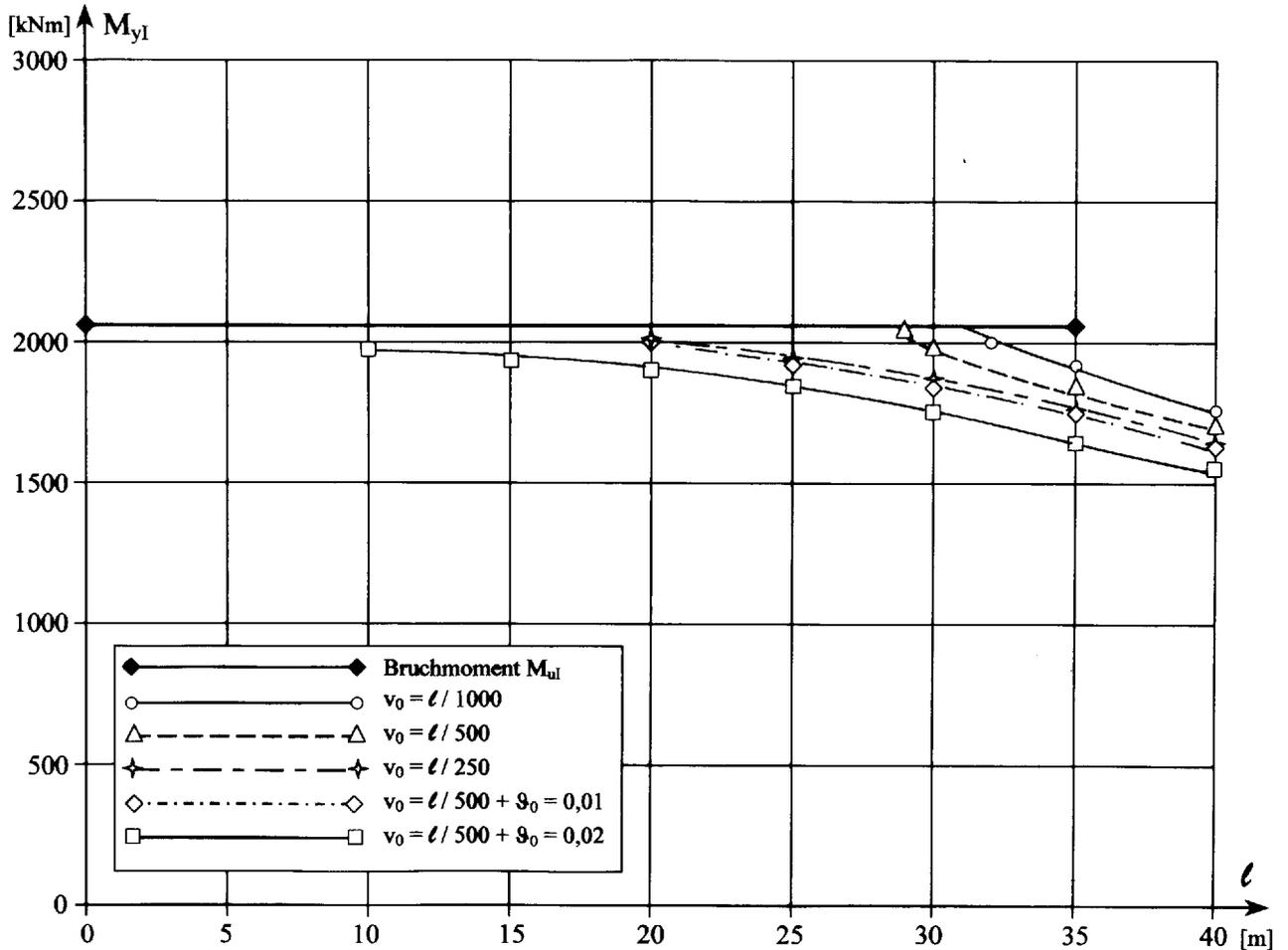
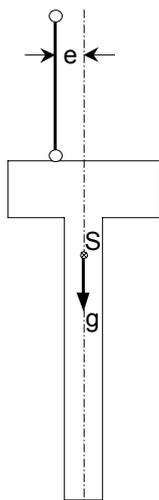


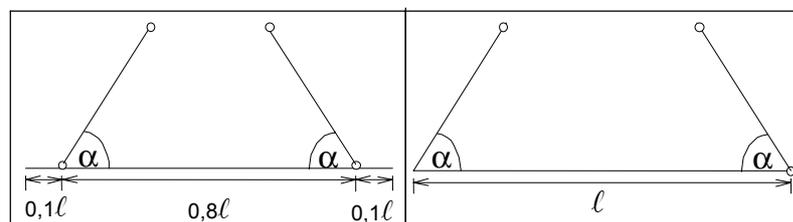
Bild B8b : Kippkurven für Querschnitt B8 - Einzellast mittig auf dem Obergurt bei $l/2$
 Fig. B8b : Course of lateral buckling to cross section B8 - central single load on top flange at $l/2$



Exzentrizität der Aufhängepunkte : $e = 2 \text{ cm}$

Belastung : Eigenlast g im geom. Schwerpunkt S

größtmögliche Last : $\max q = \text{Lastfaktor } f \cdot g$



Länge l	Seil-Neigungswinkel α			Seil-Neigungswinkel α		
	90°	60°	45°	90°	60°	45°
35 m	1,4	1,1	1,0	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
30 m	2,2	1,9	1,7	instabil bei g	instabil bei g	instabil bei g
25 m	4,3	3,6	2,9	1,3	instabil bei g	instabil bei g
20 m	8,4	6,8	6,0	2,6	instabil bei g	instabil bei g
15 m	> 10	> 10	> 10	7,6	1,2	instabil bei g

Bild B8c : Lastfaktoren f für den an Seilen aufgehängten Träger mit dem Querschnitt B8
 Fig. B8c : Loading factors f for a girder with cross section B8 hanging on ropes

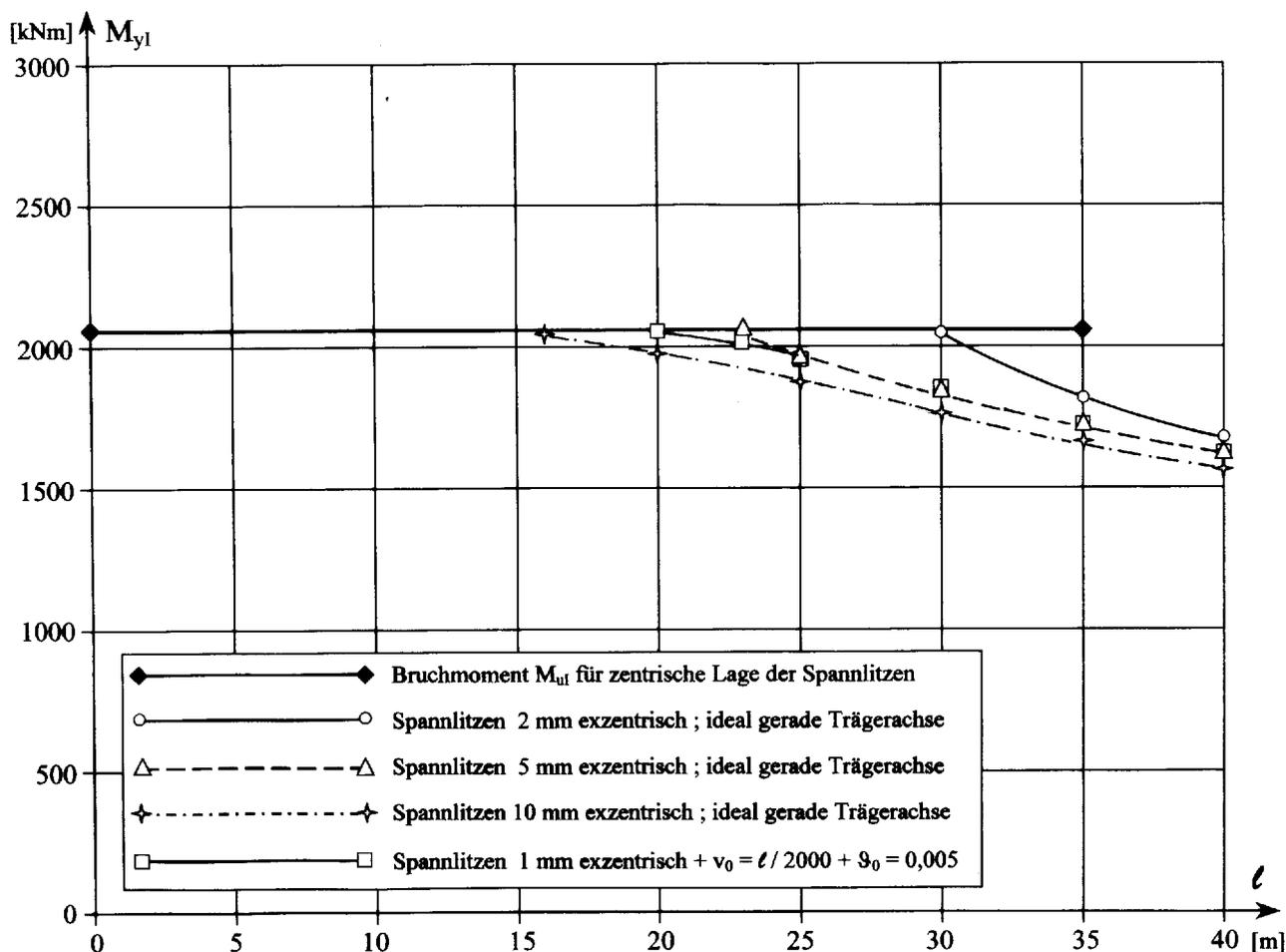


Bild B8d : Kippkurven für Querschnitt B8 - Gleichstreckenlast mittig auf dem Obergurt und exzentrische Lage der Spannbewehrung

Fig. B8d : Course of lateral buckling to cross section B8 - central uniform loading on top flange and eccentric site of prestressing reinforcement

Zu den im Bild B8d dargestellten Berechnungsergebnissen soll noch folgendes ergänzt werden :

Eine ausmittige Lage der Spannlitzen beeinflusst das rechnerische Bruchmoment des Querschnitts. Beim betrachteten Querschnitt B8 ergibt sich, daß bei einer 5 mm exzentrischen Litzen-Lage das rechnerische Bruchmoment $M_u = 2058$ kNm beträgt. Dabei ist die Nulllinie um den Winkel $\beta = 0,3$ ($\approx 17^\circ$) zur Horizontalen geneigt, und die Randverzerrungen liegen bei $\epsilon_D = -3,3$ ‰ und $\epsilon_Z = +5$ ‰. Beträgt die Exzentrizität 10 mm, so lauten die Zahlenwerte $M_u = 2038$ kNm, $\beta = 0,6$ ($\approx 34^\circ$), $\epsilon_D = -3,5$ ‰ und $\epsilon_Z = +4,7$ ‰. Bei 2 mm Litzen-Exzentrizität ergeben sich nur sehr geringfügige Änderungen gegenüber der zentrischen Lage der Litzen (siehe Bild B8) mit $M_u = 2062$ kNm, $\beta = 0,05$ ($\approx 3^\circ$), $\epsilon_D = -3$ ‰ und $\epsilon_Z = +5$ ‰. Die Bezeichnungen sind im Bild 13, S.60, erläutert. Es soll hier daran erinnert werden, daß die Verzerrungsnulldlinie zwar um den angegebenen Winkel β zur horizontal liegenden y-Achse geneigt ist, der resultierende Vektor des Bruchmoments jedoch weiterhin in Richtung der y-Achse zeigt, d.h. der Winkel α im Bild 13 ist null.

Trägerlänge ℓ [m]	Gleichstreckenlast p					Einzellast P in Trägermitte				
	Vorverformungen					Vorverformungen				
	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$
40	3336	3275	3169	3062	2859	3638	3530	3347	3273	3053
35	3534	3470	3359	3255	3040	3912	3808	3600	3548	3275
30	3807	3714	3598	3476	3246	4247	4074	3844	3786	3526
25	4215	4026	3886	3739	3490	M_{ul}	4409	4066	4003	3723
20	M_{ul}	4400	4233	4035	3746		M_{ul}	4300	4200	3902
15		M_{ul}	M_{ul}	4288	3977			M_{ul}	4392	4046
10				M_{ul}	4173				M_{ul}	4173
Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 4530$ kNm										

Tabelle B1 : Berechnungsergebnisse M_{yI} in [kNm] für den Träger mit Querschnitt B1
 Table B1 : Results of calculation M_{yI} in [kNm] for the girder with cross section B1

Trägerlänge ℓ [m]	Gleichstreckenlast p					Einzellast P in Trägermitte				
	Vorverformungen					Vorverformungen				
	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$
40	4699	4580	4349	4130	3783	5029	4827	4516	4386	3962
35	5062	4931	4728	4476	4067	5517	5305	4941	4789	4373
30	5508	5344	5147	4874	4415	6044	5847	5432	5300	4798
25	6254	5917	5685	5371	4883	M_{ul}	6265	5894	5754	5243
20	M_{ul}	M_{ul}	6250	5909	5422		M_{ul}	6250	6055	5580
15			M_{ul}	6338	5834			M_{ul}	6339	5935
10				M_{ul}	6126				M_{ul}	6126
Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 6570$ kNm										

Tabelle B2 : Berechnungsergebnisse M_{yI} in [kNm] für den Träger mit Querschnitt B2
 Table B2 : Results of calculation M_{yI} in [kNm] for the girder with cross section B2

Trägerlänge ℓ [m]	Gleichstreckenlast p					Einzellast P in Trägermitte				
	Vorverformungen					Vorverformungen				
	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$
40	2939	2875	2787	2728	2602	3179	3091	2935	2935	2778
35	3148	3081	2964	2908	2769	3432	3310	3131	3137	2981
30	3402	3328	3181	3132	2959	3650	3526	3329	3329	3138
25	3751	3576	3443	3364	3177	M_{ul}	3684	3470	3470	3284
20	M_{ul}	3841	3671	3557	3359		3813	3643	3643	3416
15		M_{ul}	M_{ul}	3749	3513		M_{ul}	3780	3750	3513
10				M_{ul}	3623			M_{ul}	3807	3624
Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 3870$ kNm										

Tabelle B3 : Berechnungsergebnisse M_{yI} in [kNm] für den Träger mit Querschnitt B3
 Table B3 : Results of calculation M_{yI} in [kNm] for the girder with cross section B3

Trägerlänge ℓ [m]	Gleichstreckenlast p					Einzellast P in Trägermitte				
	Vorverformungen					Vorverformungen				
	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$
40	3518	3447	3316	3214	3015	3829	3710	3500	3465	3220
35	3759	3691	3563	3442	3227	4122	3980	3772	3738	3510
30	4121	3987	3854	3721	3478	4423	4246	3987	3980	3744
25	M_{ul}	4290	4156	3997	3751	M_{ul}	4442	4219	4156	3934
20		M_{ul}	4433	4231	3996		M_{ul}	4366	4300	4030
15			M_{ul}	4426	4146			M_{ul}	4427	4181
10				M_{ul}	4277				4494	4277
Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 4560$ kNm										

Tabelle B4 : Berechnungsergebnisse M_{yI} in [kNm] für den Träger mit Querschnitt B4
 Table B4 : Results of calculation M_{yI} in [kNm] for the girder with cross section B4

Trägerlänge ℓ [m]	Gleichstreckenlast p					Einzellast P in Trägermitte				
	Vorverformungen					Vorverformungen				
	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$
40	5714	5492	5134	4979	4460	6207	5850	5298	5298	4804
35	6298	6053	5628	5447	4840	6916	6447	5819	5830	5201
30	6918	6676	6274	6045	5377	M_{ul}	M_{ul}	6423	6458	5756
25	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	6760	6052			M_{ul}	M_{ul}	6369
20				M_{ul}	6817					M_{ul}
in Trägermitte : Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 6900$ kNm										

Tabelle B5 : Berechnungsergebnisse M_{yI} in [kNm] für den Träger mit Querschnitt B5
 Table B5 : Results of calculation M_{yI} in [kNm] for the girder with cross section B5

