
Grundlagen der technischen Optik

Thomas Kusserow

Wintersemester 2015/16

Organisatorisches

- Infos und Folienskript:

<https://moodle.uni-kassel.de/moodle/course/view.php?id=2318>

(<http://np.ina-kassel.de/index.php/grundlagen-der-technischen-optik.html>)

- Vorlesung auf Deutsch, mit Einführung der englischen Fachbegriffe
- Mündliche Prüfung
- Kontakt: kusserow@ina.uni-kassel.de

Aufbau der Vorlesung

- Einführung in die Optik (Was ist Optik? Modelle und Themengebiete der Optik)
- Geometrische Optik (Brechung, Reflexion, Bauelemente, optische Systeme, Abbildungsfehler, wichtige optische Instrumente)
- Physiologische Optik (Das Auge, Photometrie, Farben)
- Wellenoptik I (Grundlegende Eigenschaften von Wellen in Bezug auf die Optik)

Aufbau der Vorlesung

- Wellenoptik II (Zwei- und Vielstrahlinterferenz, Interferometer, Dünnschichten)
- Wellenoptik III (Beugung, Fresnel-Huygensche Modell, Fresnel-/Fraunhofer-Beugung, Abbildung)
- Wellenoptik IV (Polarisation, Doppelbrechung)
- Fourieroptik (Einführung und verschiedene Beispiele)
- Symbol  : detaillierte Herleitungen/Themen für sehr interessierte Studenten

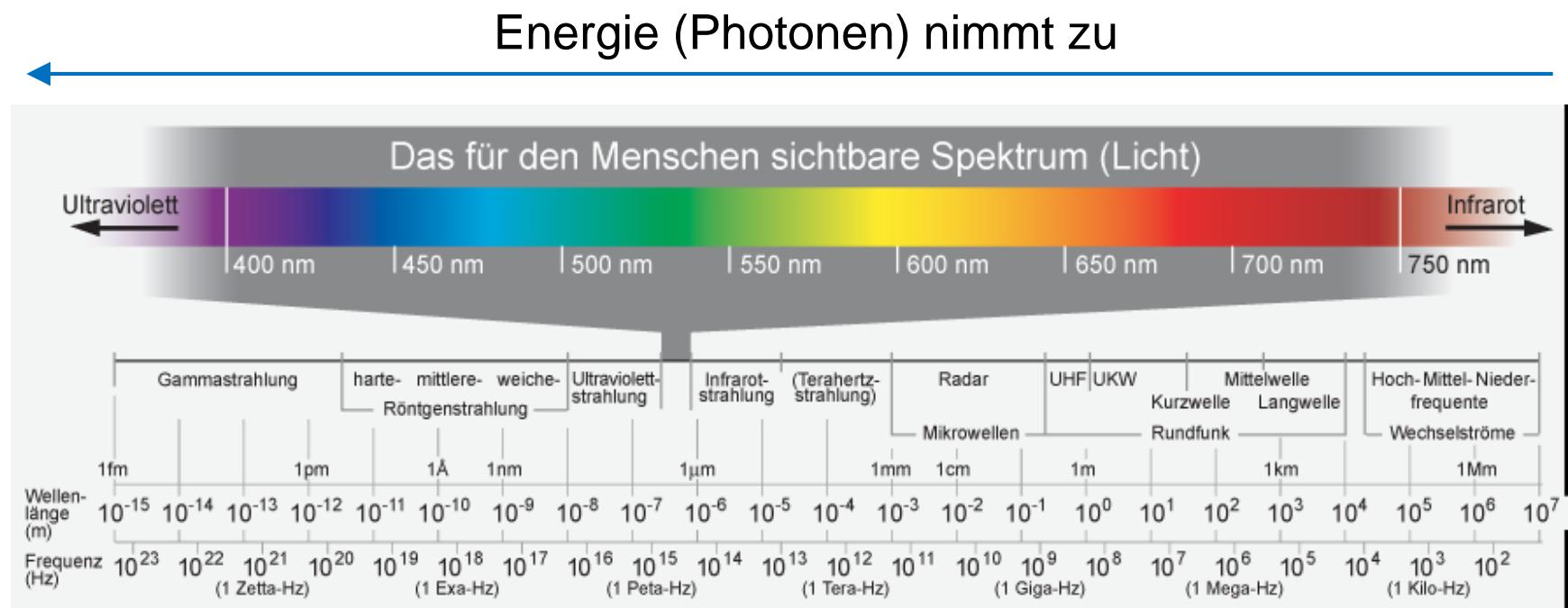
Literatur zur Vorlesung (Auswahl)

- G. Litfin: Technische Optik in der Praxis. Springer Verlag → [Online](#)
 - G. Schröder, H. Treiber: Technische Optik: Grundlagen und Anwendungen. Vogel Verlag
 - H. Naumann, G. Schröder: Bauelemente der Optik. Hanser Verlag
 - W.J. Smith: Modern optical engineering. McGraw-Hill Verlag
 - E. Hecht: Optik. Oldenbourg Verlag/deGruyter
 - F. Pedrotti, L. Pedrotti, W. Bausch, H. Schmitt: Optik für Ingenieure. Springer Verlag → [Online](#)
 - H. Haferkorn: Optik : physikalisch-technische Grundlagen und Anwendungen. Wiley-VCH
 - M.V. Klein, T.E. Furtak: Optik. Springer Verlag
 - S.G. Lipson, H.S. Lipson, D.S. Tannhauser: Optik. Springer Verlag
 - B. Klingen: Fouriertransformation für Ingenieure & Nat.wiss., Springer Verlag
- in Bibliothek vorhanden (verschiedene Auflagen, D/E)

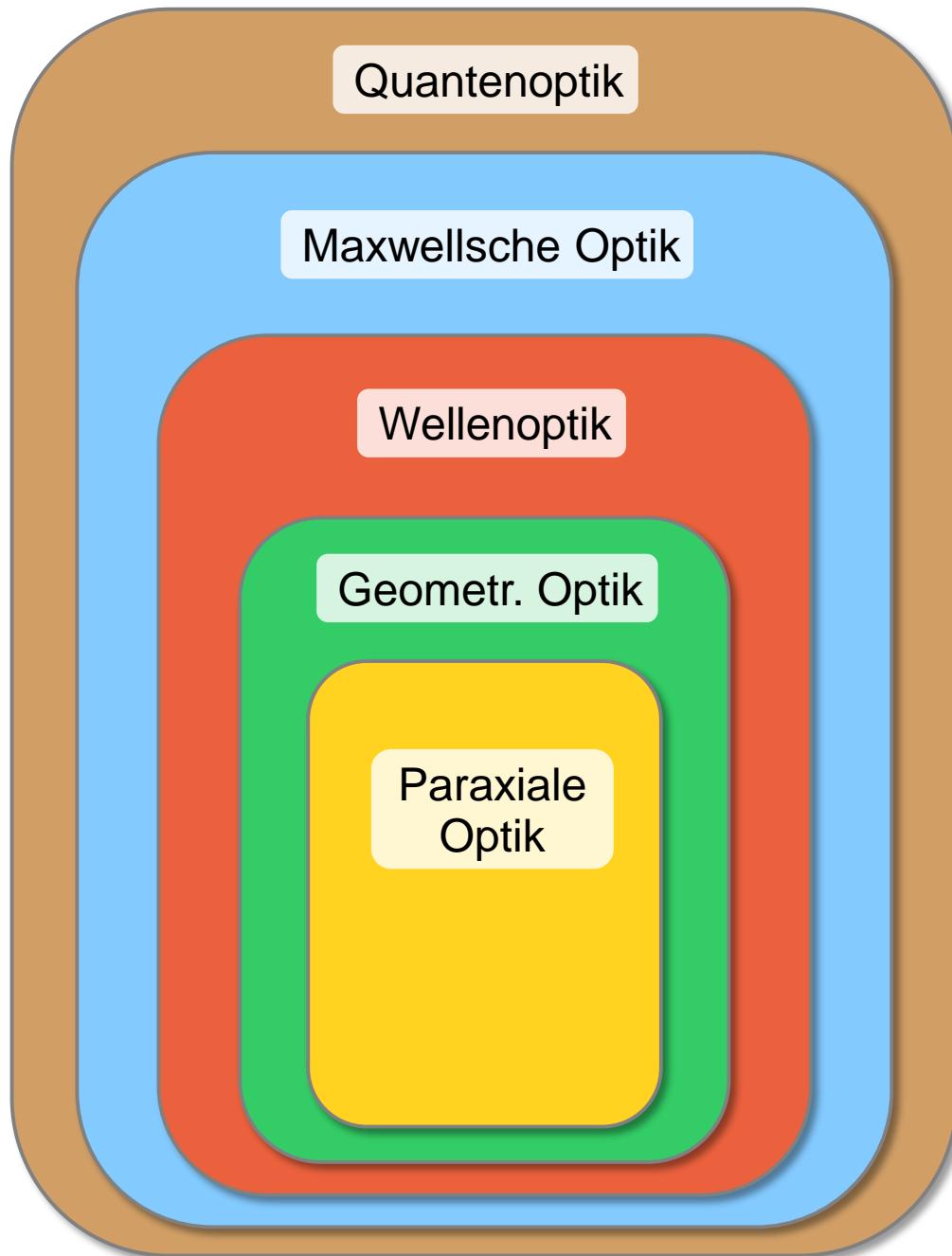
Einführung in die Optik

Was ist Optik ?

- Eigenschaften von Licht
- Wechselwirkung mit Materie
- Ausbreitung von Licht



Modelle der Optik



Wieso verschiedene Modelle?

→ Historisch

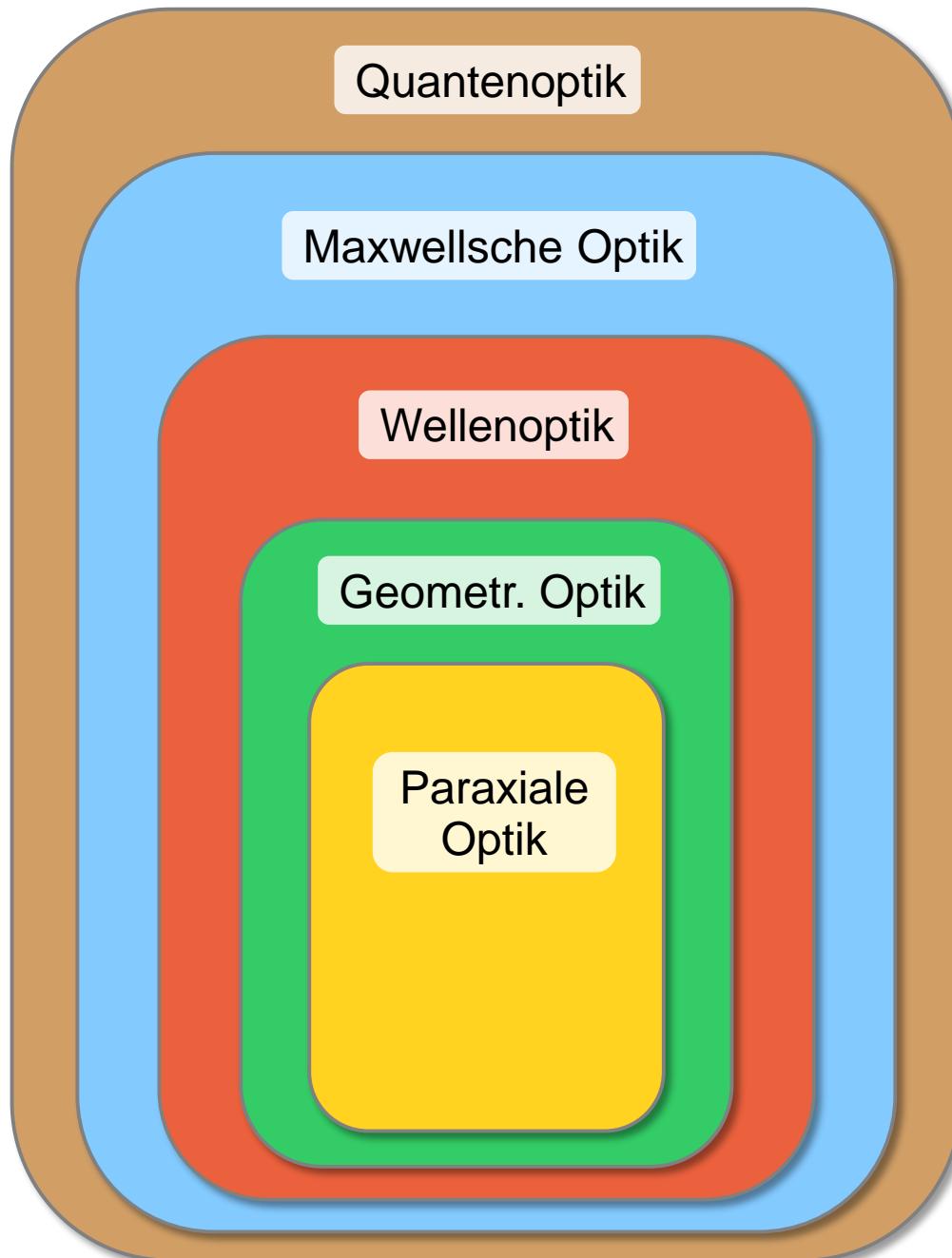
→ Vereinfachungen

Generelle Modelle
(kompliziert)



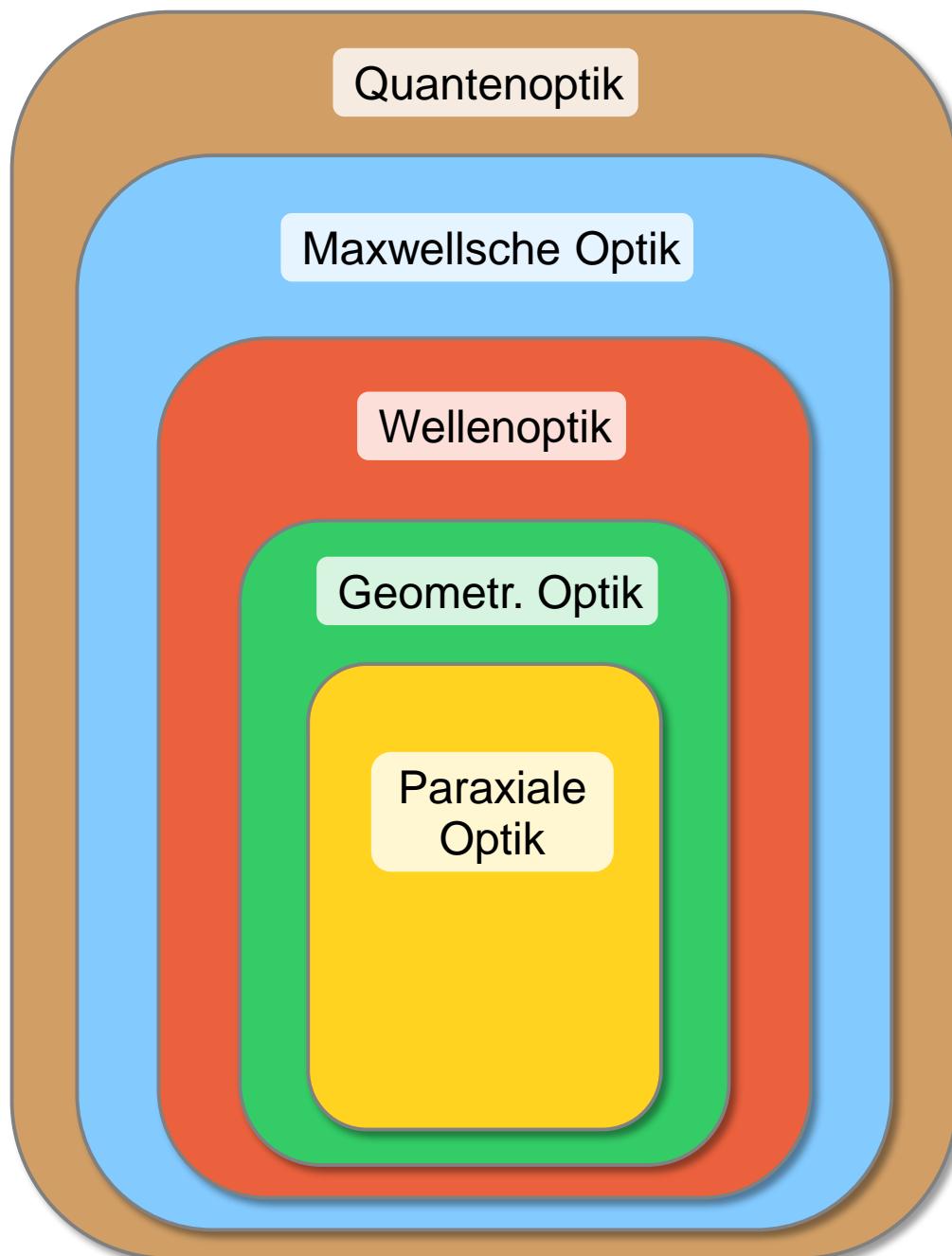
Eingeschränkte Modelle
(einfacher)

Modelle der Optik - Quantenoptik



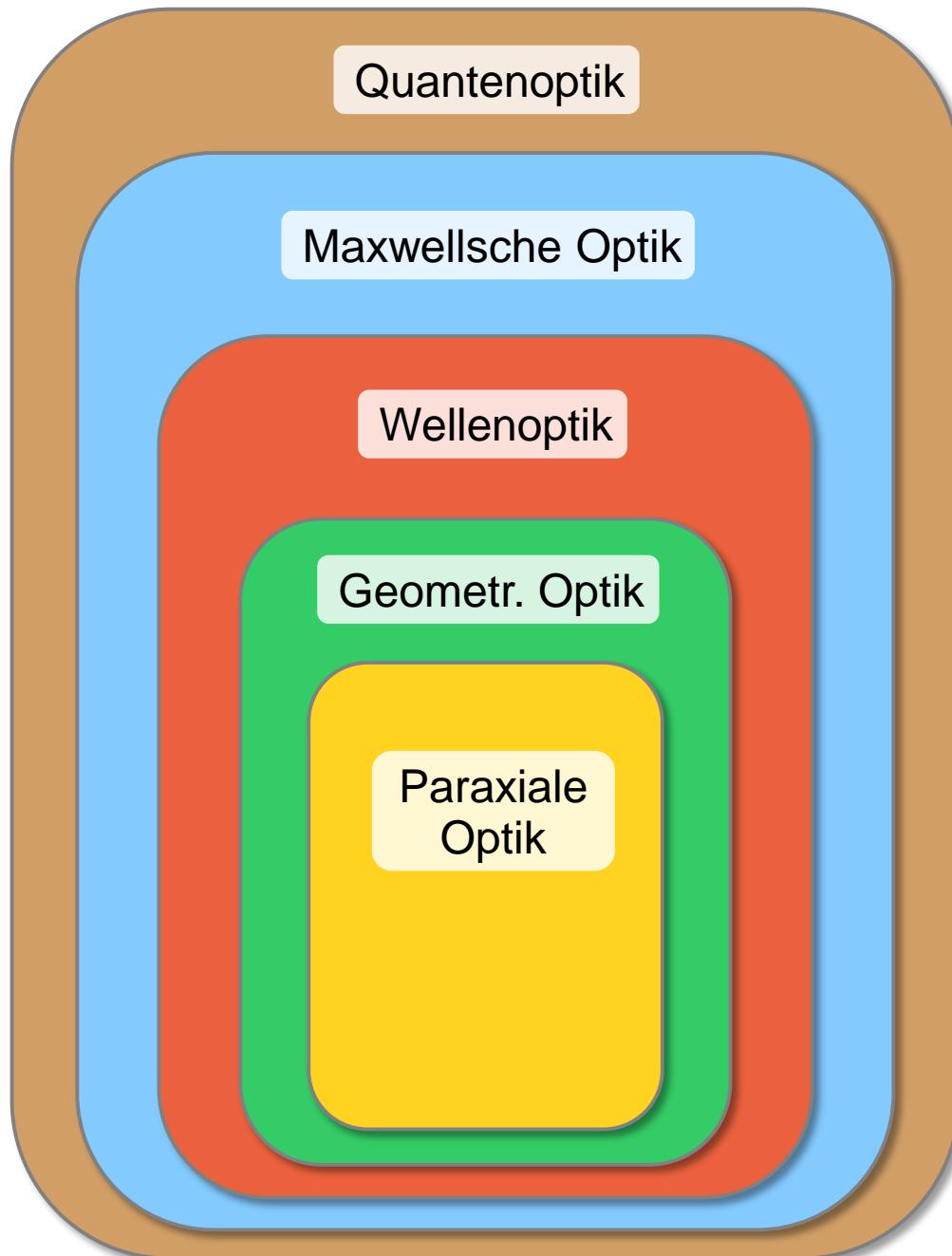
- Licht als Photon (Lichtquanten)
- Absorption/Emission
- Kohärenz, Dispersion
- Semi-klassisch:
 - Licht als Welle + Materie quantenmechanisch
 - Licht quantisiert + Materie als Kontinuum
- Anwendungen: Laser, Lichtquellen, photoelektrischer Effekt, Spektroskopie, Rauschen ...

Modelle der Optik - Maxwell



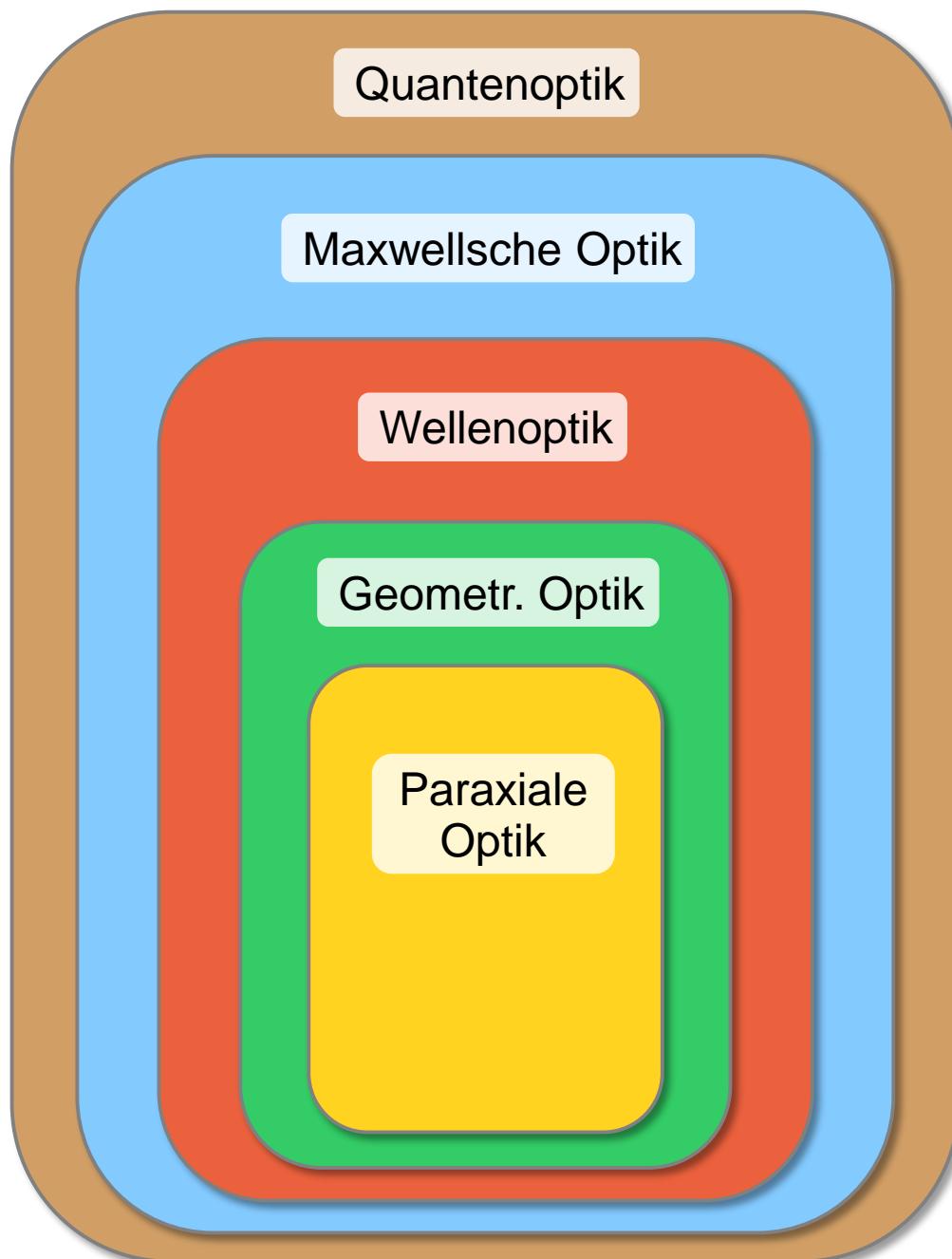
- Licht als EM Felder
- Herleitung aus Maxwell-Gleichungen
- Beschreibt alle Wellenphänomene
- Anwendungen: Abbildungstheorie, optische Messtechnik, Wellenleiter, Dünnschichten, Holographie, Beugungsoptik, ...
- Wichtig für grundlegende Untersuchungen

Modelle der Optik - Wellenoptik



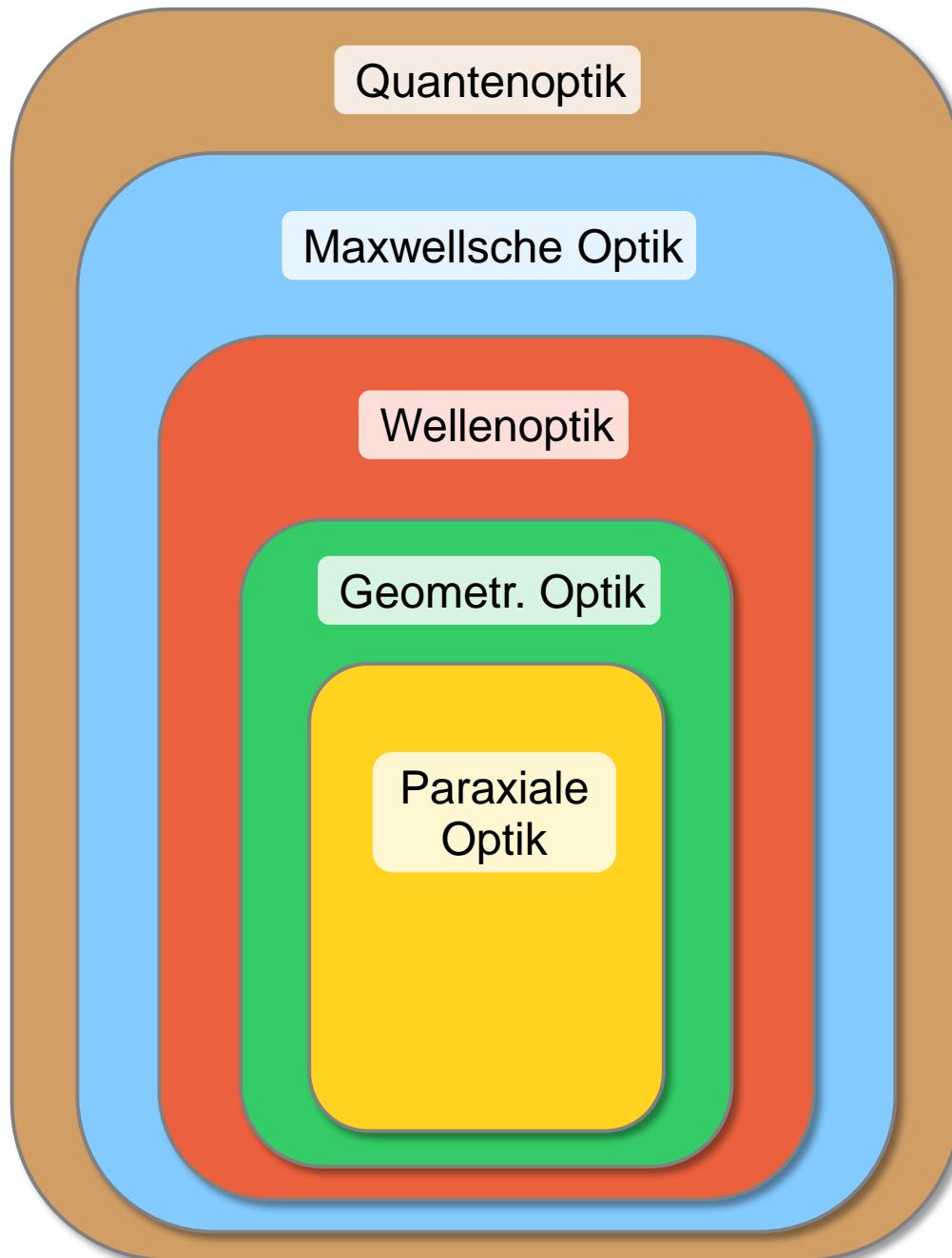
- Licht als (oft skalare) Wellen
- Ohne grundlegende Herleitung
- Beschreibt alle Wellenphänomene
- Anwendungen: Abbildungstheorie, optische Messtechnik, Wellenleiter, Dünnschichten, Holografie, Beugungsoptik, ...
- Wichtig für anwendungsbezogene Fragen

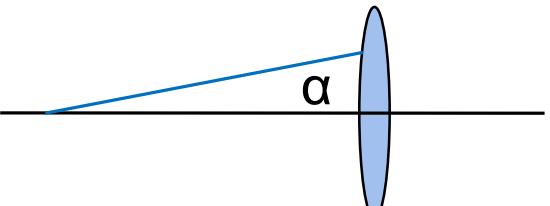
Modelle der Optik - Geometrische Optik



- Licht als Strahlen
- Wellenlänge \ll Objekte
- Brechung/Reflexion
- Anwendungen: Entwurf optischer Systeme, Beleuchtungen, ...

Modelle der Optik - Paraxiale Optik



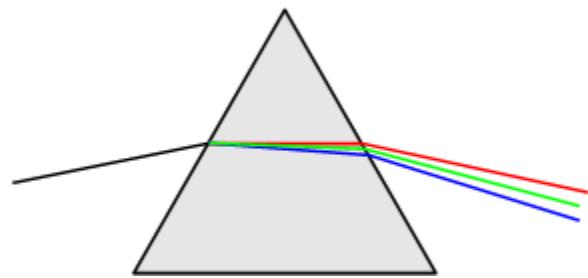
- Licht als Strahlen
 - Nur kleine Winkel zur optischen Achse
- 
- $\sin(\alpha) \approx \alpha$
- Vereinfachte Gleichungen
 - Ohne Abbildungsfehler
 - Anwendungen: einfache (Vor-) Entwürfe von optischen Systemen, ...

Themengebiete der Optik

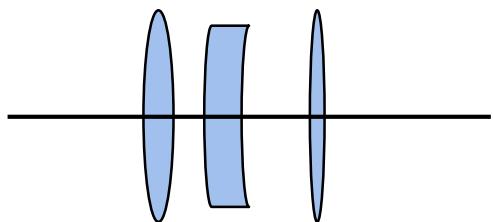
Photonik	Beleuchtungstechnik	Photometrie
Nichtlineare Optik	Holographie	Kristalloptik
Technische Optik	Optische Messtechnik	Mikrooptik
fs-Optik	Faseroptik	Optischen Fertigungstechnik
Interferometrie	Spektroskopie	Laser
Integrierte Optik	Optoelektronik	Dünnschichtoptik
Fourieroptik	MOEMS	Magnetooptik
Optik der Atmosphäre	Halbleiteroptik	Farbmetrik
	Nanooptik	Astronomie
		Mikroskopie
		u.v.m. ...

Technische Optik

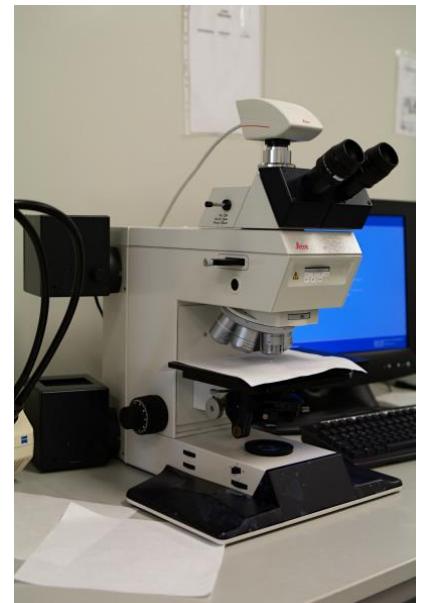
- Beschreibung der optischen Phänomene aus technischer, anwendungsbezogener Sicht



- Entwurf von optischen Bauelementen und Systemen



- Wichtige optische Geräte und Verfahren



Geometrische Optik

Optische Materialien - Brechungsindex

Brechungsindex (vereinfachte Annahmen)

- Transparent (keine Absorption)
- Homogen (keine Ortsabhängigkeit)
- Isotrop (keine Richtungsabhängigkeit)

$$\frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_1} = \frac{c_1}{c_2} \quad \text{mit} \quad \bar{n}_1 = \bar{n}_0 = \bar{n}_{vac} = 1 \quad \longrightarrow \quad \bar{n}_2 = \frac{c_0}{c_2}$$

Übliche Annahme: $\bar{n}_{Luft} \approx 1.0003 \approx 1 = \bar{n}_{vac}$

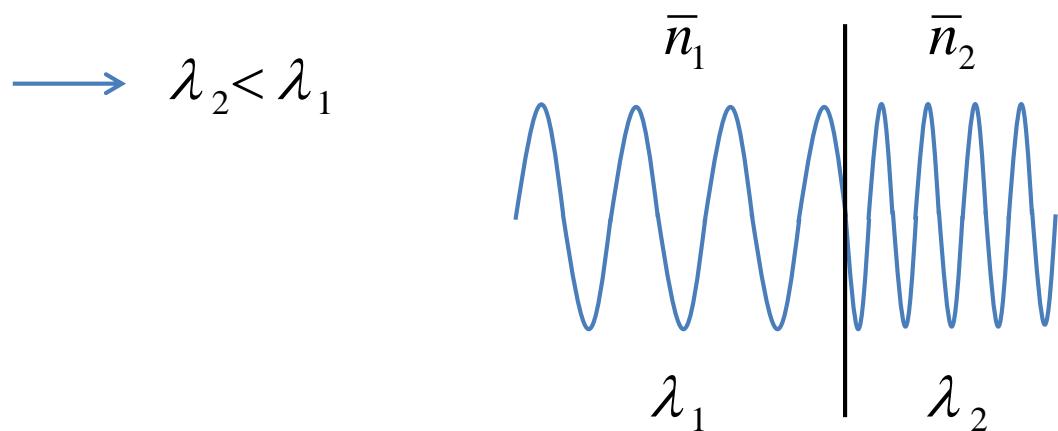
(weitere vernachlässigte Abhängigkeiten:

$\bar{n}(T), \bar{n}(p), \bar{n}(\omega \text{ bzw. } \lambda), \bar{n}(t), \bar{n}(\vec{E}), \bar{n}(\vec{B}), \dots$

Optische Materialien - Brechungsindex

Licht ist in \bar{n}_2 langsamer

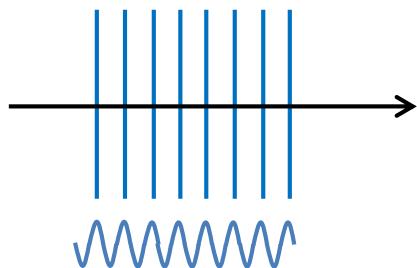
Da $c = \lambda \cdot f$ und $f = \text{konst.}$



Spiegel werden als ideale
Reflektoren angenommen

Geometrische Optik - Modell

Wellenausbreitung / -fronten



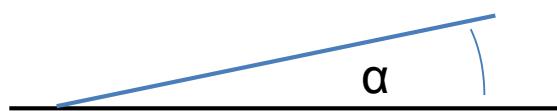
$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e} \quad \perp \text{ Wellenfront}$$

Strahlen: $\lambda \ll$ Bauelemente, Objekte

- zeigen Richtung
- Welleneigenschaften gehen verloren

Paraxiale geometrische Optik:

$$\sin(\alpha) \approx \tan(\alpha) \approx \alpha$$



Lichtausbreitung

- Ausbreitung von Licht im Raum
- Reflexion und Brechung von Licht an einer Grenzfläche

→ Herleitung aus Maxwell-Gleichungen möglich

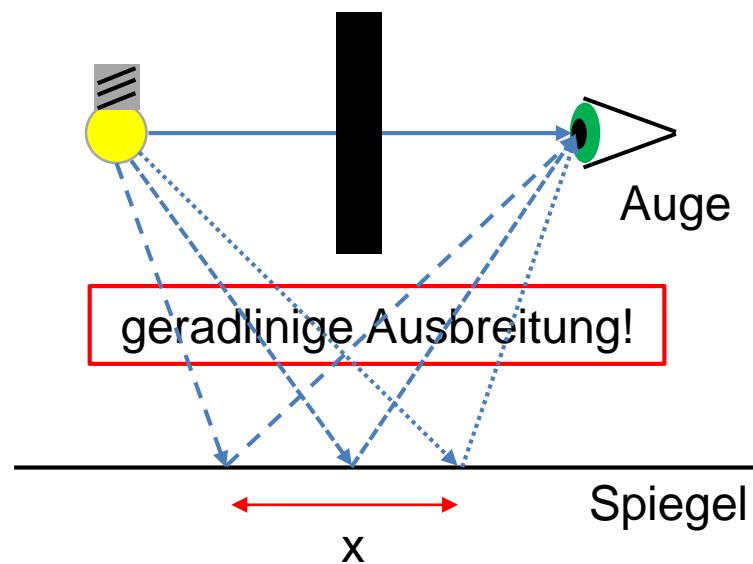
Eine interessante alternative Herleitung bietet das Prinzip von Fermat:

1. Jhd. n. Chr. Heron v. Alexandria

→ Licht breitet sich auf dem
räumlich kürzesten Weg aus

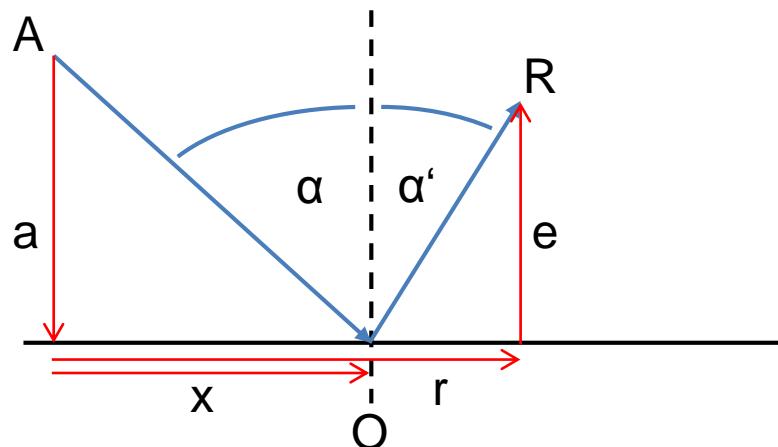
17. Jhd. n. Chr. Pierre de Fermat

→ Licht breitet sich auf dem
zeitlich kürzesten Weg aus





Fermatsche Prinzip - Reflexion



$$t(x) = \frac{\overline{AO}}{c_1} + \frac{\overline{OR}}{c_1} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{e^2 + (r-x)^2}}{c_1}$$

Für welches x wird t minimal?

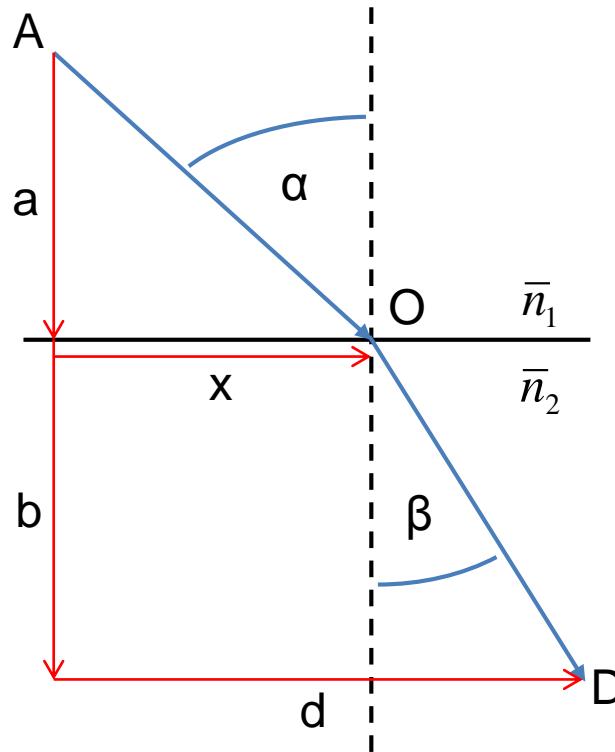
$$\frac{dt(x)}{dx} = \frac{1}{c_1} \frac{1}{\cancel{\sqrt{a^2 + x^2}}} \cancel{2}x + \frac{1}{c_1} \frac{1}{\cancel{\sqrt{e^2 + (r-x)^2}}} \cancel{2}(r-x)(-1) = \frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{c_1} \frac{r-x}{\sqrt{e^2 + (r-x)^2}}$$

$$\frac{dt(x)}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c_1} \frac{x}{\underbrace{\sqrt{a^2 + x^2}}_{-\sin(\alpha)}} = \frac{1}{c_1} \frac{r-x}{\underbrace{\sqrt{e^2 + (r-x)^2}}_{\sin(\alpha')}}$$

$$\rightarrow \text{innerhalb } \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] : \quad \underline{\underline{-\alpha = \alpha'}}$$



Fermatsche Prinzip - Brechung



$$t(x) = \frac{\overline{AO}}{c_1} + \frac{\overline{OD}}{c_2} = \frac{\sqrt{a^2 + x^2}}{c_1} + \frac{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}}{c_2}$$

Für welches x wird t minimal?

$$\begin{aligned} \frac{dt(x)}{dx} &= \frac{1}{c_1} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \cancel{2}x + \frac{1}{c_2} \frac{1}{\cancel{2}} \frac{1}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \cancel{2}(d-x)(-1) \\ &= \frac{1}{c_1} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} - \frac{1}{c_2} \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \end{aligned} \quad \text{mit } c_i = \frac{c_0}{\bar{n}_i}$$

$$\begin{aligned} \frac{dt(x)}{dx} = 0 \quad \rightarrow \quad & \frac{\bar{n}_1}{c_0} \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}} = \frac{\bar{n}_2}{c_0} \frac{d-x}{\sqrt{b^2 + (d-x)^2}} \\ & \underbrace{-\sin(\alpha)}_{-\sin(\beta)} \quad \underbrace{-\sin(\beta)}_{-\sin(\alpha)} \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \bar{n}_1 \sin(\alpha) = \bar{n}_2 \sin(\beta)$$

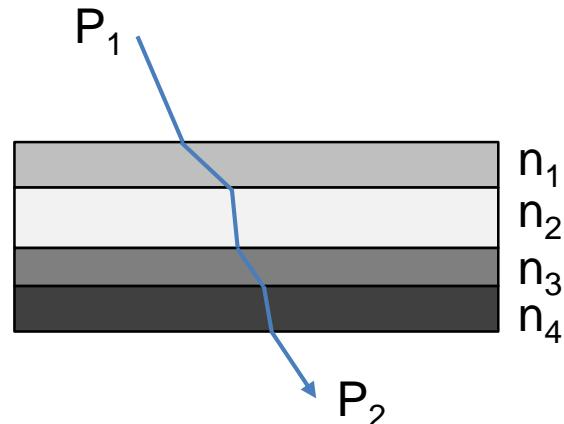
Fermatsche Prinzip - Verallgemeinert



Ausbreitung durch mehrere Materialien:

$$t = \frac{1}{c_0} \sum_{i=1}^m n_i s_i$$

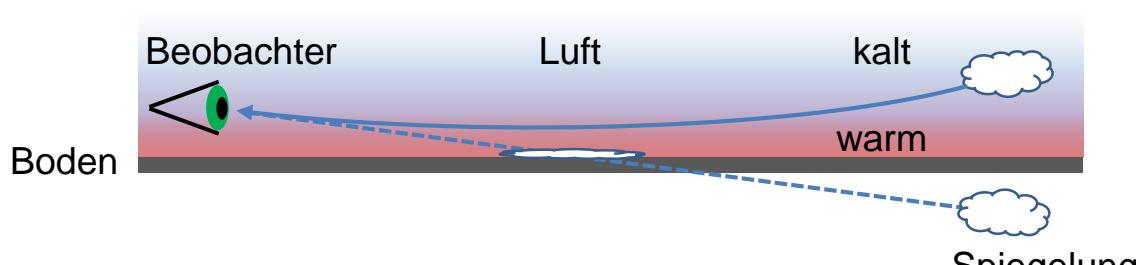
↑ Δ: optische Weglänge
Naturkonstante



→ Ausbreitung entlang der geringsten optischen Weglänge
(alternative Formulierung des Fermatschen Prinzip)

Inhomogene optische Medien:

$$\Delta = \int_{P1}^{P2} n(s) ds$$



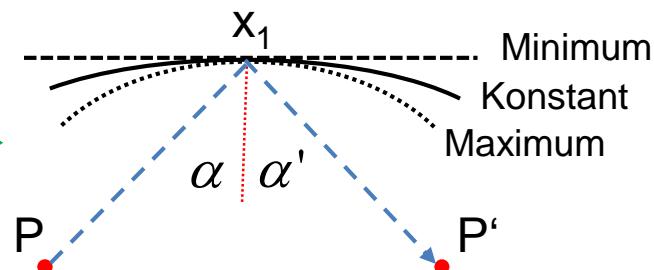
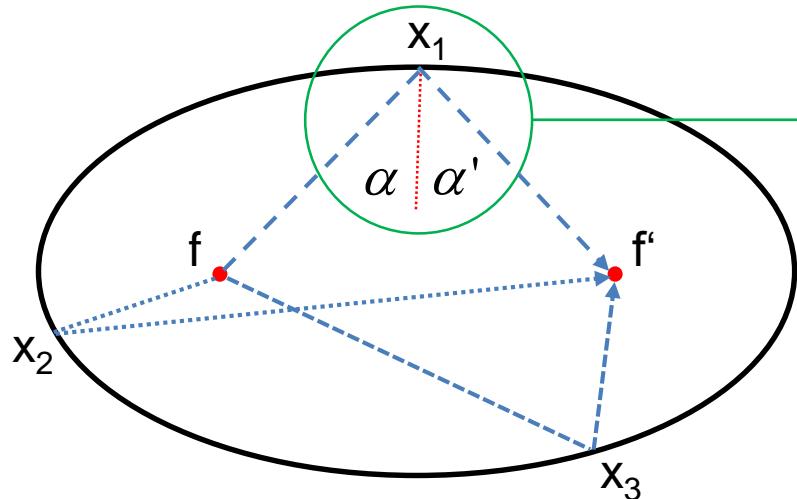
z.B. Lichtbrechung in der Atmosphäre,
Luftspiegelungen, Gradientenoptik (Fasern)



Fermatsche Prinzip - Verallgemeinert

$\frac{dt(x)}{dx} = 0 \longrightarrow$ d.h. nicht Minimum, sondern stationärer Punkt !
 \longrightarrow Minimum, Maximum, Sattelpunkt oder Konstante
 ($t(x)$ hat dort die Steigung 0)

Diese Fälle existieren ebenfalls:



Fermat verallgemeinert:

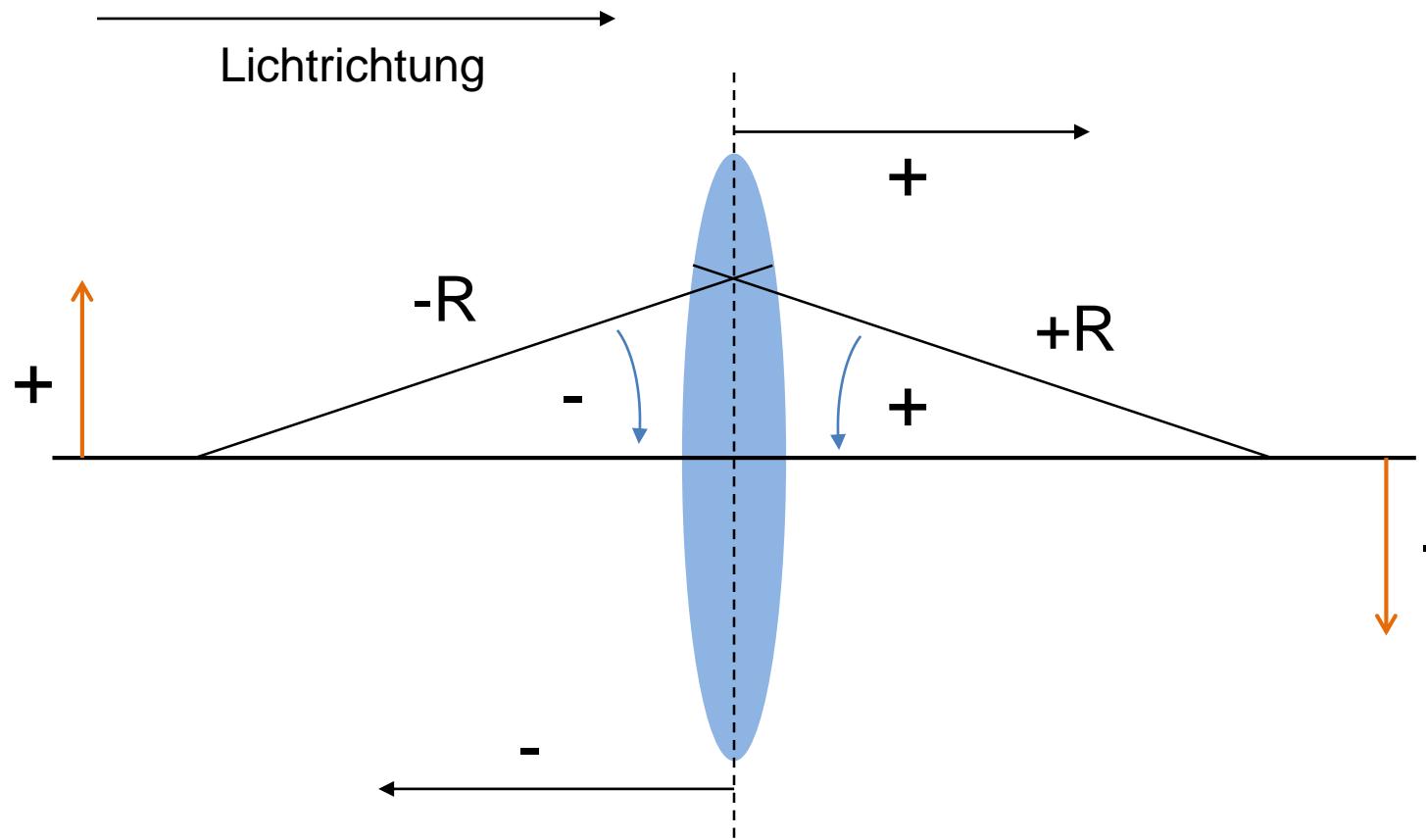
Zwischen zwei Punkten breitet sich Licht entlang der Strecke aus, deren Variation der optischen Weglänge stationär ist.

(Begründung \longrightarrow Wellenoptik)

- Ellipsoid:
- 1) alle Weglängen $\overline{fx_i} + \overline{x_i f'}$ sind identisch
 - 2) überall gilt $-\alpha = \alpha'$

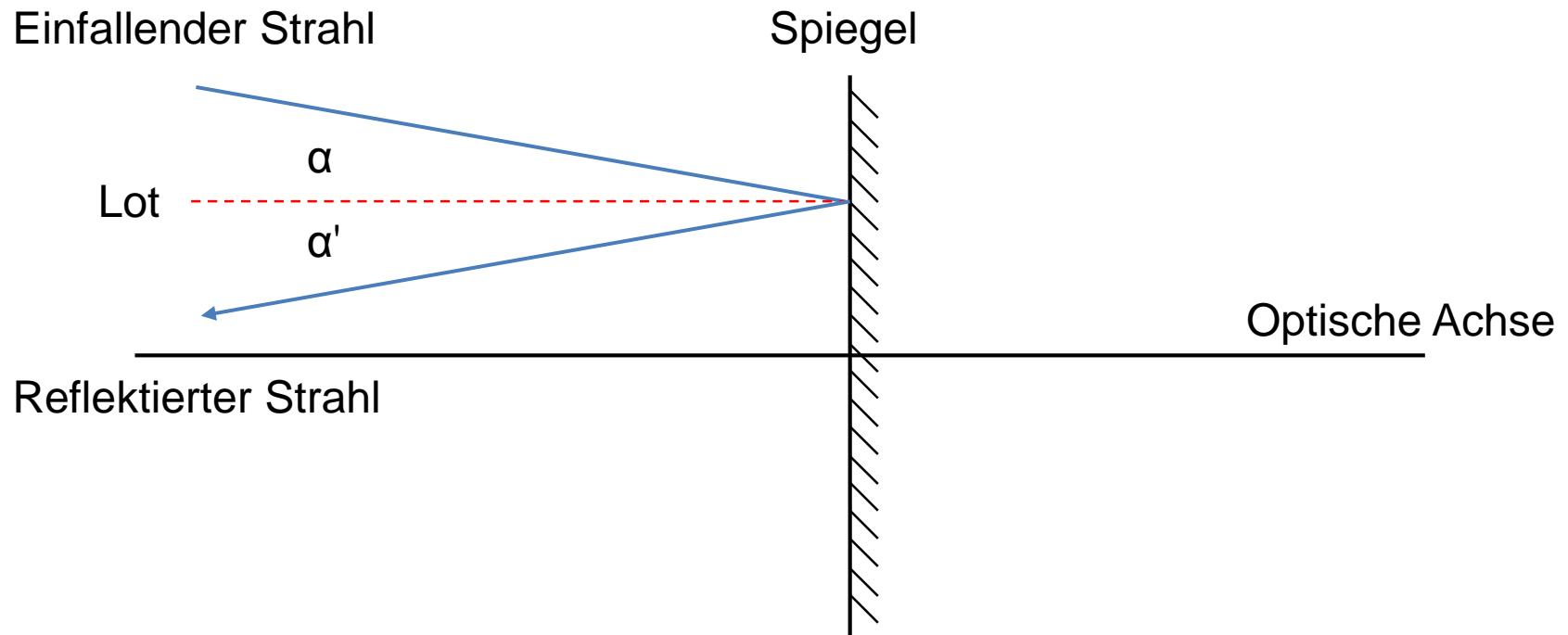
Vorzeichenkonvention

Nach DIN-1335



Spiegel: Das Koordinatensystem wird nach Reflexion gespiegelt !
(d.h. die Vorzeichen für b und f' werden vertauscht)

Reflexion an Grenzfläche

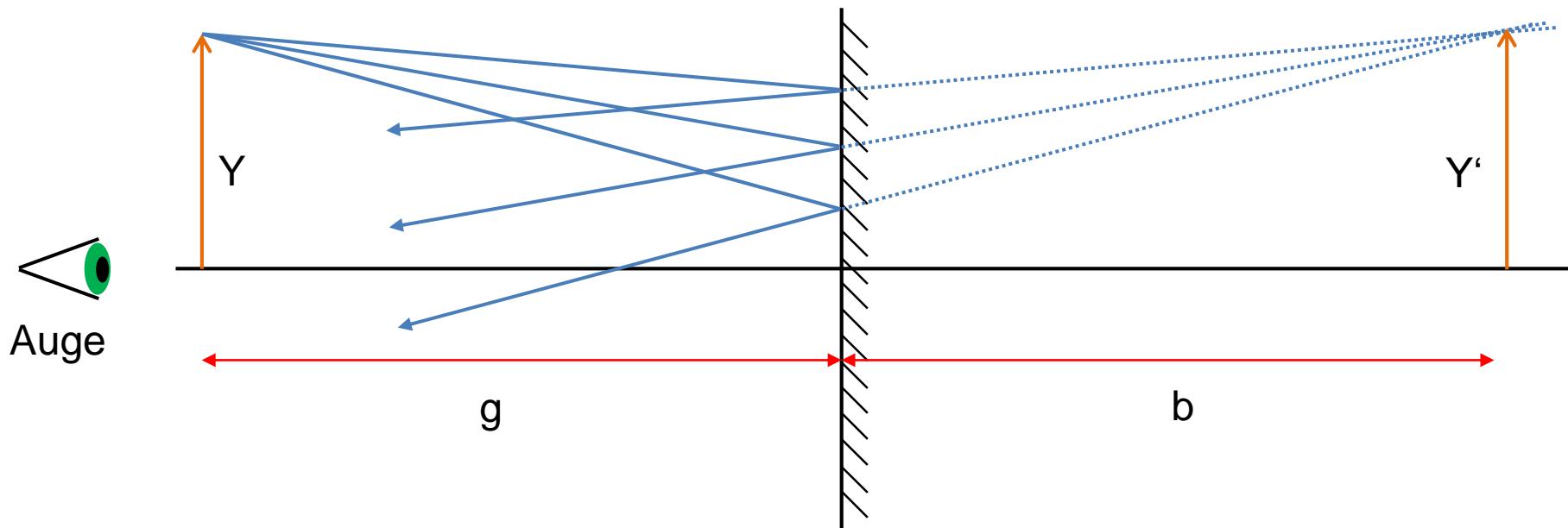


Lot und einfallender Strahl definieren Einfallsebene

Für Reflexion gilt:

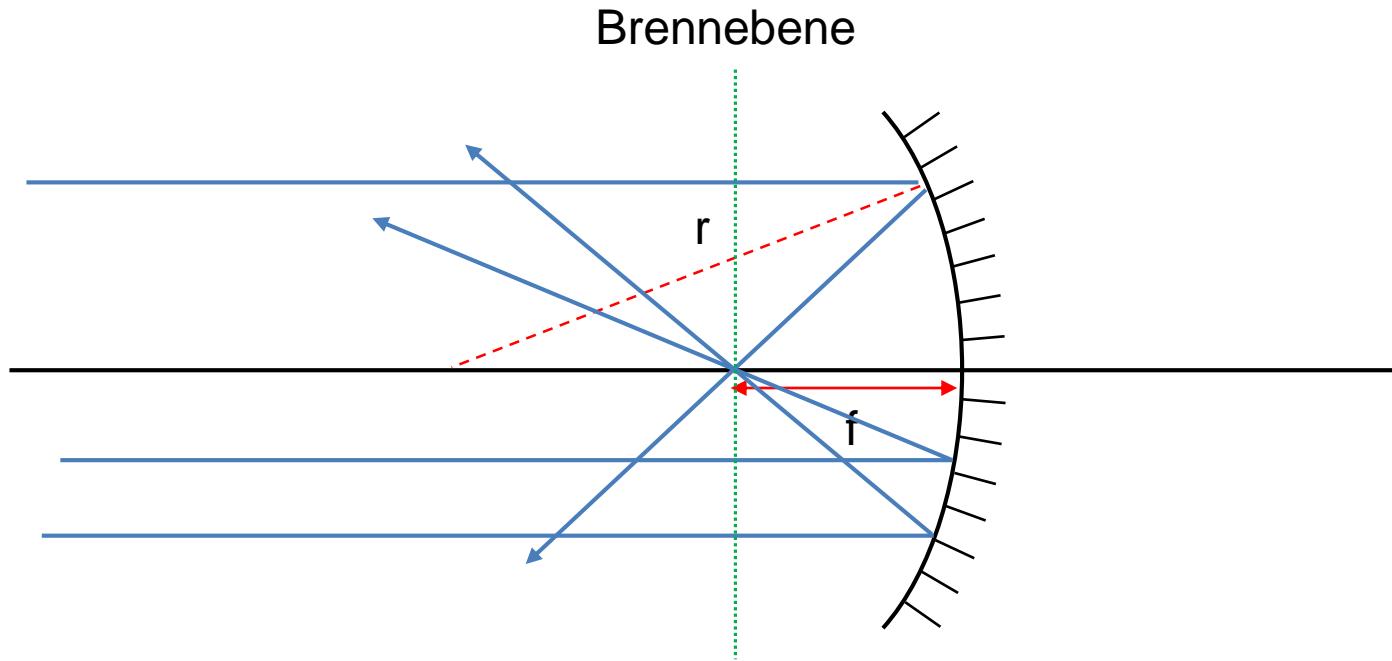
- 1) $\alpha' = -\alpha$
- 2) Reflektierter Strahl liegt in Einfallsebene

Reflexion an Grenzfläche



- Objekt/Gegenstand: Höhe Y
- Objekt-/Gegenstandsweite: g
- Virtuelles Bild: Höhe Y'
- Bildweite: b
- Kann nicht aufgezeichnet werden
- Auge verlängert Strahlen rückseitig

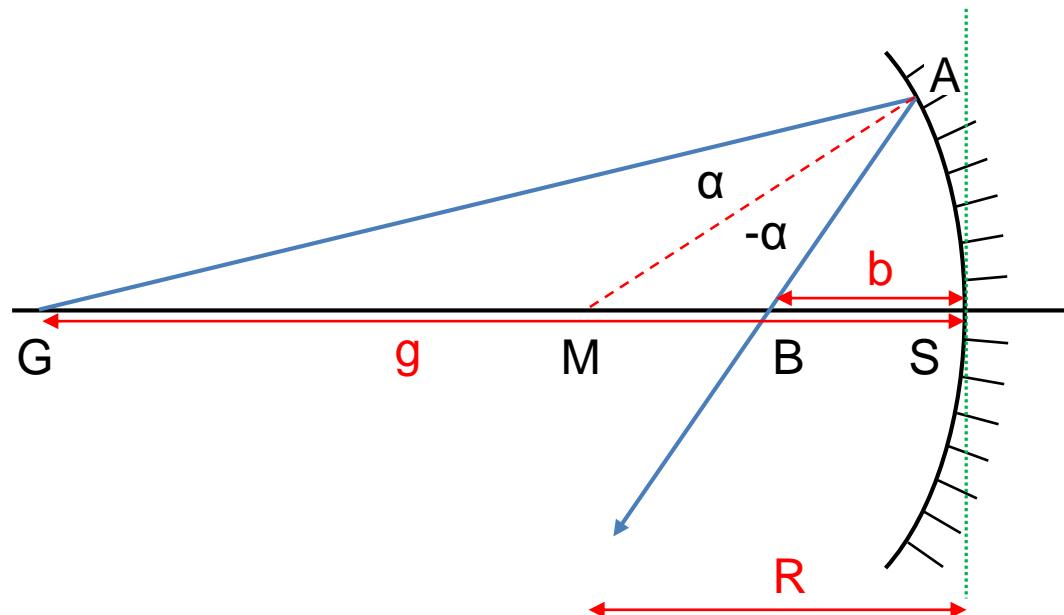
Konkave Spiegel



- Radius $R = \text{Lot}$
- Achsparalleler Strahl mit $g \rightarrow \infty$ schneidet Achse in Brennpunkt f
- Aufgrund Reflexion: $R = 2 \cdot f$ (R ist - / f wird + nach Reflexion !)
- Alle parallelen Strahlen schneiden sich in Brennebene
(gilt auch für schräge Strahlen, Schnittpunkt dann nicht auf Achse)



Abbildungsgleichung Spiegel



Strahlensatz:

$$\frac{\overline{GA}}{\overline{GM}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{MB}}$$

für kleine α (paraxial):

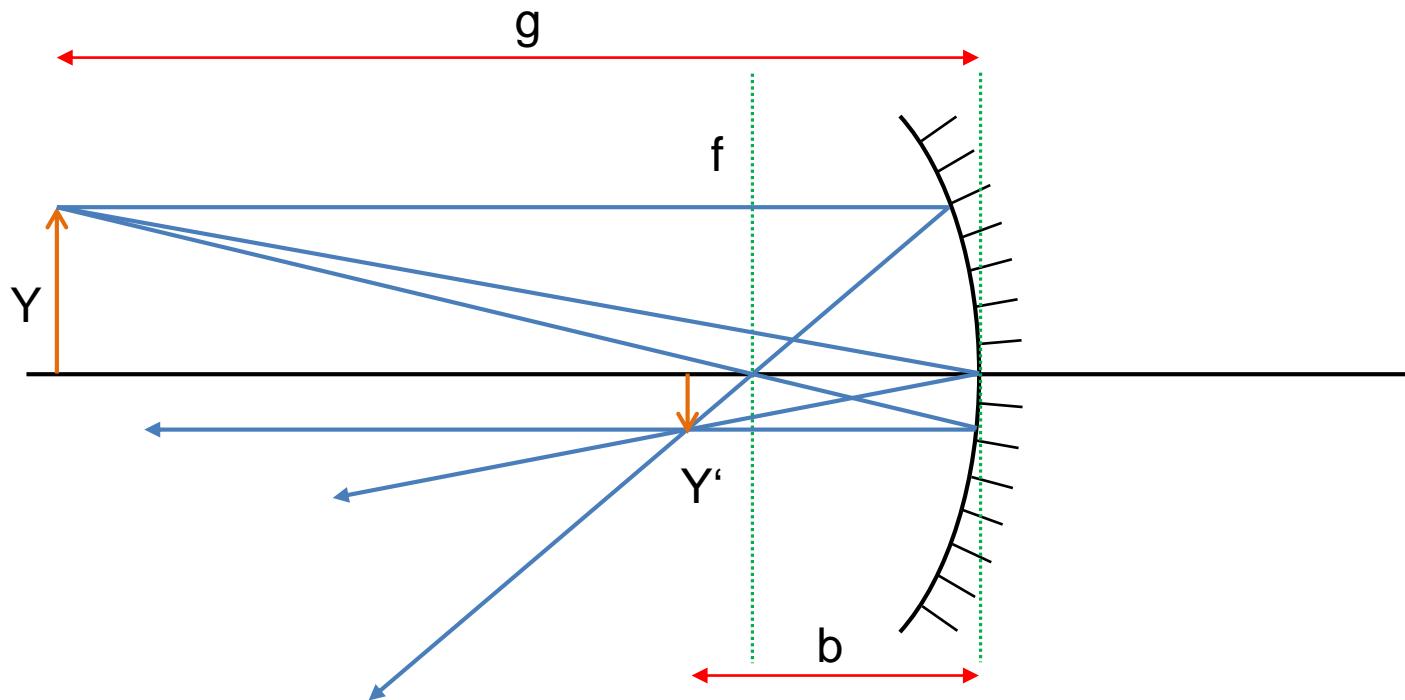
$$\overline{GA} \approx -g$$

$$\overline{AB} \approx b$$

$$\rightarrow \frac{-g}{GM} = \frac{b}{MB} \quad \rightarrow \quad \frac{-g}{-g - R} = \frac{b}{R - b}$$

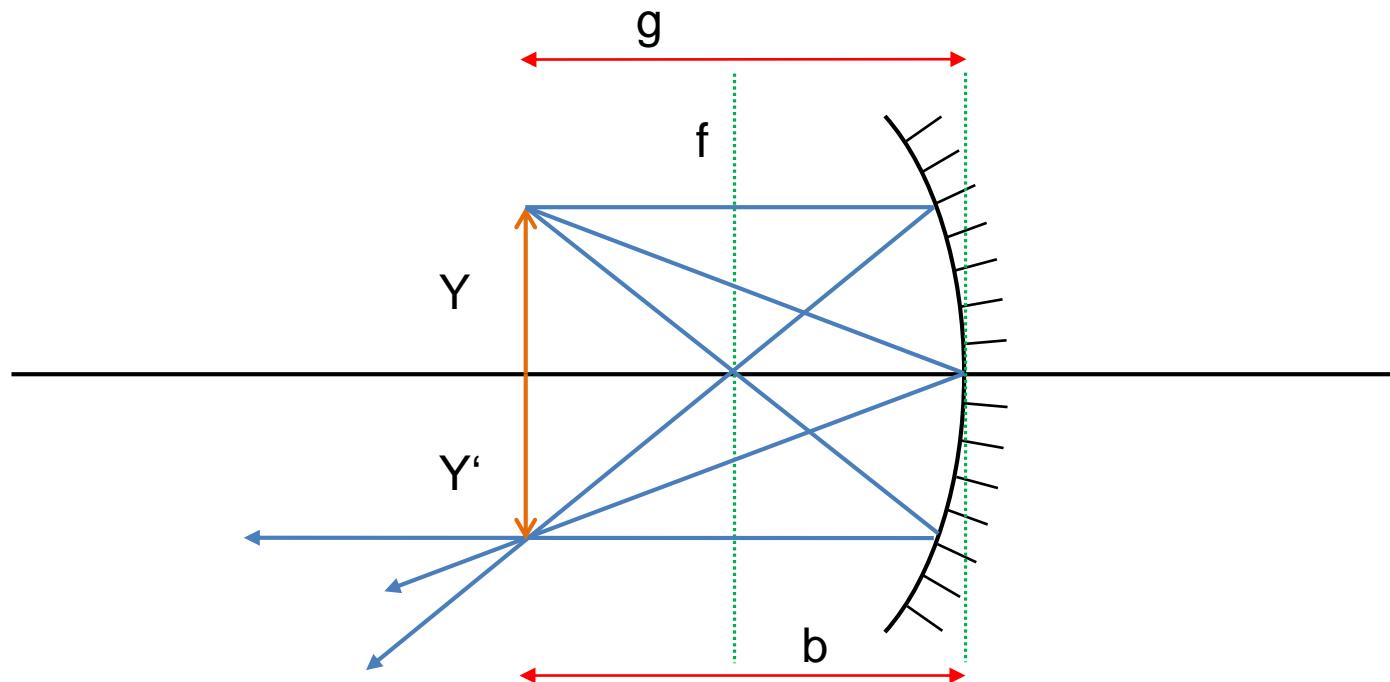
$$\rightarrow 1 + \frac{R}{g} = \frac{R}{b} - 1 \quad \rightarrow \quad \frac{R}{b} - \frac{R}{g} = 2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{b} - \frac{1}{g} = \frac{2}{R} = \frac{1}{f}$$

Konkave Spiegel - $g \gg f$



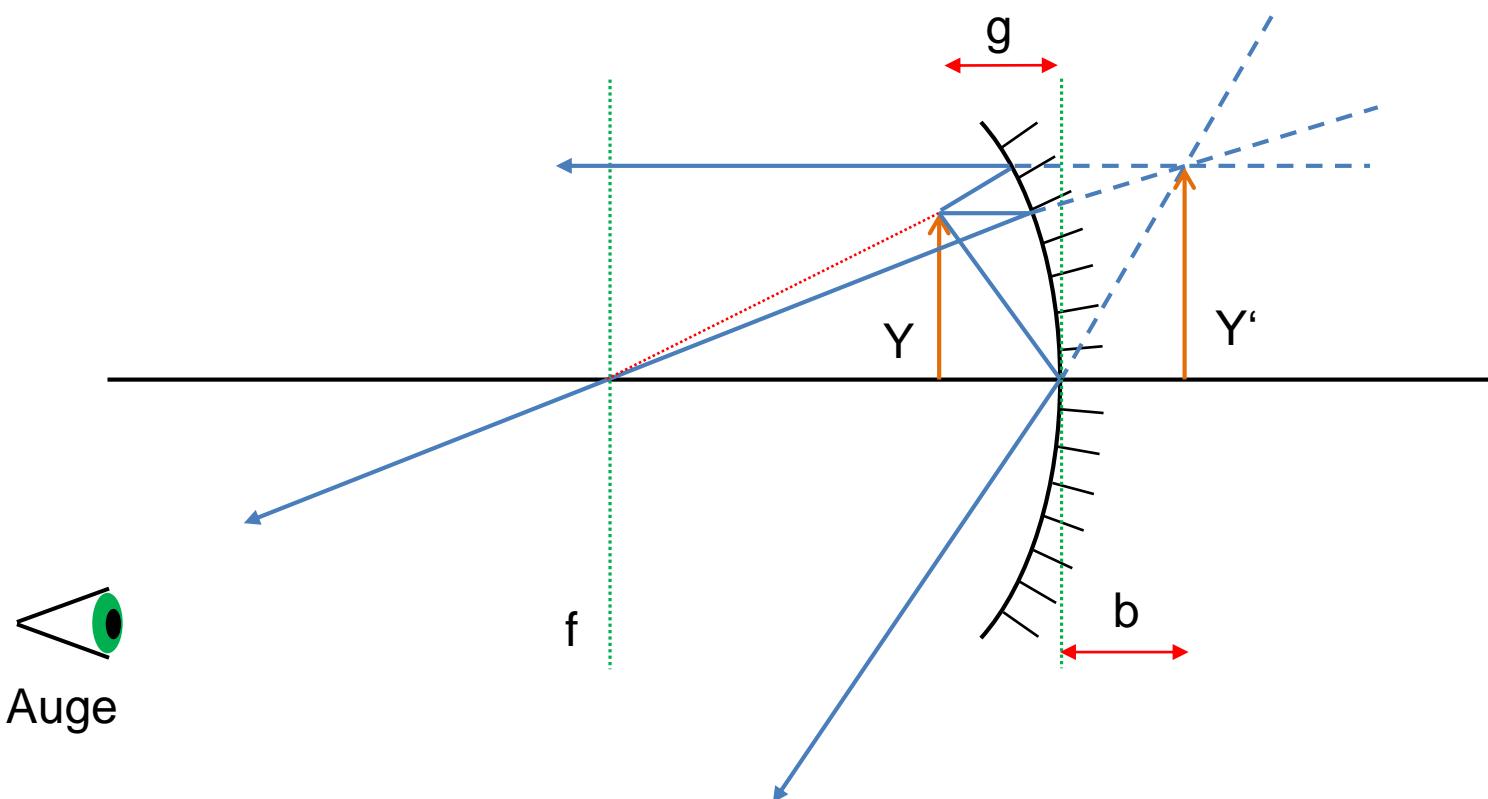
- Reelles Bild, kann aufgezeichnet werden
- Steht auf dem Kopf
- Ist verkleinert mit Maßstab:
$$\beta = \frac{Y'}{Y} = \frac{b}{g}$$