Trägerlänge ℓ [m]	Gleichstreckenlast p					Einzellast P in Trägermitte				
	Vorverformungen					Vorverformungen				
	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$
30	1383	1306	1185	1115	948	1453	1328	1157	1134	965
25	1638	1553	1404	1315	1111	1746	1580	1349	1336	1125
20	2015	1907	1735	1612	1348	2104	1948	1646	1624	1355
15	M_{ul}	M_{ul}	2128	2065	1734	M_{ul}	M_{ul}	2081	2057	1714
10			M_{ul}	M_{ul}	2094			M_{ul}	M_{ul}	2077
Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 2160$ kNm										

Tabelle B6 : Berechnungsergebnisse M_{yI} in [kNm] für den Träger mit Querschnitt B6
 Table B6 : Results of calculation M_{yI} in [kNm] for the girder with cross section B6

Trägerlänge ℓ [m]	Gleichstreckenlast p					Einzellast P in Trägermitte				
	Vorverformungen					Vorverformungen				
	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$
40	2400	2349	2265	2202	2068	2555	2491	2373	2333	2183
35	2612	2529	2445	2365	2221	2808	2704	2576	2541	2385
30	2916	2748	2662	2566	2394	M_{ul}	2893	2748	2712	2567
25	M_{ul}	M_{ul}	2880	2760	2601		M_{ul}	2881	2841	2681
20			M_{ul}	2913	2741			M_{ul}	2935	2827
15				M_{ul}	2908				M_{ul}	2908
10					M_{ul}					2927

Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 3019$ kNm

Tabelle B7 : Berechnungsergebnisse M_{yI} in [kNm] für den Träger mit Querschnitt B7
 Table B7 : Results of calculation M_{yI} in [kNm] for the girder with cross section B7

Trägerlänge ℓ [m]	Gleichstreckenlast p					Einzellast P in Trägermitte				
	Vorverformungen					Vorverformungen				
	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$	$v_0=\ell/1000$	$v_0=\ell/500$	$v_0=\ell/250$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,01$	$v_0=\ell/500$ + $\vartheta_0=0,02$
40	1676	1648	1609	1571	1501	1759	1714	1663	1639	1566
35	1813	1764	1716	1666	1599	1916	1863	1781	1773	1635
30	M_{ul}	1886	1840	1777	1692	M_{ul}	1978	1886	1852	1760
25		M_{ul}	1953	1875	1796		M_{ul}	1966	1927	1848
20			M_{ul}	1956	1870			2028	1999	1884
15				M_{ul}	1933			M_{ul}	M_{ul}	1933
10					1990					1991

Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 2063$ kNm

Tabelle B8 : Berechnungsergebnisse M_{yI} in [kNm] für den Träger mit Querschnitt B8
 Table B8 : Results of calculation M_{yI} in [kNm] for the girder with cross section B8

Trägerlänge ℓ [m]	Gleichstreckenlast p auf dem Obergurt						
	Imperfektion als exzentrische Lage Δy_z der Spannbewehrung			Überlagerung von exzentrischer Spanndrahtlage Δy_z mit Vorverformungen v_0 und ϑ_0			
	$\Delta y_z = 2$ mm	$\Delta y_z = 5$ mm	$\Delta y_z = 10$ mm	$\Delta y_z = 1$ mm + $v_0=\ell/2000$ + $\vartheta_0=0,005$	$\Delta y_z = 1$ mm + $v_0=\ell/1000$ + $\vartheta_0=0,005$	$\Delta y_z = 2$ mm + $v_0=\ell/1000$ + $\vartheta_0=0,005$	$\Delta y_z = 1$ mm + $v_0=\ell/1000$ + $\vartheta_0=0,01$
40	1676	1637	1575	1631	1620	1599	1581
35	1813	1745	1679	1733	1728	1714	1685
30	2047	1860	1781	1849	1837	1823	1786
25		1978	1892	1966	1953	1927	1887
20		2057 (M_u)	1990	2057	2056	2013	1970
15			2038 (M_u)			2056	2056
10							

Tabelle B9 : Berechnungsergebnisse M_{yI} in [kNm] für den Träger mit Querschnitt B8 und exzentrischer Lage der Spannbewehrung
 Table B9 : Results of calculation M_{yI} in [kNm] for the girder with cross section B8 and eccentric site of prestressing reinforcement

B3. Berechnungen mit dem Näherungsverfahren

Soweit als möglich sind die mit dem Rechenprogramm des genauen Verfahrens [8] vorgenommenen Berechnungen für die Beispiele B1-B4 und B6-B8 sind auch mit dem Rechenprogramm [50] des im Kap. 6 vorgestellten Näherungsverfahrens durchgeführt worden. Das Beispiel B5 kann wegen der parabelförmigen Spanngliedführung nicht mit dem Näherungsverfahren behandelt werden. Der Berechnungsablauf des Näherungsverfahrens ist im Kap. 6.7 und zu Beginn des Kap. 6.9 beschrieben. Um einen umfassenden Überblick zu bekommen, sind immer beide Anpassungsmöglichkeiten eines sinus- oder parabelförmigen Näherungsverlaufs der Steifigkeiten berücksichtigt worden. Die Berechnungsergebnisse in Form der kritischen Haupt-Biegemomente $M_{y,kr}$ ($= M_{yI}$) in Trägermitte sind in den folgenden Tabellen zusammengestellt, wobei zum Vergleich auch die Ergebnisse des genauen Verfahrens aus den Tabellen B1-B8 angegeben worden sind. Die Ergebniszusammenstellung soll einen Überblick vermitteln, wie das im Kap. 6 abgeleitete Näherungsverfahren mit dem zugehörigen Rechenprogramm [50] im Vergleich mit der genauen Lösung [8] abschneidet. Bei der Fülle der angefallenen Ergebnisse ist eine eigentlich in jedem Einzelfall notwendige Wertung der Näherungslösung, ob eine Sinus- oder eine Parabelanpassung den in den Unterteilungspunkten berechneten Steifigkeitsverläufen (vergl. Bilder 9b-12b) besser entspricht, zu aufwendig und nicht mehr durchgeführt worden. Bis auf wenige Ausnahmen liefert das Näherungsverfahren mit einer Parabel-Approximation immer auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse. Nur für den Querschnitt B6 (Stahlbetonquerschnitt) liegen die Näherungen für die angenommene Vorverformung $v_0 = l/500 + \vartheta_0 = 0,02$ etwas auf der unsicheren Seite. Wie eine genauere Untersuchung für diese Einzelfälle gezeigt hat, werden dort die Steifigkeitsverläufe im Auflagerbereich auch durch eine Parabel 6. Ordnung immer noch nicht zufriedenstellend erfaßt. In den weitaus meisten behandelten Fällen liefert das Näherungsverfahren mit einer Sinus-Approximation ebenfalls auf der sicheren Seite liegende Ergebnisse. Eine Ausnahme bildet nur der Stahlbetonquerschnitt B6, Tabelle B14. Nähere Begründungen hierfür sind bereits im Kap. 6.3 auf der S. 27 und am Ende des Kap. 6.4 auf der S. 37 gegeben worden. Als Schlußfolgerung läßt sich feststellen, daß das Näherungsverfahren durch die Vergleiche der Berechnungsergebnisse voll und ganz bestätigt wird.

Belastung : 1,0-fache Eigenlast $g = 8,54 \text{ kN/m}$ im Schwerpunkt + iterierte Gleichstreckenlast p mittig auf dem Obergurt															
Trägerlänge l [m]	$v_0 = l/1000$			$v_0 = l/500$			$v_0 = l/250$			$v_0 = l/500 + \vartheta_0 = 0,01$			$v_0 = l/500 + \vartheta_0 = 0,02$		
	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung
40	3022	2843	3336	2955	2797	3275	2866	2736	3169	2940	2788	3062	2921	2779	2859
35	3192	2966	3534	3131	2929	3470	3008	2850	3359	3109	2914	3255	3082	2898	3040
30	3437	3141	3807	3354	3092	3714	3202	2993	3598	3319	3072	3476	3270	3046	3246
25	3755	3368	4215	3631	3303	4026	3428	3171	3886	3546	3270	3739	3462	3225	3490
20	4104	3680	M_{ul}	3930	3573	4400	3700	3393	4233	3836	3518	4035	3665	3440	3746
15	4448	4073	M_{ul}	4262	3921	M_{ul}	3962	3686	M_{ul}	4059	3813	4288	3865	3659	3977
10	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	4466	4302	M_{ul}	4265	4037	M_{ul}	4232	4099	M_{ul}	3962	3892	4173
Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 4530 \text{ kNm}$															

Tabelle B10 : Vergleich der kritischen Biegemomente M_{yI} [kNm] für den Träger mit Querschnitt B1
 Table B10 : Comparison of the critical bending moments M_{yI} [kNm] for a girder with cross section B1

Belastung : 1,0-fache Eigenlast $g = 10,0$ kN/m im Schwerpunkt + iterierte Gleichstreckenlast p mittig auf dem Obergurt

Trägerlänge l [m]	$v_0=l/1000$			$v_0=l/500$			$v_0=l/250$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,01$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,02$		
	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung
40	4281	3934	4699	4204	3880	4580	4052	3776	4349	4179	3867	4130	4149	3851	3783
35	4660	4240	5062	4547	4174	4931	4345	4047	4728	4507	4155	4476	4468	4131	4067
30	5120	4631	5508	4978	4541	5344	4699	4356	5147	4919	4507	4874	4825	4468	4415
25	5689	5125	6254	5493	5000	5917	5113	4769	5685	5348	4929	5371	5161	4848	4883
20	6258	5736	M_{ul}	6015	5561	M_{ul}	5588	5204	6250	5736	5429	5909	5492	5203	5422
15	6526	6373	M_{ul}	6406	6103	M_{ul}	6015	5772	M_{ul}	6064	5868	6338	5736	5593	5834
10	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	6492	M_{ul}	6368	6208	M_{ul}	6213	6202	M_{ul}	5873	5816	6126

Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 6570$ kNm

Tabelle B11 : Vergleich der kritischen Biegemomente M_{yI} [kNm] für den Träger mit Querschnitt B2
 Table B11 : Comparison of the critical bending moments M_{yI} [kNm] for a girder with cross section B2

Belastung : 1,0-fache Eigenlast $g = 7,22$ kN/m im Schwerpunkt + iterierte Gleichstreckenlast p mittig auf dem Obergurt

Trägerlänge l [m]	$v_0=l/1000$			$v_0=l/500$			$v_0=l/250$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,01$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,02$		
	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung
40	2637	2411	2939	2572	2368	2875	2452	2287	2787	2553	2361	2728	2538	2350	2602
35	2839	2565	3148	2754	2510	3081	2595	2407	2964	2730	2500	2908	2692	2485	2769
30	3086	2757	3402	2970	2684	3328	2771	2553	3181	2925	2667	3132	2880	2643	2959
25	3366	3002	3751	3161	2906	3576	2968	2725	3443	3138	2872	3364	3052	2820	3177
20	3645	3296	M_{ul}	3449	3161	3841	3194	2949	3671	3337	3104	3557	3223	3026	3359
15	3822	3618	M_{ul}	3660	3440	M_{ul}	3397	3194	M_{ul}	3510	3347	3749	3337	3227	3513
10	M_{ul}	3838	M_{ul}	3816	3700	M_{ul}	3628	3463	M_{ul}	3648	3539	M_{ul}	3449	3390	3623

Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 3870$ kNm

Tabelle B12 : Vergleich der kritischen Biegemomente M_{yI} [kNm] für den Träger mit Querschnitt B3
 Table B12 : Comparison of the critical bending moments M_{yI} [kNm] for a girder with cross section B3

Belastung : 1,0-fache Eigenlast $g = 8,07$ kN/m im Schwerpunkt + iterierte Gleichstreckenlast p mittig auf dem Obergurt

Trägerlänge l [m]	$v_0=l/1000$			$v_0=l/500$			$v_0=l/250$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,01$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,02$		
	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung
40	3281	3020	3518	3215	2977	3447	3084	2897	3316	3196	2969	3214	3170	2954	3015
35	3531	3219	3759	3444	3165	3691	3271	3056	3563	3412	3149	3442	3362	3132	3227
30	3830	3466	4121	3696	3394	3987	3494	3255	3854	3639	3369	3721	3562	3324	3478
25	4153	3772	M_{ul}	3968	3672	4290	3726	3497	4156	3898	3611	3997	3763	3559	3751
20	4430	4110	M_{ul}	4241	3963	M_{ul}	3963	3750	4433	4094	3898	4231	3936	3777	3996
15	M_{ul}	4430	M_{ul}	4438	4262	M_{ul}	4201	4008	M_{ul}	4233	4128	4426	3997	3954	4146
10	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	4484	M_{ul}	4403	4288	M_{ul}	4334	4293	M_{ul}	4144	4100	4277

Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 4560$ kNm

Tabelle B13 : Vergleich der kritischen Biegemomente M_{yI} [kNm] für den Träger mit Querschnitt B4
 Table B13 : Comparison of the critical bending moments M_{yI} [kNm] for a girder with cross section B4

Belastung : 1,0-fache Eigenlast $g = 5,94$ kN/m im Schwerpunkt + iterierte Gleichstreckenlast p mittig auf dem Obergurt

Trägerlänge l [m]	$v_0=l/1000$			$v_0=l/500$			$v_0=l/250$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,01$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,02$		
	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung
40															
35															
30	1363	1148	1383	1327	1119	1306	1253	1061	1185	1318	1113	1115	1303	1104	948
25	1576	1322	1638	1523	1290	1553	1427	1212	1404	1510	1277	1315	1493	1267	1111
20	1859	1565	2015	1790	1513	1907	1648	1416	1735	1761	1501	1612	1711	1481	1348
15	2136	1912	M_{ul}	2095	1830	M_{ul}	1933	1688	2128	2050	1790	2065	1963	1745	1734
10	M_{ul}	2148	M_{ul}	2151	2131	M_{ul}	2125	2039	M_{ul}	2133	2097	M_{ul}	2085	2030	2094
Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 2160$ kNm															

Tabelle B14 : Vergleich der kritischen Biegemomente M_{yI} [kNm] für den Träger mit Querschnitt B6
 Table B14 : Comparison of the critical bending moments M_{yI} [kNm] for a girder with cross section B6

Belastung : 1,0-fache Eigenlast $g = 6,68$ kN/m im Schwerpunkt + iterierte Gleichstreckenlast p mittig auf dem Obergurt

Trägerlänge l [m]	$v_0=l/1000$			$v_0=l/500$			$v_0=l/250$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,01$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,02$		
	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung
40	2268	2029	2400	2223	2001	2349	2138	1948	2265	2210	1996	2202	2188	1990	2068
35	2460	2186	2612	2394	2152	2529	2285	2085	2445	2373	2143	2365	2348	2132	2221
30	2674	2377	2916	2596	2331	2748	2460	2240	2662	2549	2314	2566	2504	2296	2394
25	2899	2598	M_{ul}	2789	2538	M_{ul}	2613	2415	2880	2722	2516	2760	2636	2477	2601
20	3005	2838	M_{ul}	2948	2748	M_{ul}	2789	2618	M_{ul}	2835	2710	2913	2745	2638	2741
15	M_{ul}	3005	M_{ul}	3000	2957	M_{ul}	2922	2805	M_{ul}	2927	2855	M_{ul}	2812	2739	2908
10	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	2996	2964	M_{ul}	2975	2952	M_{ul}	2856	2833	M_{ul}
Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 3019$ kNm															

Tabelle B15 : Vergleich der kritischen Biegemomente M_{yI} [kNm] für den Träger mit Querschnitt B7
 Table B15 : Comparison of the critical bending moments M_{yI} [kNm] for a girder with cross section B7

Belastung : 1,0-fache Eigenlast $g = 5,675$

Trägerlänge l [m]	$v_0=l/1000$			$v_0=l/500$			$v_0=l/250$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,01$			$v_0=l/500 + \vartheta_0=0,02$		
	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung	Sinus-näherung	Parabel-näherung	genaue Lösung
40	1595	1393	1676	1560	1379	1648	1500	1350	1609	1553	1375	1571	1541	1372	1501
35	1717	1482	1813	1665	1463	1764	1589	1424	1716	1650	1457	1666	1630	1452	1599
30	1848	1592	M_{ul}	1785	1565	1886	1679	1515	1840	1757	1557	1777	1712	1546	1692
25	1965	1721	M_{ul}	1889	1690	M_{ul}	1785	1616	1953	1846	1674	1875	1787	1649	1796
20	2046	1878	M_{ul}	1988	1824	M_{ul}	1874	1734	M_{ul}	1920	1790	1956	1846	1750	1870
15	M_{ul}	2017	M_{ul}	2040	1944	M_{ul}	1958	1849	M_{ul}	1967	1889	M_{ul}	1892	1831	1933
10	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	M_{ul}	2040	M_{ul}	2025	1961	M_{ul}	2003	1969	M_{ul}	1922	1895	1990
Bruchmoment für einachsige Biegung $M_{ul} = 2063$ kNm															

Tabelle B16 : Vergleich der kritischen Biegemomente M_{yI} [kNm] für den Träger mit Querschnitt B8
 Table B16 : Comparison of the critical bending moments M_{yI} [kNm] for a girder with cross section B8



Anhang C

Nachrechnung von durchgeführten Kippversuchen

C. Nachrechnung von durchgeführten Kippversuchen

Um eine Bestätigung der im theoretischen Teil getroffenen Voraussetzungen und Annahmen zu erhalten, sind Nachrechnungen von Kippversuchen an Stahlbetonträgern mit Abmessungen, die sich an denen tatsächlich hergestellter Träger orientieren, sehr hilfreich. Da die Durchführung solcher Großversuche einen in jeder Beziehung sehr großen Aufwand erfordern, sind bis heute nur wenige durchgeführt worden. Die ersten, uns bekannten Kippversuche an zwei Satteldachbindern aus einer laufenden Fertigung sind in den Jahren 1975/76 von *Frenzel* und *Rafla*, eine Serie von sechs weiteren Kippversuchen mit Parallelgurtbindern ist in den Jahren 1986-88 von *König* und *Pauli* durchgeführt worden. Äußerst wichtig und für spätere Nachrechnungen zwingend erforderlich ist eine lückenlose Dokumentation des gesamten Versuchsablaufs, wobei auch unwichtig erscheinende Einzelheiten festgehalten werden sollten.