Konkave Spiegel - $g = 2f$



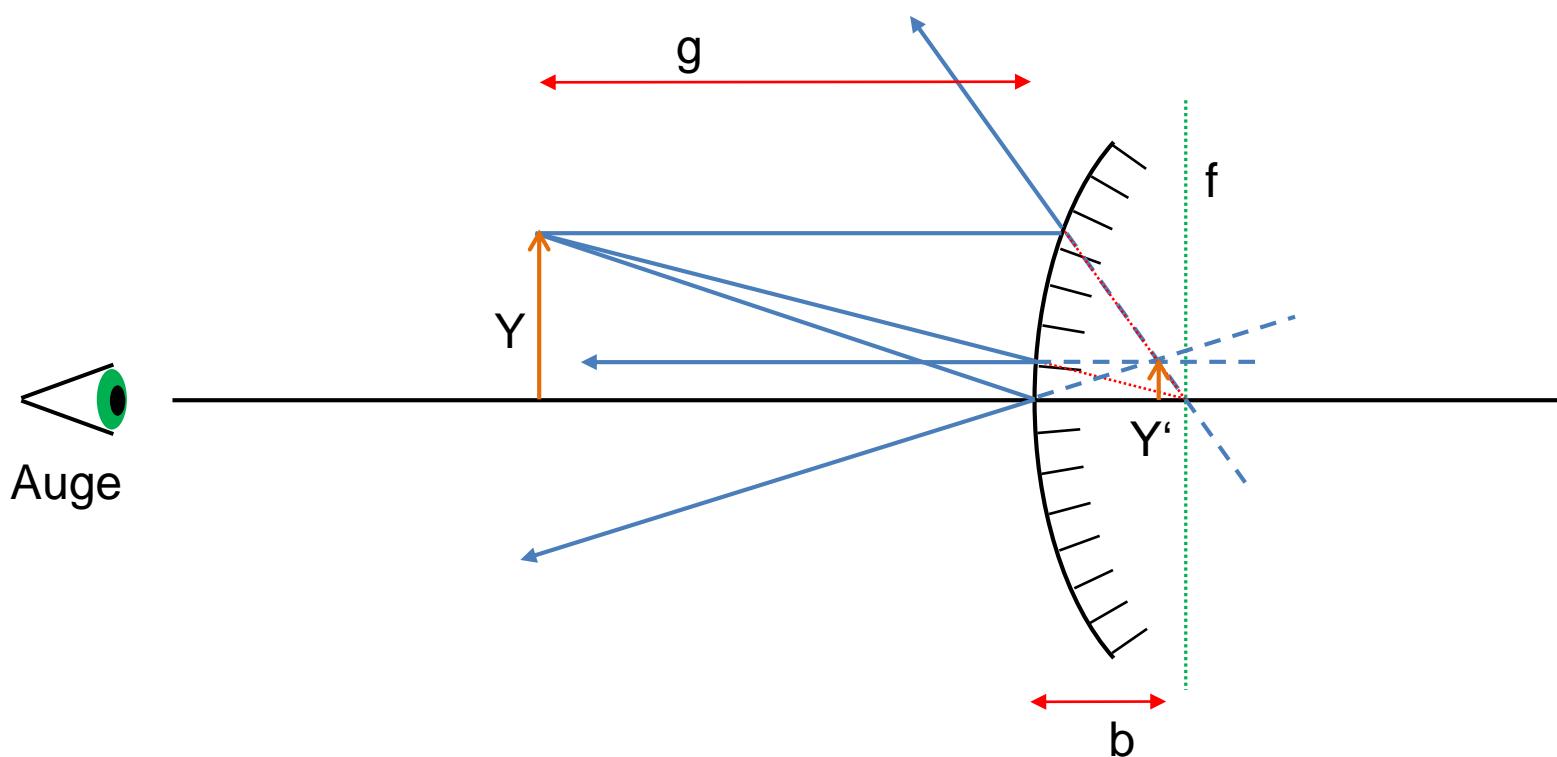
- Reelles Bild mit Maßstab $\beta = -1$
- $b = g$
- Minimale Gesamtlänge

Konkave Spiegel - $g \leq f$



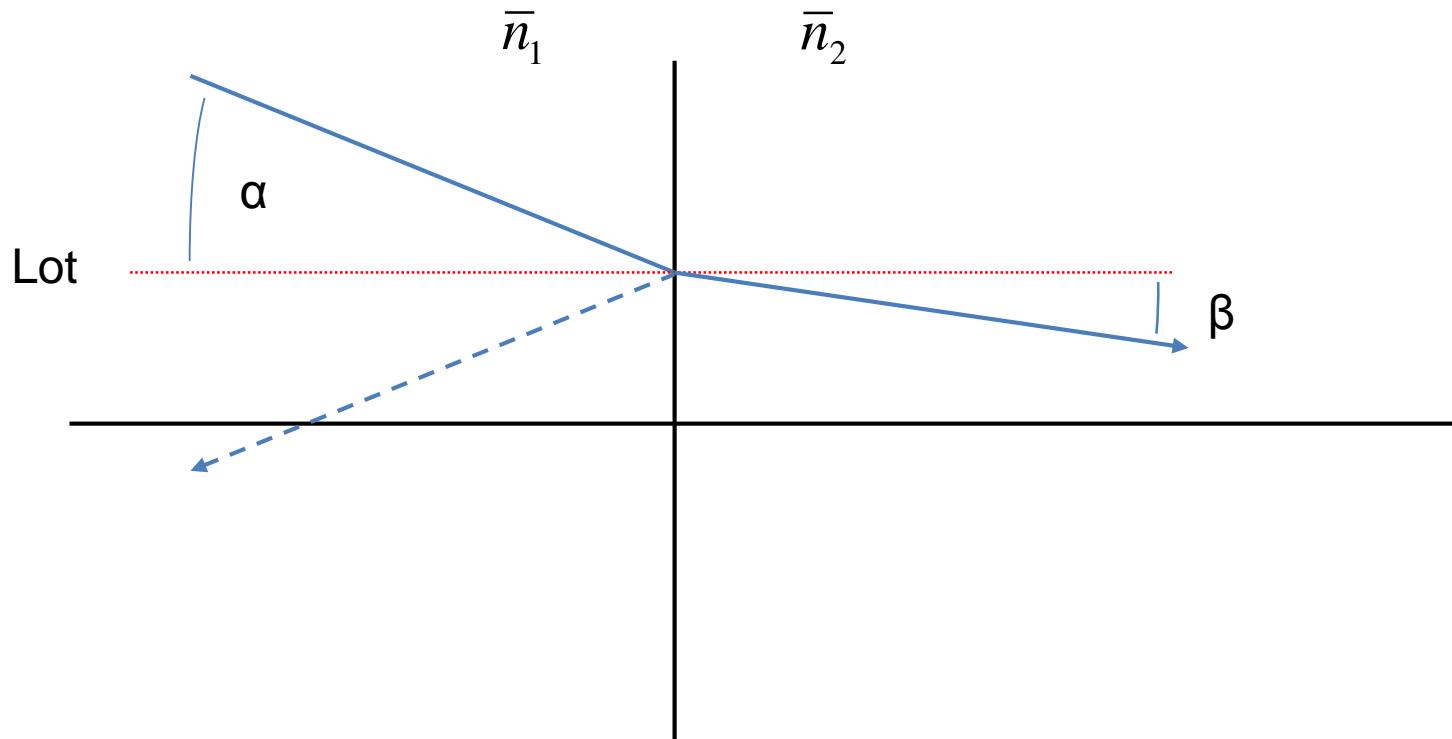
- Virtuelles Bild, aufrecht

Konvexe Spiegel - $g \gg f$



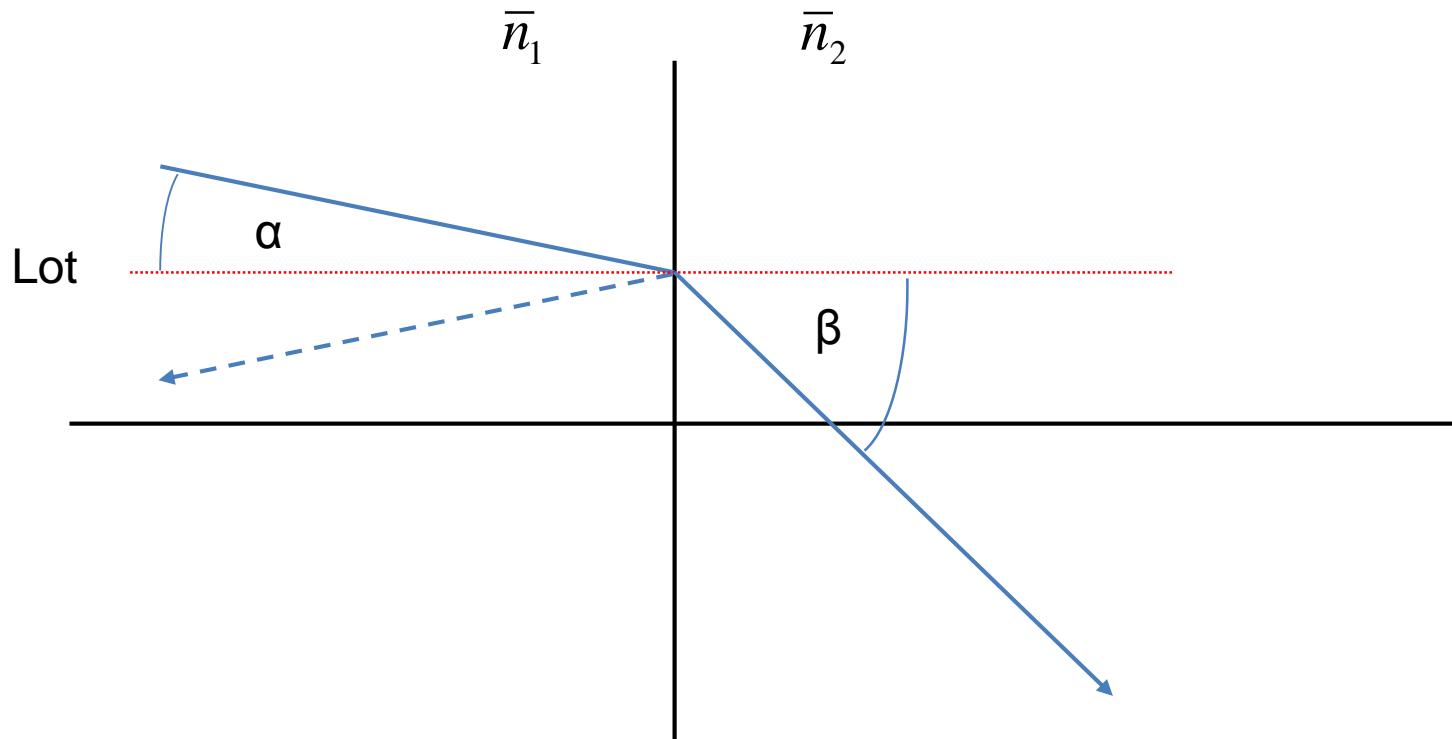
- f ist + und liegt hinter Spiegel, f' wird - nach Reflexion
- Virtuelles Bild
- Weitere Fälle zur Übung 😊

Brechung an Grenzfläche



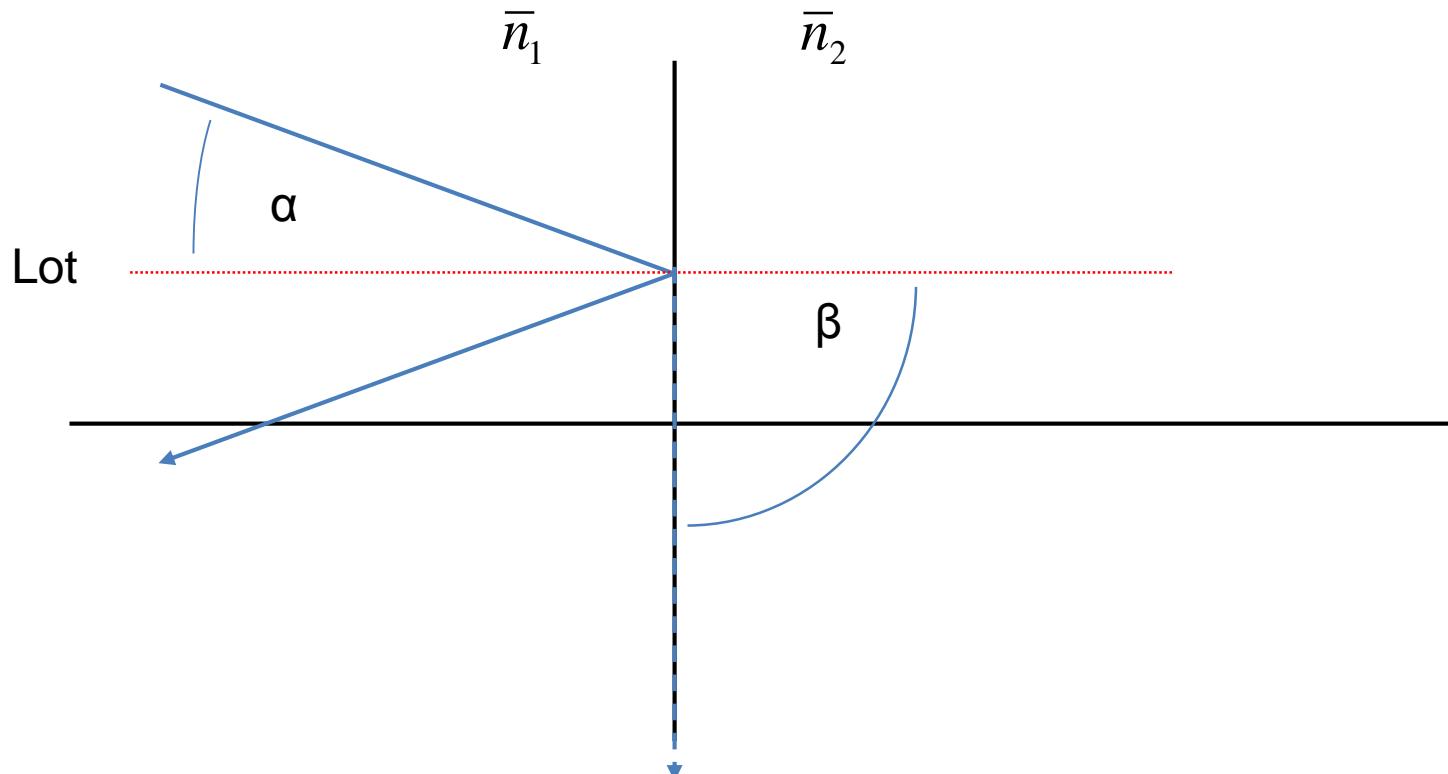
- Fall 1: $\bar{n}_1 < \bar{n}_2$ (\bar{n}_1 ist optisch dünner als \bar{n}_2)
- Strahl wird zum Lot hin gebrochen
- Es gilt: $\bar{n}_1 \sin(\alpha) = \bar{n}_2 \sin(\beta)$
- Der gebrochene Strahl liegt in der Einfallsebene (definiert durch einfallenden Strahl und Lot)

Brechung an Grenzfläche



- Fall 2: $\bar{n}_1 > \bar{n}_2$ (\bar{n}_1 ist optisch dichter als \bar{n}_2)
- Strahl wird vom Lot weg gebrochen
- Es gilt: $\bar{n}_1 \sin(\alpha) = \bar{n}_2 \sin(\beta)$
- Der gebrochene Strahl liegt in der Einfallsebene (definiert durch einfallenden Strahl und Lot)

Brechung an Grenzfläche



- Fall 2: $\bar{n}_1 > \bar{n}_2$ (\bar{n}_1 ist optisch dichter als \bar{n}_2)
- Sonderfall: gebrochener Strahl mit $\beta \geq 90^\circ$
- Keine Ausbreitung in n_2 möglich \longrightarrow Totalreflexion
- Hier gilt: $\alpha_{grenz} = \arcsin\left(\frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_1}\right)$ (da $\sin(\beta) = 1$)

Abbildung durch Linsen

Linsentypen

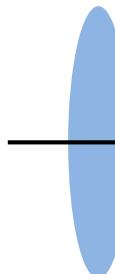
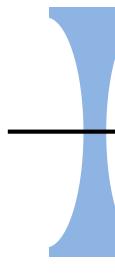
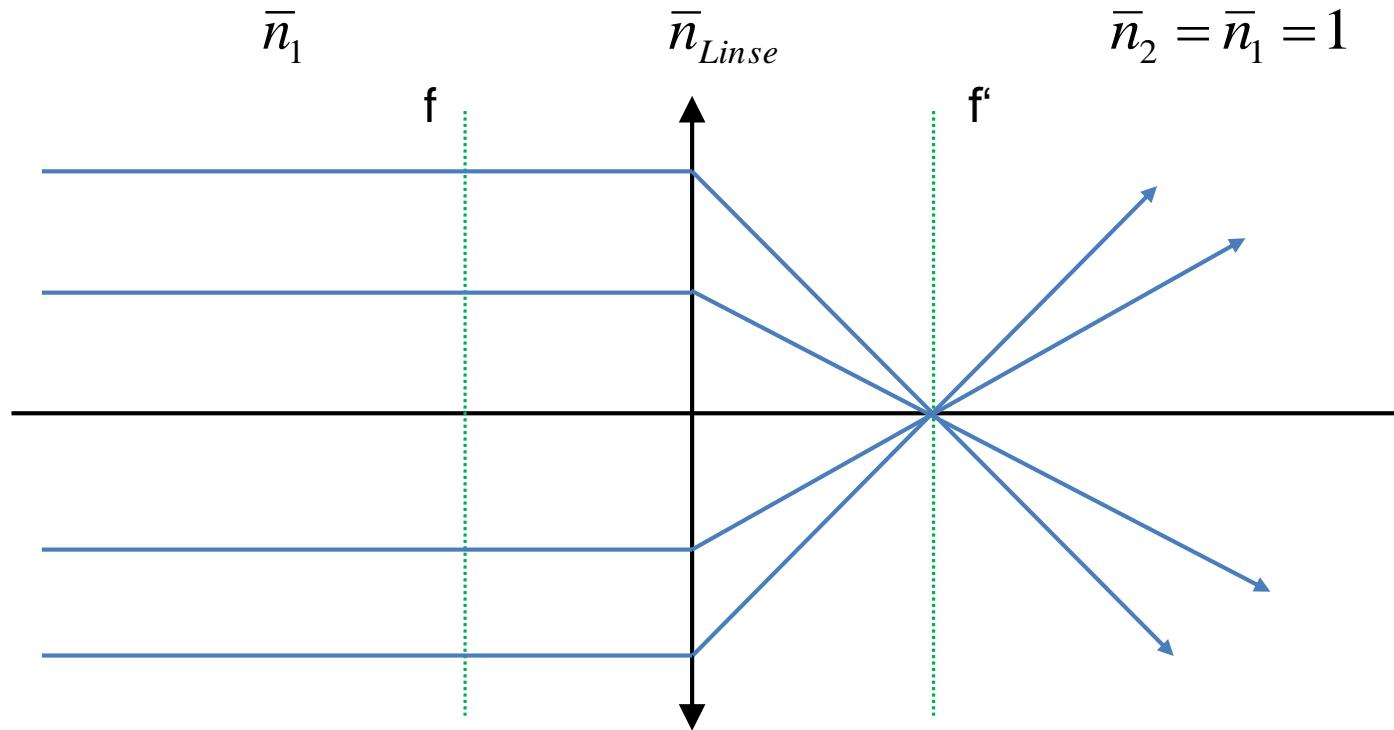
Sammel- linsen (positiv)				
	Bikonvex	Planokonvex	Meniskus mit $ R_1 < R_2 $ f. $R_1, R_2 > 0$ $ R_1 > R_2 $ f. $R_1, R_2 < 0$	Symbol
Zerstreuungs- linsen (negativ)				
	Bikonkav	Planokonkav	Meniskus mit $ R_1 > R_2 $ f. $R_1, R_2 > 0$ $ R_1 < R_2 $ f. $R_1, R_2 < 0$	Symbol

Abbildung durch dünne Linsen

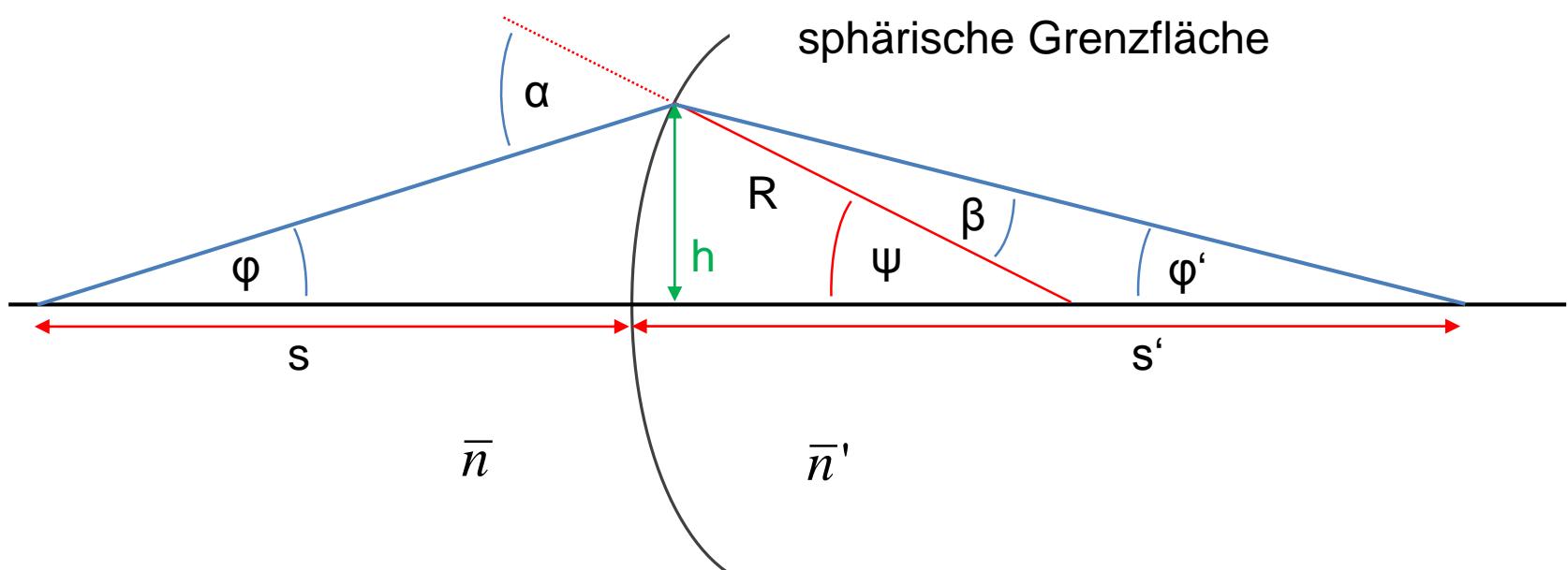


- Achsparalleler Strahl mit $g \rightarrow \infty$ schneidet Achse in Brennpunkt f
- Brennweite ergibt sich aus Eigenschaften der (dünnen) Linse:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f'} = (\bar{n}_L - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (\text{wenn } \bar{n}_2, \bar{n}_1 = 1)$$

- Alle parallelen Strahlen schneiden sich in Brennebene
(gilt auch für schräge Strahlen, Schnittpunkt dann nicht auf Achse)

Abbildung durch dünne Linsen



$$\bar{n} \sin(\alpha) = \bar{n}' \sin(\beta)$$

paraxiale Näherung:

φ, α, β sind sehr klein

$$\longrightarrow \bar{n} \alpha = \bar{n}' \beta \quad \text{und} \quad \psi = \frac{h}{R} \quad \text{und} \quad \varphi = \frac{h}{s} \quad \text{und} \quad \varphi' = \frac{h}{s'}$$

$$\text{mit} \quad \alpha = \psi - \varphi = \frac{h}{R} - \frac{h}{s} \quad \text{und} \quad \beta = \psi - \varphi' = \frac{h}{R} - \frac{h}{s'}$$

Abbildung durch dünne Linsen

$$\rightarrow \quad \bar{n} \cancel{h} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s} \right) = \bar{n}' \cancel{h} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s'} \right)$$

$$\bar{n} \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s} \right) = \bar{n}' \left(\frac{1}{R} - \frac{1}{s'} \right)$$

Abbé-Invariante

vergleichbarer
Zusammenhang

$$\bar{n} \varphi Y = \bar{n}' \varphi' Y'$$

Helmholtz-Lagrange-
Invariante

Dünne Linse: \rightarrow zwei brechende Flächen mit Abstand $d \rightarrow 0$

$$\rightarrow \quad s_1' = s_2 \quad \text{und} \quad \bar{n}_1' = \bar{n}_2 = \bar{n}_L \quad \text{und} \quad \bar{n}_2' = \bar{n}_1 = 1$$

Abbildung durch dünne Linsen

$$\bar{n}_1 \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{s_1} \right) = \bar{n}_1' \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{s_1'} \right)$$

$$\bar{n}_2 \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{s_2} \right) = \bar{n}_2' \left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{s_2'} \right)$$

$$\rightarrow \frac{1}{R_1} - \frac{1}{s_1} = \bar{n}_L \frac{1}{R_1} - \cancel{\bar{n}_L} \frac{1}{s_2} \quad (\text{I})$$

$$\bar{n}_L \frac{1}{R_2} - \cancel{\bar{n}_L} \frac{1}{s_2} = \frac{1}{R_2} - \frac{1}{s_2}, \quad (\text{II})$$

$$(\text{I}) - (\text{II}) \quad \frac{1}{s_2} - \frac{1}{s_1} = \bar{n}_L \frac{1}{R_1} - \bar{n}_L \frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \bar{n}_L \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

$$= (\bar{n}_L - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

mit $s \rightarrow g$ und $\lim_{g \rightarrow \infty} b = f'$ $\rightarrow \frac{1}{b} - \frac{1}{g} = (\bar{n}_L - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{1}{f'} = D$

$s' \rightarrow b$ und $\lim_{b \rightarrow \infty} g = f$

D: Brechkraft einer Linse [Dioptrie=1/m]

Abbildung durch dünne Linsen

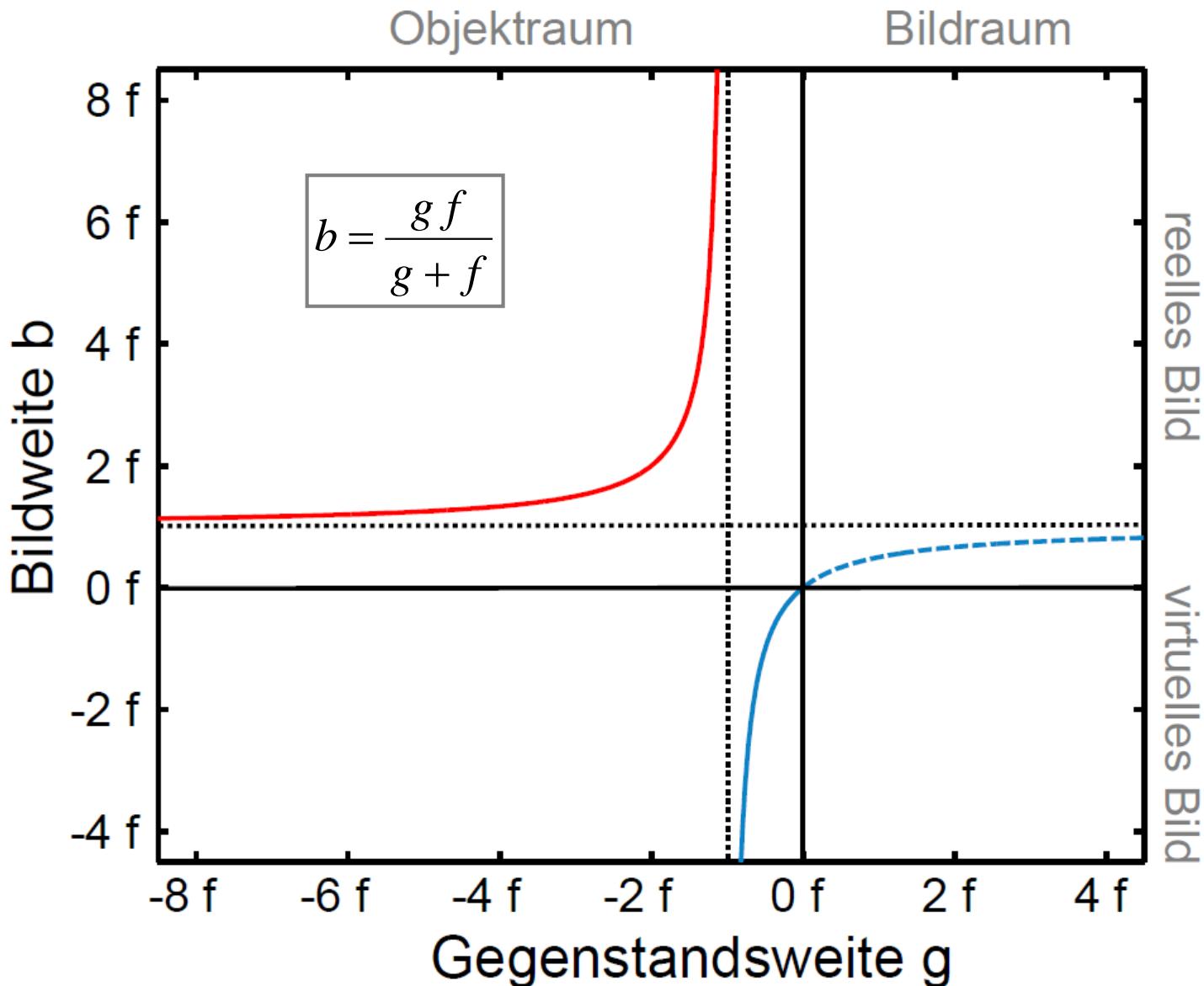
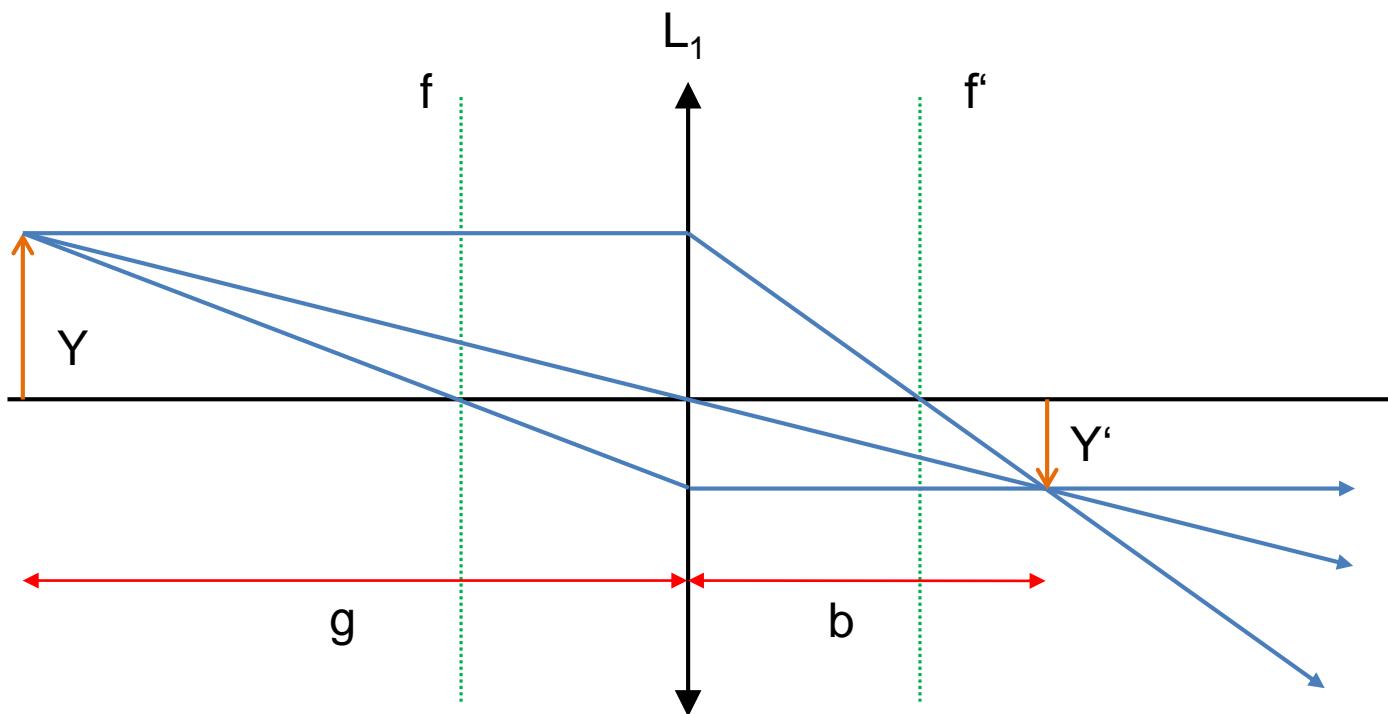
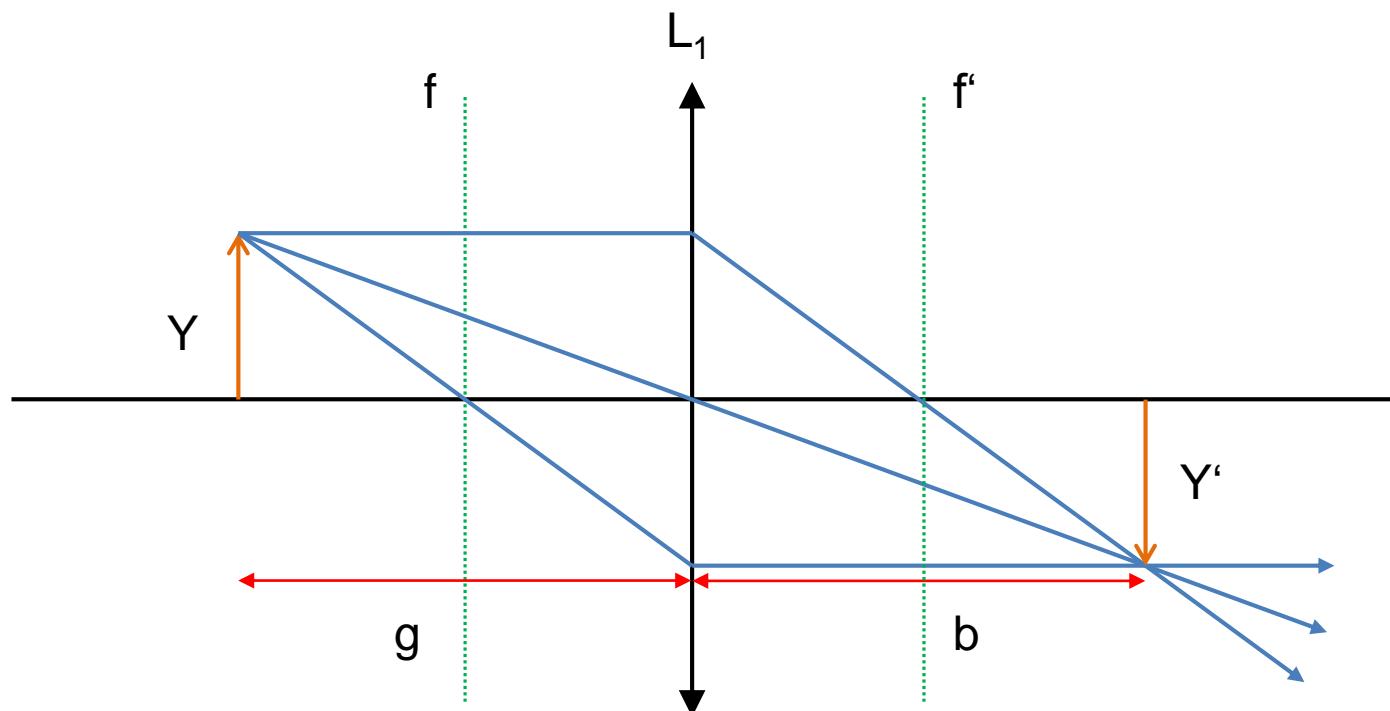