Der Umfang einer Veröffentlichung aller Eingangsdaten und der Meßergebnisse ist besonders für denjenigen, der die Versuche nachrechnen will, von größter Bedeutung. Ein nur wenige Seiten umfassender Aufsatz in einer Fachzeitschrift, wie bei *Frenzel/Rafla*[31] und *König/Pauli*[32], gibt normalerweise nur einen Überblick über die wesentlichsten Daten und Versuchsergebnisse. In diesen Aufsätzen fehlen aus Platzgründen meistens wichtige Einzelheiten, die für einen zusammenfassenden Überblick zwar ohne Bedeutung, aber für eine gründliche Versuchsnachrechnung dringend notwendig sind. Während von dem *Frenzel/Rafla* -Versuch nur der bereits erwähnte Aufsatz veröffentlicht worden ist, liegen über die *König/Pauli* -Versuche ein ausführlicher Bericht [33] und eine Dissertation [34] vor.

Versuch Nr.	Querschnitt	statisches System	Betonfestigkeit β_w [N/mm ²]	Biegebewehrung	Obergurtbewehrung	Obergurtabmessungen	
1			57	6 Ø 25	4 Ø 12 4 Ø 8	b = 25 cm d = 12 cm d _v = 3 cm	1
2			57			2	
3			57			b = 35 cm d = 12 cm d _v = 3 cm	3
4			61		4 Ø 25 4 Ø 8	b = 25 cm d = 12 cm d _v = 3 cm	4
5			57,5		14 Ø 12,5 (vorgespannt)	4 Ø 12 4 Ø 12,5 (vorgespannt)	5
6			44	24 Ø 12,5 (vorgespannt) 4 Ø 16	6 Ø 12 2 Ø 8	b = 35 cm d = 14 cm d _v = 3 cm	6

Tabelle C1 : Zusammenstellung der Hauptparameter nach [33]

Table C1 : Synopsis of the main parameters acc. to [33]

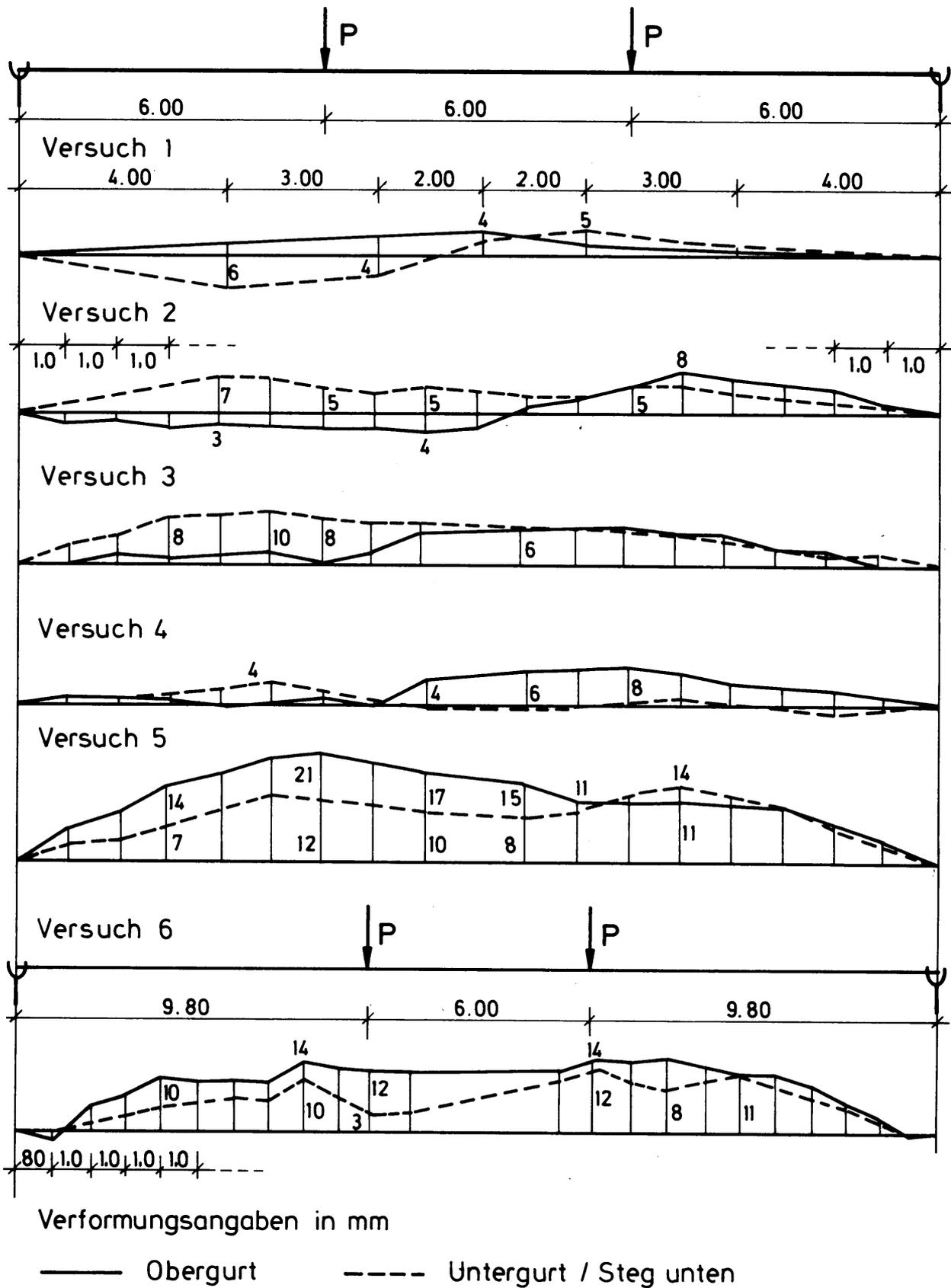


Bild C1 : Verlauf der gemessenen Vorverformungen für die Versuche 1-6 nach [33]
 Fig. C1 : Curves of the measured predeformations for the experiments 1-6 acc. to [33]

C1. Nachrechnung der Versuche von König/Pauli

Wie bereits erwähnt, sind die Versuche in [33] und [34] ausführlich dargestellt. Eine Zusammenfassung wird in [32] gegeben. Aufgrund dieser vorhandenen Veröffentlichungen werden hier nur die wesentlichsten Versuchsdaten zusammengestellt. Tabelle C1 gibt einen Überblick über Querschnittsform, Abmessungen, Bewehrungen, Materialkennwerte und Belastung. Der Verlauf der gemessenen Vorverformungen als horizontale Abweichungen des Obergurtes und des Untergurtes bzw. der Stegunterkante von der ideal geraden Sollage ist im Bild C1 dargestellt.

Die Versuche sind mit dem Rechenprogramm, dessen theoretischen Grundlagen hier beschrieben werden, das im Rahmen der Dissertation Röder[8] erstellt und seitdem weiter verbessert worden ist, nachgerechnet worden. Dabei sind die in [33] angegebenen Meßwerte möglichst genau erfaßt worden. Dazu gehören auch die gemessenen Vorverformungen in der im Bild C1 dargestellten Form. Das Rechenprogramm bietet dafür eine punktweise Eingabe an, wobei zwischen den Eingabewerten ein parabelförmiger Verlauf approximiert wird.

Das Betonwerkstoffverhalten ist mit den *Grasser*-Kurven nach Bild 4 in der Polynomformulierung nach Gl. (3.1) angesetzt worden. Der Scheitelwert der Kurven ist die Prismenfestigkeit $\beta_p = 0,85 \beta_{Wm}$, wobei β_{Wm} die festgestellte mittlere Würfeldruckfestigkeit gemäß Tabelle C1 ist. Es ist angenommen worden, daß der Beton Zugspannungen bis zu einer Dehnung von 0,1‰ aufnehmen kann. Eine Mitwirkung des Betons zwischen den Rissen (Tension - Stiffening-Effekt) ist nicht berücksichtigt worden. Die Querdehnungszahl des Betons für die Ermittlung des Schubmoduls aus dem Elastizitätsmodul ist mit $\nu = 0,2$ angenommen worden.

Es ist ein Werkstoffverhalten der Bewehrungen in der im Bild 3 dargestellten bilinearen Form verwendet worden. Die Fließspannungen und Elastizitätsmoduln sind in Tab. C1 angegeben.

Im Rechenprogramm sind folgende weitere Versuchsangaben nach [33] berücksichtigt worden, die hier nicht näher erläutert werden :

- Torsionsbewehrung aus Bügeln und Längsstäben
- geringe gemessene Lastexzentrizitäten der beiden Einzellasten
- Absolierung der Spannlitzen am Trägeranfang und Trägerende

Die Iterationsschranke im Rechenprogramm hat für Winkelgrößen 0,5° und für alle anderen Größen (z.B. Verformungen, Kräfte, Momente, usw.) 1%

betragen. Die Berechnungen sind für eine starre Gabelagerung der Träger durchgeführt worden.

Alle vorstehenden Angaben gelten gleichermaßen für die Nachrechnungen aller sechs Versuche. Auf Besonderheiten der einzelnen Versuche und auf die Ergebnisse der Berechnungen im Vergleich zu den gemessenen Werten wird im folgenden näher eingegangen. Als aussagekräftige Vergleichsgrößen werden die horizontale Verschiebung des Obergurtes und die Vertikaldurchbiegung jeweils in Trägermitte, sowie die Versagenslasten herangezogen. Die Angabe der Last bezieht sich dabei auf die Größe der richtungstreuen Einzellast P (s. Tab. C1) mit ihrem Angriffspunkt auf dem Obergurt. Die Richtungstreue der beiden Einzellasten P ist durch die bei den Versuchen eingesetzte Belastungsvorrichtung auch in der technischen Realisierung als erfüllt anzusehen, so daß diesbezüglich keine wesentlichen Abweichungen zwischen Wirklichkeit und Berechnungsvorgabe bestehen. Außerdem ist das in der geometrischen Schwerlinie wirkende Eigengewicht vorhanden.

In den folgenden Versuchsbeschreibungen ist von Schiefstellung des Trägers in der Gabel als zusätzlichen Imperfektionen die Rede. Diese Schiefstellungen sind immer in beiden Gabeln gleichsinnig erfolgt und versuchstechnisch so verwirklicht worden, daß der Fußpunkt des Trägers (= Auflagerpunkt) festgehalten und der Obergurt verschoben worden ist. Dieses Vorgehen entspricht einer Starrkörperdrehung um die Lagerlinie (= Trägerunterkante). Im Rechenprogramm ist diese zusätzliche Imperfektion in gleicher Weise berücksichtigt worden.

C1.1 Nachrechnung Versuch 1

Die berechneten und gemessenen Last-Verformungskurven sind im Bild C2 angegeben.

Der Träger ist nicht durch kontinuierliche Laststeigerung in einem Zug zu Bruch gefahren worden, sondern es sind bei mehreren Laststufen zusätzliche Imperfektionen in Form von unterschiedlichen Gabelschieflstellungen aufgebracht und wieder rückgängig gemacht worden. Diese Lastpfade spiegeln sich auch bei den Meßwertkurven im Bild C2 wieder. Zunächst hat der Träger unter einer Last von ca. 75 kN von Freitag bis Montag in der Versuchsvorrichtung gestanden, wodurch sich die horizontale Verformung um etwa 7 mm und die vertikale um etwa 11 mm vergrößert hat. Bei den anschließend vorgenommenen stufenweisen Lasterhöhungen ist der Träger in der

Gabel um etwa 0,25%, 0,5%, 0,75% und 1% schief und wieder gerade gestellt worden. Das Aufbringen und Zurücknehmen dieser zusätzlichen Imperfektionen haben in jeder Laststufe bleibende Verformungen zur Folge gehabt, die sicherlich auch Auswirkungen auf die schließlich ermittelte Versagenslast gehabt haben. Um sich die Größenordnung dieser bleibenden Verformungen zu verdeutlichen, sollen für eine Last von ca. 135 kN die

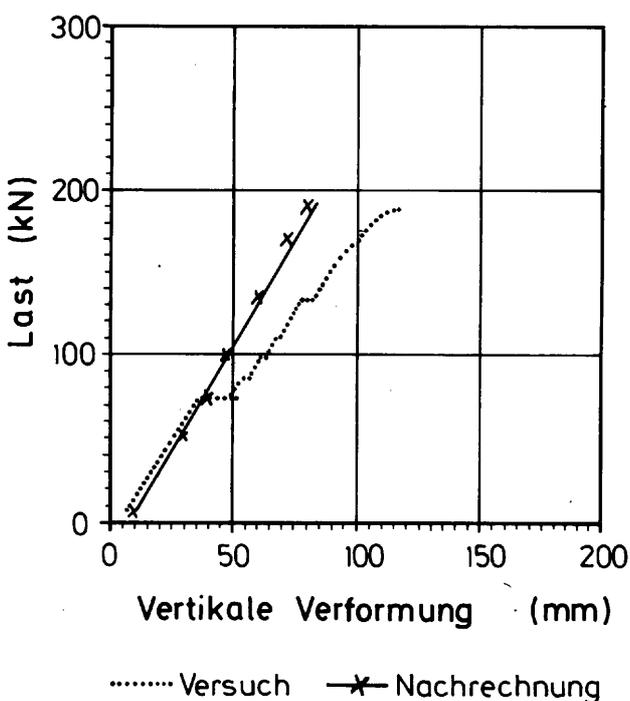
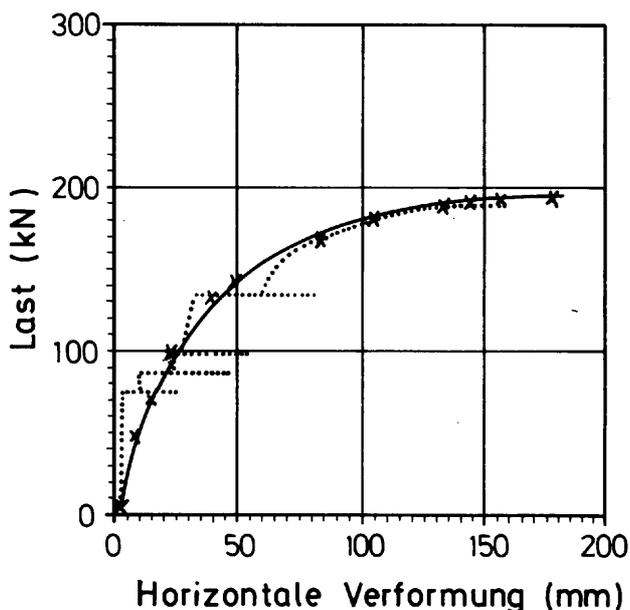


Bild C2 : Meßergebnisse [33] und Nachrechnung [8] für Versuch 1
 Fig. C2 : Measured [33] and calculated [8] results of experiment 1

gemessenen horizontalen Verformungen für zwei Schiefstellungen angegeben werden. Für eine Schiefstellung von 0,5% ist eine horizontale Verformung des Obergurtes von 44 mm gemessen worden. Nach Vergrößerung der Schiefstellung auf 1% hat sich diese Verformung auf ca. 80 mm erhöht, und nach Rücknahme der Schiefstellung wieder auf 0,5% sind 58 mm horizontale Verformungen gemessen worden. Es sind demnach allein bei dieser Laststufe 14 mm horizontale Verschiebung zurückgeblieben, die für die Belastung einen zusätzlichen Hebelarm bedeutet hat. Insgesamt sind aus allen Schiefstellungen sehr viel mehr bleibende Verformungen (= Hebelarm für Belastung) hervorgegangen, als überhaupt Vorverformungen gemessen worden sind.

Ab einer Last von ca. 135 kN ist der Träger mit einer Schiefstellung in der Gabel von 0,5% bis zum Versagen belastet worden. Als Versagenslast sind 190 kN gemessen worden.

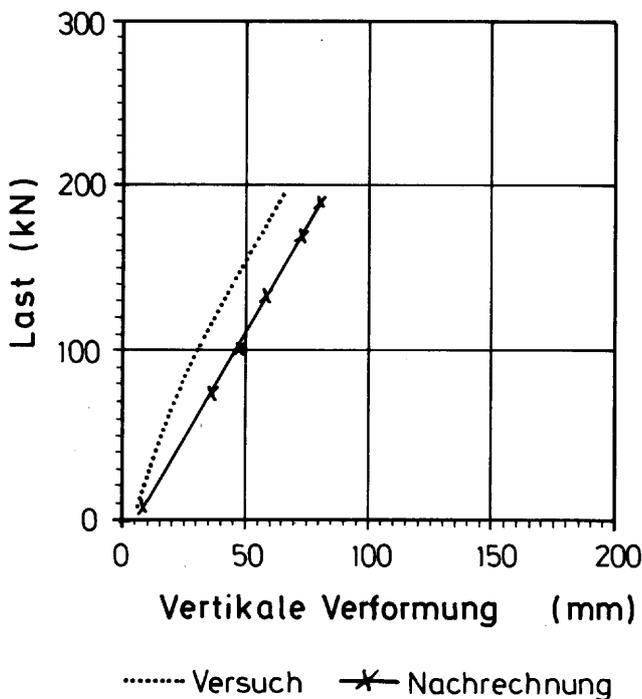
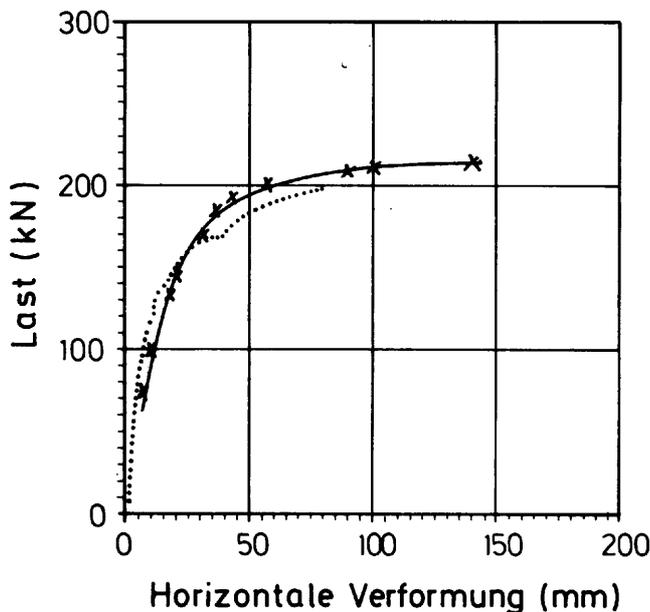
Bei der Nachrechnung ist als Imperfektion zusätzlich zu den gemessenen Vorverformungen nach Bild C1 von Beginn an eine Schiefstellung in der Gabel von 0,5% berücksichtigt worden. Als rechnerische Versagenslast ergibt sich 196 kN. Der Verlauf der berechneten Verformungen ist ebenfalls im Bild C2 dargestellt.

Bei einem Vergleich der gemessenen mit den berechneten Verformungskurven ist der vorstehend kurz beschriebene Versuchsablauf zu beachten. Es ist klar, daß die durch den Versuchsablauf bedingten bleibenden Verformungen mit dem Rechenprogramm, das eine stufenweise kontinuierliche Laststeigerung vornimmt, nicht zu erfassen sind. Bei den vertikalen Verformungen sind jedoch die Steigungen der gemessenen und der berechneten Kurven fast gleich, was auf die richtige rechnerische Erfassung der zugehörigen Steifigkeit schließen läßt. Bei den horizontalen Verformungen ist der sehr viel steilere Anstieg der Meßkurve gegenüber der berechneten Kurve damit zu erklären, daß im Versuch die Lasterhöhungen bis ca. 135 kN ohne Gabelschiefstellung erfolgt sind, während bei der Berechnung von vorn herein eine Gabelschiefstellung von 0,5% berücksichtigt wird.

Obwohl die Übereinstimmungen zwischen Versuch und Berechnung bereits ausreichend genau ist, soll noch ein weiteres Ergebnis aus einer ganzen Reihe von Berechnungen mitgeteilt werden. Ausgangspunkt ist die Laststufe 135 kN gewesen, die ja als Beginn der kontinuierlichen Laststeigerung bis zum Versagen anzusehen ist. Dabei ist nach dem Stich einer parabelförmigen horizontalen Vorverformung gefragt worden, die bei Berücksichtigung der Gabelschiefstellungen von 0,5% unter 135 kN eine horizontale Gesamtverschiebung

des Obergurtes von 58 mm (Meßwert) hervorrufft. Diese 58 mm sind bei einem Parabelstich von etwa 30 mm erreicht worden. Wird mit dieser einen geänderten Vorgabe, also Ersatz der gemessenen Vorverformung durch einen parabelförmigen

Verlauf mit 30 mm Stich in Trägermitte, die Versagenslast bei sonst gleichen Bedingungen iteriert, so ergibt sich $P = 188 \text{ kN}$, also fast genau die Versuchslast.



C1.2 Nachrechnung Versuch 2

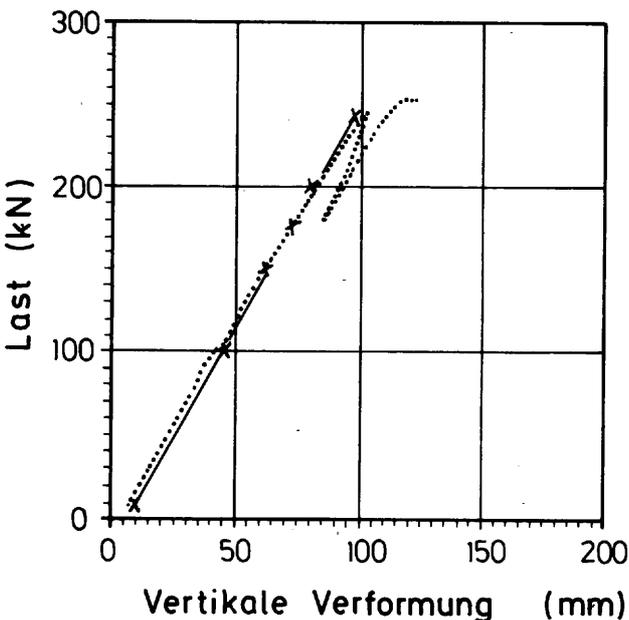
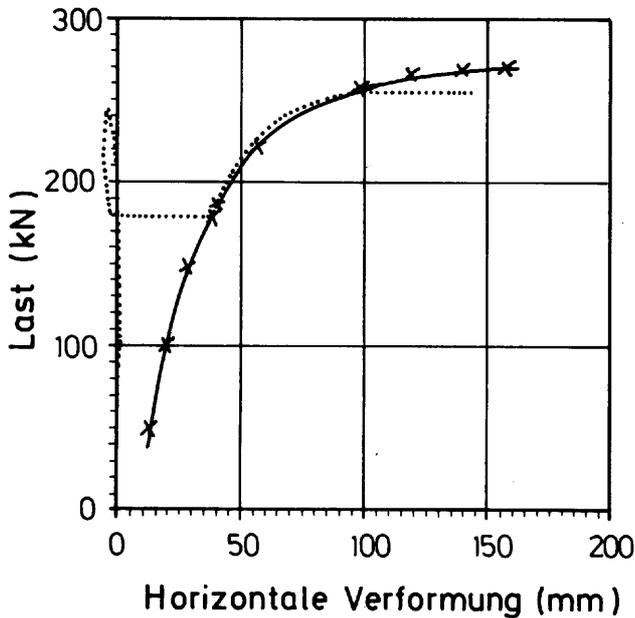
Die gemessenen und berechneten Last-Verformungskurven sind im Bild C3 dargestellt. Dieser Versuch ist nur mit den gemessenen Imperfektionen und einer kontinuierlichen Lasterhöhung durchgeführt worden. Bei Betrachtung der Meßwertkurve der horizontalen Verformungen fällt bei ca. 170 kN eine sprunghafte Zunahme um ca. 8 mm (lt. Protokoll in [33]) auf, die unerklärlich ist und auf die auch in [33] und [34] nicht weiter eingegangen worden ist. Die gemessene Versagenslast hat 198 kN betragen.

Die Nachrechnung des Versuchs hat eine Versagenslast von 213 kN ergeben. Vergleicht man die berechnete und die gemessene Kurve der Horizontalverformungen und läßt den Sprung in der Meßkurve bei 170 kN außer Betracht, so zeigt sich eine sehr gute Übereinstimmung. Inwieweit dieser aufgetretene Verformungssprung eine Auswirkung auf die schließlich gemessene Versagenslast gehabt hat, kann nicht beurteilt werden. Der Vergleich der Vertikalverformungen zeigt demgegenüber sehr deutliche Unterschiede, wobei deren Ursache wahrscheinlich mehr auf der Seite der gemessenen Kurve zu suchen ist. Zur Untermauerung dieser Behauptung betrachtet man zunächst einmal die gemessenen Kurven der Vertikalverformungen der Versuche 1, 3 und 4. Dabei stellt man fest, daß diese Kurven fast gleich sind, wenn man beim Versuch 1 die bei den einzelnen Laststufen auftretenden Sprünge unberücksichtigt läßt und beim Versuch 3 nur die Erstbelastungskurve betrachtet. Dies ist nicht weiter verwunderlich, da sich die für die Hauptbiegesteifigkeit maßgebenden Größen nur unwesentlich voneinander unterscheiden. Aus Tabelle C1 ist ersichtlich, daß bei den Versuchen 1 - 4 die Biegebewehrung und die Stegabmessungen gleich sind und die Betondruckfestigkeit fast gleich ist. Der breitere Obergurt beim Versuch 3 und die größere Obergurtbewehrung beim Versuch 4 sind für die Durchbiegung in vertikaler Richtung ohne wesentliche Bedeutung. Die Nachrechnungen aller vier Versuche bestätigen genau diese Verhaltensweise. Warum nun der Versuch 2, obwohl er in den entsprechenden, maßgebenden Daten mit den Versuchen 1, 3 und 4 identisch ist, mit seinem gemessenen, in vertikaler Richtung sehr viel steiferen Verhalten aus dem Rahmen fällt, ist nicht erklärbar.

Bild C3 : Meßergebnisse [33] und Nachrechnung [8] für Versuch 2
 Fig. C3 : Measured [33] and calculated [8] results of experiment 2

C1.3 Nachrechnung Versuch 3

Bild C4 gibt die gemessenen und berechneten Verformungskurven wieder.

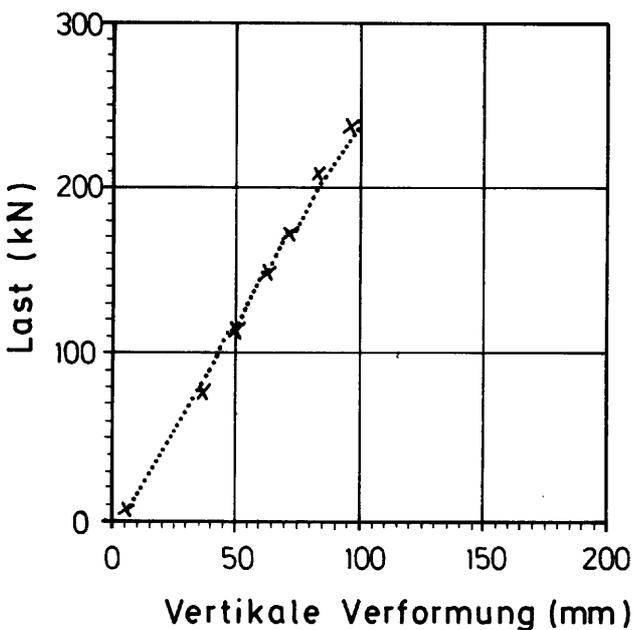
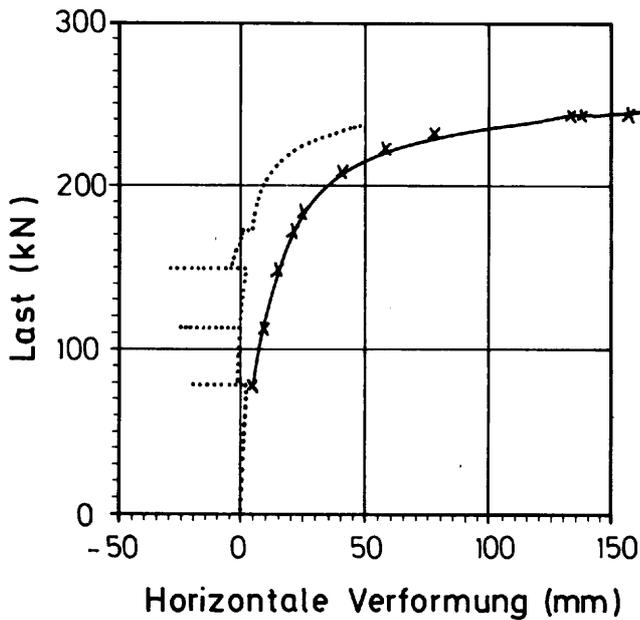


.....Versuch —x— Nachrechnung

Bild C4 : Meßergebnisse [33] und Nachrechnung [8] für Versuch 3
 Fig. C4 : Measured [33] and calculated [8] results of experiment 3

Zum Versuch 3 ist zunächst zu bemerken, daß der Obergurt des Trägers um 10 cm breiter als bei den vergleichbaren Querschnitten der Versuche 1-5 gewesen ist. Diese Obergurtverbreiterung hat erwartungsgemäß eine beträchtliche Steigerung der Kippstabilität bewirkt, so daß die versuchstechnisch mögliche Maximalbelastung zusammen mit der gemessenen Imperfektion nicht zum Versagen des Trägers geführt hat. Deshalb ist der Träger wieder entlastet und bei einer Last von ca. 180 kN noch zusätzlich in der Gabel um 1% schief dargestellt worden. Anhand der gemessenen horizontalen Verformungskurve (s. Bild C4) läßt sich feststellen, daß diese Schiefstellung jedoch entgegen der Richtung der sich abzeichnenden Horizontalverformung vorgenommen worden ist. Dieses Vorgehen kann zumindest als unglücklich bezeichnet werden. Wie sich nämlich im weiteren Versuchsablauf herausgestellt hat, hat die maximal mögliche Vertikalbelastung der Versuchsanlage auch trotz der zusätzlich aufgebrachten Gabelschiefstellung wiederum nicht ausgereicht, ein Versagen herbeizuführen. Es ist deshalb nach Erreichen der maximalen Vertikallast noch eine Horizontalkraft am Obergurt angebracht worden. Als Versagenslasten sind Vertikallasten von $P = 253,5$ kN (mögliche Maximallast) und eine zusätzliche Horizontallast von 1,6 kN in Trägermitte am Obergurt gemessen worden.