Abbildung durch dünne Linsen - $g \gg f$



- Reelles, verkleinertes Bild

Abbildung durch dünne Linsen - $g = 2f$



- reelles Bild mit Maßstab $\beta = -1$
- Bildweite $b = 2 f$
- Minimale Gesamtlänge ($= 4 f$)

Minimale Gesamtlänge der Abbildung



nur Beträge der Längen $\rightarrow \frac{1}{|f|} = \frac{1}{|b|} + \frac{1}{|g|}$ und $L_{ges} = |b| + |g|$

min. $L_{ges} = ? \rightarrow \frac{dL}{dg} = 0$ mit $L = |b| + |g| = \frac{|b||g|}{|f|} = \frac{|f||g|}{|g| - |f|} \frac{|g|}{|f|} = \frac{|g|^2}{|g| - |f|}$

$$\rightarrow \frac{dL}{dg} = \frac{2|g|(|g| - |f|) - |g|^2}{(|g| - |f|)^2}$$

Nullsetzen $\rightarrow 2|g|(|g| - |f|) - |g|^2 = 0$

$$2|g|^2 - 2|g||f| - |g|^2 = 0$$

$$|g|^2 = 2|g||f|$$

$$|g| = 2|f|$$

nur stationärer Punkt:

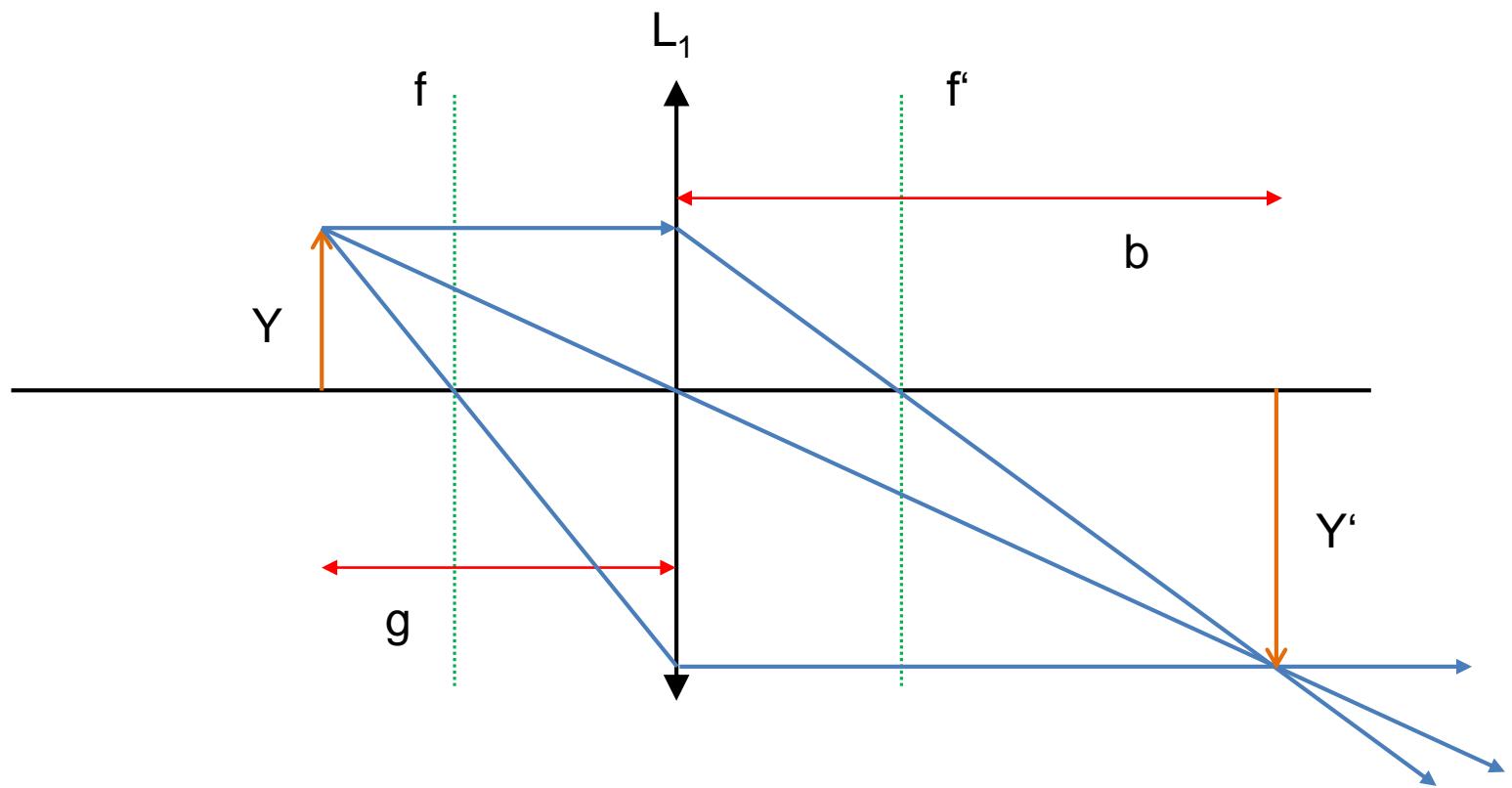
\rightarrow 2. Ableitung

$$\frac{d^2L}{dg^2} = \frac{2}{|f|} > 0$$

\rightarrow Minimum

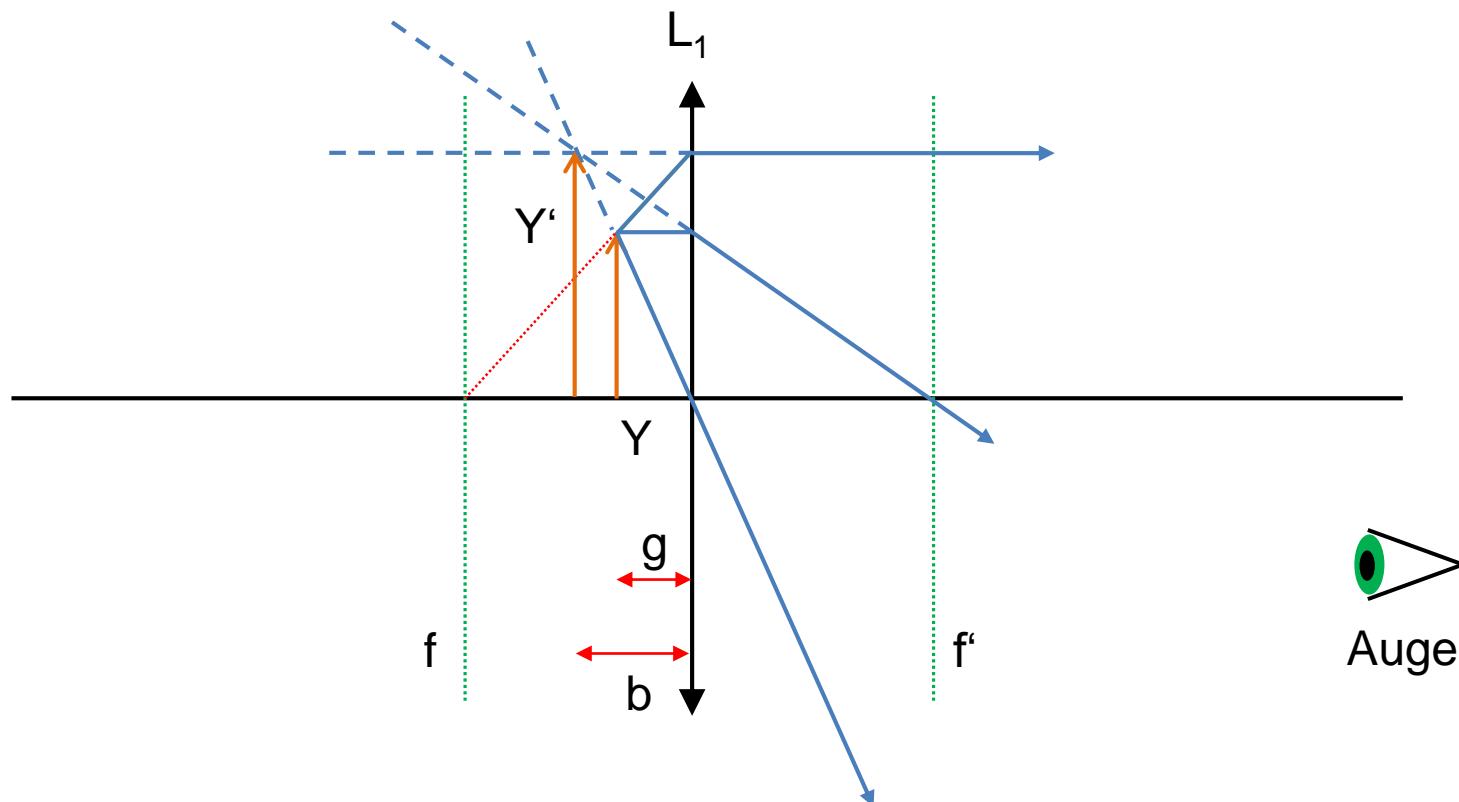
$\rightarrow g = 2|f|$ also ist auch $b = 2|f| \rightarrow L = 4|f|$

Abbildung durch dünne Linsen - $2f > g > f$



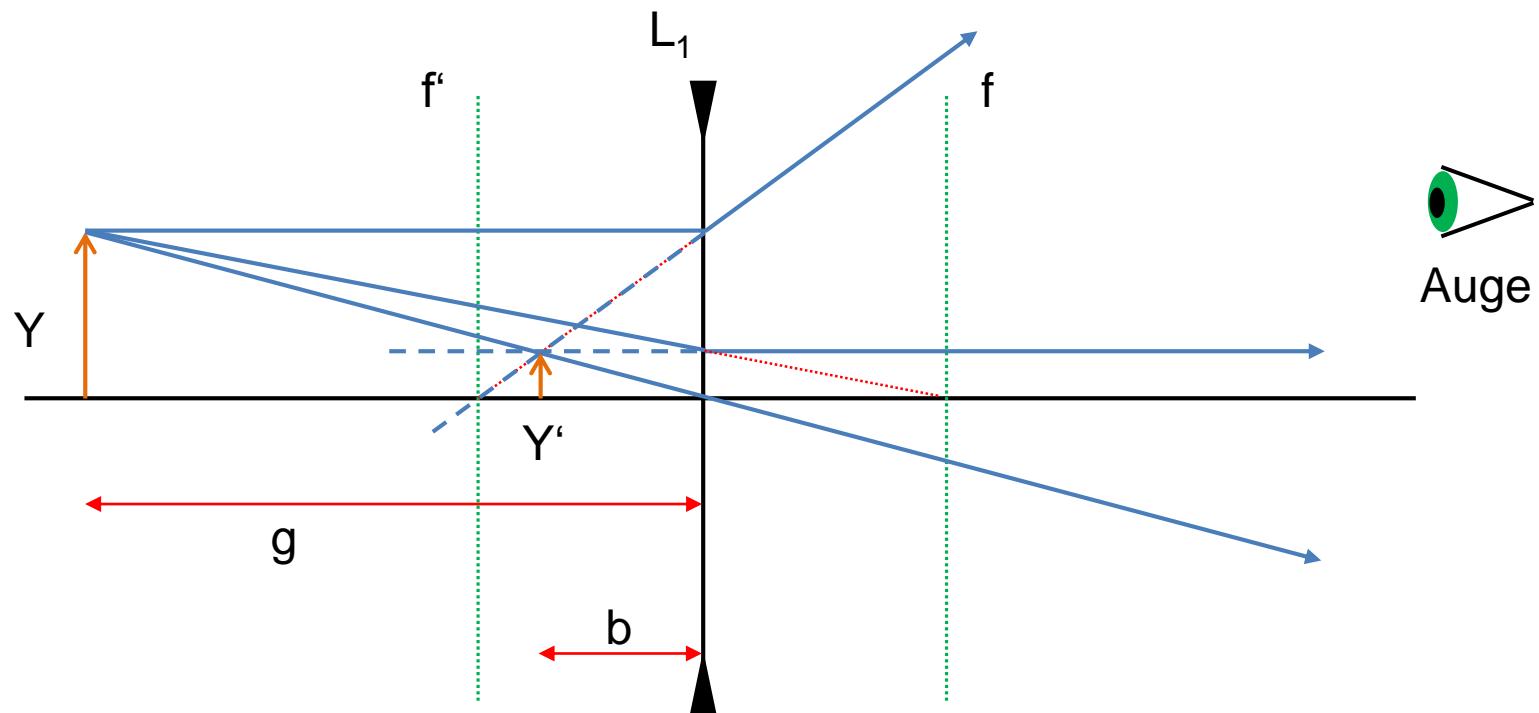
- Reelles, vergrößertes Bild

Abbildung durch dünne Linsen - $g < f$



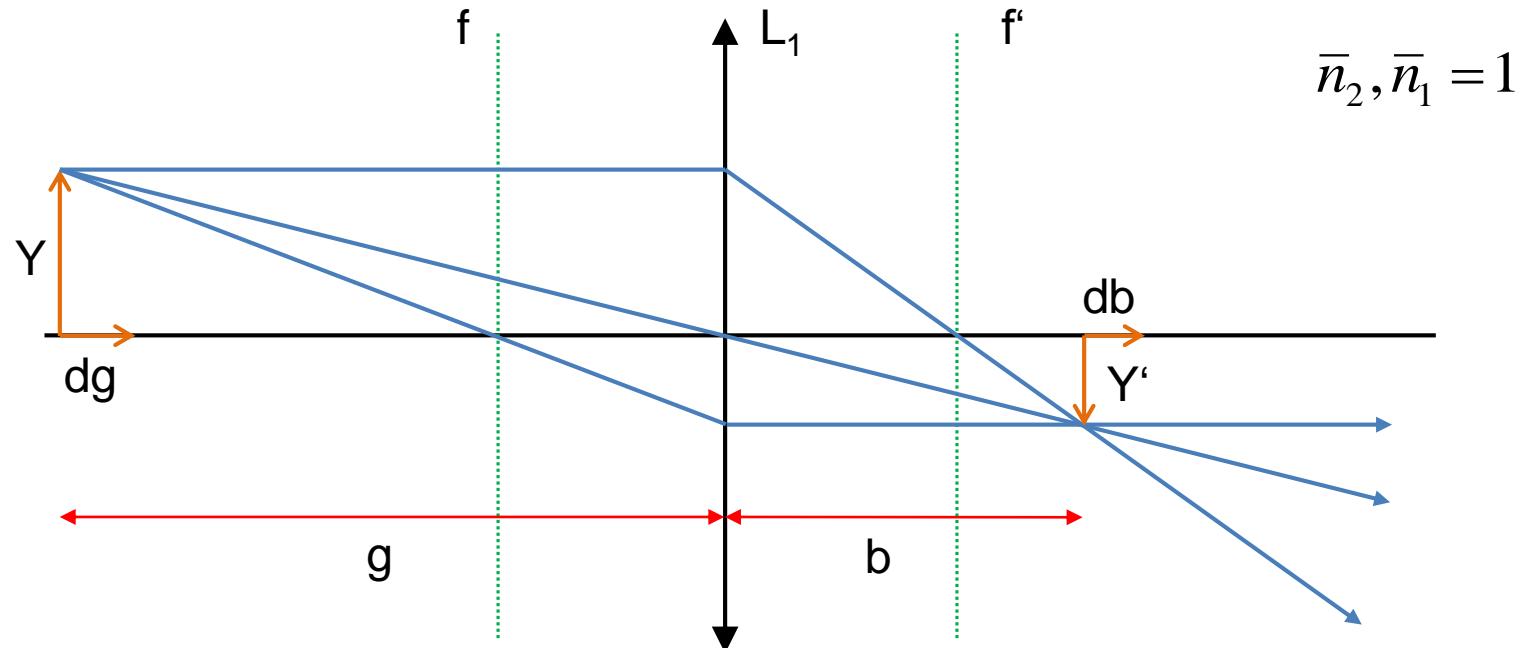
- Virtuelles Bild

Abbildung durch dünne Linsen - Negativlinse



- Virtuelles Bild
- Weitere Fälle zur Übung 😊

Tiefenmaßstab



Abbildungsmaßstab: $\beta = \frac{Y'}{Y} = \frac{b}{g}$

Tiefenmaßstab: $\alpha = \frac{db}{dg} = ?$ mit $b = \frac{gf}{g+f}$

$$\alpha = \frac{db}{dg} = \frac{f(g+f) - gf}{(g+f)^2} = \frac{\cancel{gf} + f^2 - \cancel{gf}}{(g+f)^2} = \left(\frac{b}{g}\right)^2 = \beta^2$$

Formeln: dünne Linsen & Spiegel (paraxial)

Abbildung mit $\bar{n}_2, \bar{n}_1 = 1$:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} = \frac{1}{b} - \frac{1}{g}$$

Linsenbrennweite mit $\bar{n}_2, \bar{n}_1 = 1$:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} = (\bar{n}_L - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$

Linsenbrennweite mit $\bar{n}_2 \neq \bar{n}_1$:

$$\frac{\bar{n}_1}{f'} = \frac{\bar{n}_2}{f} = (\bar{n}_L - \bar{n}_1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} \right) - (\bar{n}_L - \bar{n}_2) \cdot \left(\frac{1}{R_2} \right)$$

Brennweite eines Spiegel:

$$f = \frac{R}{2}$$

Abbildungsmaßstab:

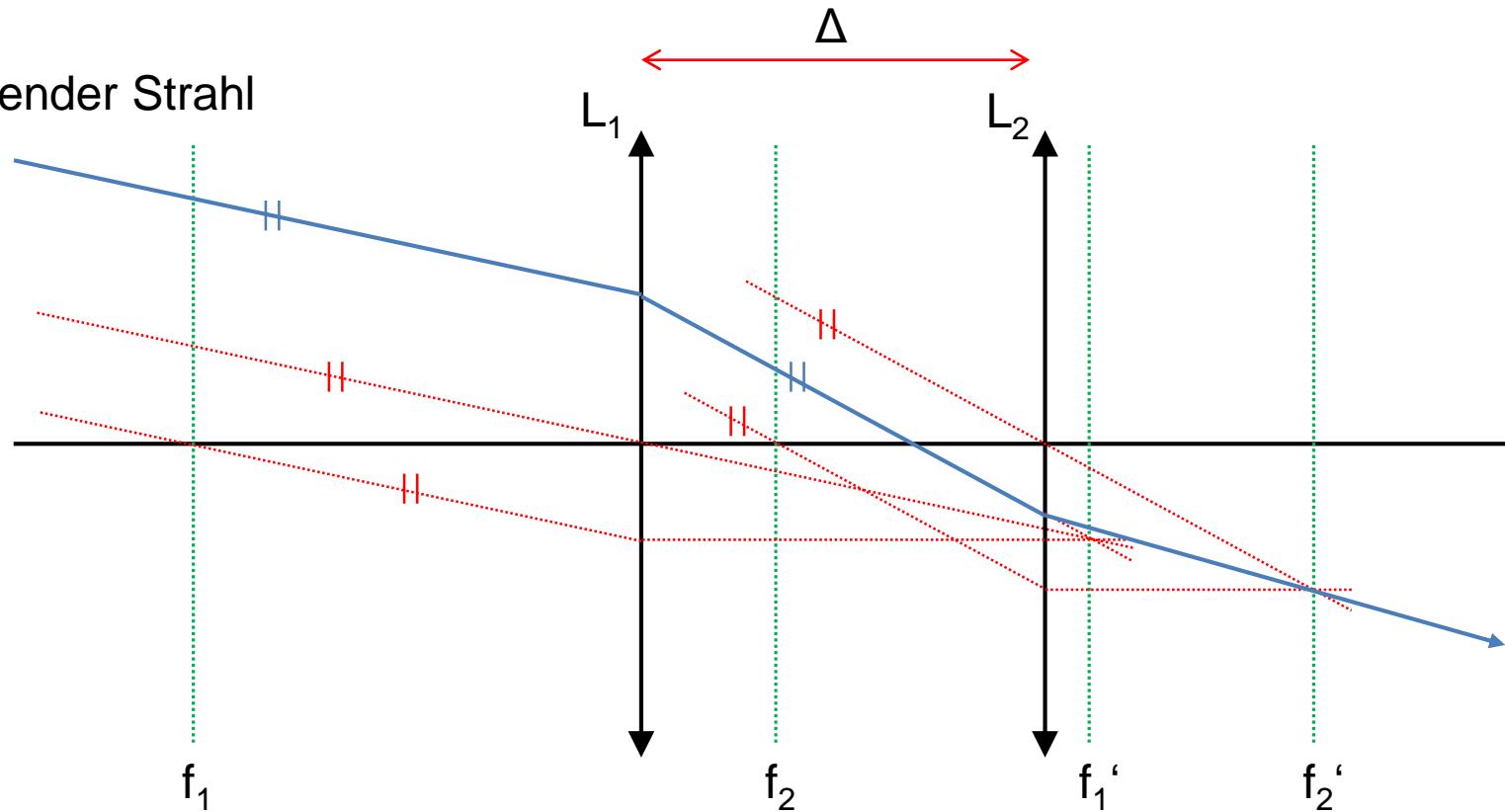
$$\beta = \frac{Y'}{Y} = \frac{b}{g}$$

Tiefenmaßstab mit $\bar{n}_2 \neq \bar{n}_1$:

$$\alpha = \frac{db}{dg} = \frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_1} \beta^2$$

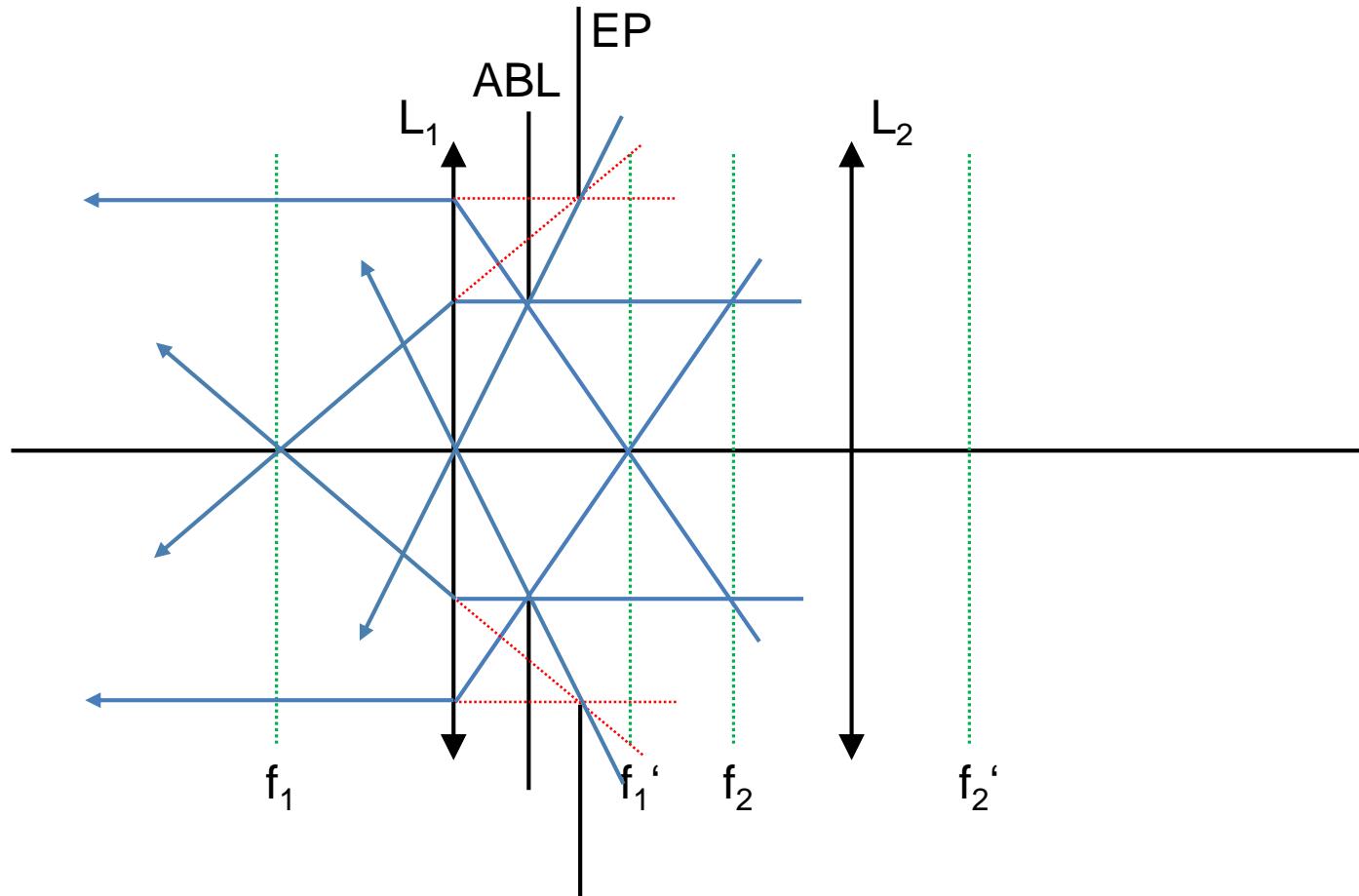
Optische Systeme

Einfallender Strahl



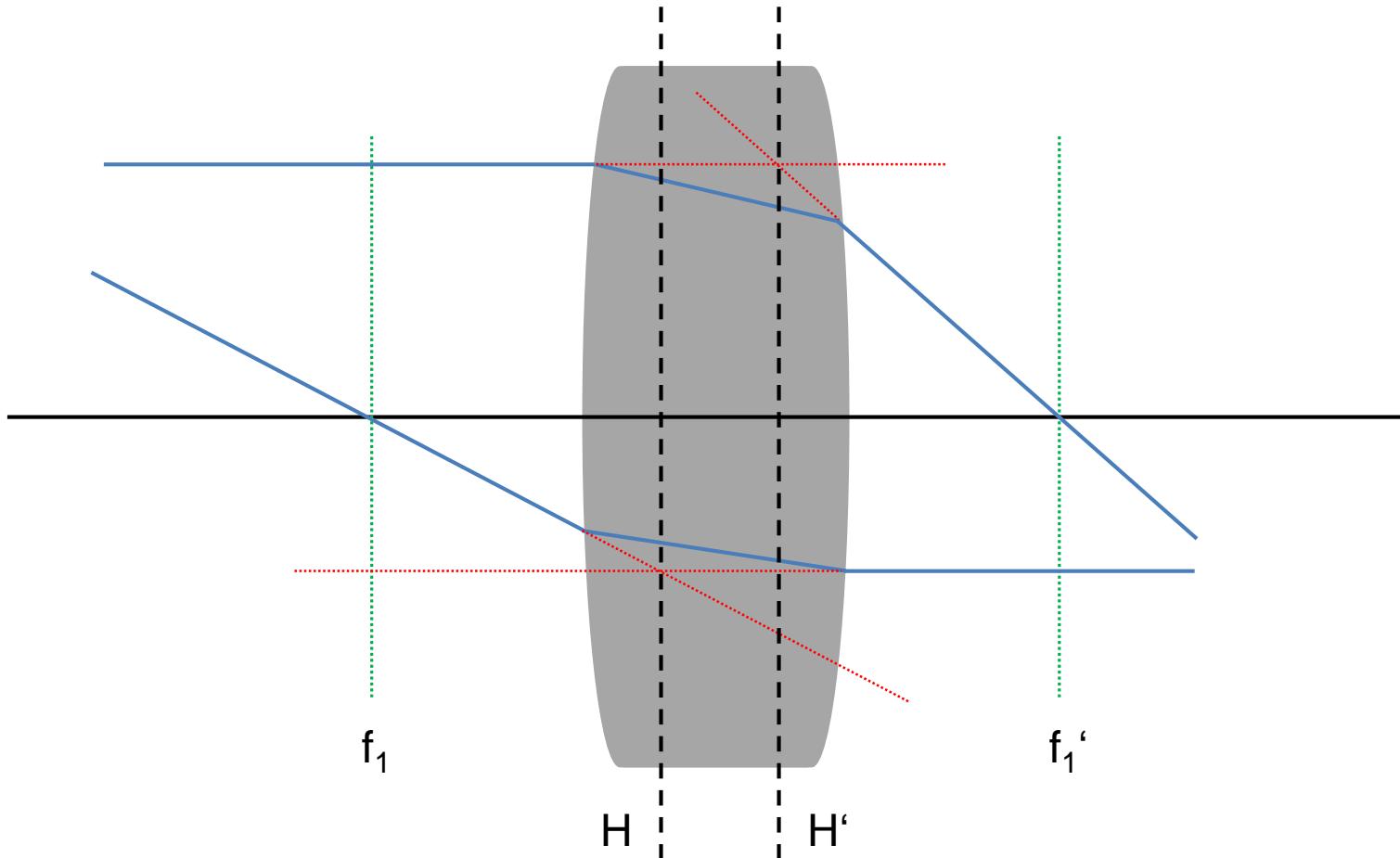
- Strahlengang ohne Bild, für beliebig einfallenden Strahl
- Strahlen aus unendlich schneiden sich in Brennebene
- Verwendung paralleler Hilfslinien

Blenden & Pupillen



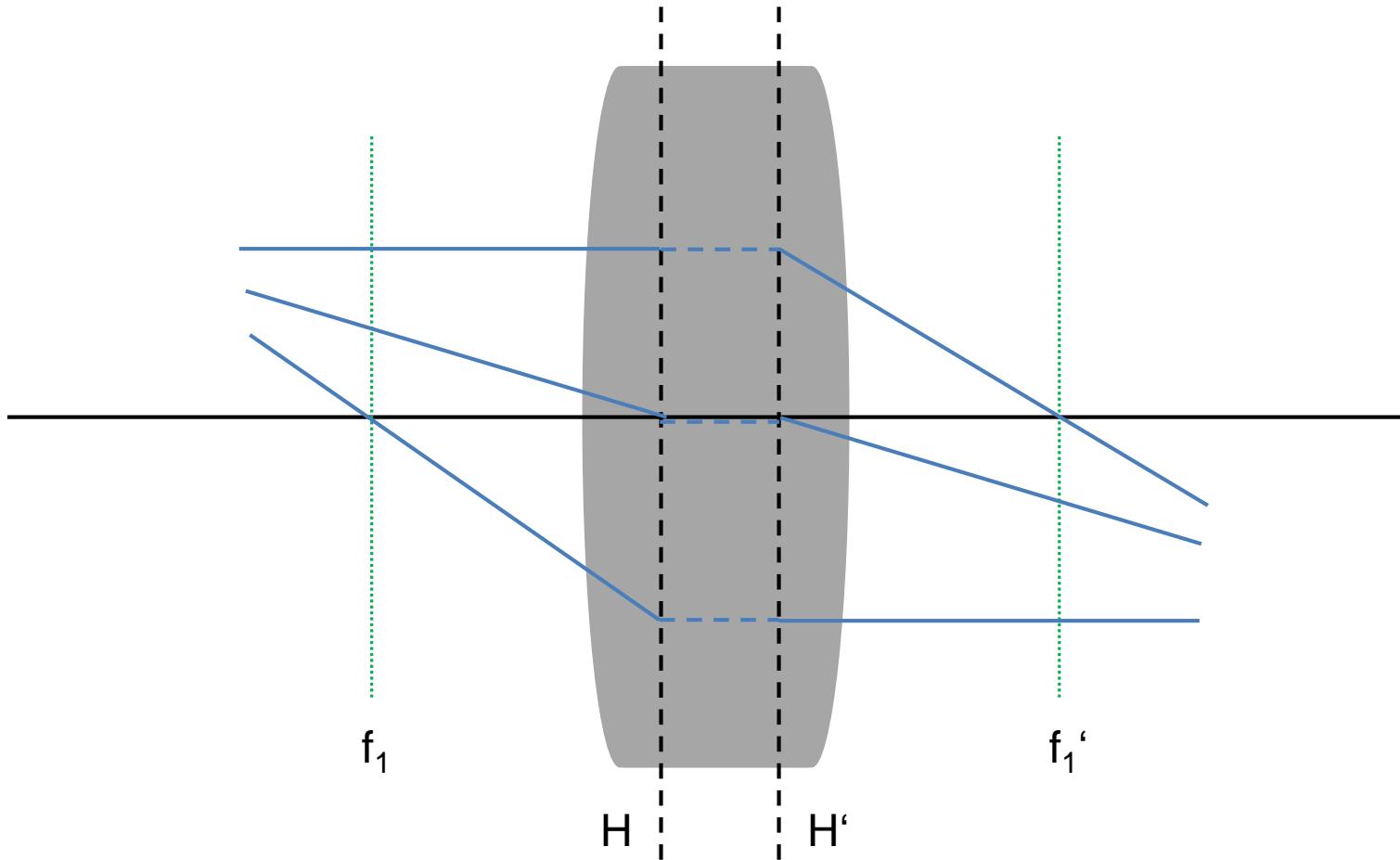
- Strahlbegrenzung durch Aperturblende (ABL)
 - Bilder der ABL sind Eintritts (EP)- und Austrittspupille (AP)
 - Konstruktion der AP zur Übung 

Hauptebenen

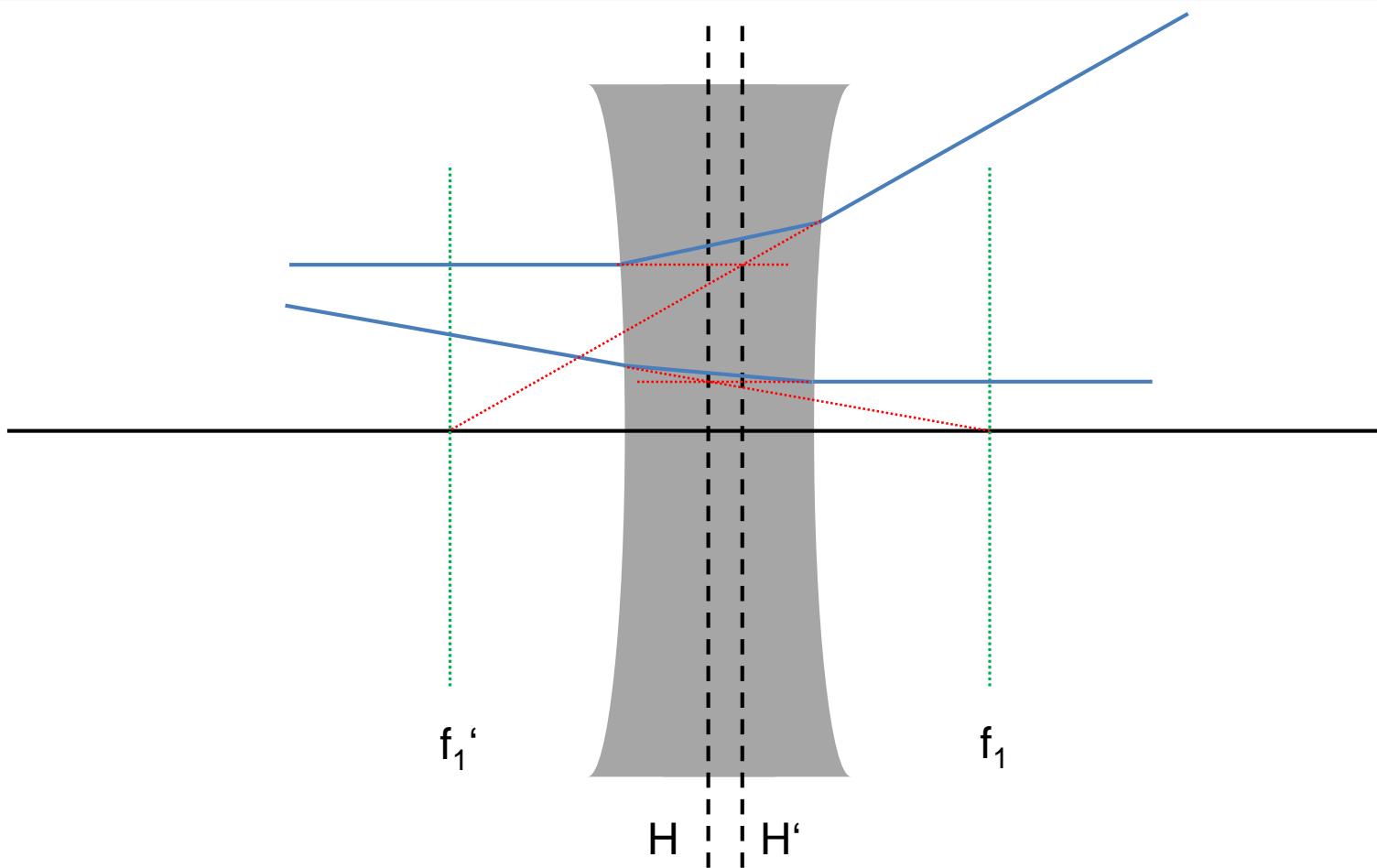


- Hauptebenen repräsentieren dicke Linsen und optische Systeme
- Strahlen werden von H zu H' mit Maßstab 1:1 übertragen

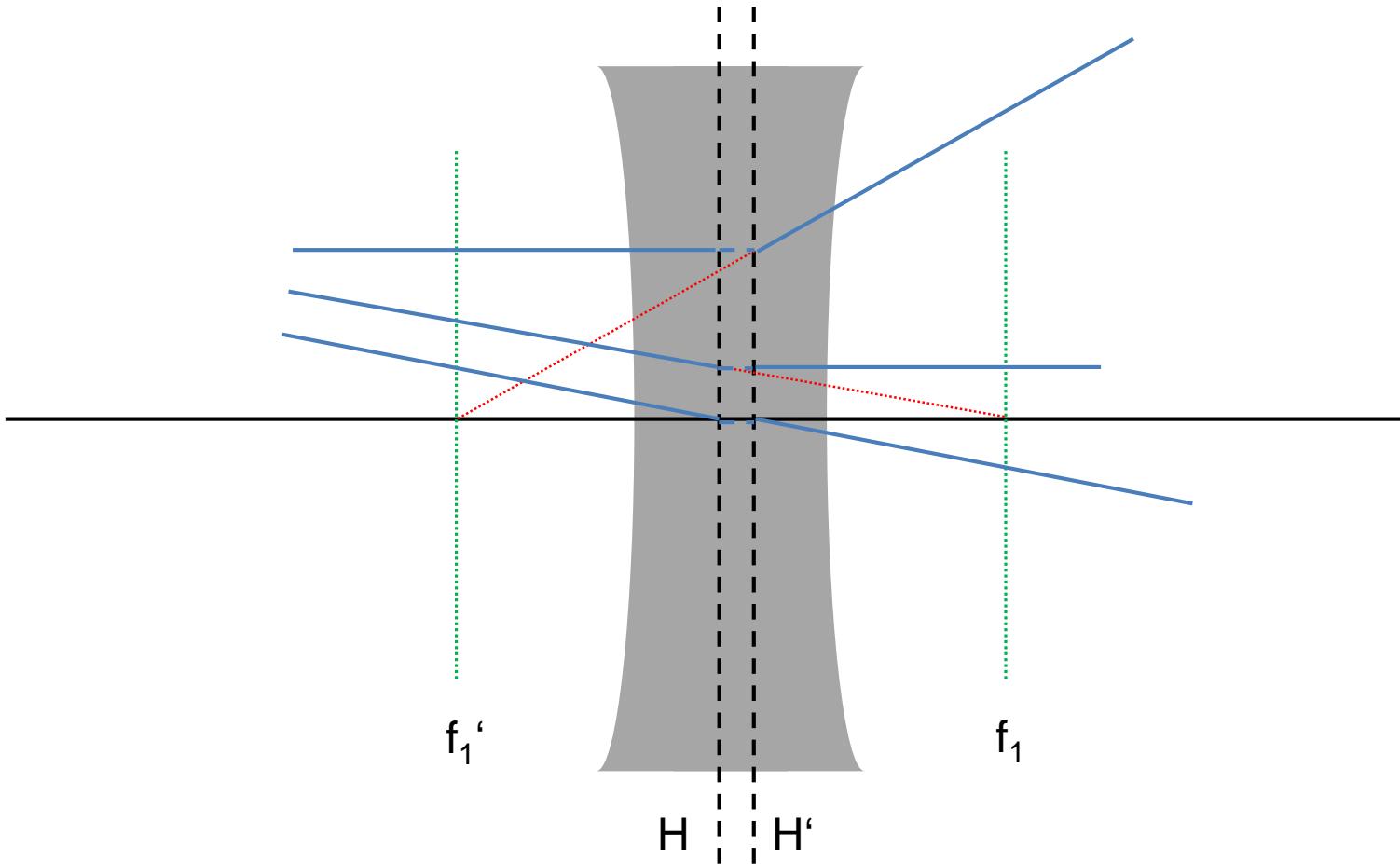
Hauptebenen



Hauptebenen



Hauptebenen



Formeln: dicke Linsen und opt. Systeme (paraxial)

Brennweite einer dicken Linse:

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{f} = (\bar{n}_L - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \left(\frac{(\bar{n}_L - 1)^2}{\bar{n}_L} \cdot \frac{d}{R_1 R_2} \right)$$

Gesamtbrennweite mit zwei Linsen:

$$f_{ges}' = \frac{f_1' \cdot f_2'}{f_1' + f_2' - \Delta}$$

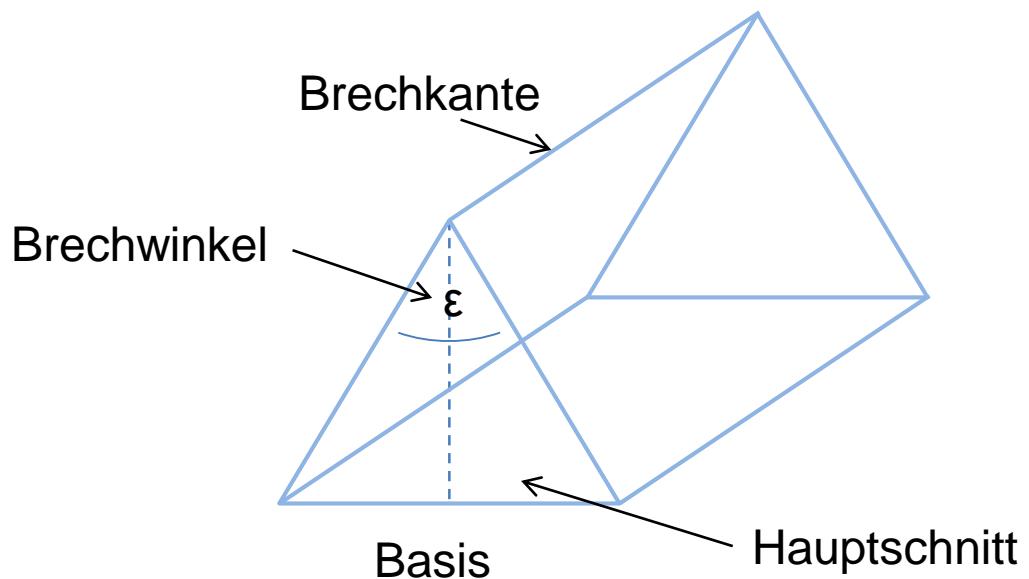
Speziell für Abstand $\Delta = 0$:

$$\frac{1}{f_{ges}'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$$

Geometrische Optik

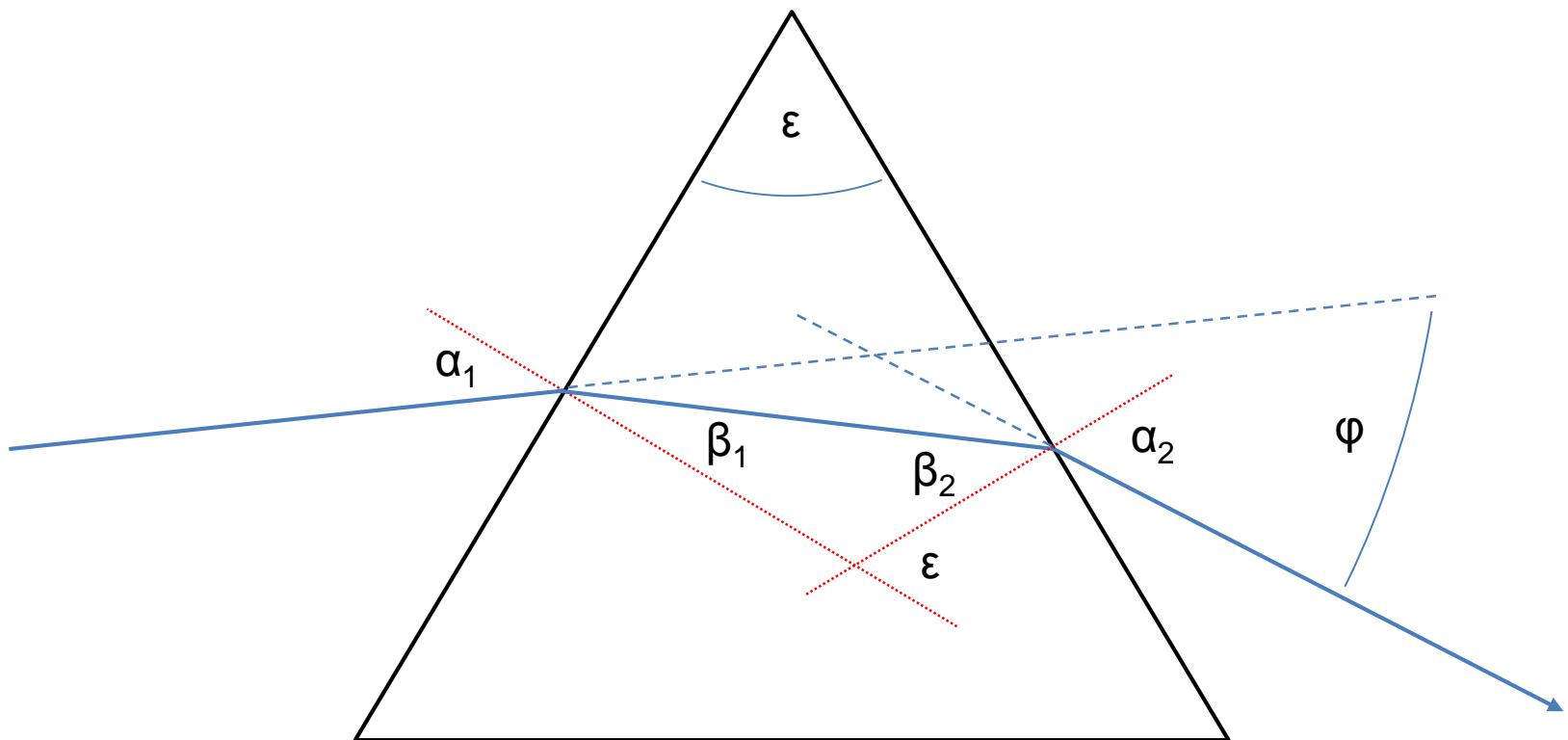
(optische Aberrationen)

Prismen



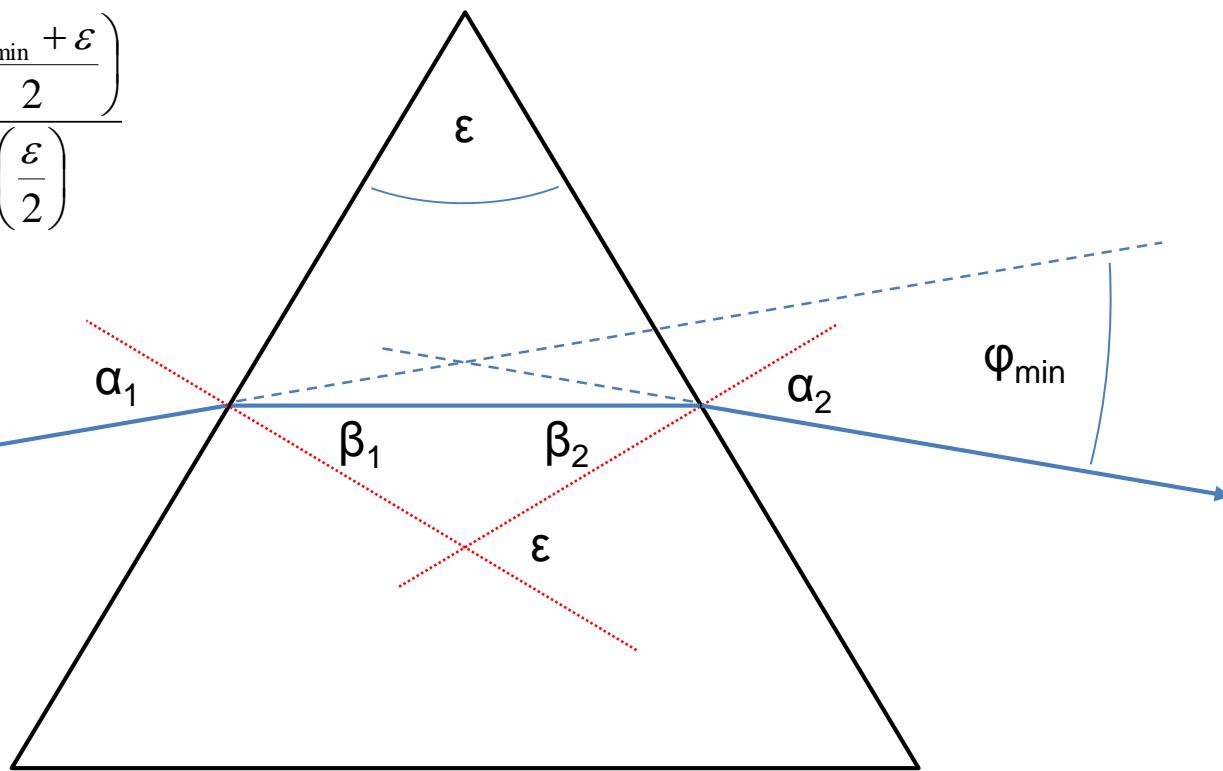
- Viele Formen möglich (Gradsicht-, Dachkant-, Porro-, Penta-, Keilprismen, ...)
- Anwendungen: z.B. Strahlablenkung, Bildumkehr, Strahlteilung, ...

Prismen



Prismen

$$n = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(\beta)} = \frac{\sin\left(\frac{\varphi_{\min} + \varepsilon}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)}$$

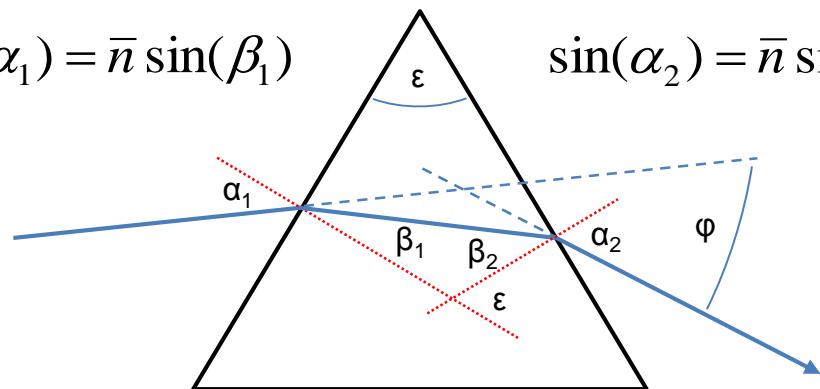


- Minimalablenkung für $\alpha_1 = \alpha_2$ (symmetrischer Strahlverlauf)
- Strahl wandert für zunehmende α_1 nach φ_{\min} und zurück
- φ_{\min} hängt nur von Brechungsindex und Brechwinkel ab



Prismen - Minimalablenkung

$$\sin(\alpha_1) = \bar{n} \sin(\beta_1)$$



$$\sin(\alpha_2) = \bar{n} \sin(\beta_2)$$

$$\beta_2 = \varepsilon - \beta_1$$

$$\varphi = \alpha_1 + \alpha_2 - \varepsilon$$

$$d\varphi = d\alpha_1 + d\alpha_2$$

φ wird minimal, wenn: $d\varphi = 0$ also $d\alpha_1 = -d\alpha_2$

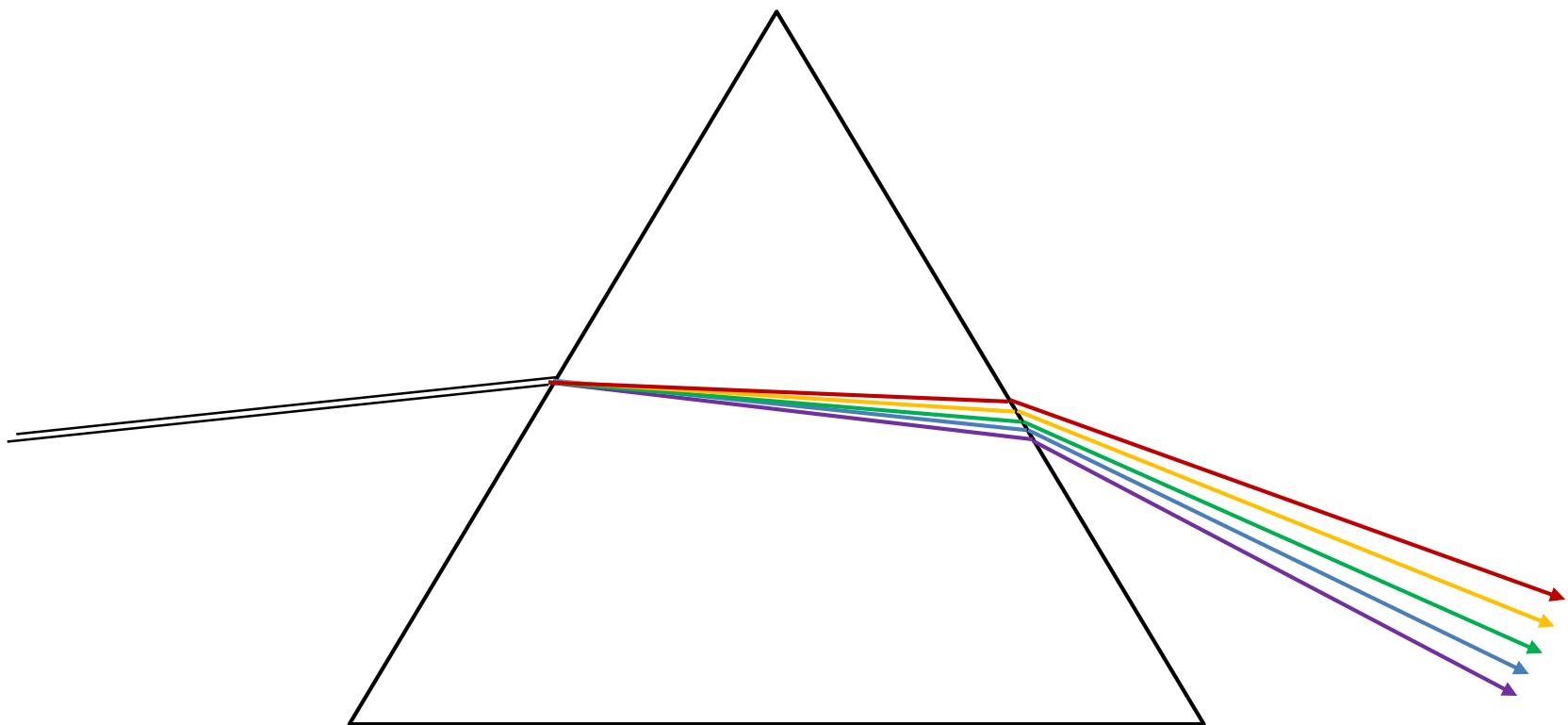
$$\rightarrow \text{I: } -\bar{n} \cos(\varepsilon - \beta_1) d\beta_1 = \cos(\alpha_2) d\alpha_2$$

$$\text{II: } \bar{n} \cos(\beta_1) d\beta_1 = \cos(\alpha_1) d\alpha_1$$

$$\rightarrow \frac{\text{I}}{\text{II}}: \frac{-\bar{n} \cos(\varepsilon - \beta_1) d\beta_1}{\bar{n} \cos(\beta_1) d\beta_1} = \frac{\cos(\alpha_2) d\alpha_2}{\cos(\alpha_1) d\alpha_1}$$

$$\rightarrow \frac{\cos(\varepsilon - \beta_1)}{\cos(\beta_1)} \frac{\cos(\alpha_1)}{\cos(\alpha_2)} = 1 \rightarrow \beta_1 = \frac{\varepsilon}{2} \text{ und } \alpha_1 = \alpha_2$$

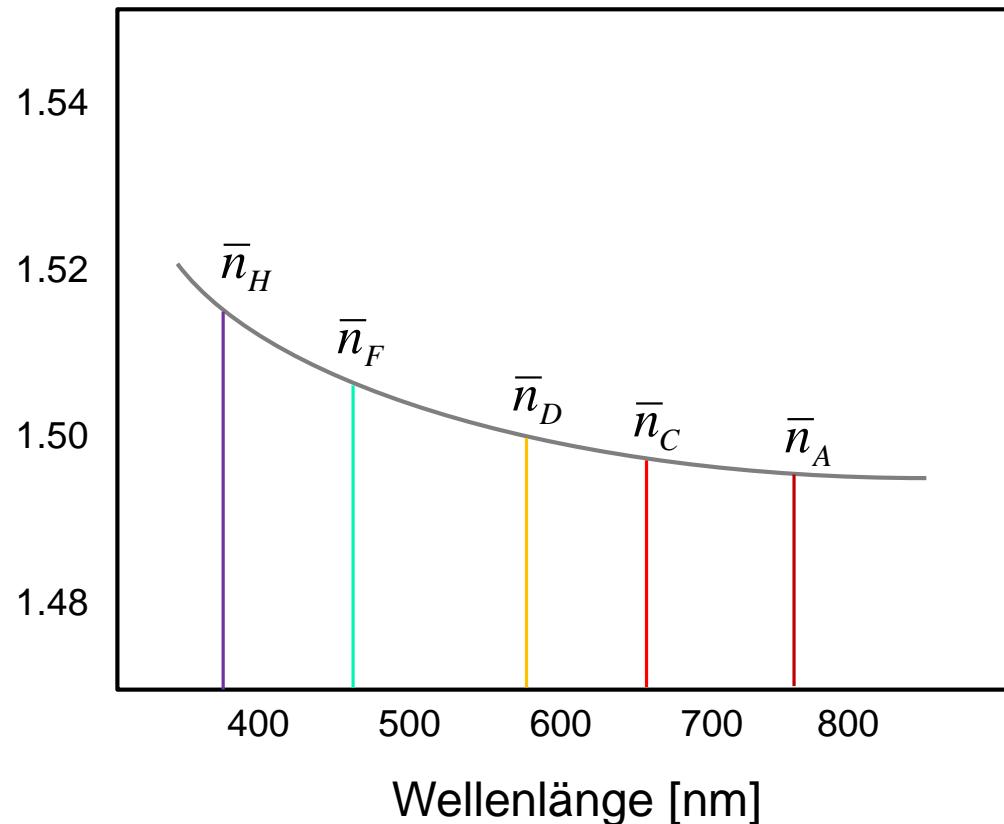
Dispersion in Prismen



- Mischung aller sichtbaren Wellenlängen (Farben) ergibt weißes Licht
- Brechungsindex hängt von Wellenlänge λ ab
- Räumliche Zerlegung des Spektrums, da jetzt auch $\beta_1(\lambda)$ bzw. $\alpha_2(\lambda)$

Dispersion – Abbesche Zahl

Brechungsindex



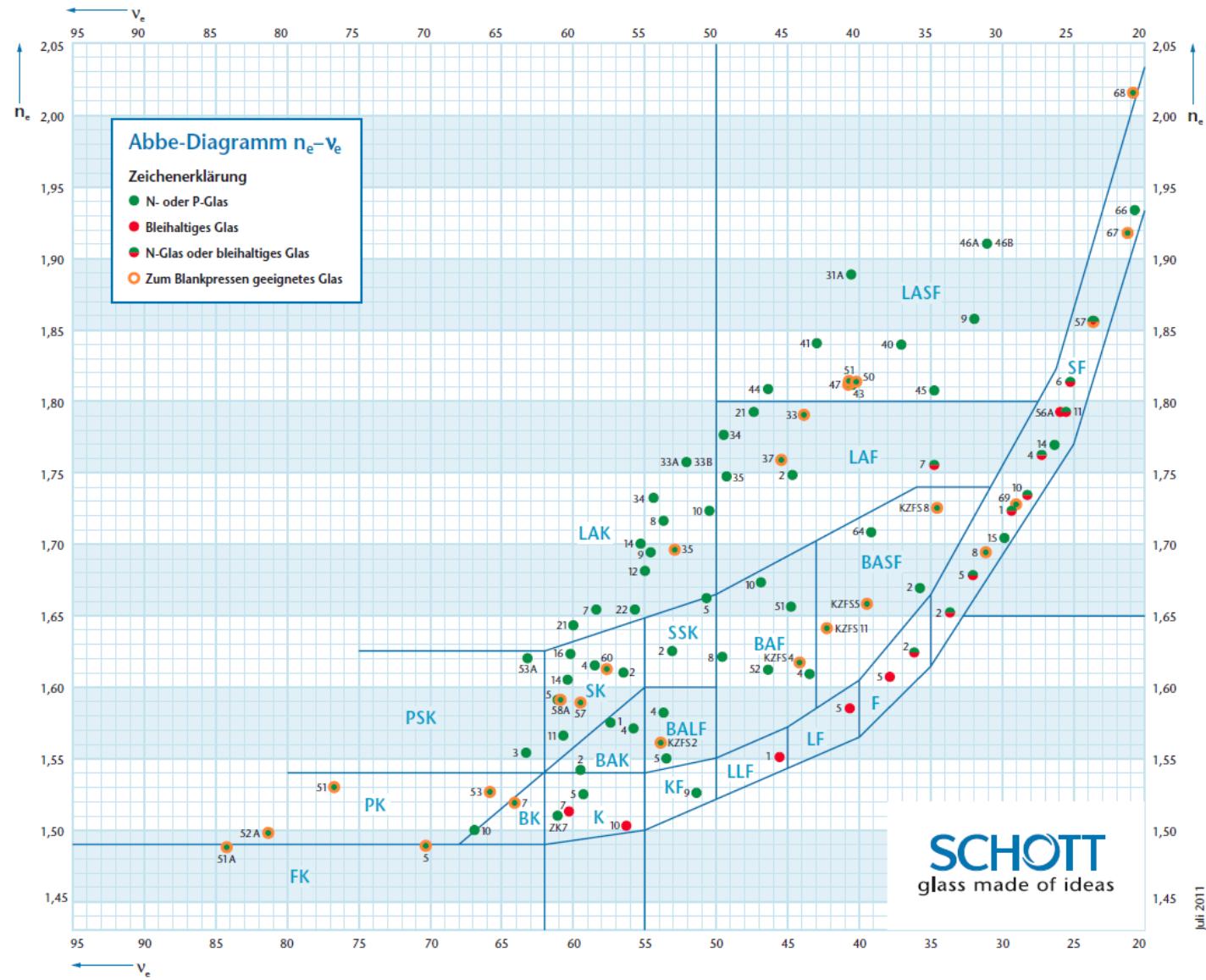
A	dunkelrot	$\lambda=761 \text{ nm}$	O_2
C	rot	$\lambda=656 \text{ nm}$	H_2
D	gelb	$\lambda=589 \text{ nm}$	Na
F	blau-grün	$\lambda=486 \text{ nm}$	H_2
H	violett	$\lambda=393 \text{ nm}$	Ca

Abbesche Zahl:

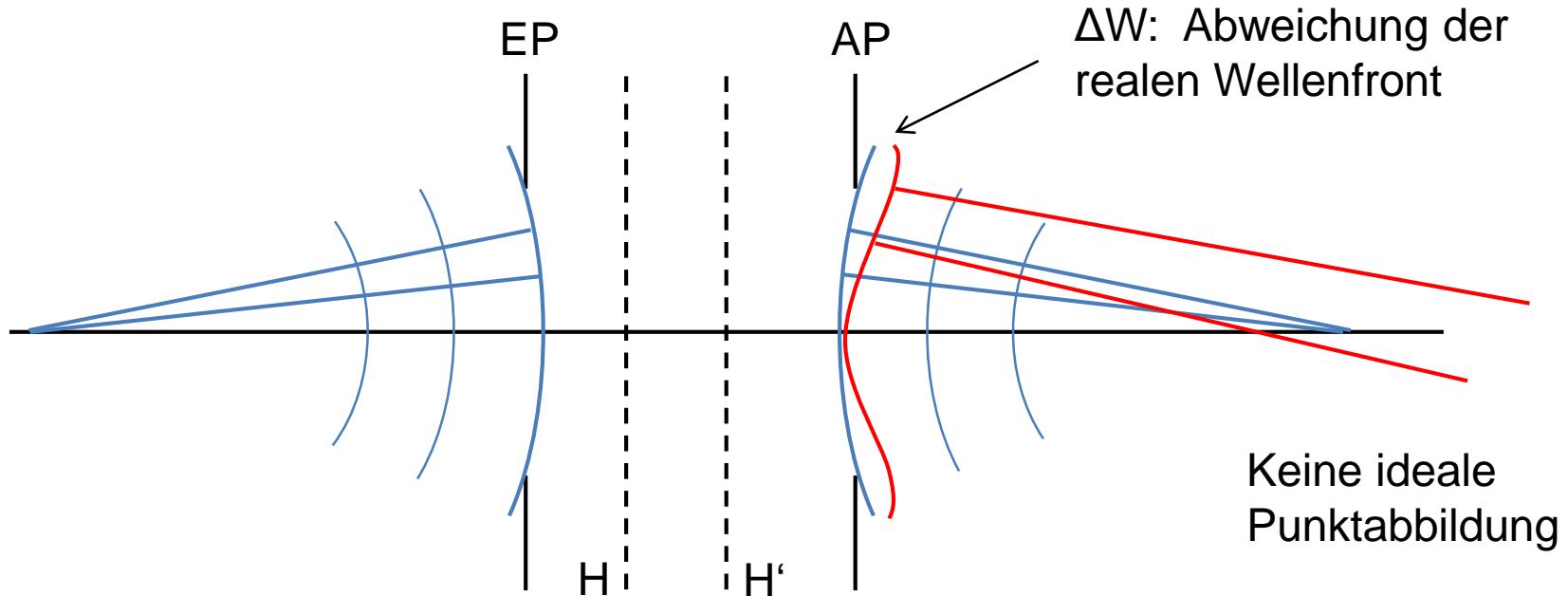
$$\nu_d = \frac{\bar{n}_D - 1}{\bar{n}_F - \bar{n}_C}$$

- streng monoton fallend = normale Dispersion
- sonst: anormale Dispersion (im Allgemeinen mit Absorption verbunden)
- Abbesche Zahl ν_d charakterisiert Material im sichtbaren Spektralbereich

Optische Gläser



Abbildungsfehler – Optische Aberrationen



Taylorreihen für trigonometrische Funktionen:

z.B. $\sin(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$

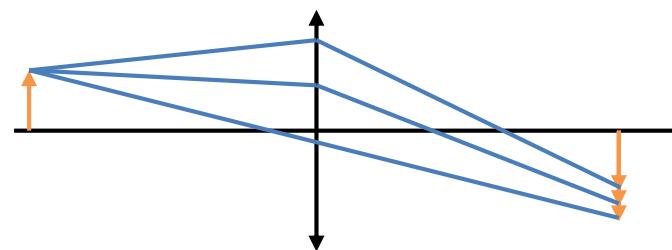
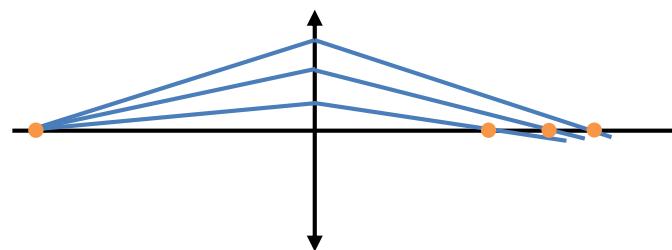
Abbruch nach erstem Term \longrightarrow paraxiale Optik

Abbruch nach zweitem Term \longrightarrow Fehler 3. Ordnung (Seideltheorie)

Beachtung höherer Fehlerterme meist nicht nötig

Abbildungsfehler – Optische Aberrationen

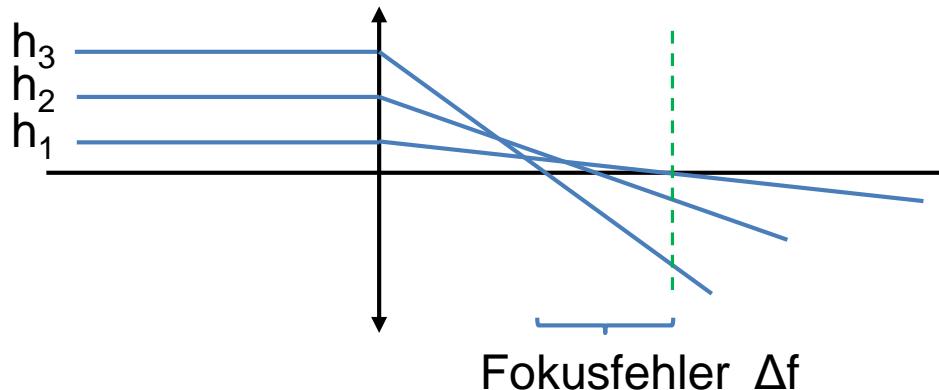
- Näherung der Wellenfronten durch Polynomansatz (Seidelsummen, Zernikepolynome, ...)
- Einzelnen Terme der Polynome entsprechen bestimmten Fehlerarten
- Abbildungsfehler können sich longitudinal und lateral auswirken



- Fehler unterscheiden sich für achsnahe oder außeraxiale Bildpunkte
- Weitere Bildfehler:
 - chromatische Aberrationen (aufgrund von Dispersion)
 - Vignettierung, Randabfall
 - Fertigungstoleranzen
 - ...