Die Nachrechnung des Versuchs 3 ist mit der gemessenen Imperfektion zuzüglich einer einprozentigen Schiefstellung des Trägers erfolgt. Da diese Schiefstellung rechnerisch vom Belastungsbeginn an vorhanden ist, bei der gemessenen Kurve jedoch erst ab ca. 180 kN gewirkt hat, weichen die gemessene und berechnete Kurve der Horizontalverformungen unterhalb der Laststufe 180 kN (s. Bild C4) natürlich stark voneinander ab. Eine Nachrechnung ist zunächst ohne zusätzliche Horizontallast durchgeführt worden und hat als Versagenslast $P = 277$ kN ergeben. Für diesen Fall sind die Verformungen im Bild C4 eingetragen. Eine weitere Berechnung ist für eine konstante Vertikallast $P = 253,5$ kN mit gleichzeitig wirkender horizontalen Einzellast am Obergurt in Trägermitte erfolgt. Das rechnerische Versagen des Trägers ist für eine zusätzliche Horizontallast von ca. 3 kN eingetreten.



..... Versuch —x— Nachrechnung

Bild C5 : Meßergebnisse [33] und Nachrechnung [8] für Versuch 4

Fig. C5 : Measured [33] and calculated [8] results of experiment 4

C1.4 Nachrechnung Versuch 4

Die gemessenen und berechneten Last-Verformungskurven sind im Bild C5 gegenübergestellt.

Der Unterschied des Versuchsträgers 4 zu den sonst gleichen Versuchsträgern 1 und 2 hat in der deutlich größeren Obergurtbewehrung (4 Ø 25 anstelle 4 Ø 12) gelegen. Auf die Problematik einer über das konstruktive Maß hinausgehenden, sehr viel größeren Obergurtbewehrung und den Einfluß einer solchen Maßnahme auf das Kippverhalten von Stahlbetonträgern wird im Kap. C1.7 und Kap.7.3 ausführlich eingegangen, so daß sich hier auf den eigentlichen Versuchsablauf beschränkt werden kann. Wie schon beim Versuch 1 sind auch beim Versuch 4 für mehrere vertikale Laststufen zusätzliche Maßnahmen durchgeführt worden, die zu sehr großen Zunahmen der Horizontalverformungen geführt haben. Im Gegensatz zum Versuch 1, wo zusätzliche geometrische Imperfektionen in Form von Schiefstellungen des Trägers überlagert worden sind, ist beim Versuch 4 eine am Obergurt in Trägermitte angreifende Horizontallast zunächst stufenweise bis etwa 2,7 kN aufgebracht und anschließend wieder zurückgenommen worden. Wie beim Versuch 1 sind auch hier trotz völliger Entlastung bleibende Verformungen in horizontaler Richtung die Folge gewesen. Außerdem ist die Horizontallast entgegengesetzt zu der sich aufgrund der vorhandenen Vorverformung abzeichnenden Richtung aufgebracht worden. Wie sich aus Bild C5 ablesen und anhand der Meßprotokolle [33] auch zahlenmäßig feststellen läßt, ist der Träger bei drei Laststufen (ca. 80, 115 und 150 kN) durch die zusätzliche Horizontalkraft immer wieder gerade gezogen worden und hat sich deshalb in horizontaler Richtung nicht frei verformen können. Wie bei Versuch 2 ist auch hier bei einer Laststufe von ca. 170 kN ohne erkennbare Fremdeinwirkung ein Sprung in der Kurve der Horizontalverformungen zu verzeichnen, der lt. Zahlenangabe in [33] etwa 5 mm betragen hat. Die gemessene Versagenslast hat 237,6 kN betragen.

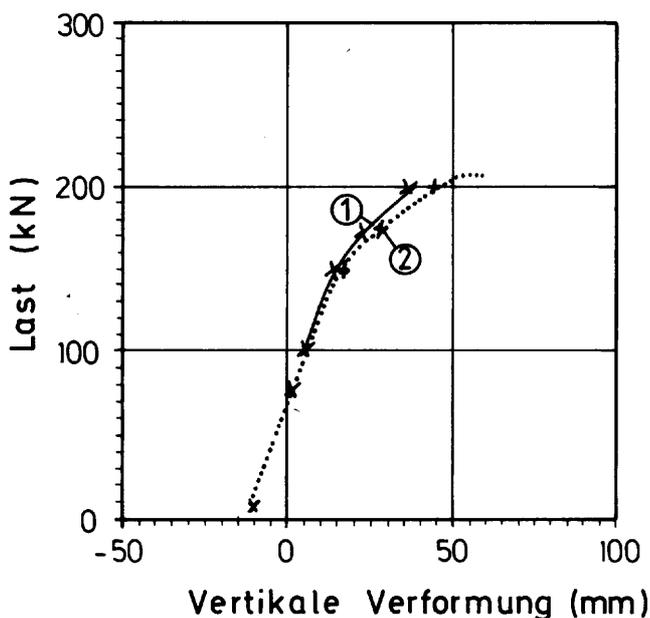
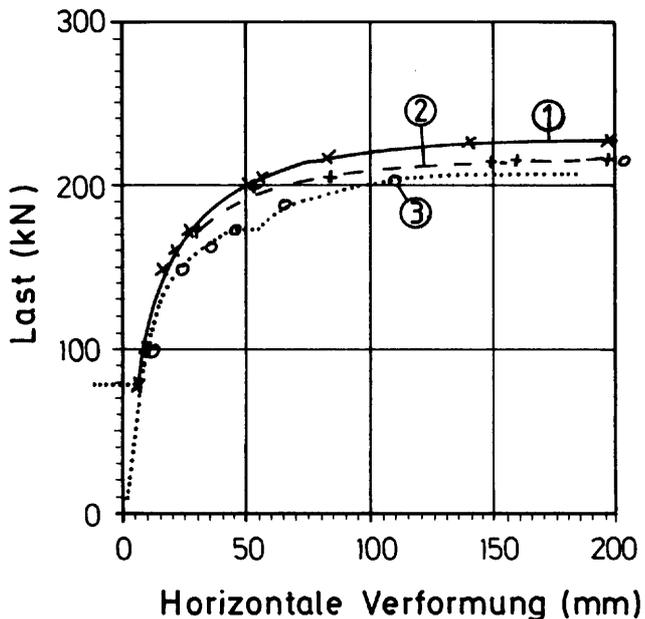
Aufgrund der vorstehend kurz beschriebenen Versuchsdurchführung ist es nicht verwunderlich, wenn die berechnete Kurve der Horizontalverformungen von der gemessenen stark abweicht. Oberhalb von etwa 170 kN stimmen jedoch die Krümmungen von Meßkurve und berechneter Kurve gut überein. Als rechnerische Versagenslast ist $P = 243,6$ kN ermittelt worden.

C1.5 Nachrechnung Versuch 5

Die gemessenen und berechneten Last-Verformungskurven sind im Bild C6 dargestellt.

Der Versuch 5 ist der erste von zwei Versuchen mit vorgespannten Trägern gewesen. Von den Querschnittsabmessungen und der Betonfestigkeit her paßt der Versuch 5 zu den Versuchen 1, 2 und 4. Zu den gemessenen Vorverformungen ist anzumerken, daß sie deutlich größer, etwa um den Faktor 2 - 3, als bei den Versuchen 1 bis 4 gewesen und über die Trägerlänge auch wesentlich gleichförmiger verlaufen sind.

Bei der Eingangslaststufe von ca. 80 kN ist zunächst wie beim Versuch 4 eine zusätzliche Horizontallast stufenweise bis etwa 3 kN am Obergurt in Trägermitte aufgebracht und wieder weggenommen worden. Wie schon beim Versuch 4 ist diese Horizontallast entgegen der sich abzeichnenden Richtung der Horizontalverformung aufgebracht worden. Aus dieser Horizontalbelastung sind wesentliche Verformungen jedoch nicht zurückgeblieben. Anschließend hat der Träger unter der Vertikallast von ca. 80 kN von Freitag nachmittag bis Montag morgen in der Versuchsvorrichtung gestanden, wobei in regelmäßigen Abständen gemessen worden ist. Während dieser Zeit läßt sich anhand der Meßwertprotokolle für die Obergurt- und Untergurtverschiebung (siehe [33]) eine Richtungsänderung der Verdrehung feststellen, da nämlich die anfangs größeren Obergurtverschiebungen am Ende der Dauerlaststufe kleiner als die Untergurtverschiebungen geworden sind. Dieser Effekt ist beim nachfolgenden Versuch 6 in weit größerem Umfang noch deutlicher zutage getreten. Hier beim Versuch 5 sind während der Dauerbelastung am Obergurt in Trägermitte Verschiebungszunahmen von ca. 3,5 mm auf ca. 6 mm und an der Stegunterkante von ca. 3 mm auf ca. 10 mm gemessen worden. Aus diesen Zahlenwerten ergibt sich eine Umkehr der Verdrehrichtung des Trägers von etwa +0,04 % auf etwa -0,4 %. Im Laufe der weiteren Laststufen hat sich jedoch die Verdrehrichtung noch einmal umgekehrt, so daß ab einer Last von etwa 140 kN wieder "normale" Verformungsverhältnisse eingetreten sind. Hierunter ist die folgerichtige Erwartung zu verstehen, daß sich die Tendenz der gemessenen Vorverformungen (hier: oben größere Verschiebung als unten → Verdrehrichtung) während der Belastung bis zum Versagen in den Trägerverformungen widerspiegelt.



.....Versuch *—Nachrechnung

Bild C6 : Meßergebnisse [33] und Nachrechnung [8] für Versuch 5

Fig. C6 : Measured [33] and calculated [8] results of experiment 5

Wie bei den vorangegangenen Versuchen ist bei einer Belastung von ca. 170 kN ein deutlicher Sprung (hier von etwa 12 mm) bei der gemessenen Horizontalverformung des Obergurts festzustellen. Im Versagenszustand sind als Last 206 kN gemessen worden, wie sich anhand der aufgenommenen Meßwertprotokolle feststellen läßt. In [32] bis [34] wird unverständlicherweise als Versagenslast ein etwas geringerer Wert von 200 kN angegeben, der zwar als letzter Meßwert aufgezeichnet worden ist, der jedoch eindeutig bereits auf dem abfallenden Ast der horizontalen Verformungskurve liegt und damit nicht den Spitzenwert der Kurve angibt. Das aus den Meßprotokollen ablesbare Verformungsverhalten im Versagensbereich kann als erwartungsgemäß bezeichnet werden, da sehr viel größere Verformungen am Obergurt als an der Stegunterkante aufgetreten sind.

Für die Nachrechnung des Versuchs ist in Anlehnung an [33] ein Spannkraftverlust infolge Kriechen und Schwinden von zunächst 11% berücksichtigt worden. Unter Ansatz der gemessenen Vorverformungen sind eine rechnerische Versagenslast von 226 kN und die im Bild C6 dargestellten Verformungskurven <1> berechnet worden. Im Vergleich zu den Versuchen 1 bis 4 treten beim Versuch 5 doch deutlich größere Unterschiede zwischen Messung und Berechnung auf. Da die Angabe für den Kriech- und Schwindverlust nur mit den üblichen Annahmen der DIN 4227 abgeschätzt worden ist, ist in Anlehnung an [33] eine weitere Berechnung mit einem Spannkraftverlust infolge K+S von 20% durchgeführt worden. Die für diesen Fall berechneten Verformungskurven <2> sind ebenfalls im Bild C6 eingezeichnet, wobei die Versagenslast bei 216 kN liegt. Während für den größeren K+S-Verlust die gerechnete und gemessene Kurve der Vertikalverformungen fast übereinstimmen, sind bei den Horizontalverformungen immer noch spürbare Unterschiede beim Kurvenverlauf zu verzeichnen. Für den Versuch 5 sind noch eine ganze Anzahl weiterer Nachrechnungen mit unterschiedlichen Parameteränderungen durchgeführt worden. Daraus ist im Bild C6 noch das Ergebnis<3> für eine Vorverformung mit parabelförmigem Verlauf und einem Stich in Trägermitte von 1/500 plus Verdrehung von 0,5% angegeben. Mit dieser Vorgabe wird die gemessene Kurve der Horizontalverformungen recht gut getroffen. Die rechnerische Versagenslast ist für diesen Fall ebenfalls mit 216 kN ermittelt worden.

C1.6 Nachrechnung Versuch 6

Bild C7 gibt die gemessenen und berechneten Last-Verformungskurven wieder.

Wie aus Tabelle C1 ersichtlich, hat sich der Versuch 6 bezüglich Querschnittsform, Querschnittsabmessungen, Trägerlänge, Größe der Vorspannung und der Betonfestigkeit wesentlich von den Versuchen 1 bis 5 unterschieden. Anhand der vorliegenden Versuchsprotokolle [33] kann der Versuchsablauf zumindest für das Last-Verformungsgeschehen nachvollzogen werden, wobei sich einige ungewöhnliche Dinge feststellen lassen. Um diesen Versuchsablauf anhand der im Bild C7 dargestellten Meßkurve der Horizontalverformungen besser folgen zu können, sind Kurvenpunkte mit den Buchstaben a - i gekennzeichnet, auf die im folgenden Bezug genommen wird. Zunächst ist der Träger schrittweise bis ca. 140 kN belastet worden (Kurve 0-a-b). Bereits bei dieser Erstbelastung ist der Effekt zu verzeichnen, daß die gemessenen Untergurtverschiebungen grundsätzlich größer als die Obergurtverschiebungen gewesen sind. Diese Tatsache ist insofern ungewöhnlich und nicht erklärbar, da die gemessenen Vorverformungen (s. Bild C1) doch sehr deutlich größere Verschiebungen am Obergurt als am Untergurt aufgewiesen haben. Stellt man sich dieses Verhalten einmal vor, so bedeutet dies, daß der Träger in der Versuchsanlage aufgrund der Vorverformungen bei einem Blick in Längsrichtung z.B. nach rechts ausgelenkt und im Uhrzeigersinn verdreht ist, und daß bei der folgenden Belastung der Träger sich zwar weiter nach rechts verschiebt, aber nunmehr entgegen dem Uhrzeigersinn verdreht wird. Daß dieses untypische Verformungsverhalten sofort bei der Versuchsdurchführung erkannt worden ist, ist erfahrungsgemäß unwahrscheinlich. Diese Vermutung liegt sehr nahe, vor allem wenn man bedenkt, daß die gemessenen Verschiebungen zu diesem Zeitpunkt oben erst ca. 6 mm (Pkt. b) und unten ca. 8 mm betragen haben, also verhältnismäßig klein gewesen sind. Aus der Größenordnung der Verformungen ist jedoch eines klar erkennbar gewesen, daß nämlich die aufbringbare Maximallast der Versuchsanlage nicht ausgereicht hätte, den Träger allein mit den gemessenen Vorverformungen zum Versagen zu bringen. Diese Tatsache ist vermutlich der Anlaß gewesen, den Träger wieder bis auf ca. 80 kN zu entlasten (Kurve b-a) und im Sinne der gemessenen Vorverdrehung um 1% in der Gabel schief zu stellen (Bereich a-c). Diese Maßnahme hat dann auch zu einer deutlichen Vergrößerung der Verformungen geführt, wobei die Verschiebungen am

Obergurt wieder größer als am Untergurt geworden sind. Mit den unmittelbar vor und nach der Schiefstellung gemessenen Verformungen in Trägermitte läßt sich das Verformungsverhalten des Trägers beschreiben. Unter einer Last von ca. 80 kN sind vor der Schiefstellung ca. 3 mm am Obergurt und ca. 4 mm am Untergurt gemessen worden, was einer Verdrehung von etwa $-0,08\%$ entsprochen hat.