Sphärische Aberration

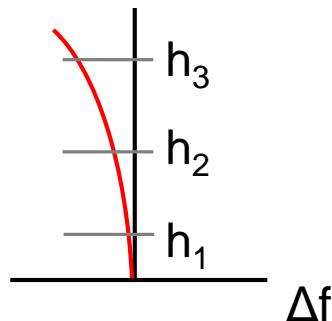
Auch Öffnungsfehler. Betrifft bereits achsnahe Bildpunkte



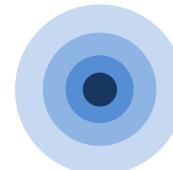
Positivlinsen:
Negativlinsen:
auch Spiegel:

unterkorrigiert
überkorrigiert
Kaustik

Fehlerdiagramm:



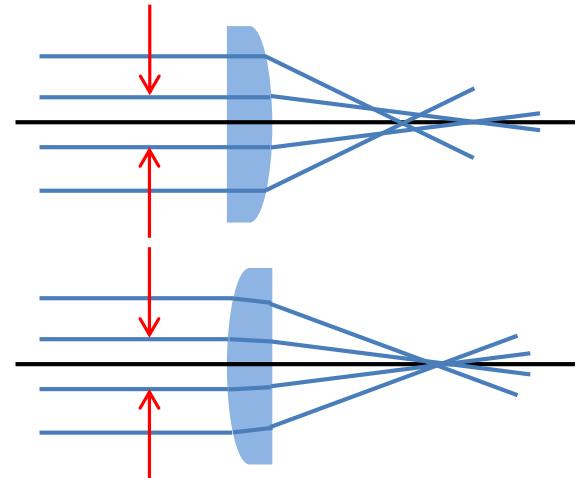
Spotdiagramm:



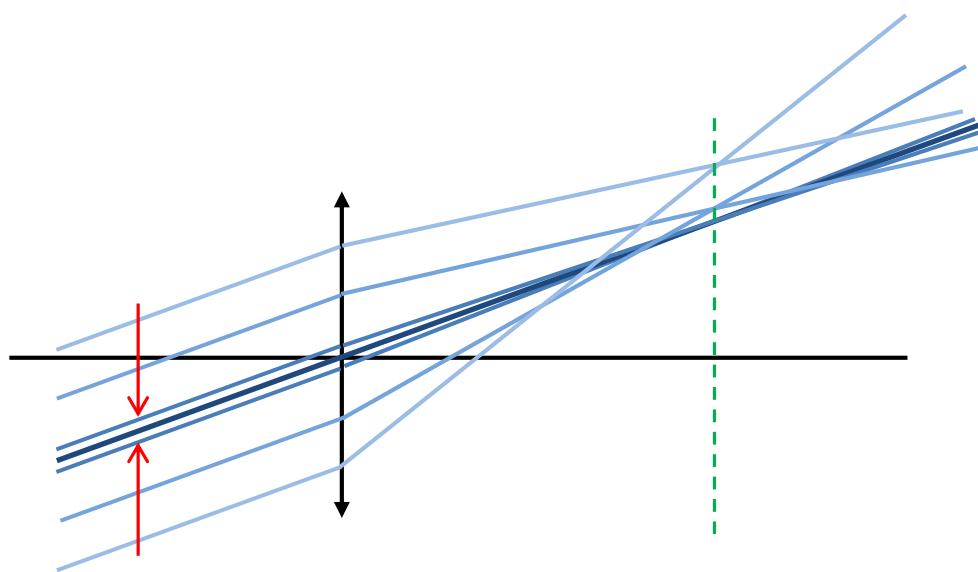
Sphärische Aberration

Verringern der sphärischen Abberation:

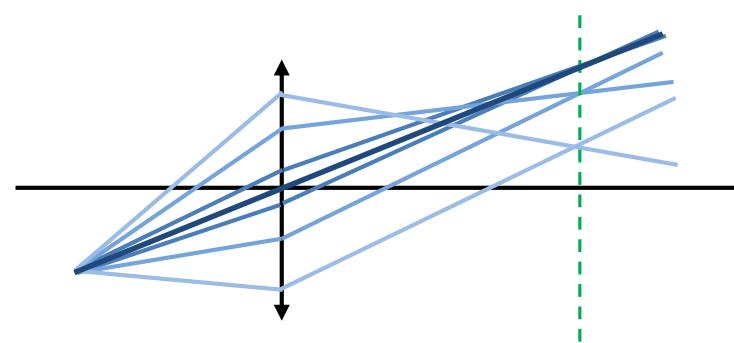
- Fehler größer für kleine \bar{n} , wenn $f = \text{konst.}$.
- Fehler kleiner für Linsen mit großem R
- Verteilung der Brechkraft über möglichst viele Flächen (Stellung der Linse)
- Optimale Linsenform für:
$$\frac{R_1}{R_2} = -\frac{4 + \bar{n} - 2\bar{n}^2}{2\bar{n}^2 + \bar{n}}$$
- Begrenzung des Durchmessers der Strahlbündel durch ABL (\neq Bildhöhe !)
- geschicktes Optikdesign (Kompensation durch mehrere Elemente, Asphären, ...)



Koma

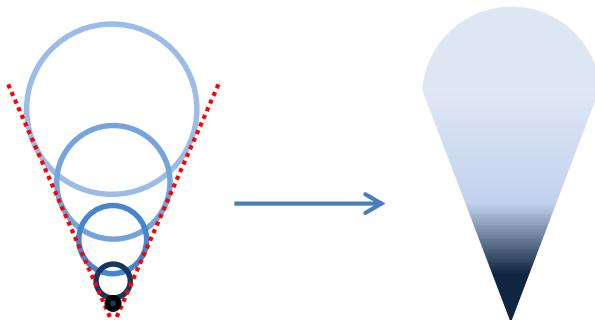


Positive und Negative Koma



Außeraxiale Punkte werden radial,
kometenhaft verschmiert

Spotdiagramm:



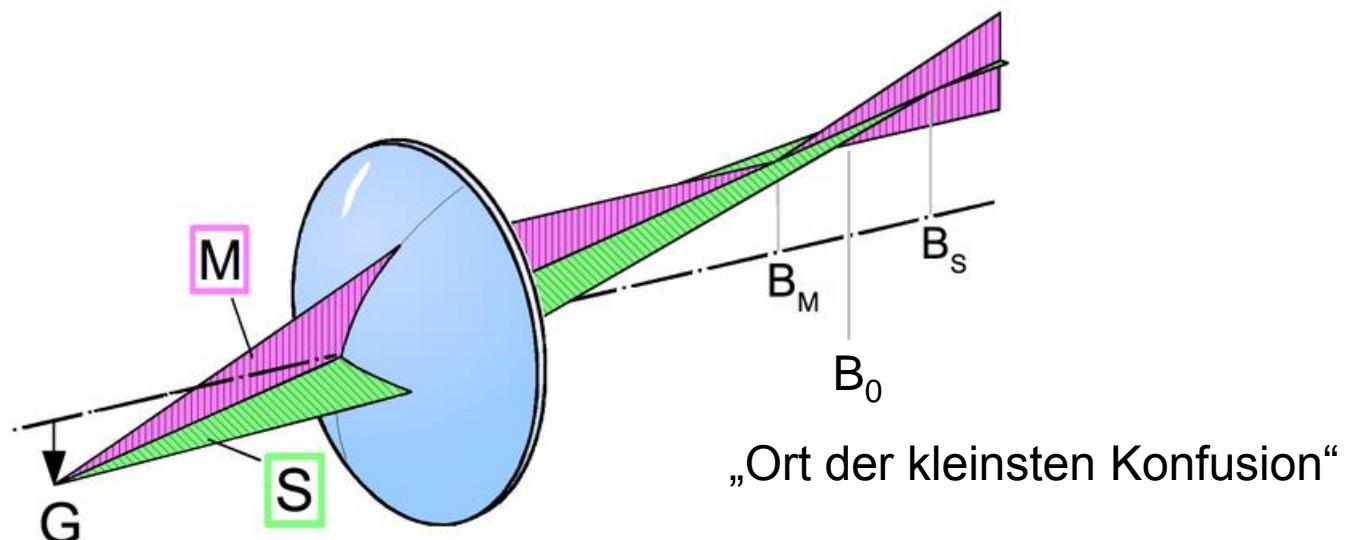
Verringerung der Koma:

- Begrenzung der Strahlbündel
- geschicktes Optikdesign (mehrere Elemente)

Astigmatismus

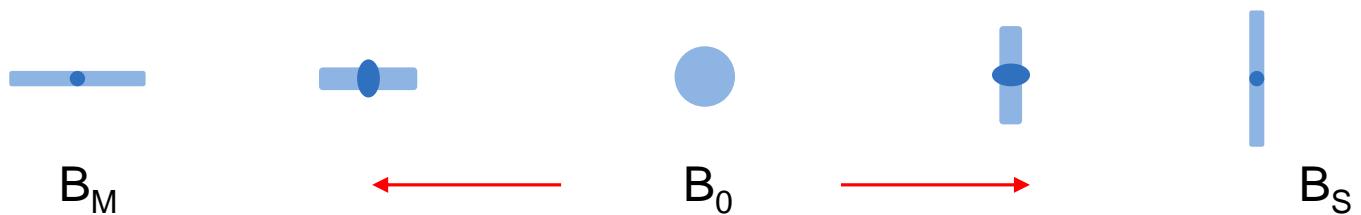
„Punktlosigkeit“

Strahlen außeraxialer Punkte schneiden sich abhängig von der Einfallsebene (Meridional (M) - und Sagittalebene (S))



Quelle: Michael Schmid (Wikipedia)

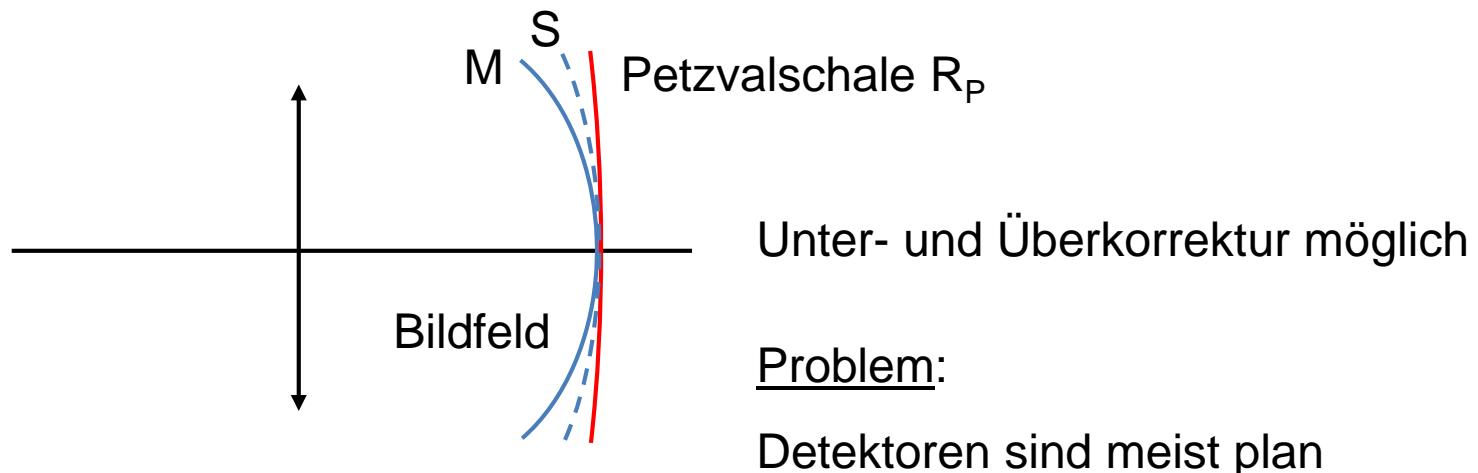
Spotdiagramme:



Astigmatismus und Bildfeldwölbung

Lateraler Fokusfehler für außeraxiale Punkte \rightarrow kein ebenes Bildfeld

Durch Astigmatismus entstehen zwei unterschiedlich gewölbte Bildfelder



Optimierung:

- Beide Bildfelder fallen zusammen und
- Bildfeldwölbung wird reduziert, wenn:

$$\frac{1}{R_P} = \sum_{k=1}^m \frac{1}{\bar{n}_k f_k} \quad \text{mit } m: \text{Anzahl Linsen} \quad \text{und} \quad R_P \rightarrow \infty$$

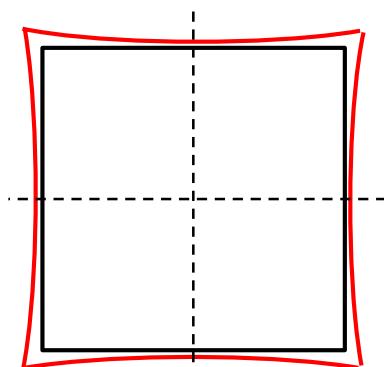
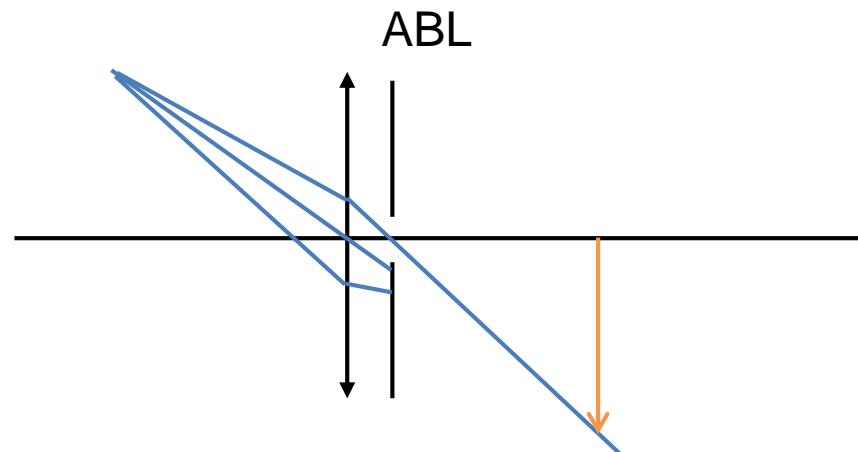
- Begrenzung der Strahlbündel
- geschicktes Optikdesign (mehrere Elemente)

Verzeichnung

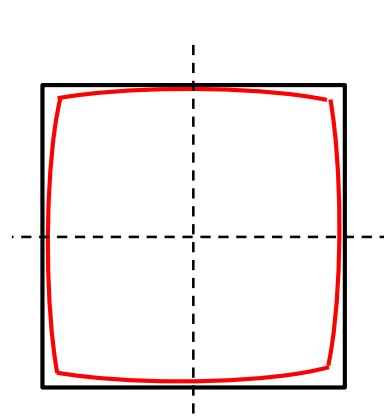
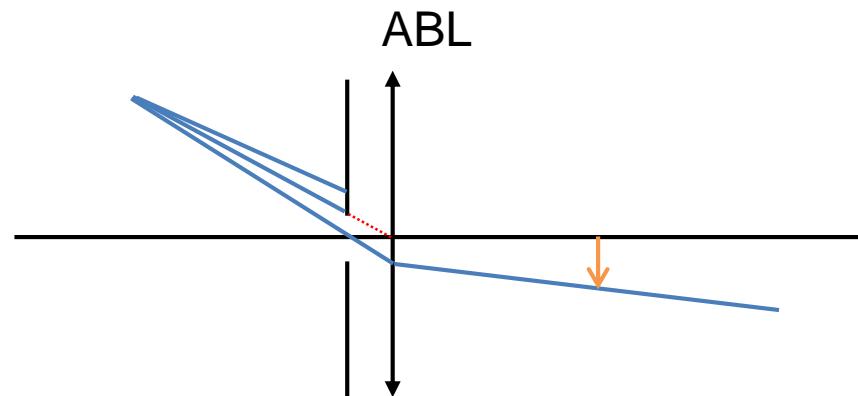
Ortsabhängiger Fehler des Abbildungsmaßstabs

Kann durch Stellung der ABL verursacht werden (Schwerpunkt der Strahlen)

Kissenförmig



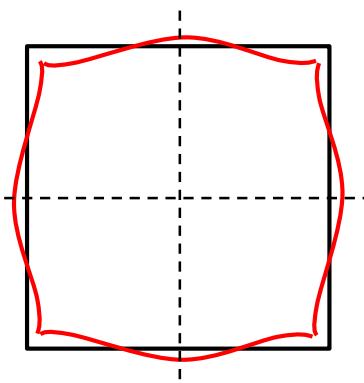
Tonnenförmig



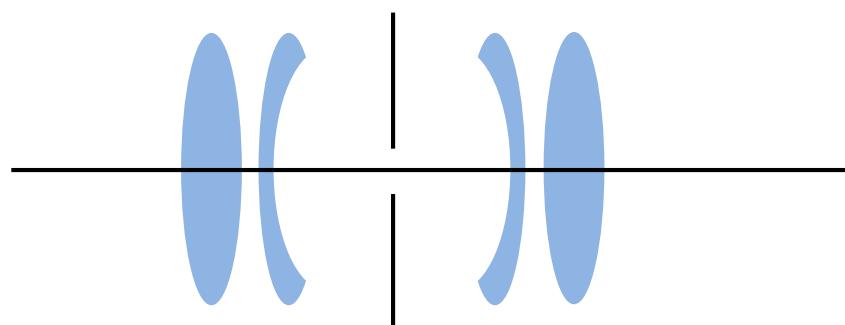
Verzeichnung

- Auch weitere Faktoren haben Einfluss auf Verzeichnung
- Verzeichnung kann komplexere Formen haben:

z.B. Mustache (Schnurrbart) Form:

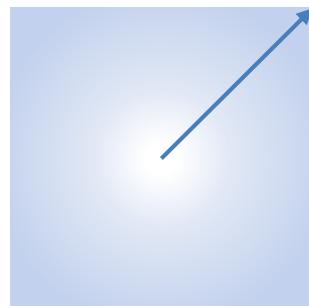


- Begrenzung der Strahlbündel hilft nicht
- geschicktes Optikdesign (ideal: symmetrischer optischer Aufbau für $M = -1$)

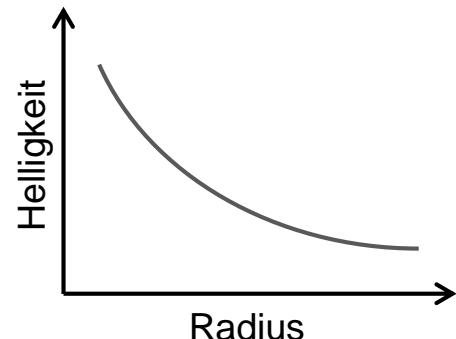


Vignettierung / Randabschattung

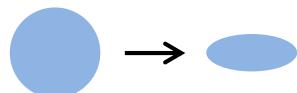
Keine Aberration, aber für viele Anwendungen problematisch



- Radialer Helligkeitsabfall
- Mehrere Ursachen



- 1) Beleuchtungsstärke/Leuchtdichte bei gekippten Flächen
- 2) Schräge Strahlen → effektive Fläche der ABL nimmt ab
- 3) Begrenzung schräger Strahlen durch Linsenfassungen, ...



Verringerung des Helligkeitsabfalls:

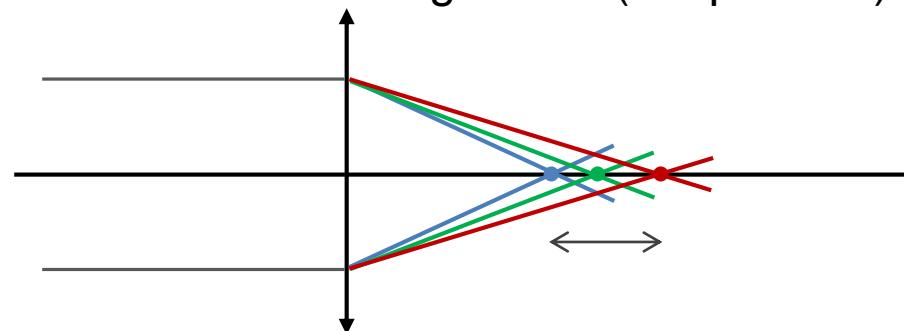
- Begrenzung der Strahlbündel
- großzügig dimensionierte Bauelemente
- geschicktes Optikdesign (Feldlinsen, ..)

Chromatische Aberrationen

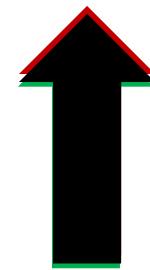
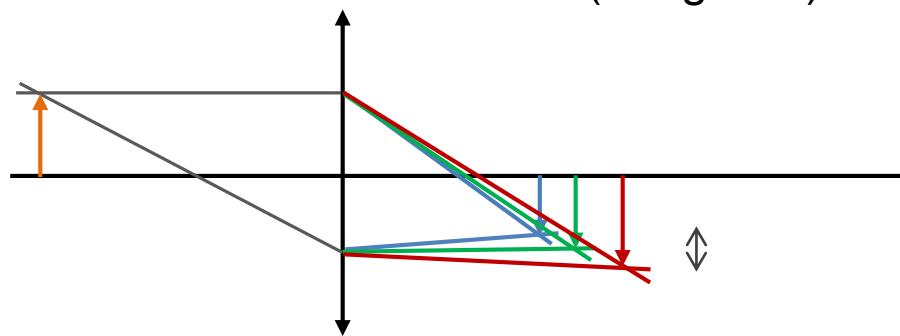
Dispersion führt zu wellenlängenabhängigen Abbildungsfehlern

Unterscheidung von:

Chromatischer Längsfehler (Bildposition)



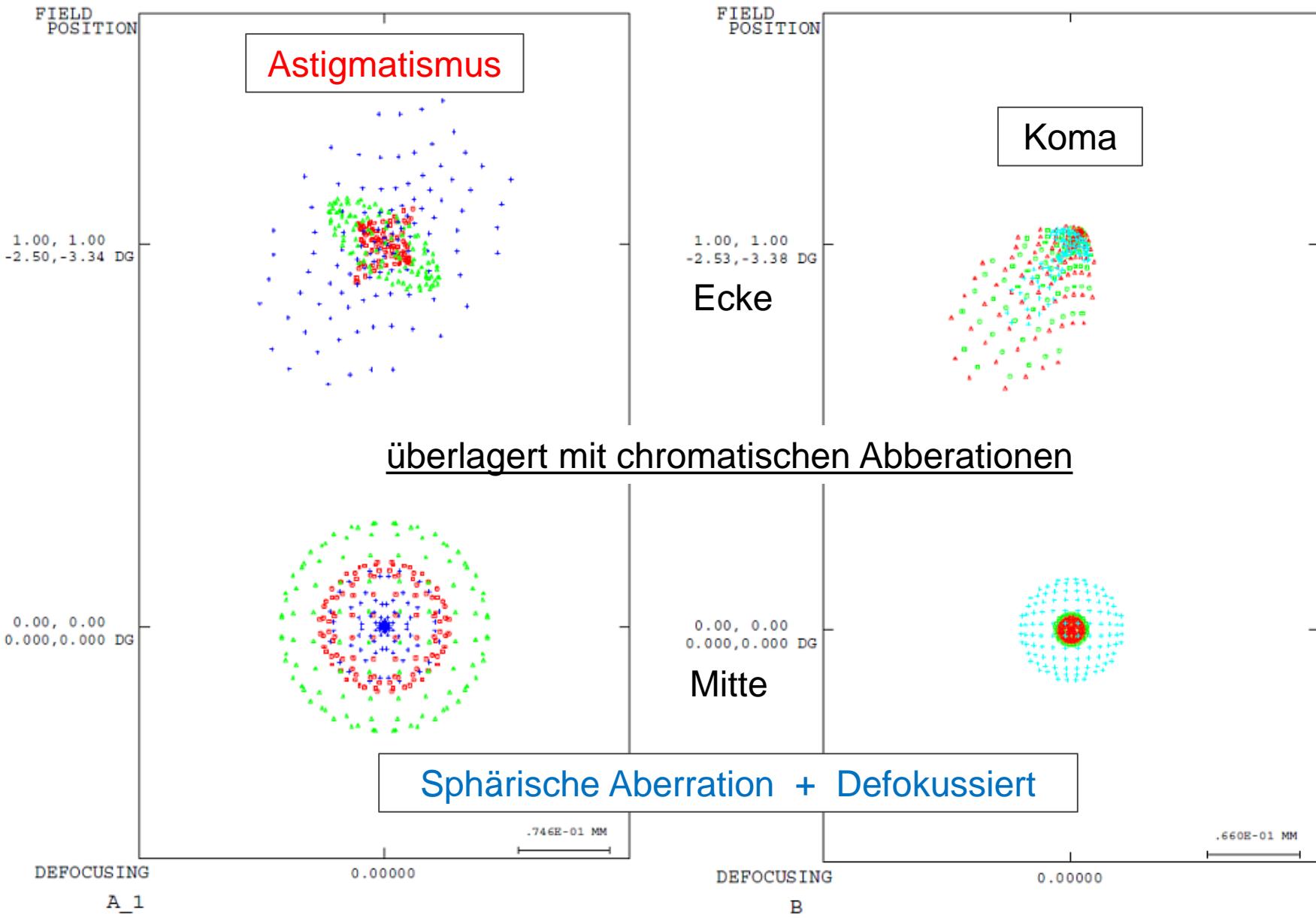
Chromatischer Querfehler (Bildgröße)



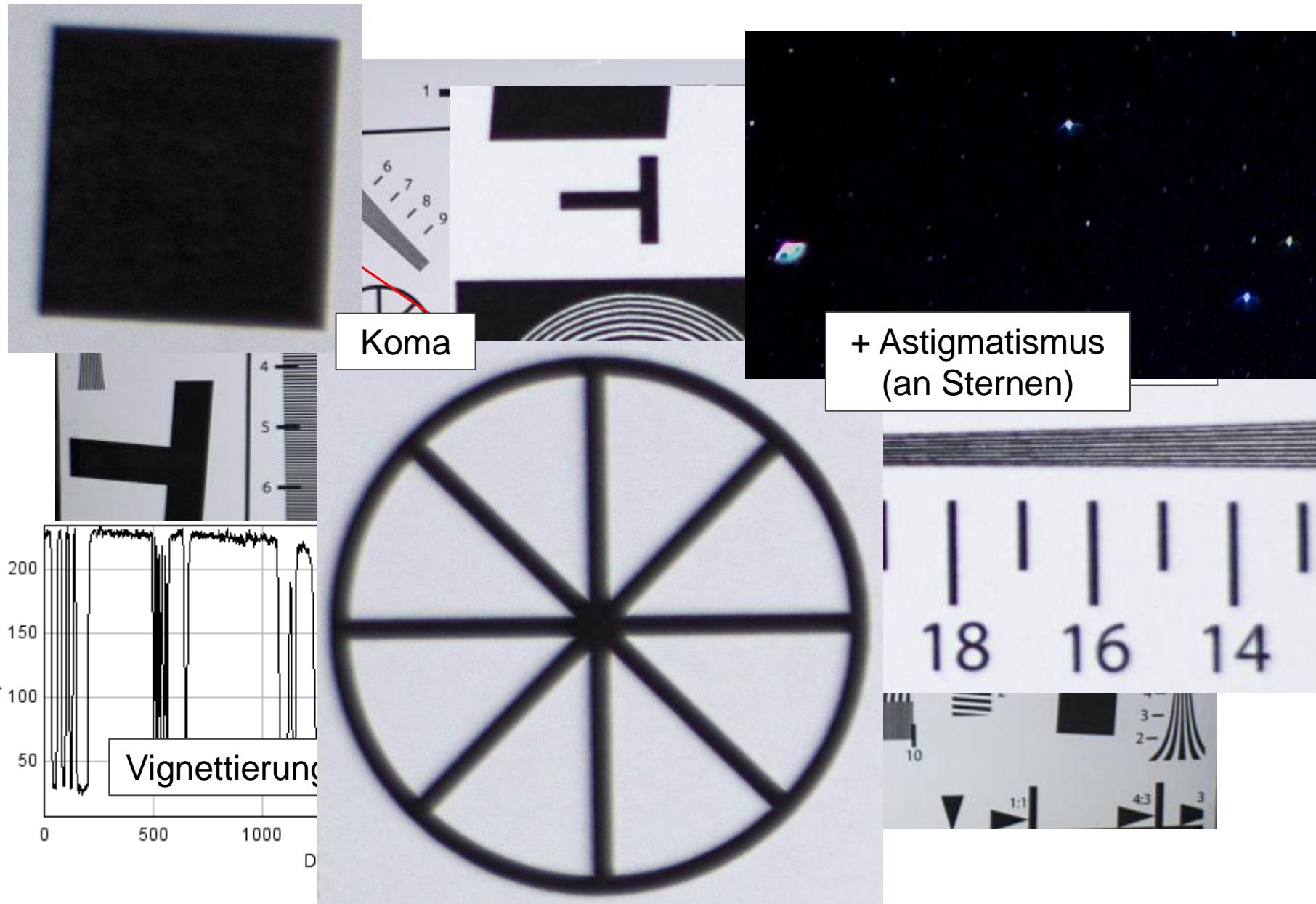
Verringerung chromatischer Aberrationen:

- Optikdesign, spezielle optische Gläser, Spiegeloptiken

Beispielbilder für Aberrationen



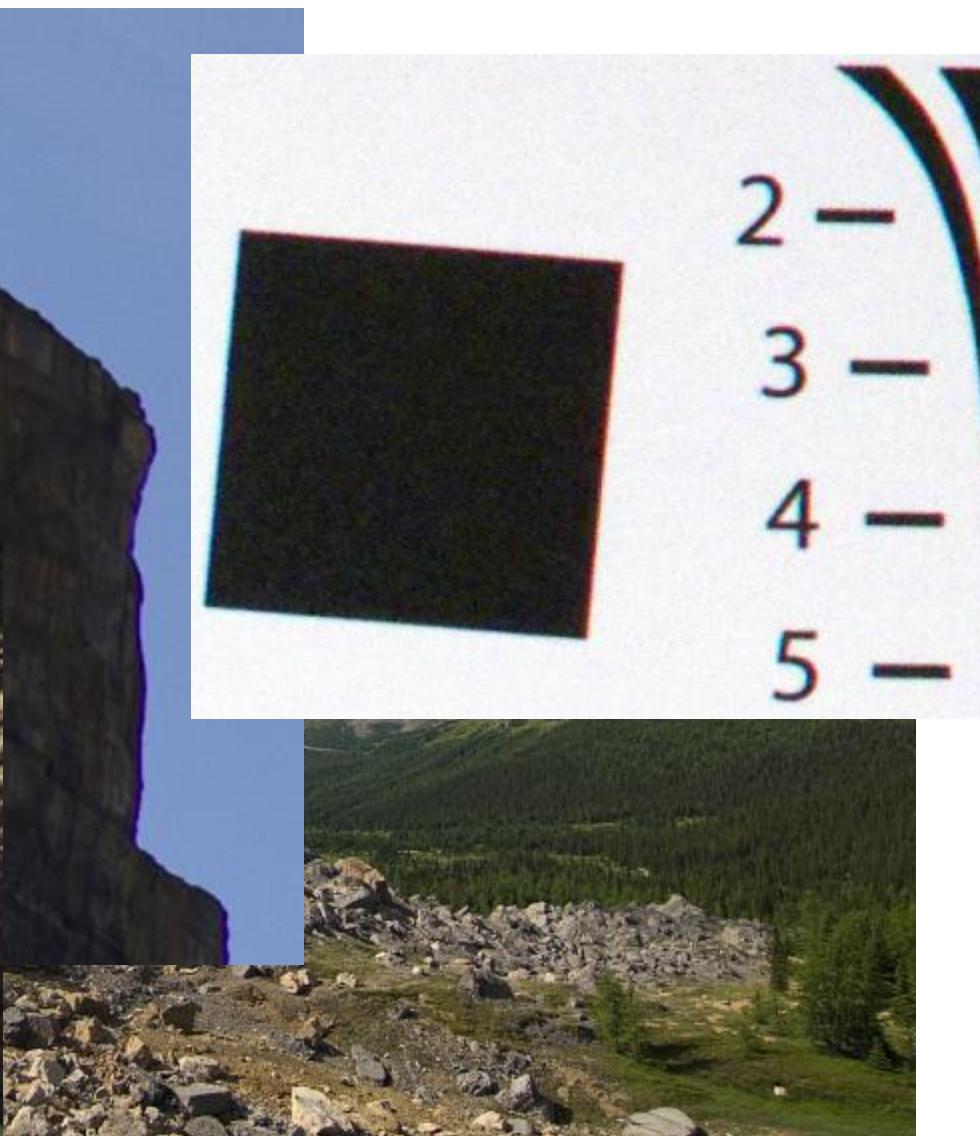
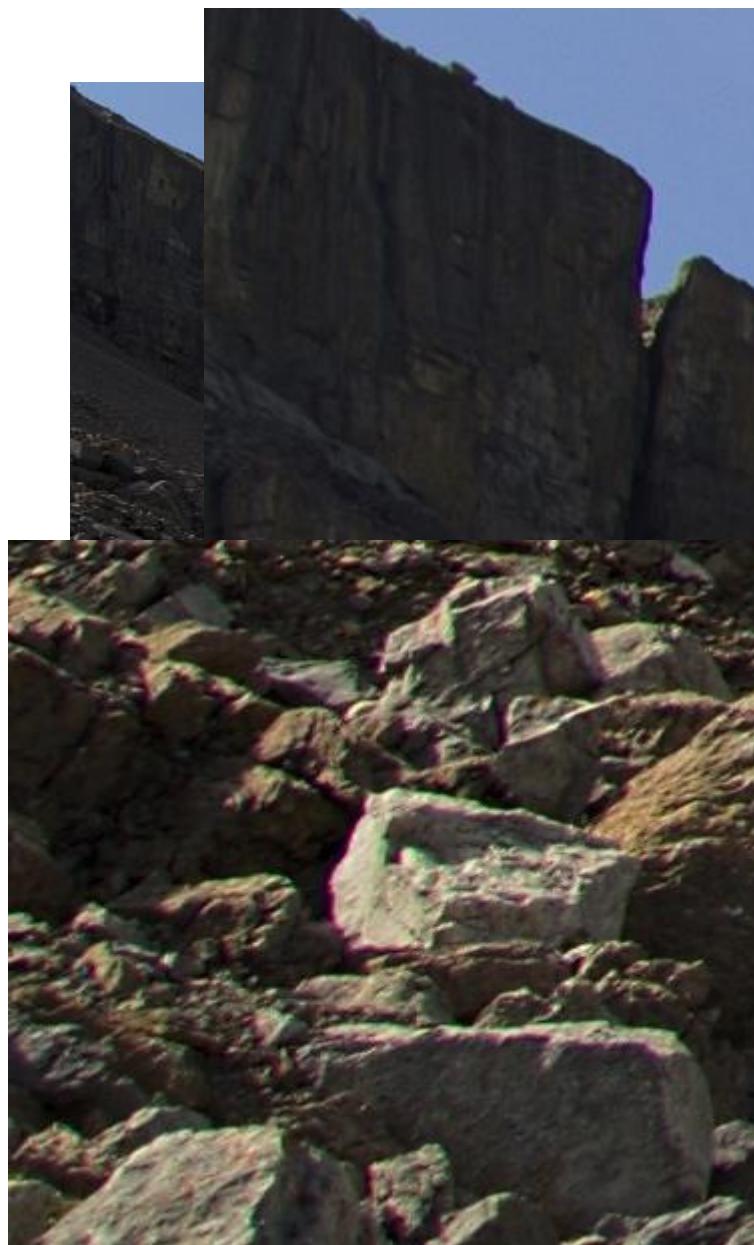
Beispielbilder für Aberrationen



Beispielbilder für Aberrationen



Beispielbilder für Aberrationen



Fertigungsfehler

- Fehler der Position der Bauelemente auf optischer Achse
- Zentrierungsfehler der Bauelemente auf der optischen Achse
- Verkippung von Bauelementen zur optischen Achse
- Fehlerhafte Herstellung der Bauelemente (z.B. Radius, Brechungsindex, ...)
- ...
- Alle optischen Abbildungsfehler kommen überlagert vor
 - aufwendige Berechnungen zur Optimierung
 - Optikdesign mittels Raytracing-Software (basierend auf Matrizen)

Geometrische Optik

(optische Bauelemente & Instrumente)

Achromat

Optisches System mit $f(\lambda_1) = f(\lambda_2)$

(Apochromat: $f(\lambda_1) = f(\lambda_2) = f(\lambda_3)$)

Linsengleichung mit $\Delta \bar{n}$ führt zu $\Delta f'$
lösen für $\Delta f' = 0$



Behebung des Längsfehlers

$$\frac{f_2'}{f_1'} = -\frac{\nu_1}{\nu_2} \cdot \left(1 - \frac{\Delta}{b_1}\right)^2$$

Behebung des Querfehlers

$$\frac{f_2' - \Delta}{f_1' - \Delta} = -\frac{\nu_1}{\nu_2}$$

Kompensation des Farbfehlers durch zweite Linse

(Apochromat: ≥ 3 Linsen, ähnliche Korrektur auch durch ED, LD, ... Gläser)

Achromasiebedingung (für $\Delta=0$)

Ziel: $f(\lambda_1) = f(\lambda_2)$ für $\Delta=0$ → Behebung Längs- und Querfehler

mit Brechkraft $D = \frac{1}{f}$

$$\delta D = D(\bar{n} + \delta \bar{n}) - D(\bar{n}) = (\bar{n} + \delta \bar{n} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - (\bar{n} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) =$$

$$= \cancel{(n-1)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \delta \bar{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) - \cancel{(n-1)} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \delta \bar{n} \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) =$$

$$= \frac{\delta \bar{n}}{(\bar{n} - 1)} (\bar{n} - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) = \frac{\delta \bar{n}}{(\bar{n} - 1)} D$$



Achromasiebedingung (für $\Delta=0$)

für VIS z.B. $\frac{\delta\bar{n}}{(\bar{n}-1)}D \longrightarrow \frac{\bar{n}_F - \bar{n}_C}{\bar{n}_D - 1}D = \frac{1}{f\nu} = \delta D$

$\delta\bar{n} \rightarrow \bar{n}_F - \bar{n}_C \quad (656\text{ nm} - 486\text{ nm})$
mit $\bar{n} \rightarrow \bar{n}_D \quad (589\text{ nm})$

Kompensation von δD durch zweite Linse:

$$\delta D_1 + \delta D_2 = \frac{1}{f_1\nu_1} + \frac{1}{f_2\nu_2} = 0$$

$$\longrightarrow \frac{1}{f_1\nu_1} = -\frac{1}{f_2\nu_2} \longrightarrow \frac{f_2}{f_1} = -\frac{\nu_1}{\nu_2}$$