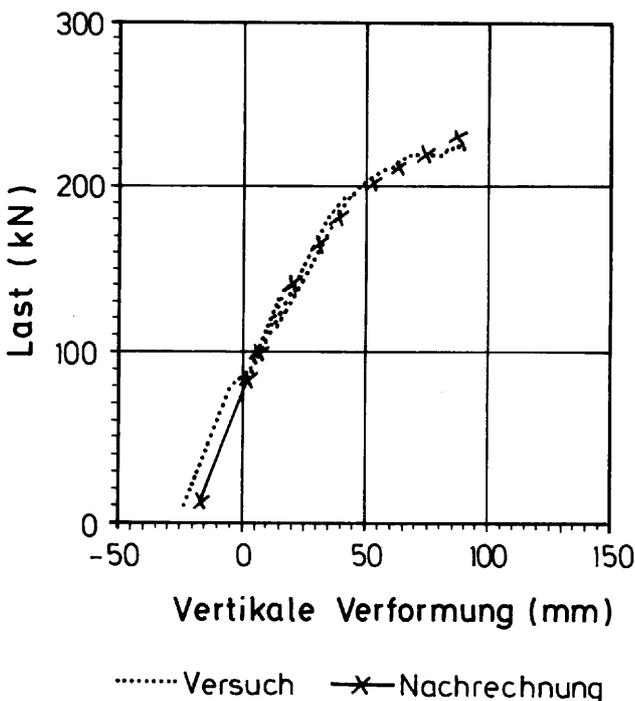
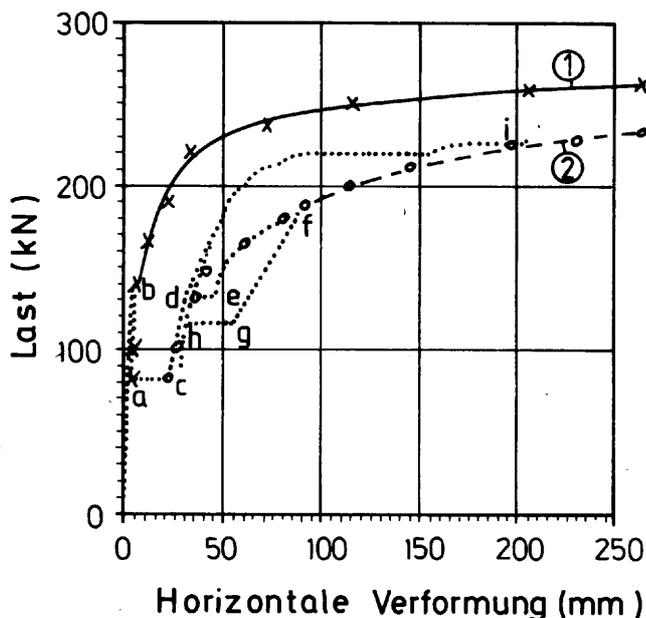


Bild C7 : Meßergebnisse [33] und Nachrechnung [8] für Versuch 6
 Fig. C7 : Measured [33] and calculated [8] results of experiment 6

Nach der Schiefstellung in der Gabel von $+1\%$, was einer Verschiebung von 12 mm nur am Obergurt zur Folge hat, hat die Verschiebung in Trägermitte ca. 21 mm oben (Pkt. c) und ca. 15 mm unten betragen. Die zugehörige Verdrehung berechnet sich daraus zu etwa $+0,5\%$. An diesen Zahlenwerten fällt auf, daß sich die Verschiebungen erwartungsgemäß überproportional vergrößert haben, wogegen sich die einprozentige Schiefstellung in der Gabel nur etwa zur Hälfte in der Trägermitte wiederfindet. Diese Schiefstellung sollte eigentlich einer Starrkörperdehnung entsprechen und müßte somit voll über die gesamte Trägerlänge vorhanden sein. Hier beim Versuch 6 hat sich der Träger bei seiner Erstbelastung mehr oder weniger unbeeinflusst jedoch in eine der Gabelschiefstellung entgegengesetzte Richtung verdreht und hat deshalb naturgemäß gegen die gegenläufige Zwangsschiefstellung verhältnismäßig mehr Widerstand mit den vorstehend beschriebenen Auswirkungen geleistet.

Mit der Schiefstellung ist ein weiterer Lastzyklus zwischen etwa 80 kN und 140 kN gefahren worden (Kurve c-d), ohne daß sich etwas tendenziell am Verformungsverhalten geändert hat. Danach ist der schiefgestellte Träger unter einer Last von etwa 132 kN ca. 3,5 Tage in der Versuchsanlage stehen gelassen worden, um, wie in [33] ausgeführt, die vorhandenen Imperfektionen durch Kriechverformungen zu vergrößern. Während dieser Zeit haben sich erwartungsgemäß die horizontalen Verformungen wesentlich vergrößert, und zwar hat in Trägermitte die Obergurtverschiebung von etwa 3,5 mm auf 46 mm (Kurve d-e) und die Untergurtverschiebung von etwa 29 mm auf 58 mm zugenommen. Die gleichen Auswirkungen einer Dauerbelastung sind auch beim Versuch 5 feststellbar, wo der überdrückte Zuggurt sich ebenfalls verhältnismäßig mehr als der eigentliche Druckgurt verformt hat. Damit ist gleichzeitig jedoch auch ein Richtungswechsel bei der Verdrehung des Trägers in Feldmitte verbunden gewesen, und zwar in einer Größenordnung von $+0,5\%$ auf -1% . Der Träger hat sich demnach durch die eigentlich in die falsche Richtung erfolgte Schiefstellung in der Gabel und der damit verbundenen Zwangsverdrehung im Laufe der 3,5 Tage offensichtlich durch Kriechen wieder in seine ursprünglich gewählte Richtung zurückgedreht. Dies ist nicht weiter ungewöhnlich, da durch den Kriechvorgang beim vorgespannten Stahlbeton bekanntlich auch Zwangsgrößen abgebaut werden. Das Verformungsbild des Trägers bezüglich der gemessenen Verdrehung hat also zu diesem Zeitpunkt so ausgesehen, daß der Träger in den Gabeln um $+1\%$, in Feldmitte aber um -1% geneigt gewesen ist. Bei

der von diesem Verformungszustand ausgehenden Fortsetzung des Versuchs ist zunächst die Last auf ca. 180 kN gesteigert (Kurve e-f) und anschließend aus technischen Gründen wieder auf ca. 115 kN verkleinert worden (Kurve f-g), ohne daß sich tendenziell etwas am Verformungsverhalten geändert hat. Bei dieser Laststufe 115 kN ist dann eine völlige Rücknahme der Schiefstellung in der Gabel erfolgt (Kurve g-h). Da diese Laststufe als Ausgangssituation für den letzten Belastungspfad bis zum Versagen angesehen werden kann, ist es sehr aufschlußreich, sich die gemessenen Verformungen näher anzusehen. Bei einer Vertikallast 115 kN und noch mit der Schiefstellung von 1% haben in Trägermitte die Horizontalverschiebungen oben etwa 55 mm und unten etwa 68 mm betragen, was einer Neigung von etwa $-1,1\%$ entsprochen hat. Nachdem der Träger in der Gabel wieder gerade gestanden hat, sind oben noch etwa 28 mm und unten 48 mm mit einer daraus resultierenden Verdrehung von $-1,6\%$ gemessen worden. Diese Zahlenwerte bestätigen in vollem Umfang die weiter vorn stehenden Bemerkungen zu den Auswirkungen der Trägerschiefstellung. Die Rücknahme von 12 mm Obergurtverschiebung in der Gabel hat in Trägermitte die Obergurtverschiebung um 27 mm und die Untergurtverschiebung um 20 mm wieder überproportional verringert. Die damit verbundene Rückdrehung an der Gabel hat die Verdrehung in Trägermitte jedoch um betragsmäßig $0,5\%$ vergrößert. Ursache dafür ist die bereits erwähnte Gegenläufigkeit von Schiefstellung und natürlicher Verdrehrichtung gewesen. Die aufgebrachte Schiefstellung hat für die sich bei der Erstbelastung frei eingestellte Verdrehungsrichtung des Trägers eine Behinderung etwa im Sinne einer elastischen Drehfeder bedeutet, durch deren Wegfall dann natürlich auch die zunächst behinderte Verdrehung größer geworden ist. Zusammenfassend kann aufgrund der vorstehenden Ausführungen festgestellt werden, daß das beobachtete Verformungsverhalten des Trägers beim Aufbringen und Zurücknehmen der Schiefstellung in der Gabel schlüssig zu erklären ist. Der eigentliche Widersinn hat in der gegenläufigen Richtung zwischen Vorverdrehung und Verdrehung unter Last gelegen. Daß das Verformungsverhalten des Trägers nicht den Erwartungen entsprochen hat, ist in [33] ebenfalls festgestellt worden. Man macht sich die Sache jedoch etwas zu einfach, wenn dieses Trägerverhalten nur als "nicht erklärbarer Effekt" (siehe [33], S.39, letzter Absatz) bezeichnet wird.

Nach Rücknahme der Gabelschieflstellung sind noch zwei weitere Be- und Entlastungszyklen bis etwa 160 kN bzw. 190 kN gefahren worden, bevor

der Träger dann endgültig bis zum Versagen belastet worden ist (Kurve h-i). Die größte Last hat schließlich 226kN betragen, wobei für diesen Zustand horizontale Verschiebungen am Obergurt von etwa 209 mm und am Untergurt von etwa 256 mm (Verdrehung ca. -4%) gemessen worden sind.

Die vorstehenden Ausführungen zu den Meßergebnissen des Versuchs 6 deuten schon darauf hin, daß ein Vergleich zwischen berechneten und gemessenen Verformungskurven in umfassender Form sehr schwierig ist und deshalb nur in begrenztem Umfang an den Stellen, wo noch einigermaßen klare Vorgaben erkennbar sind, durchgeführt wird. Für die Horizontalverformungen des Obergurtes ist im Bild C7 einmal die Kurve <1> dargestellt, die allein mit den gemessenen Vorverformungen (Bild C1) als Imperfektionsvorgabe bestimmt worden ist. Diese berechnete Kurve <1> folgt zunächst der gemessenen Kurve der Erstbelastung (0-a-b), die bei ca. 140 kN aufhört, und verläuft dann weiter bis zum Versagen bei 266 kN mit einer zugehörigen Horizontalverschiebung von 330 mm am Obergurt, wobei die Verdrehung etwa $+4\%$ beträgt. Die berechnete Form der Kurve <1> über den Punkt b hinaus liegt durchaus im Bereich des Möglichen, wenn man den nahezu parallelen Verlauf zwischen berechneter Kurve <1> und gemessener Versagenskurve h-i betrachtet. Dies läßt auf eine zutreffende rechnerische Erfassung der zugehörigen Steifigkeiten schließen. Beide Kurven sind in diesem Zusammenhang miteinander vergleichbar, da durch die Zurücknahme der Gabelschieflstellung die Imperfektionsvorgabe für beide Kurven übereinstimmt. Der zur Berechnung unterschiedliche Ausgangspunkt h der gemessenen Kurve h-i liegt im vorstehend bereits beschriebenen Versuchsablauf mit seinen bleibenden Verformungen begründet. Für den Bereich der Erstbelastung sind zwei Zahlenvergleiche erwähnenswert: bei ca. 80kN (Pkt. a) sind etwa 2 mm gemessen und 3 mm berechnet, bei ca. 140kN (Pkt. b) etwa 6 mm gemessen und 7 mm berechnet worden.

Nach der Trägerschieflstellung in der Gabel bei der Laststufe 80 kN ist eine Vergrößerung der Verformung auf etwa 21 mm gemessen worden (Pkt. c). Diese Stelle c ist der Ausgangspunkt für die zweite berechnete Kurve <2>, für die also die gemessene Vorverformung plus zusätzliche Schiefstellung von 1% in der Gabel als Imperfektionsangabe angesetzt worden sind. Für die Last 80 kN sind als Horizontalverformung des Obergurtes dabei 22 mm berechnet worden. Der berechnete Kurvenverlauf <2> entspricht zwischen 80kN und 180kN

größtenteils dem gemessenen Verlauf c-d-f, wenn man den Kriechvorgang bei der Meßkurve im Bereich d-e einmal außer acht läßt. Einer der Gründe für dieses Ergebnis ist sicherlich in der weitgehenden Übereinstimmung der Imperfektion bei Messung und Berechnung zu suchen. Die Berechnung dieser Kurve liefert schließlich eine Versagenslast von 236 kN mit einer Horizontalverformung am Obergurt von 280 mm.

Die beiden Ergebnisse der Nachberechnung in Form der dargestellten Kurven <1> und <2> sind allein mit den in [33] angegebenen, gemessenen Versuchsdaten und eindeutigen Imperfektionsvorgaben (gemessenen Vorverformungen, Schiefstellungen) erzielt worden. Bei der gemessenen eigentlichen Versagenskurve h-i ist diese Eindeutigkeit, bedingt durch den Versuchsablauf (Kriechvorgänge), nicht mehr vorhanden gewesen. Diese Kurve h-i könnte deshalb mit dem Rechenprogramm nur durch eine Parametervariation der wesentlichen Einflußgrößen, wie z.B. Betonfestigkeit, Größe der wirksamen Vorspannung (K+S), Imperfektion usw. , nachvollzogen werden. Solch eine Vorgehensweise ist bei einer Durchführung mit entsprechendem Sachverstand zwar vertretbar, da die Meßwerte mit Abweichungen behaftet sind und für Berechnungen meist Mittelwerte mit einem naturgemäß vorhandenen Spielraum angesetzt werden. Dennoch geben so ermittelte Ergebnisse mehr oder weniger Anlaß zu Spekulationen und besitzen immer den faden Beigeschmack eines "Hinrechnens". Deshalb wird sich hier auf die Angabe der beiden Nachrechnungskurven <1> und <2> beschränkt, die zwar den Verlauf der schließlich gemessenen Versagenskurve h-i nicht wiedergeben, aber dennoch aussagekräftig genug für die Qualität des Rechenprogrammes sind.

Abschließend zu den Ausführungen zum Versuch 6 soll auf eine wesentliche Unstimmigkeit zwischen Messung und Berechnung noch einmal hingewiesen werden. Wie bei den vorstehenden Bemerkungen bereits mehrfach angedeutet, hat sich der Träger bei Laststeigerung in eine entgegen der gemessenen Vorverdrehung verlaufende Richtung verdreht. Es sind demzufolge immer betragsmäßig größere Verschiebungen am Untergurt als am Obergurt gemessen worden, wobei natürlich der Zeitraum der Zwangsschiefstellung in der Gabel entsprechend zu beachten ist. Dieser Vorgang entspricht nicht den herkömmlichen Vorstellungen über das Verformungsverhalten solcher Träger und läßt sich mit den Grundlagen des hier vorgestellten Berechnungsverfahrens auch nicht nachvollziehen.

C1.7 Vergleichende Betrachtungen der Versuche 1 bis 4

Bei den nicht vorgespannten Versuchsträgern 1-4 sind zwei Träger völlig baugleich hergestellt, bei den anderen beiden Trägern sind planmäßig Änderungen vorgenommen worden, um damit das Stabilitätsverhalten ganz gezielt zu beeinflussen. Während die Versuche 1 und 2 mit gleichen Abmessungen und Bewehrungen hergestellt worden sind, ist beim Versuch 3 unter Beibehaltung der Bewehrungen nur der Obergurt um 10 cm von 25 cm auf 35 cm verbreitert worden. Beim Versuch 4 sind dagegen die Abmessungen des Querschnitts beibehalten, jedoch ist die Obergurtbewehrung von 4Ø12 auf 4Ø25 erhöht worden (siehe Tabelle C1).

Von besonderem Interesse ist ein Vergleich der Versuche 1 und 2 mit dem Versuch 4, da daran der Einfluß einer deutlich über das konstruktive Maß hinausgehenden Obergurtbewehrung auf das Stabilitätsverhalten aufgezeigt und diskutiert werden kann. Als Versagenslast ist bei Versuch 1 eine Last $P = 190$ kN, bei Versuch 2 eine Last $P = 198$ kN und bei Versuch 4 eine Last $P = 237$ kN gemessen worden. Vergleicht man zunächst nur diese ermittelten Traglasten, so ergibt sich beim Versuch 4 eine deutliche Zunahme um 22% gegenüber dem Mittelwert der Versuche 1 und 2. Daraus nun die Schlußfolgerung zu ziehen, daß die Ursache dieser Traglasterrhöhung allein aus dem einzigen planmäßigen Unterschied zwischen den Versuchen 1 und 2 bzw. 4 stammt, nämlich der vergrößerten Obergurtbewehrung, ist jedoch voreilig und sehr vordergründig. Diese Betrachtungsweise beachtet einige versuchsspezifische Gegebenheiten nicht, die auf das Tragverhalten der Versuchsträger jedoch einen wesentlichen Einfluß gehabt haben. Als erstes ist dabei die festgestellte Würfeldruckfestigkeit des Betons zu nennen, die beim Versuch 4 um 7% höher als bei den Versuchen 1 und 2 gelegen hat (61 N/mm^2 zu 57 N/mm^2). Weiterhin sind die gemessenen Vorverformungen der Versuche 1, 2 und 4 alles andere als gleich zu nennen (s. Bild C1). Die gemessenen Horizontalverschiebungen liegen zwar in einer Größenordnung, aber die Verschiebungsrichtungen und die sich daraus ergebenden Vorverdrehungen sind total unterschiedlich. Vor allem in den Bereichen der beiden Lastangriffspunkte haben sich bei allen drei Versuchen eigentlich nicht mehr miteinander vergleichbare Vorverformungsverhältnisse eingestellt. Darüber hinaus sind auch die

Versuchsabläufe bezüglich der Lastpfade und der geometrischen Imperfektionen oder Horizontal-lasten, die zusätzlich aufgebracht und wieder zurückgenommen worden sind, sehr unterschiedlich zueinander. Alle diese aufgezählten Punkte sind für die Versuchsergebnisse von wesentlicher Bedeutung und können deshalb bei einem Vergleich der Versuche nicht vernachlässigt werden. Wenn also bei einem Vergleich der Versagenslasten nur auf einen einzigen Unterschied zwischen den Versuchen, nämlich nur auf den planmäßig bei der Obergurtbewehrung vorhandenen, hingewiesen und so getan wird, als ob allein die Erhöhung der Obergurtbewehrung beim Versuch 4 die einzige Ursache für die größere Versagenslast gewesen ist, so ist diese Betrachtungsweise zu einseitig. Natürlich steht außer Frage, daß die Vergrößerung der Obergurtbewehrung zu der gemessenen Traglasterhöhung beigetragen hat, aber eben nicht allein und nicht ausschließlich.

Es ist ganz aufschlußreich, sich mit einer einfachen Zahlenrechnung Die Größenordnung des Einflusses einer Obergurtbewehrung einmal vor Augen zu führen. Dies soll im folgenden anhand der seitlichen Biegesteifigkeit des Versuchsträgerquerschnittes erfolgen, da diese Steifigkeit zusammen mit der Torsionssteifigkeit das Stabilitätsverhalten eines Trägers maßgebend beeinflusst. Die Querschnittsabmessungen der Versuchsträger sind in Tabelle C1 zusammengestellt. Für die Abschätzung der seitlichen Biegesteifigkeit ist die Größe der Betondruckzone von Bedeutung, wobei die unbekannte Druckzonenhöhe belastungsabhängig ist. Um auch bei der Näherungsrechnung ein einigermaßen zutreffendes Ergebnis zu erhalten, kann diese Druckzonenhöhe nicht einfach durch eine Vorgabe willkürlicher Randverzerrungen bestimmt werden, sondern es muß ein Gleichgewichtszustand am Querschnitt ($\Sigma M = 0$ und $\Sigma H = 0$) herangezogen werden. Aus den Nachberechnungen der Versuche mit dem Rechenprogramm nach [8] ergibt sich im Trägerbereich zwischen den beiden Einzellasten für die letzte stabile Laststufe kurz vor dem Versagen ein Beanspruchungszustand des Querschnitts von etwa $-1,5\%$ auf der Druck- und etwa $+2,5\%$ bis $+3\%$ auf der Zugseite. Bei einer statischen Höhe von etwa $1,20$ m folgt daraus eine Druckzonenhöhe von $40-45$ cm und somit ein Steganteil von 30 cm bei $12-15$ cm Obergurtdicke. Das Trägheitsmoment des Obergurts berechnet sich näherungsweise zu

$I_{OG} \approx (13,5 \cdot 25^3) / 12 \approx 17500 \text{ cm}^4$, das des Steganteils zu $I_{St} = (30 \cdot 13^3) / 12 \approx 5500 \text{ cm}^4$ und

damit das des Betonanteils der Druckzone zu $I_B \approx 23000 \text{ cm}^4$. Für einen Achsabstand der Eckbewehrung von 8 cm und ein Verhältnis der Elastizitätsmoduln von Stahl zu Beton $E_s/E_b = 7$ ermittelt sich ein Bewehrungsanteil des Trägheitsmoments für $4\varnothing 12$ von $I_{12} = 4 \cdot (7-1) \cdot 1,13 \cdot 8^2 \approx 1700 \text{ cm}^4$, bzw. für $4 \varnothing 25$ von $I_{25} = 4 \cdot (7-1) \cdot 4,91 \cdot 8^2 \approx 7500 \text{ cm}^4$. Das gesamte Trägheitsmoment ergibt sich damit für die Druckzone mit $4\varnothing 12$ zu 24700 cm^4 , bzw. für die mit $4\varnothing 25$ zu 30500 cm^4 . Dies bedeutet eine Erhöhung des Trägheitsmoments um etwa 23% , was sich bei Annahme eines etwa gleichen Elastizitätsmoduls des Versuchsbetons auch in der zugehörigen Biegesteifigkeit niederschlägt. Auf einige grundsätzliche Zusammenhänge zwischen Steifigkeiten und kritischer Last wird im Kap. 7.3 näher eingegangen. Danach wirkt sich eine Änderung bei den Steifigkeiten nur mit dem Quadratwurzelanteil des Veränderungsfaktors auf die kritische Last aus. Um bei der Zahlenrechnung zu bleiben, ergibt sich demnach aus einer Steifigkeitserhöhung von 23% eine Vergrößerung der Traglast von $\sqrt{1,23} = 1,11$, also nur von 11% . Aufgrund dieser zwar nur überschlägigen, aber dennoch im Kern zutreffenden Zahlenrechnung läßt sich von der gemessenen Traglasterhöhung um 22% etwa eine Hälfte mit einer Steifigkeitserhöhung erklären. Die andere Hälfte ist auf die bereits angesprochenen weiteren Versuchsunterschiede zurückzuführen. Dabei hat sicherlich die um 7% höhere Betonfestigkeit des Versuchs 4 eine gewisse Rolle gespielt, aber besonders die erwähnten Unterschiede bei den gemessenen Vorverformungen haben zu der Traglasterhöhung beigetragen.

An dieser Stelle soll noch auf zwei Berechnungsvarianten mit den Daten des Versuchs 4 eingegangen werden, die im Rahmen der vorgenommenen Versuchsnachrechnungen zu Vergleichszwecken ebenfalls durchgeführt worden sind. Die Nachrechnung des originalen Versuchs 4 mit dem Rechenprogramm nach [8] hat eine rechnerische Versagenslast von $P = 244 \text{ kN}$ mit den zugehörigen Steifigkeiten $(EI_z) = 12600 \text{ kNm}^2$ und $(GI_t) = 4400 \text{ kNm}^2$ im mittleren Trägerbereich ergeben. Nun ist nach der Versagenslast gefragt worden, wenn bei sonst denselben Vorgaben (Werkstoffe, Imperfektionen) nur die $4 \varnothing 25$ im Obergurt rechnerisch durch $4 \varnothing 12$ ersetzt werden. Als Versagenslast ist dafür $P = 221 \text{ kN}$ mit den Steifigkeiten $(EI_z) = 10400 \text{ kNm}^2$ und $(GI_t) = 4700 \text{ kNm}^2$ berechnet worden, also eine

Verringerung der Traglast um etwa 10% . In einer weiteren Berechnungsserie ist nur die Obergurtbreite verändert worden, wobei die Bewehrung im Obergurt bei 4Ø12 belassen worden ist. Bereits bei einer Breitenzunahme um nur 3 cm ist eine Versagenslast von $P = 244 \text{ kN}$ mit den Steifigkeitswerten $(EI_z) = 12200 \text{ kNm}^2$ und $(GI_z) = 4800 \text{ kNm}^2$ berechnet worden. Anhand dieser Ergebnisse kann also festgestellt werden, daß unter sonst völlig gleichen Vorgaben der Träger mit einer Obergurtbreite von 25cm und mit einer Bewehrung von 4 Ø25 in den Ecken rechnerisch dieselbe Versagenslast $P = 244 \text{ kN}$ wie ein Träger mit einer Obergurtbreite von 28 cm und einer Bewehrung von 4Ø12 aufweist. Dieses Beispiel zeigt auch sehr deutlich, daß bereits eine Obergurtverbreiterung von nur wenigen Zentimetern ausreichen kann, um die gleiche Wirkung auf das Stabilitätsverhalten eines Trägers zu erzielen wie eine vier- bis fünffache Vergrößerung der Obergurtbewehrung .

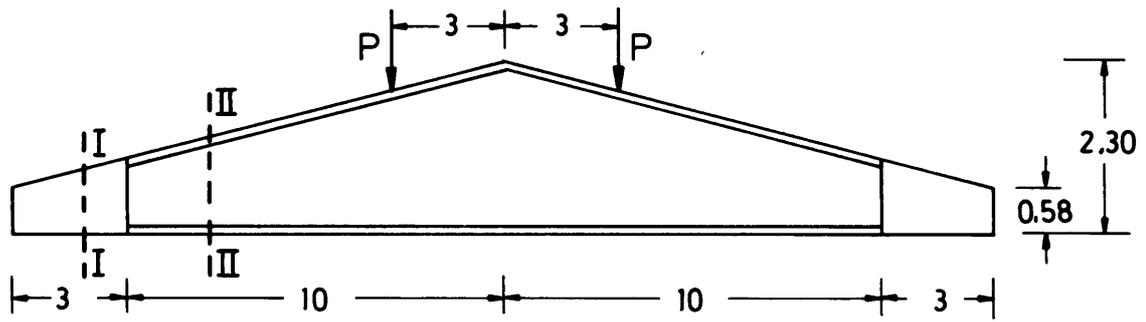
In diesen Zusammenhang paßt auch der Versuchsträger 3, der ja planmäßig mit breiterem Obergurt (35cm anstatt 25cm) und konstruktiver Obergurtbewehrung (4Ø12) hergestellt worden ist. Die größte aufbringbare Vertikalbelastung der Versuchsvorrichtung hat für die gemessene Imperfektion nicht ausgereicht, um den Träger zum Versagen zu bringen. Auch eine zusätzliche Schiefstellung von 1% hat nicht zum Erfolg geführt. Erst mit einer weiteren zusätzlichen Horizontallast konnte der Träger zum Versagen gebracht werden. Im Rahmen der Nachberechnungen ist die Versagenslast für den Versuch 3 mit der gemessenen Vorverformung plus einer Schiefstellung von 1% hochgerechnet worden. Dabei hat sich eine rechnerische Versagenslast von $P = 277 \text{ kN}$ ergeben. Trotz der wesentlich ungünstigeren Imperfektionsansätze kann eine Erhöhung der Versagenslast um fast 40% gegenüber den Versuchen 1 und 2 verzeichnet werden. Der Versuch 3 zeigt damit sehr eindrucksvoll den versteifenden Einfluß eines breiteren Obergurts.

C2. Nachrechnung des Kippversuchs von Frenzel/Rafla

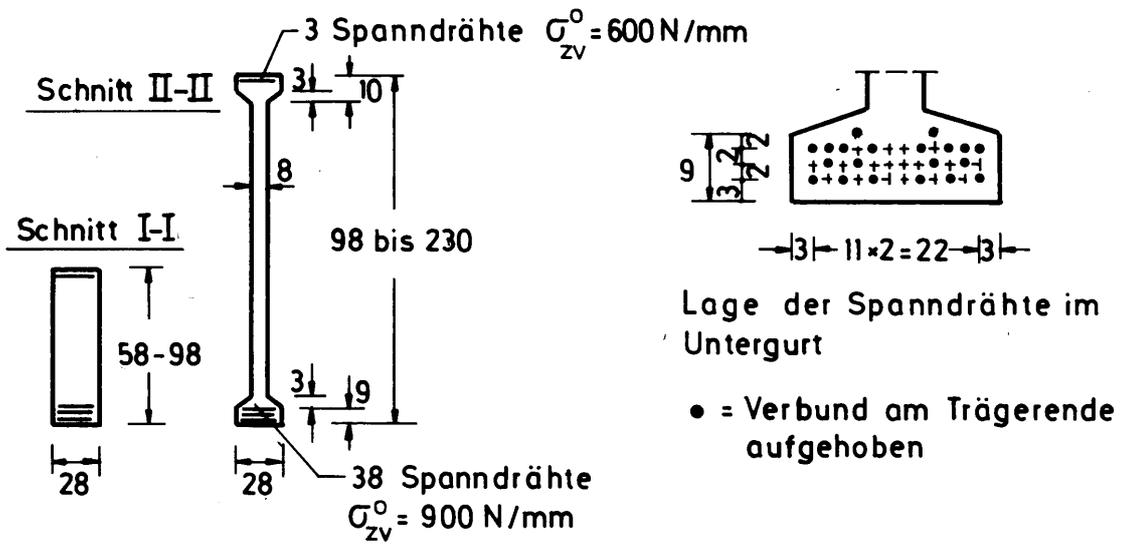
In [31] wird ein Kippversuch an zwei sehr schlanken, satteldachförmigen Spannbetonbindern mit einer Gesamtlänge von je 26,80m beschrieben. Zum besseren Verständnis werden die wesentlichsten Angaben hier noch einmal kurz zusammengefaßt. Im Bild C8 sind die Abmessungen, die Querschnitte, die Lage der Spannbewehrungen und eine Prinzipskizze der Lasteinleitung dargestellt.

Die Träger waren gabelgelagert mit einer Stützweite von 26m. Die Belastung bestand außer dem Eigengewicht aus zwei symmetrisch zur Trägermitte angeordneten Einzellasten mittig auf dem Obergurt. Die Querschnittshöhe betrug in Balkenmitte 2,30m und fiel mit einer Neigung von 13% zu den Enden ab. Die Trägerenden waren auf eine Länge von 3,30m als Rechteckquerschnitt, der übrige Bereich als I-Querschnitt ausgebildet. Die Binder waren im Spannbett mit Spannstahl St1420/1570 SigmaOval40 und Beton der Festigkeitsklasse B55 hergestellt worden. Die vorhandene Druckfestigkeit des Betons wurde anhand von nach dem Versuch entnommenen Bohrkernen ermittelt. Für den Träger 1 ergab sich eine mittlere Würfelfestigkeit von $\beta_w = 83,7 \text{ N/mm}^2$, für den Träger 2 eine von $\beta_w = 71,5 \text{ N/mm}^2$. Im Untergurt lagen 38 Spanndrähte mit einer Vorspannung von 900 N/mm^2 , im Obergurt 3 Spanndrähte mit einer Vorspannung von 600 N/mm^2 .