Achromat

Beispiel: verkitteter Achromat mit hinterer Planfläche, $f'_{\text{ges}}=100 \text{ mm}$
(üblicher Aufbau, weitere Typen auch mit Luftspalt)

$$\Delta=0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{f'_{\text{ges}}} = \frac{1}{f'_1} + \frac{1}{f'_2} \quad \text{und} \quad \frac{f'_2}{f'_1} = -\frac{\nu_1}{\nu_2}$$

Zusätzlich: $R_3 = R_2$ und $R_4 \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{f'_1} = (\bar{n}_1 - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



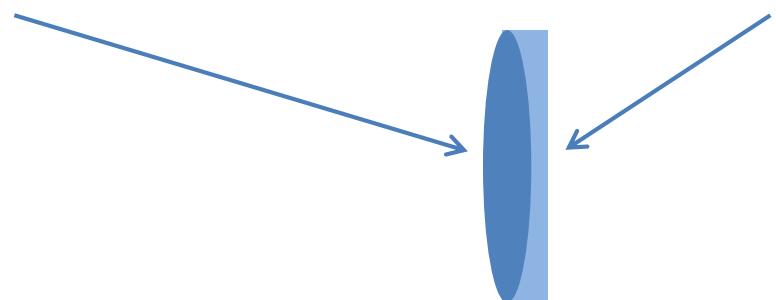
$$\frac{1}{f'_2} = (\bar{n}_2 - 1) \cdot \left(\frac{1}{R_3} - \frac{1}{R_4} \right) = \frac{\bar{n}_2 - 1}{R_2}$$

Achromat

Für Lösung werden zwei unterschiedliche Gläser benötigt ($\nu_1 \neq \nu_2$)

Übliche Kombination: Positivlinse Kronglas + Negativlinse Flintglas

Hier: BK10 ($\bar{n}_1 = 1.498$; $\nu_1 = 66.95$) und SF10 ($\bar{n}_2 = 1.728$; $\nu_2 = 28.41$)



Einsetzen: $f_2' = -f_1' \cdot \frac{\nu_1}{\nu_2}$ in $\frac{1}{f_{ges}'} = \frac{1}{f_1'} + \frac{1}{f_2'}$ mit $f_{ges}' = 100 \text{ mm}$

Dann lösen der Linsengleichung für R_1 und R_2 :

$$f_1' = 57.57 \text{ mm}$$

$$f_2' = -135.7 \text{ mm}$$

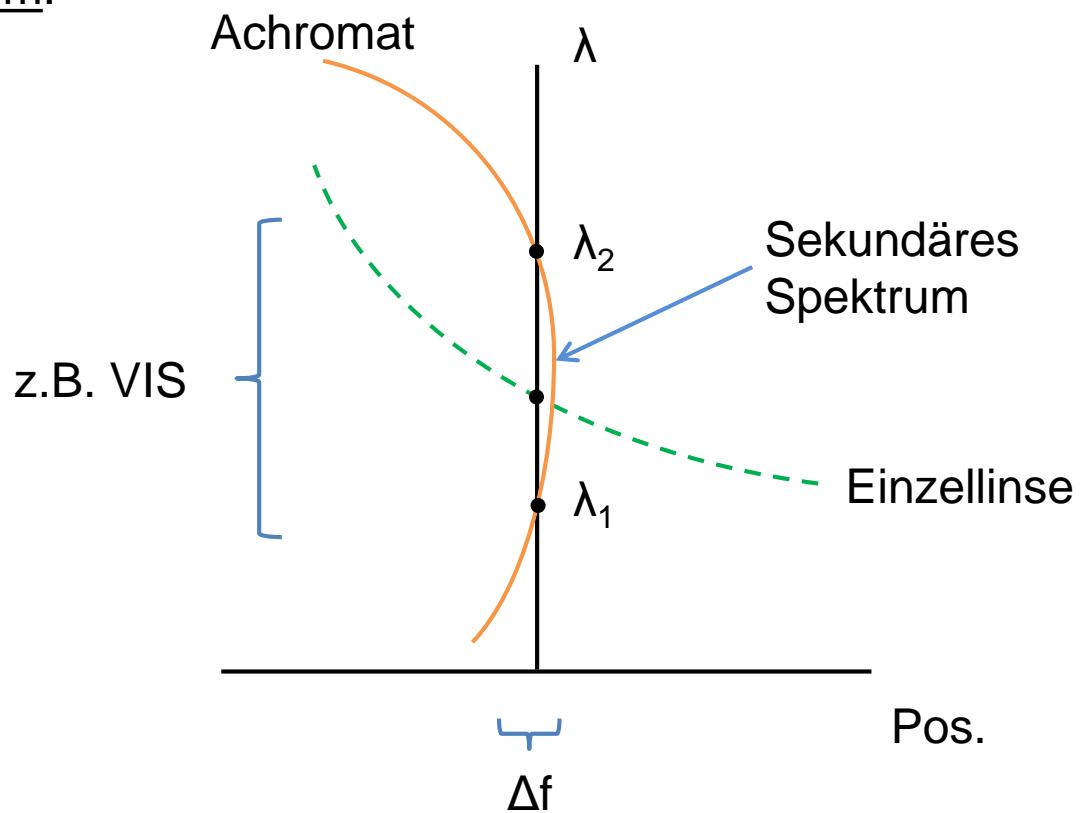
$$R_1 = -98.78 \text{ mm}$$

$$R_2 = 40.39 \text{ mm}$$

Achromat

- Brennweite des Gesamtsystems ist nun für zwei Wellenlängen identisch
- Zusätzlich können andere Aberrationen gut korrigiert werden

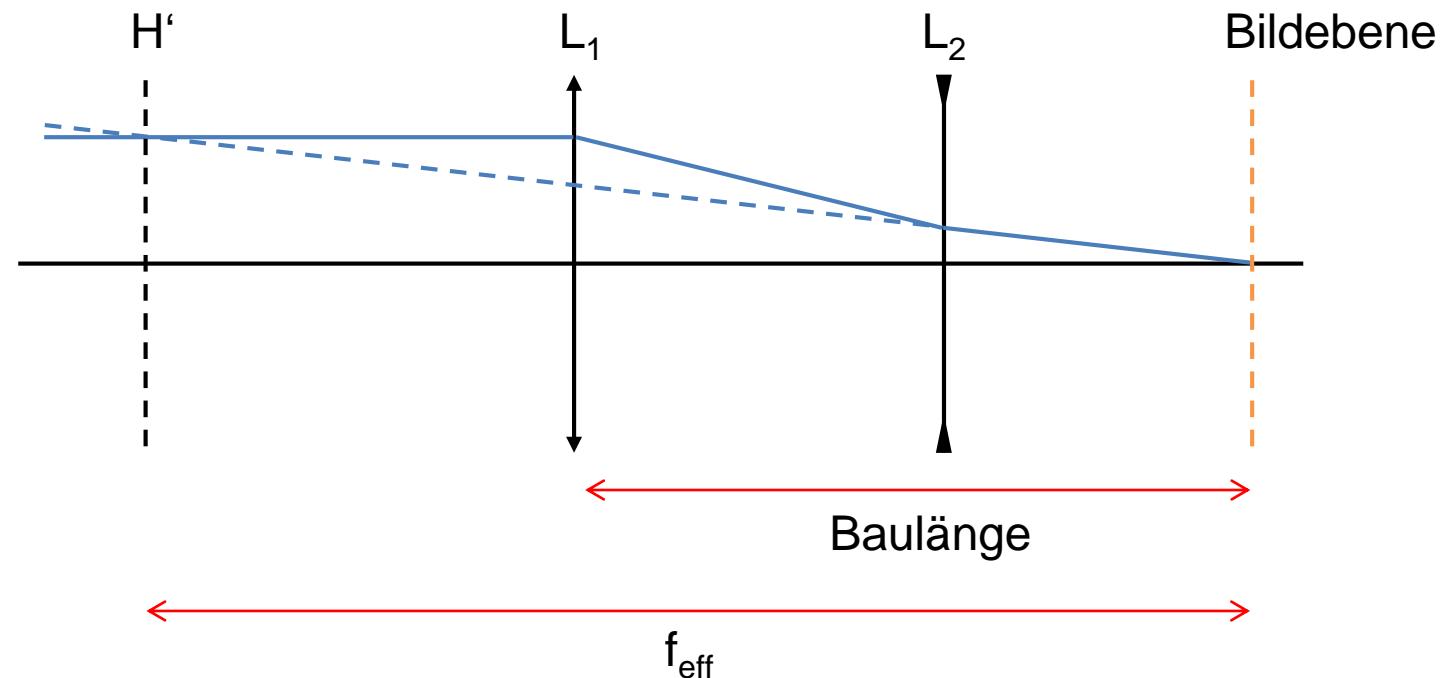
Fehlerdiagramm:



Objektive

Zielsetzung: geringe optische Aberrationen und hohe Lichtstärke
Achromat, Triplet, Tessar, Gauss, ...

Teleobjektiv: verkürzte Baulänge, wichtig bei großer Brennweite



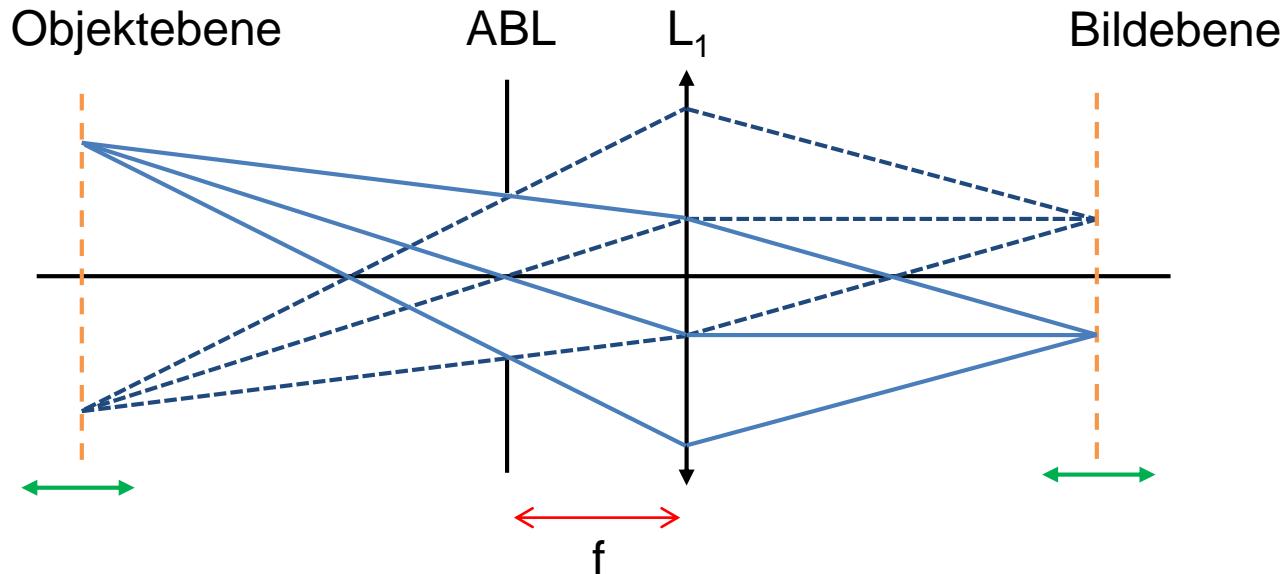
Hauptebene wird vor das erste Bauelement verschoben
Auch umgekehrter Fall möglich: Retrofokusobjektive

Telezentrische Systeme

Strahlbündel mit achsparalleler Ausrichtung

Wichtig für optische Messverfahren (z.B. Positionsmeßung)

Reduziert Probleme bei Systemen mit Mikrolinsenarrays, Filtern, ...



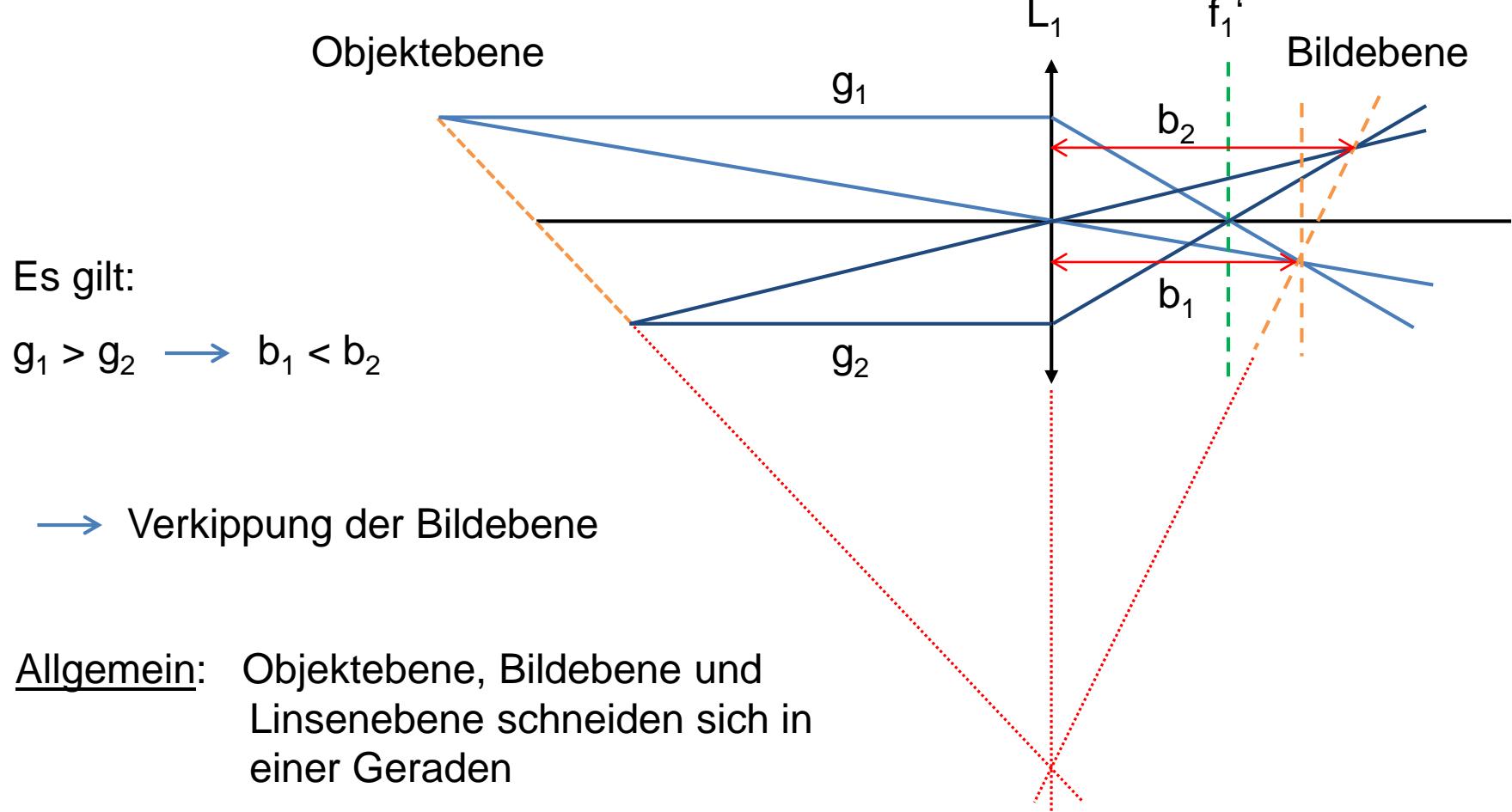
Spot wird defokussiert ohne Schwerpunkt zu verschieben

Auch umgekehrt oder doppelt telezentrischer Aufbau möglich

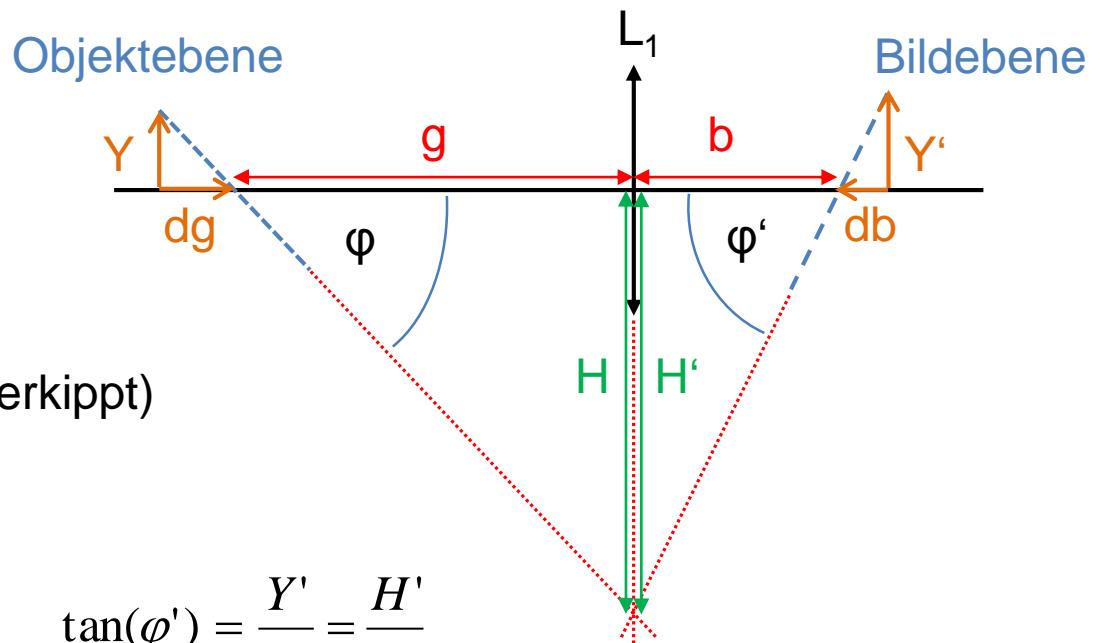
Scheimpflug

Abbildung von verkippten Ebenen \rightarrow Schärfeverlauf in Bild

Problematisch z.B. für messtechnische Anwendungen



Scheimpflug



Vereinfachte Herleitung:
(nur 2D Fall, Linse nicht verkippt)

$$\tan(\varphi) = \frac{Y}{dg} = \frac{H}{g} \quad \text{und} \quad \tan(\varphi') = \frac{Y'}{db} = \frac{H'}{b}$$

→

$$H = \frac{Yg}{dg}$$

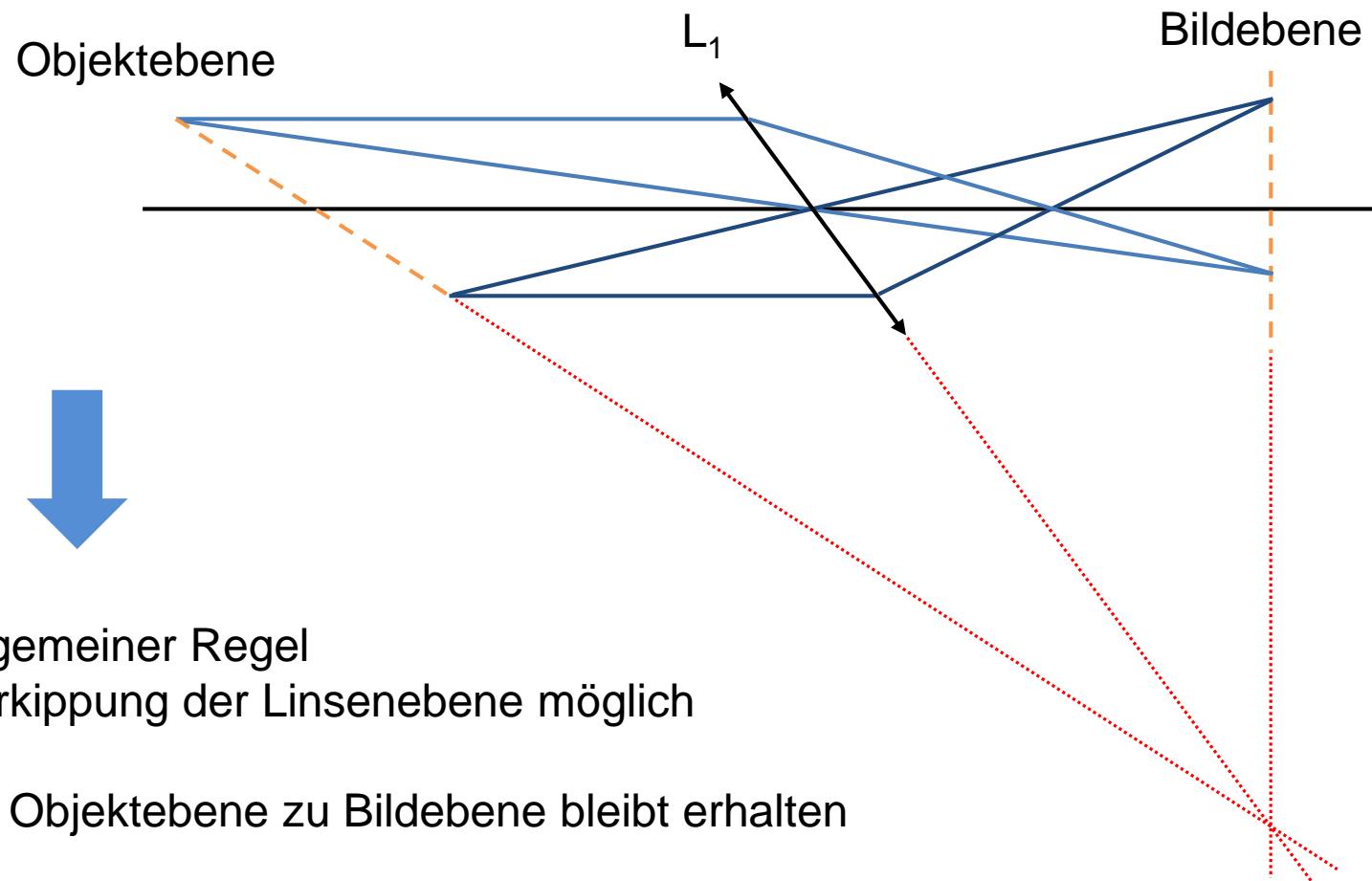
$$\beta = \frac{Y'}{Y} = \frac{b}{g}$$

$$H' = \frac{Y'b}{db} = \frac{\beta Y \beta g}{\alpha dg} = \frac{\beta Y \beta g}{\beta^2 dg} = \underline{\underline{H}}$$

$$\alpha = \frac{db}{dg} = \beta^2$$

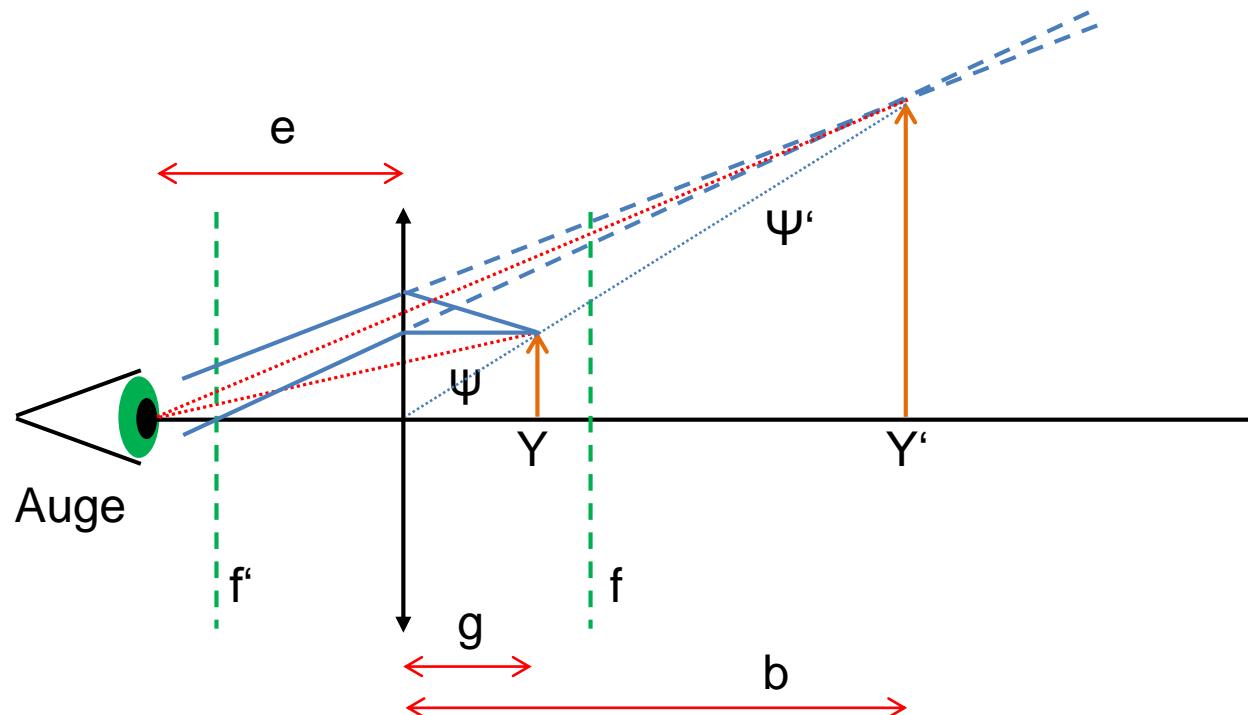
Scheimpflug

Verkippung der Bildebene führt zu starker Verzerrung



Lupen

Ziel: Vergrößerung kleiner Objekte
Visuell → aufrechtes (virtuelles) Bild erwünscht



Lupenvergrößerung:

$$\Gamma = \frac{\tan(\psi')}{\tan(\psi)} = -\frac{(f' - b) \cdot g}{(e - b) \cdot f'}$$

In Relation zu Bezugsweite (250 mm):

$$\Gamma = \frac{250 \text{ mm}}{f'}$$

Teleskope

Ziel: Beobachtung weit entfernter Objekte (z.B. Astronomie)
 $g \rightarrow \infty$ (Bedingung für ca. $100 - 1000 f'$ erfüllt)

Aufbau: Objektiv → Zwischenbild → Okular
afokales System → Beobachtung mit entspanntem Auge

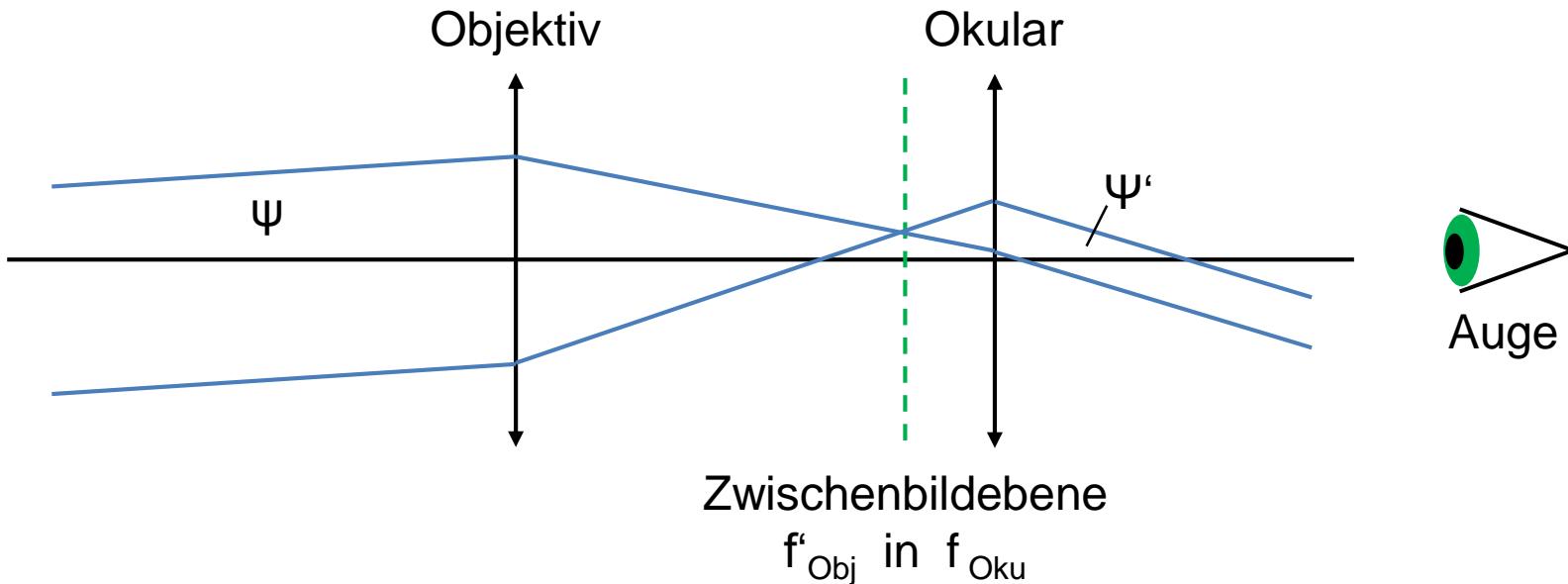
Teleskope/Fernrohre mit Linsen/Glaselementen, Spiegel oder beiden
Linsen: oft Apo-/Achromaten mit ED Glas; Spiegel: meist Parabolform

Abwägung: Durchmesser (bestimmt Auflösung), Gewicht, Farbfehler, Baulänge, ...

Auch in Messtechnik wichtig, oft in Verbindung mit Kollimatoren



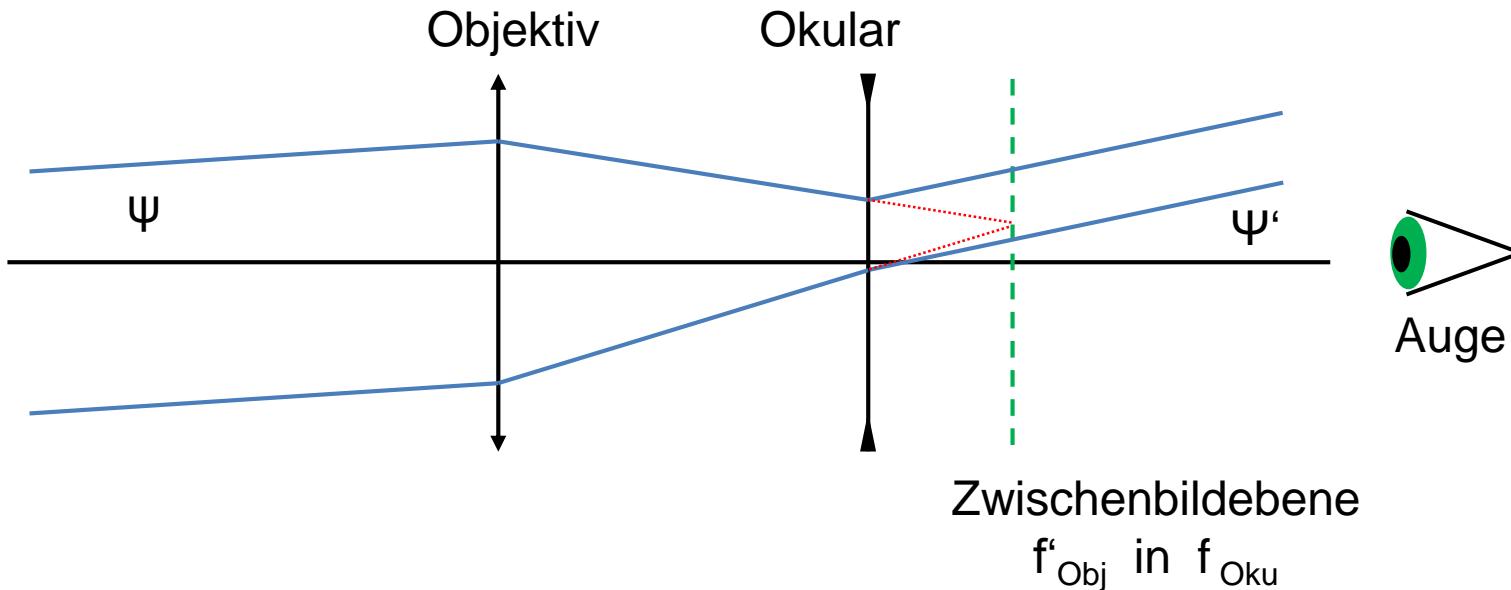
Keppler Teleskop



- Beobachtung des Zwischenbilds mit Okular
- reelles Zwischenbild (Einbau einer Blende, Skala, ... möglich)
- Bild steht auf dem Kopf, seitenverkehrt
- große Baulänge

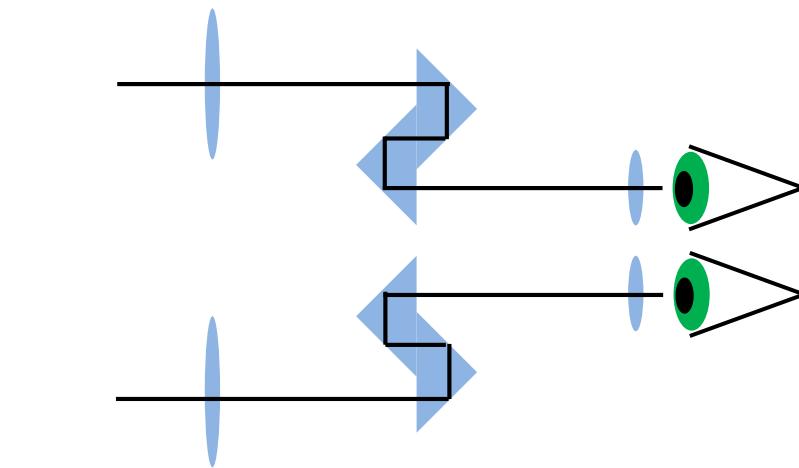
$$\text{(Winkel-)Vergrößerung: } \Gamma = \frac{\tan(\psi')}{\tan(\psi)} = \frac{f_{\text{Obj}}}{f_{\text{Oku}}} = \frac{D_{EP}}{D_{AP}}$$

Gallileo Teleskop



- virtuelles Zwischenbild (kein Einbau einer Blende, Skala, ... möglich)
 - aufrechtes Bild
 - kurze Baulänge
 - geringere Abbildungsleistung
 - eignet sich sehr gut zur Aufweitung von Laserstrahlen (keine Fokussierung)
- „Opernglas“

Ferngläser



Objektive

Bildumkehr
(Prismen)

Okulare

Binokulare Beobachtung

Bildumkehr mit Porro-, oder
Gradsichtprismen



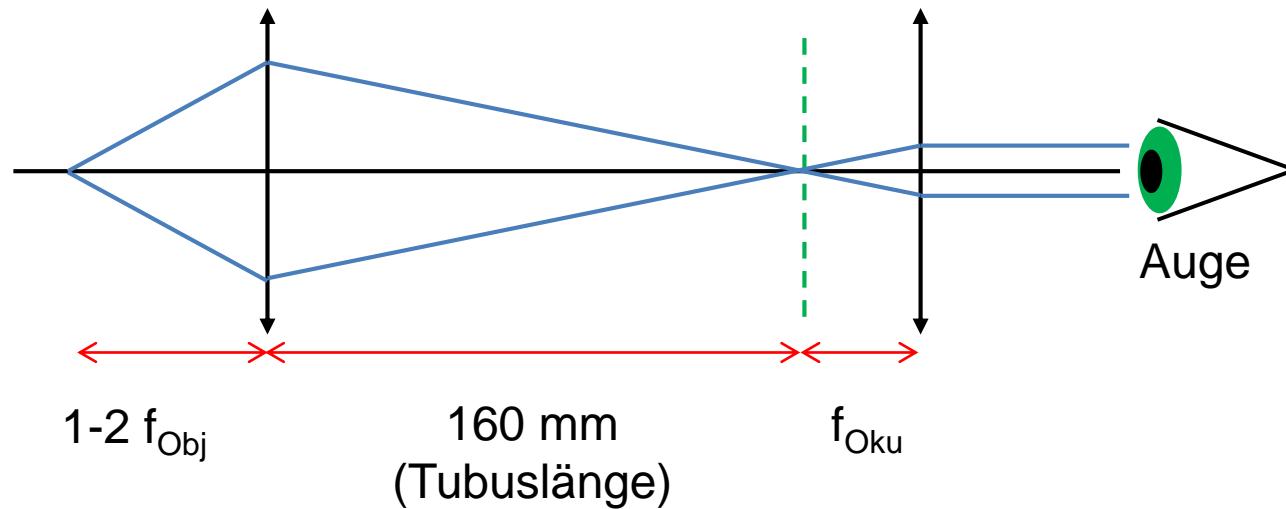
Wichtige Kenngrößen: Vergrößerung Γ , D_{EP} , Sehfeld

Dämmerungszahl: $Z = \sqrt{|\Gamma| \cdot D_{EP} [in \text{ mm}]}$

Mikroskop

Ziel: Vergrößerung kleinster Objekte (bis Auflösungsgrenze)

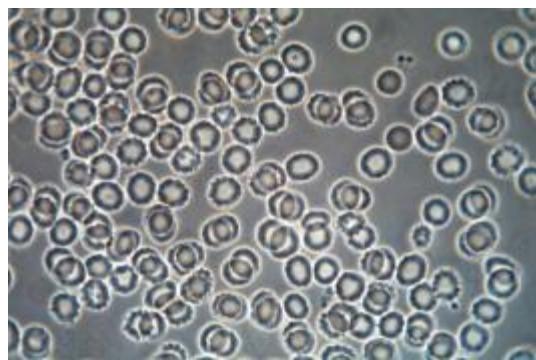
Zweistufiger Aufbau mit Objektiv und Okular
Beobachtung mit entspanntem Auge



Vielzahl von Verfahren zur Untersuchung/Kontrastierung von Proben
Anwendungen in Biologie, Medizin, Materialwissenschaften, Mikrotechnologie, ...