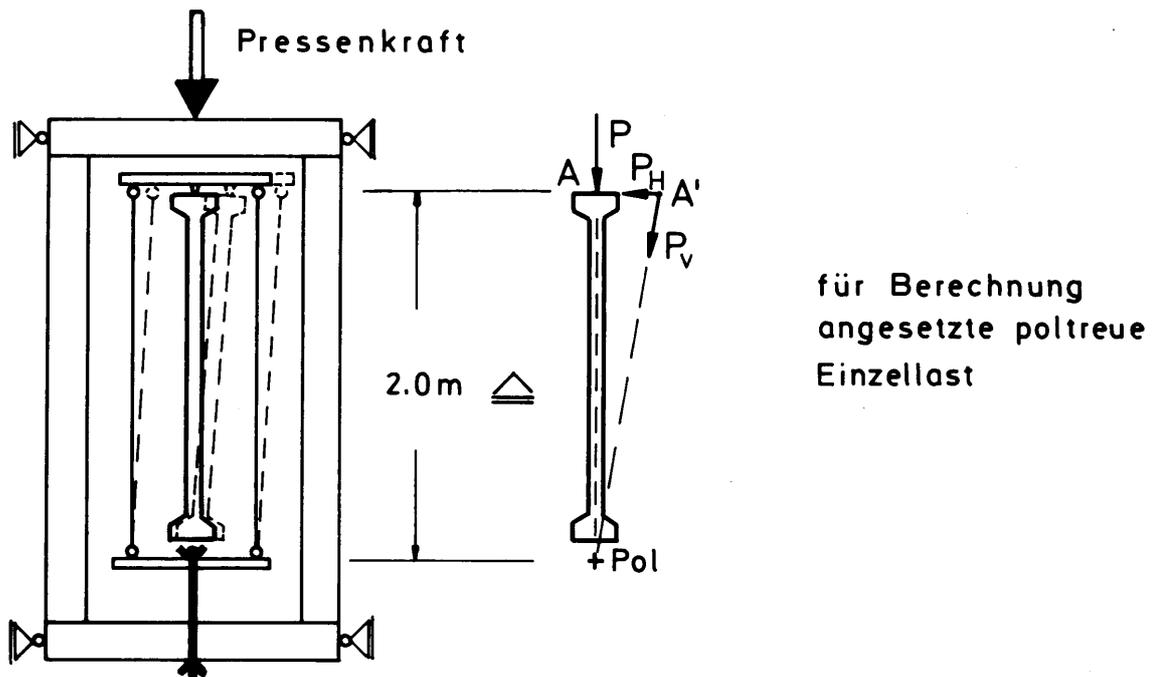
Bei den Versuchsträgern wurden seitliche Vorverformungen gemessen. Aus [31] , Bild 10 und Bild 11, können aufgrund der sehr kleinen Bildgröße die Zahlenwerte dieser Vorverformungen nur sehr grob abgelesen werden. Für den Träger 1 kann demnach in Feldmitte von einer seitlichen Auslenkung des Obergurts von etwa 3-3,5cm und unter den 3m von der Mitte liegenden Lastangriffspunkten von etwa 3cm bzw. 0,5cm ausgegangen werden. Der Obergurt des Trägers 2 war in der Mitte etwa 1-1,5 cm und an den Lastangriffspunkten ebenfalls etwa 1-1,5 cm bzw. 0-0,5 cm seitlich vorverformt. Die Vorverformungen der Obergurte verliefen also sehr ungleichmäßig und unsymmetrisch. Bei beiden Trägern wurden keine nennenswerten Abweichungen des Untergurts von der Sollage festgestellt.



a) Ansicht des Binders (überhöht) und Abmessungen



b) Querschnitte und Spannbewehrung



c) Vereinfachte Darstellung der Lasteintragungsvorrichtung

Während des Versuchs wurden weitere Verformungsmessungen durchgeführt. Nach [31] wurden für den Träger 1 bei einer Last von $2P = 350 \text{ kN}$ eine horizontale Auslenkung des Obergurts einschließlich Vorverformung von 6,3cm und eine des Untergurts von 2,0cm gemessen. Beim Träger 2 betragen die Werte bei einer Last von $2P = 400 \text{ kN}$ oben 5cm und unten 1,5cm. Der Träger 1 ging bei einer gemessenen Last von 476 kN zu Bruch, während der Träger 2 bei 450 kN versagte. Beiden Lasten sind noch jeweils 24 kN aus dem Gewicht der Belastungsvorrichtung hinzuzufügen, so daß sich schließlich 500 kN bzw. 474 kN als Versagenslasten ergeben.

Diese beiden Satteldachbinder sind mit dem Rechenprogramm nach Theorie II. Ordnung nachgerechnet und Ergebnisse bereits in [8] mitgeteilt worden. Die damals erzielten Ergebnisse konnten jedoch nicht ganz zufriedenstellen. Durch die seit Erscheinen der Dissertation [8] vorgenommenen Erweiterungen und Verbesserungen des Rechenprogramms besonders bezüglich der Berücksichtigung von Vorverformungen und Lastarten können nun mehrere Versuchsvorgaben noch zutreffender rechnerisch erfaßt werden, so daß die beiden Versuchsträger erneut nachgerechnet worden sind.

Die dem Aufsatz [31] entnommenen Eingangsdaten für die Berechnung bezüglich Querschnittsgeometrie und Werkstoffangaben sind dieselben wie in [8]. Für den Beton werden beim Träger 1 eine Prismenfestigkeit von $\beta_p = 71,2 \text{ N/mm}^2$ und beim Träger 2 von $\beta_p = 60,8 \text{ N/mm}^2$ angesetzt. Als Verlauf in der Druckzone wird ein B55 nach Bild 4 mit Koeffizienten nach Tabelle 1b angenommen. Die Mitwirkung des Betons auf Zugbeanspruchung wird auf 0,1 ‰ begrenzt. Für den Spannstahl gilt ein E-Modul von 200000 N/mm^2 und eine Spannungs-Dehnungs-Beziehung nach Bild 3. Die Spannbettvorspannung und die Stahlsorte sind bereits am Beginn des Kapitels angegeben worden. Die in [31] beschriebene Absisolierung einiger Spanndrähte in den Endbereichen der Träger, siehe Bild C8b, wird entsprechend berücksichtigt. Es wird mit einem geschätzten Spannkraftverlust von 10% infolge K+S gerechnet. Als Belastung greifen das Eigengewicht in der geometrischen Schwerlinie des Trägers und zwei symmetrisch, im Abstand 3m von der Trägermitte angeordnete Einzellasten P mittig auf dem Obergurt an. Als Imperfektion werden die gemessenen horizontalen Verschiebungen des Obergurtes mit dem über die Trägerlänge unsymmetrischen Verlauf berücksichtigt. Die gemessenen Zahlenwerte an ausgezeich-

neten Punkten sind bereits zu Beginn dieses Kapitels angegeben worden. An den Trägerenden betragen die Vorverformungen null. Weitere Zwischenwerte über die Trägerlänge werden für die Berechnung linear interpoliert. Für den Untergurt werden keine Vorverformungen angesetzt.

Bereits in [8] sind Zweifel an der in [31] vertretenen Richtungstreue der im Versuch aufgebrauchten Einzellasten geäußert worden. Zum besseren Verständnis dieses Sachverhalts ist im Bild C8c die Wirkungsweise der Lasteintragungsvorrichtung vereinfacht dargestellt. Die Pressenkraft wird über einen starren äußeren Rahmen und eine kurze Zugstange in das innere Gelenkviereck übertragen, wo mittels zweier weiterer Zugstangen die Kraft vom unteren in den oberen Riegel und von dort über ein Schneidenlager auf den Obergurt gelangt. Es ist eigentlich völlig klar, daß eine seitliche Verschiebung des Trägers, wie in Bild C8c angedeutet, sofort eine Schrägstellung der Zugstangen bewirkt. Damit werden horizontale Rückstellkräfte hervorgerufen, die eine Stabilisierung des Trägers zur Folge haben. Bei den in [8] vorgestellten Berechnungsergebnissen ist diese stabilisierende Wirkung durch horizontale Federn an den Lastangriffspunkten rechnerisch berücksichtigt worden. Die benötigte Federsteifigkeit ist dabei an den gemessenen Verformungen für die angegebenen Laststufen der beiden Versuchsträger "geeicht" worden, ist also mehr durch Probieren als durch Berechnung ermittelt worden. Dementsprechend können die damals erzielten Ergebnisse zwar nachweisen, daß grundsätzlich eine Stabilisierung der Träger über die Lasteintragungsvorrichtung vorhanden gewesen sein muß, die Übereinstimmung zwischen Berechnung und Versuch konnte jedoch nicht voll zufriedenstellen.

Der wesentliche Unterschied der neuen Berechnung gegenüber den in [8] mitgeteilten Berechnungsergebnissen liegt einmal in der Berücksichtigung der Unsymmetrie der Vorverformungen, und zum anderen werden die beiden Einzellasten als poltreu angesetzt. Die Wirkungsweise einer poltreuen Einzellast wird in Kap. A4.6.2 beschrieben, wobei im Gegensatz zur richtungstreuen Einzellast bei einer Verschiebung des Lastangriffspunktes Lastkomponenten geweckt werden. Die Verschiebung des Angriffspunktes und besonders die Lage des Pols entscheiden dabei über Größe und Richtung dieser Lastanteile. Aufgrund der Lasteintragungsvorrichtung bietet sich die Lage des Pols am Lasteinleitungspunkt des inneren Rahmens (s. Bild C8c) geradezu von selbst an. Bei dieser Wahl des Pols entspricht der Abstand zum Lastangriffspunkt

etwa der Länge der Zugstangen des inneren Rahmens. Die geometrischen Gegebenheiten werden mit dieser rechnerischen Annahme recht gut getroffen. Verschiebungen des Lastangriffspunktes rufen bei dieser Anordnung von Pol und Angriffspunkt horizontale Lastanteile hervor, die ganz von selbst für eine Stabilisierung des Trägers sorgen. Mit den vorstehend beschriebenen Berechnungsannahmen sind die beiden Versuchsträger erneut berechnet worden, wobei folgende Ergebnisse ermittelt worden sind :

Versuchsträger 1 :

Für eine Vorverformung des Obergurts in Trägermitte von 3 cm und an den Lastangriffspunkten von 3 cm bzw. 0,5 cm ergibt sich :

- bei Laststufe $2P=350 \text{ kN} + 24 \text{ kN}$ aus Gewicht der Belastungsvorrichtung + Eigenlast g
→ Einzellast $P = 187 \text{ kN} + g$
- berechnete Horizontalverformungen in Trägermitte :
am Obergurt $v_o=3,2\text{cm} + \text{Vorverformung } 3\text{cm}$
→ $v_o = 6,2\text{cm}$
am Untergurt $v_u=1,9\text{cm} + \text{Vorverformung } 0$
→ $v_u = 1,9\text{cm}$
- gemessene Horizontalverformungen in Trägermitte einschließlich Vorverformungen nach [31] :
am Obergurt $v_o = 6,3 \text{ cm}$
am Untergurt $v_u = 2 \text{ cm}$
- berechnete Versagenslast $2P = 500 \text{ kN}$
- gemessene Versagenslast $2P = 500 \text{ kN}$

Versuchsträger 2 :

Für eine Vorverformung des Obergurts in Trägermitte von 1,5 cm und an den Lastangriffspunkten von 1,5 cm bzw. 0,3 cm ergibt sich :

- bei Laststufe $2P=400 \text{ kN} + 24 \text{ kN}$ aus Gewicht der Belastungsvorrichtung + Eigenlast g
→ Einzellast $P = 212 \text{ kN} + g$
- berechnete Horizontalverformungen in Trägermitte :
Obergurt $v_o=3,5\text{cm} + \text{Vorverformung } 1,5\text{cm}$
→ $v_o = 5\text{cm}$
am Untergurt $v_u=1,2\text{cm} + \text{Vorverformung } 0$
→ $v_u = 1,2\text{cm}$
- gemessene Horizontalverformungen in Trägermitte einschließlich Vorverformungen nach [31] :
am Obergurt $v_o = 5 \text{ cm}$
am Untergurt $v_u = 1,5 \text{ cm}$
- berechnete Versagenslast $2P = 454 \text{ kN}$
- gemessene Versagenslast $2P = 474 \text{ kN}$

Beim Versuchsträger 1 stimmen die berechneten und gemessenen Vergleichswerte völlig überein, beim Versuchsträger 2 sind kleinere, unbedeutende Unterschiede festzustellen. Die getroffenen Berechnungsannahmen werden damit in vollem Umfang bestätigt, wobei besonders die Poltreue der beiden Einzellasten mit ihrer stabilisierenden Wirkung hervorzuheben ist. Die in [31] beschriebene, sehr aufwendige Lasteintragungsvorrichtung mit drei ineinanderliegenden Rahmen, durch die die angestrebte Richtungstreue der Einzellasten lt. Aussage in [31] sichergestellt sein sollte, hat ihre Aufgabe nicht erfüllt. Die aufgebrachten Einzellasten waren eindeutig poltreu, wie die Berechnungsergebnisse im Vergleich zu den gemessenen Versuchsergebnissen belegen. Wie bereits in [8] ausführlicher dargestellt, lassen sich mit richtungstreuen Einzellasten ohne einen zusätzlichen Stabilisierungseffekt rechnerisch nur etwa 65% der Versuchslasten erreichen.

Abschließend sollen noch einige Ergebnisse von Parametervarianten angegeben werden. Die Vergrößerung des Abstandes vom Pol zum Lastangriffspunkt von 2 m auf 2,5 m bringt eine Verkleinerung der Traglast um etwa 5% und eine Vergrößerung der Horizontalverformungen in den beiden Laststufen der Versuchsträger um etwa 20% am Obergurt. Beim Versuchsträger 1 hat nur eine Vergrößerung der Vorverformungen in Trägermitte von 3 auf 3,5 cm bei gleichem Polabstand von 2 m eine Vergrößerung der berechneten Horizontalverformung von etwa 10% zur Folge, während die ermittelte Versagenslast mit $2P = 498 \text{ kN}$ fast unverändert bleibt.

C3. Zusammenfassende Bemerkungen zu den Versuchsnachrechnungen

Aufgrund der ausführlichen Zusammenstellungen der Versuchsdaten bei *König/Pauli* in [33] und [34] ist es möglich, bei der Besprechung der einzelnen Versuche die jeweiligen Besonderheiten bei der Versuchsdurchführung, soweit sie aus den Meßdaten ablesbar sind, aufzuzeigen und auf einige damit zusammenhängende, nicht sofort erkennbare Auswirkungen auf die Meßergebnisse hinzuweisen. Die gegebenen Erläuterungen und Erklärungen zu einigen, teilweise ungewöhnlichen Verhaltensweisen der Versuchsträger sind das Ergebnis eines sehr genauen Studiums der Meßprotokolle aus [33]. Besonders die Versuche 5 und 6 mit den vorgespannten Trägern sind von solchen scheinbaren Ungereimtheiten betroffen.

Bedingt durch die Versuchsabläufe, wobei zusätzlich zu den gemessenen Vorverformungen bei unterschiedlichen Vertikal-Laststufen weitere Imperfektionen in Form von Schiefstellungen in der Gabel oder Horizontallasten aufgebracht worden sind, gestalten sich die Nachrechnungen der Versuche als schwierig. Diese Lastpfade mit ihren Be- und Entlastungen und mit z.T. bleibenden Verformungen bei völliger Entlastung sind punktuell zwar rechnerisch nachvollziehbar, aber in ihrer Gesamtheit mit dem vorliegenden Rechenprogramm [8] nur angenähert zu berechnen. Bei einem Vergleich der gemessenen und berechneten Last-Verformungskurven der Bilder C2 bis C7 sollten deshalb die bei der Besprechung der Einzelversuche gegebenen Erläuterungen berücksichtigt werden. Dies gilt gleichermaßen für eine Gegenüberstellung der gemessenen und berechneten Versagenslasten.

Während die Versuche von *König/Pauli* sehr ausführlich dokumentiert sind, liegt vom Kippversuch *Frenzel/Rafla* nur der Aufsatz [31] vor. Eine gründliche Analyse wie bei den *König/Pauli* - Versuchen ist deshalb nicht möglich. Die für eine Nachrechnung erforderlichen Versuchsdaten sind teilweise ungenau, da sie aus Diagrammen abgelesen werden müssen. Dennoch hat die Berechnung dieser beiden Spannbetonträger ihren besonderen Stellenwert, da es sich um zwei Satteldachbinder einer laufenden Fertigung gehandelt hat, und nicht wie bei *König/Pauli* um eigens zu Versuchszwecken hergestellte Parallelgurtbinder. Erste Berechnungsergebnisse der *Frenzel/Rafla* - Binder sind bereits in der Dissertation Röder [8] vorgestellt worden. Durch die inzwischen erfolgte Weiterentwicklung des Rechenprogramms können jetzt einige Versuchsvorgaben rechnerisch besser erfaßt werden, so daß die hier dargestellten neuen Ergebnisse als Ergänzung zu denen in [8] zu sehen sind.

Abschließend kann festgehalten werden, daß die Berechnungen der acht Stahlbeton- und Spannbetonträger mit dem Rechenprogramm nach Theorie II. Ordnung zutreffende Ergebnisse liefert, wie die Vergleiche mit den Versuchsergebnissen zeigen. Die hier im theoretischen Teil getroffenen Voraussetzungen und Annahmen und die vorgeschlagene Lösungsmethode werden damit bestätigt.