Mikroskop

Wichtige Verfahren:

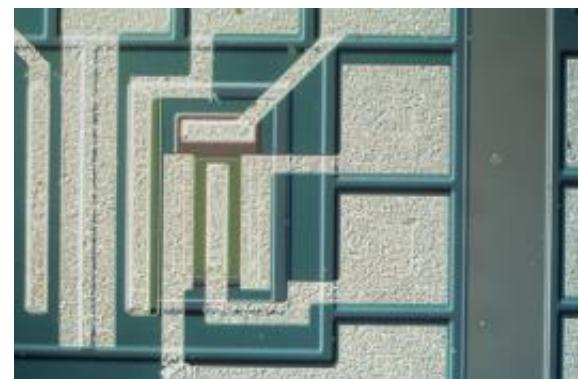


- Hellfeld
- Dunkelfeld
- Phasenkontrast
- Differentieller Interferenzkontrast
- Fluoreszenzmikroskopie
- Polarisationsmikroskopie
- Konfokale Rastermikroskopie
- ...

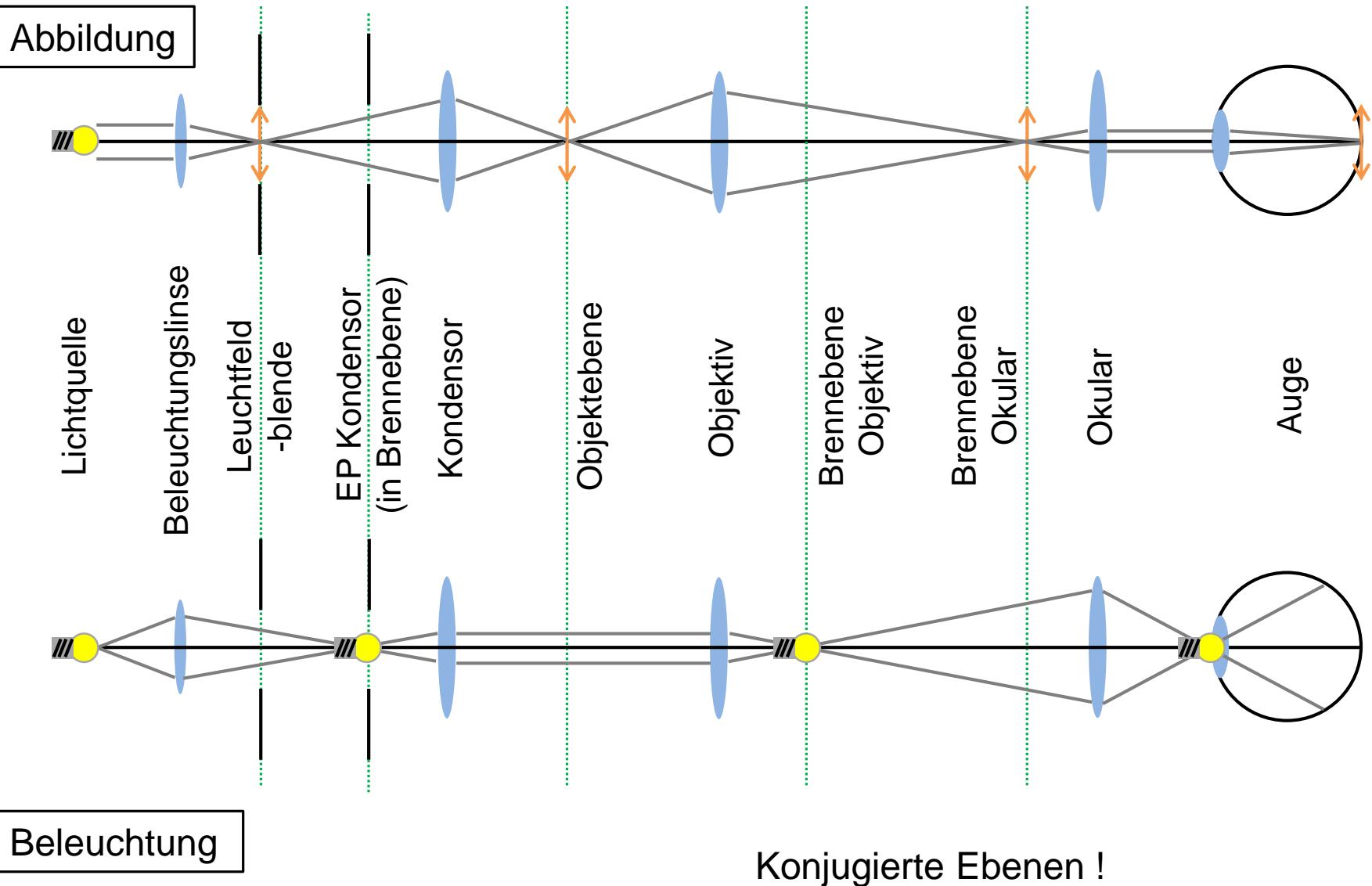
Gesamtvergrößerung des Bildes: $\Gamma_{Gesamt} = \Gamma_{Objektiv} \cdot \Gamma_{Tubus} \cdot \Gamma_{Okular} \cdot \Gamma_{Ausdruck}$

Beleuchtung des Objekts spielt große Rolle

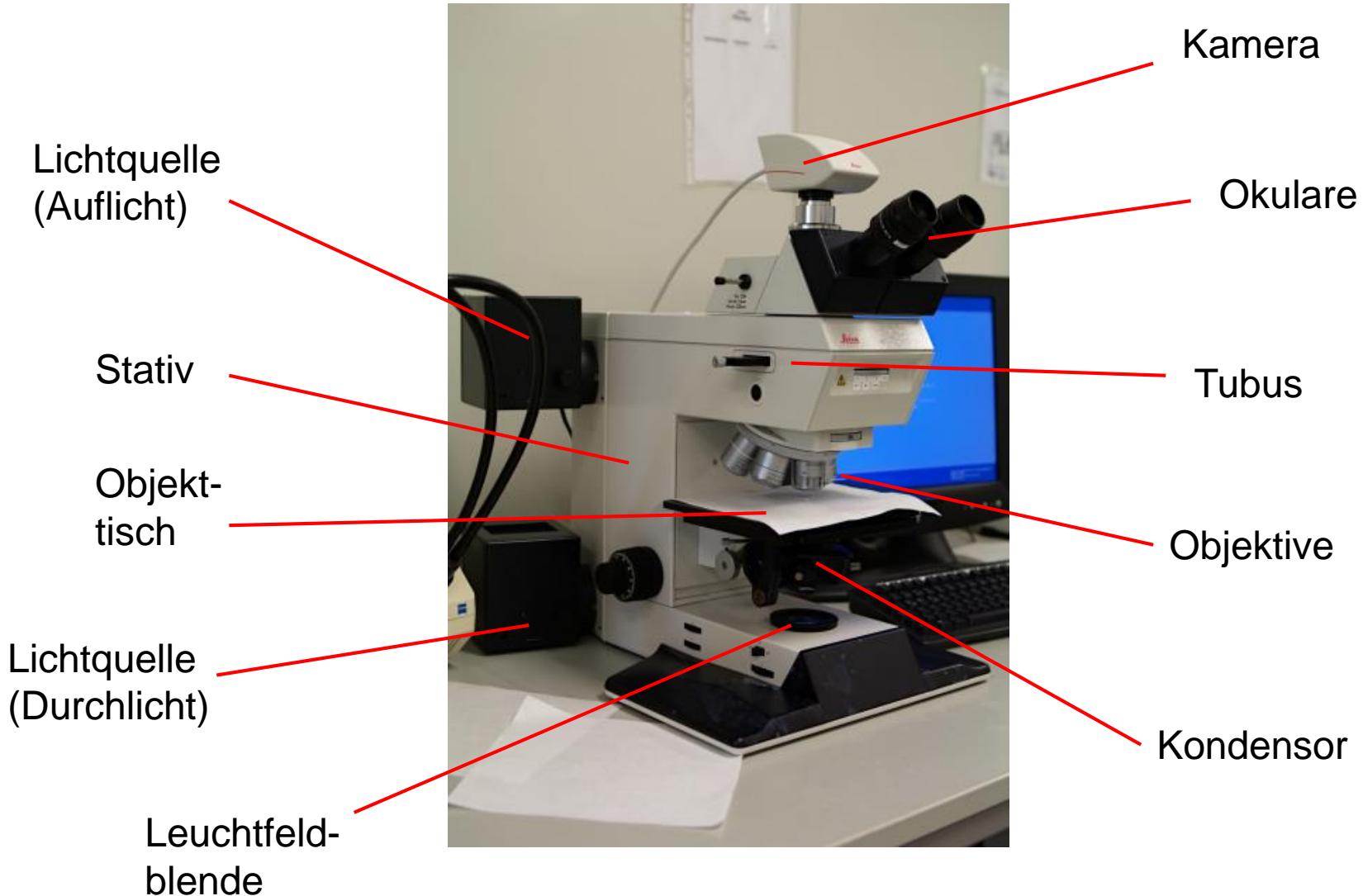
→ Köhlersche Beleuchtung / -strahlengänge
Verwoben mit Abbildungsstrahlengang



Mikroskop

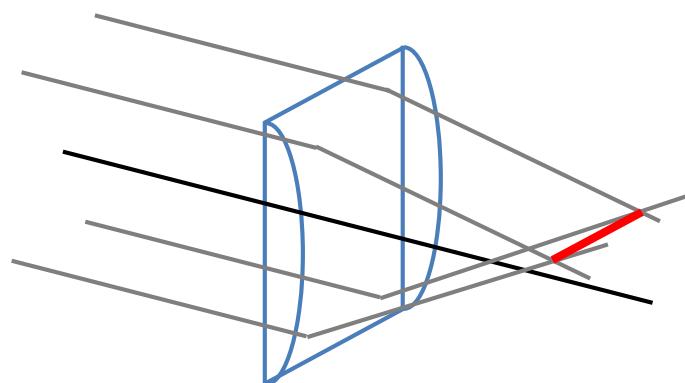


Mikroskop

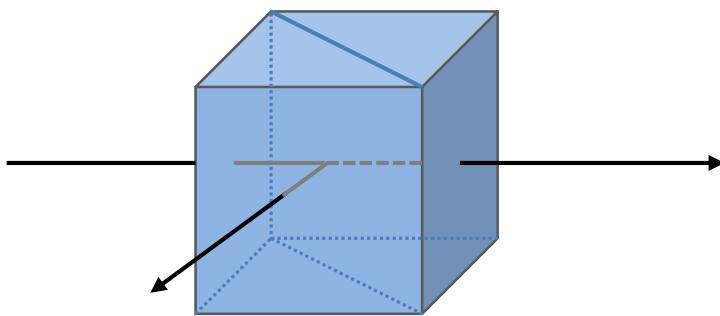


Weitere optische Bauelemente

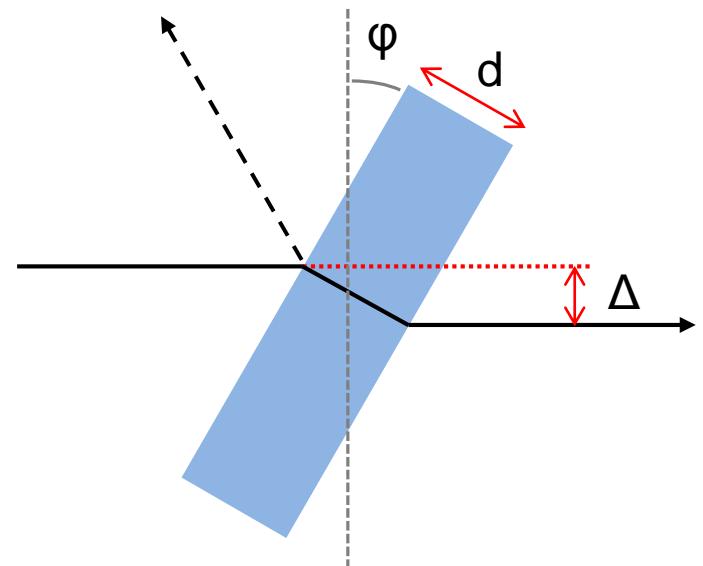
Zylinderlinse



Strahlteilerwürfel



Planparallele Platten



Wichtige Fachbegriffe: Deutsch - Englisch

Brechung, Brechungsindex	refraction, refractive index
Blende	aperture stop
EP, AP	entrance / exit pupil
Hauptebene, -punkte	principal plane / points
Strahlengang	path of rays, optical path
Lupe	magnifying glass
Beleuchtung	illumination
einfallender Strahl	incident beam
Ausbreitung	propagation
Maßstab	magnification
Brennweite, -ebene	focal length / plane
Ablenkung	deflection
Bildpunkt	image spot

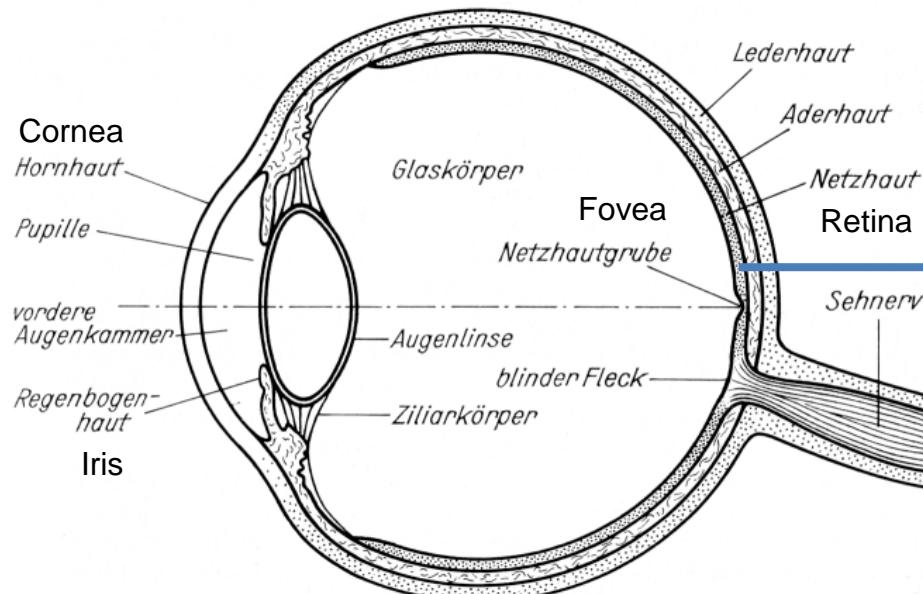
Wichtige Fachbegriffe: Deutsch - Englisch

Bildentstehung	image formation
Spektrale Verteilung	spectral distribution
Bildfeldwölbung	image curvature
Tonnen-, Kissenverzeichnung	barrel / pincushion distortion
Strahlteiler	beam splitter
Flint-, Kronglas	flint / crown glass
Bezugsweite	reference visual range
Strahlaufweitung	beam expander
Leuchtfeldblende	luminous field aperture

Physiologische Optik

Eigenschaften des Auges

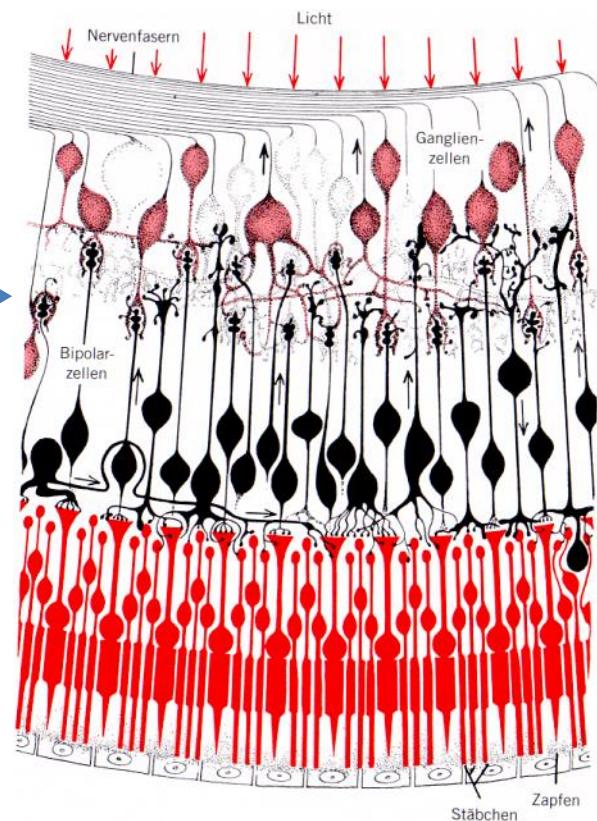
- Definieren die visuelle Wahrnehmung und Beobachtungen
- Wichtig zum Verständnis von z.B. Helligkeit, Kontrast, Farbe, Räumlichkeit, ...



Quelle: Helbig, „Grundlagen der Lichtmesstechnik“, Geest & Portig (1972)

$$f_{\text{ges}} = \text{ca. } 16.5 \text{ mm}$$

Sehfeld ca. 170° (horiz.) / 110° (vert.)



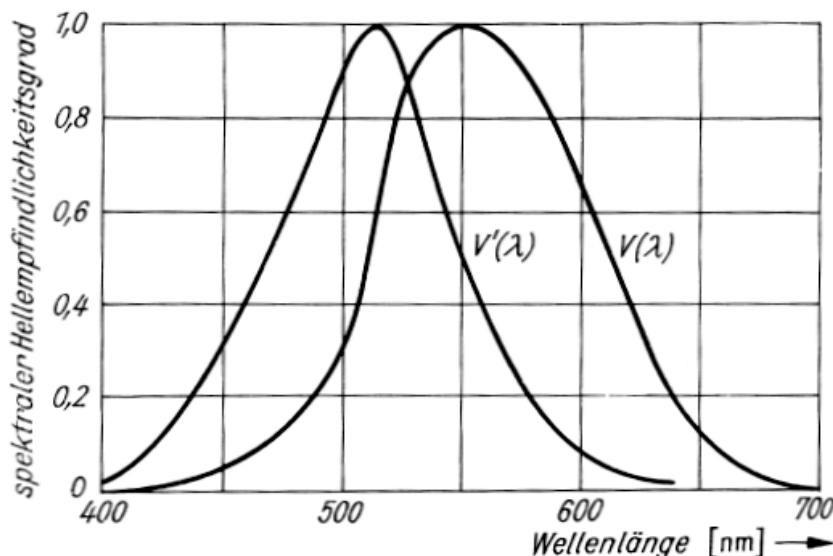
Quelle: Gregory, „Auge und Gehirn“, Rowohlt (2001)

Wahrnehmung von Helligkeit

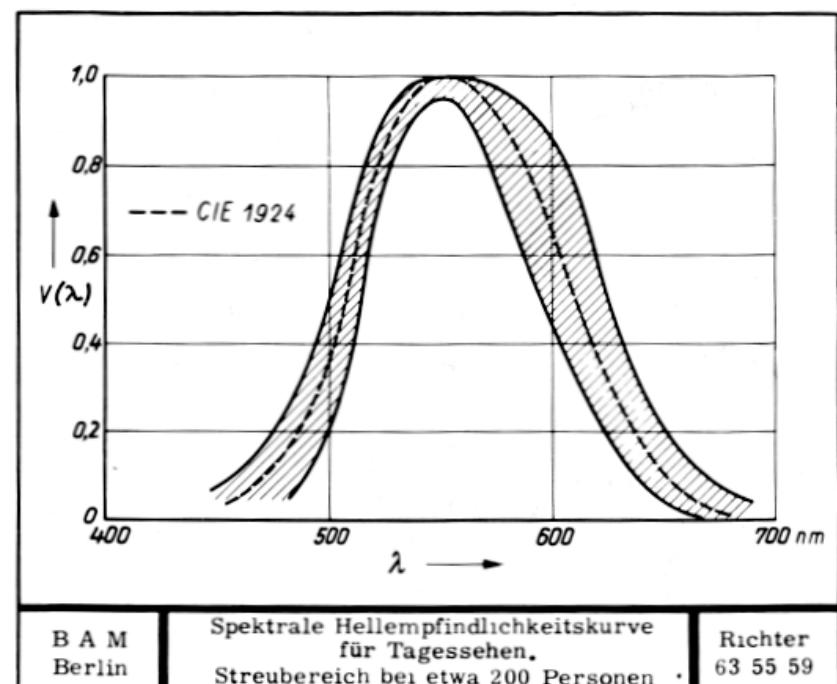
Spektrale Empfindlichkeit:

$V(\lambda)$ -Kurve für Tagsehen (Maximum bei ca. 550 nm) → Zapfen

$V'(\lambda)$ -Kurve für Nachtsehen (Maximum bei ca. 505 nm) → Stäbchen



Quelle: Helbig, „Grundlagen der Lichtmesstechnik“, Geest & Portig (1972)



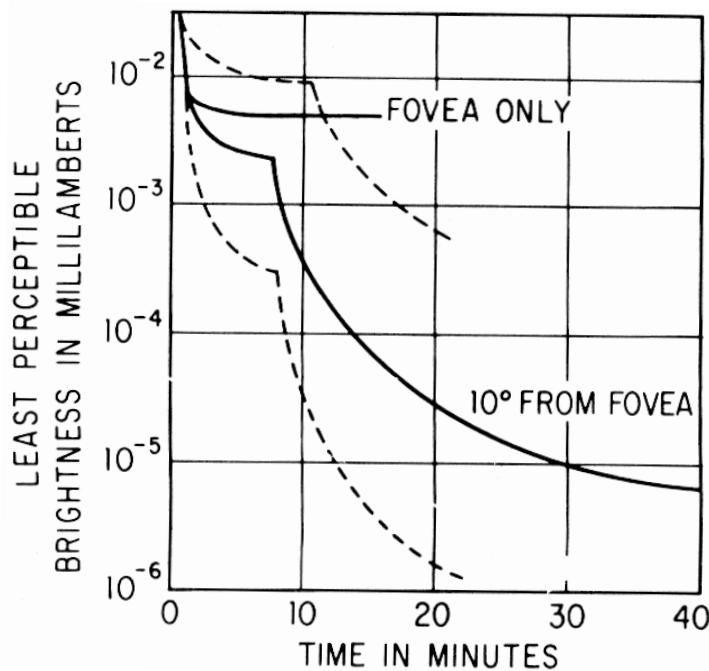
Quelle: Küppers, „Farbe“, Callwey (1973)

Physiologische Untersuchung: Streuung für größere Menschengruppen!

Wahrnehmung von Helligkeit

Adaption des Auges bei Dunkelheit:

Grenze bei ca. 5 Photonen



Quelle: Smith, „Modern Optical Engineering“, McGraw-Hill (1966)

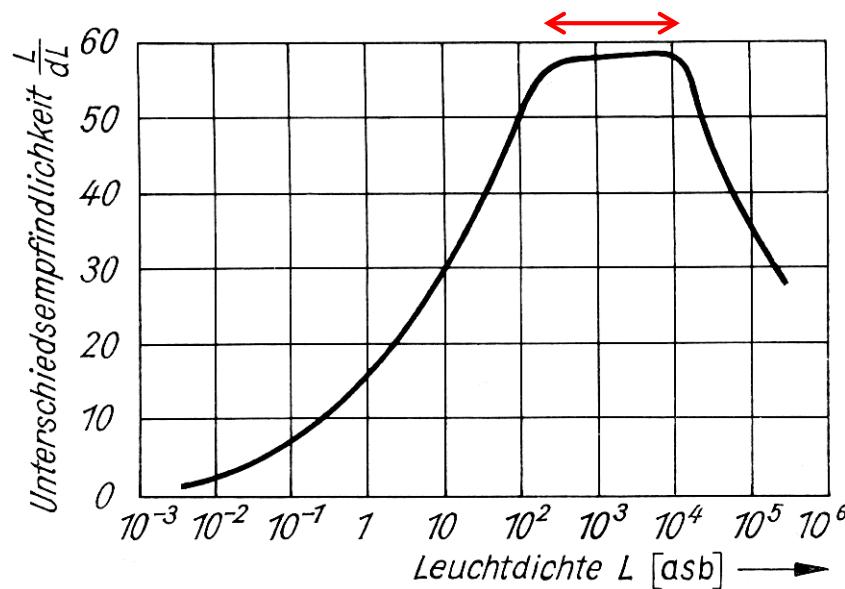
- 1) Anpassen der Iris (ABL)
- 2) Zapfen
 - Farbsehen
 - hauptsächlich in Fovea
 - ca. 7.000.000
 - weniger empfindlich
 - kleiner Anpassungsbereich
- 3) Stäbchen
 - keine Farben
 - hauptsächlich neben Fovea
 - ca. 125.000.000
 - sehr empfindlich
 - großer Anpassungsbereich

Wahrnehmung von Helligkeit

Wahrnehmung durch z.B. Auge und Ohr → Weber-Fechner Gesetz:

Die subjektive Wahrnehmung von Sinneseindrücken verhält sich proportional zum Logarithmus der hiermit verbundenen physikalischen Größen

$$dE = K \cdot \frac{dL}{L} \quad \longrightarrow \quad E = K \cdot \ln \left(\frac{L}{L_0} \right)$$



Quelle: Helbig, „Grundlagen der Lichtmesstechnik“, Geest & Portig (1972)

- für das Auge nur in beschränktem, aber wichtigem Bereich gültig (hier ist K linear)
- maximaler Dynamikbereich 10^6 - 10^{10}
- Optische Dichte (Lichtschwächung):

$$D = \log \left(\frac{I}{I_0} \right)$$

Zeitabhängige Wahrnehmung

- Grenzfrequenz der Auflösung von zeitlich kurzen Pulsfolgen ca. 60-70 Hz
- Abhängig von Gesamthelligkeit und Position auf Retina
- Lichtempfinden kürzerer Pulse wird integriert → Talbot-Gesetz:

$$L = \frac{1}{T} \int_0^T L(t) dt$$

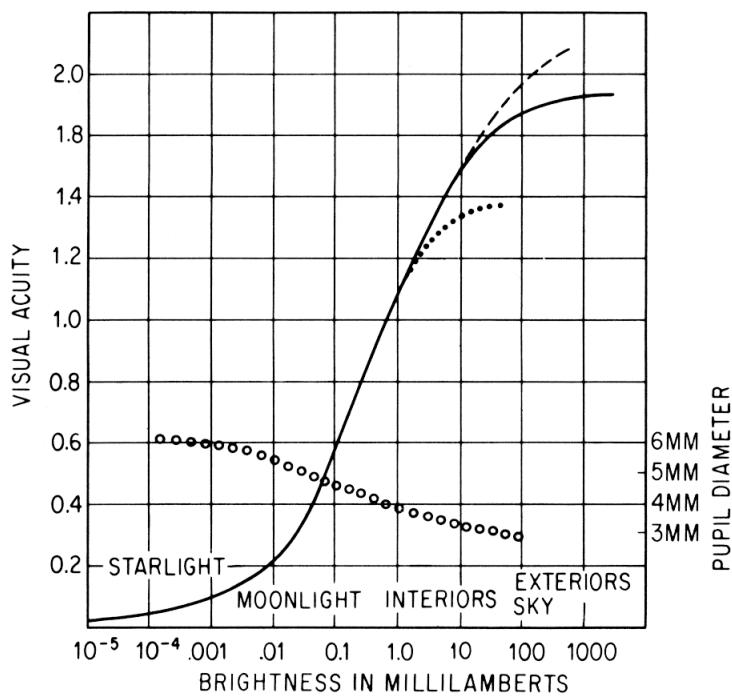


- Mehrere abfolgende Einzelbilder verschmelzen ab ca. 20 Hz zu kontinuierlichen Bewegungsabläufen (Kino)

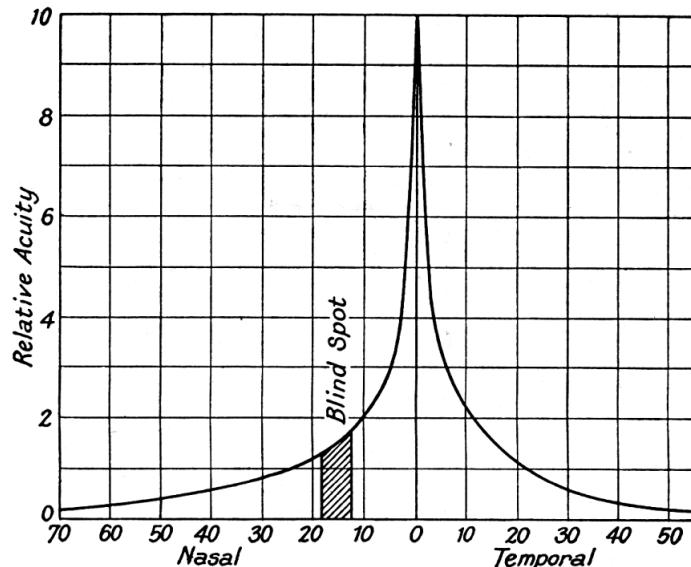
Sehschärfe

Abhängig von

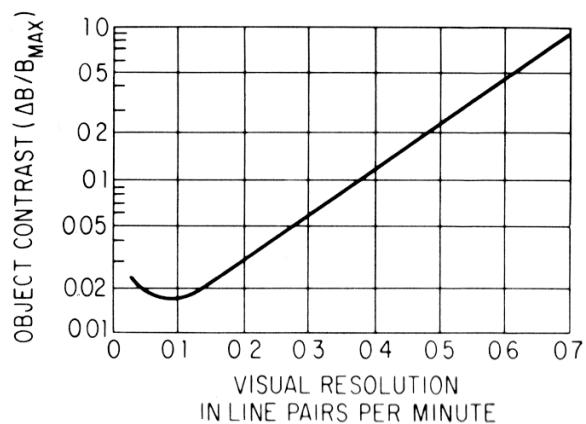
- Helligkeit
- Kontrast/Farbkontrast
- Position auf Retina
- Augenbewegungen
- ...



Quelle (beide Grafiken): Smith, „Modern Optical Engineering“, McGraw-Hill (1966)

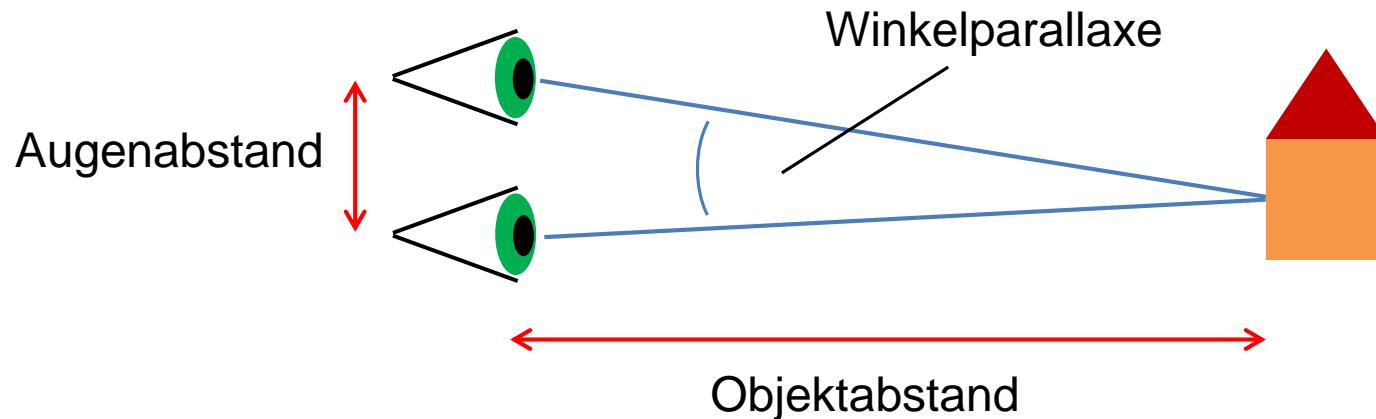


Quelle: Martin, „Technical Optics Vol. 1“, Pitman (1953)



Binokulares Sehen

- Redundanz
- stark erweitertes Sehfeld
- räumliches Sehen (Stereoskopie)



- Verarbeitung der beiden unterschiedlichen Signale durch Gehirn
- wird durch Augen- und Kopfbewegungen unterstützt
- Räumlicher Eindruck auf kurze Distanz am stärksten

Photometrie

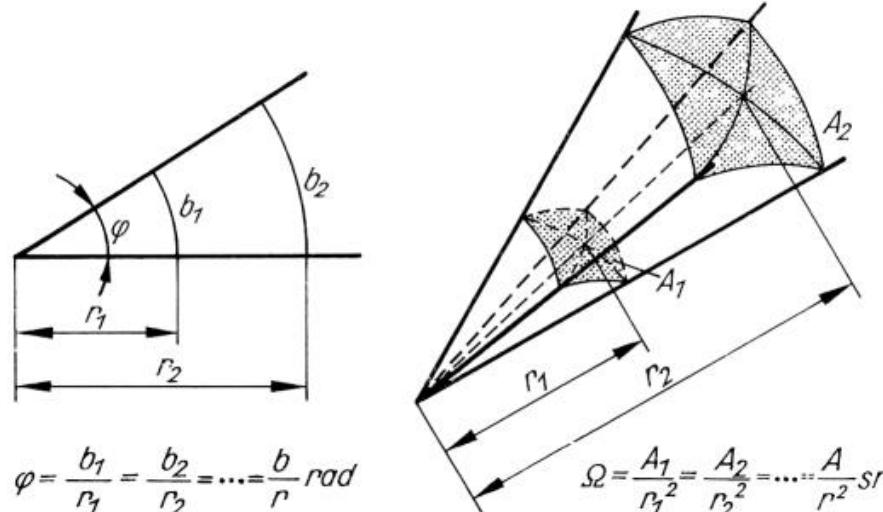
Bewertung von optischer Strahlung (physikalische Größe) durch das Auge

Allgemein:

$$\Phi = K_m \cdot \int_{380nm}^{760nm} \Phi_{e\lambda} \cdot V(\lambda) \cdot d\lambda \quad \text{und} \quad \Phi' = K'_m \cdot \int_{380nm}^{760nm} \Phi_{e\lambda} \cdot V'(\lambda) \cdot d\lambda$$

Aus physikalischen Strahlungsgrößen werden photometrische Größen !

Raumwinkel ist wichtig für die weiteren Betrachtungen:



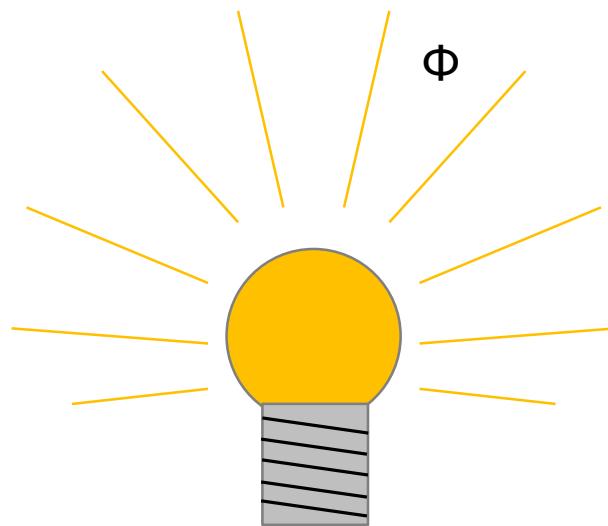
Quelle: Helbig, „Grundlagen der Lichtmesstechnik“, Geest & Portig (1972)

Lichtstrom

Die Strahlungsleistung einer Lichtquelle in alle Richtungen,
bewertet durch das Auge

Symbol: Φ (Phi)

Einheit: das Lumen [lm] (Leuchte)



z.B. wichtig zur Angabe der Lichtausbeute einer Lichtquelle [lm/W]

Lichtstärke

Der Lichtstrom Φ innerhalb eines bestimmten Raumwinkels Ω

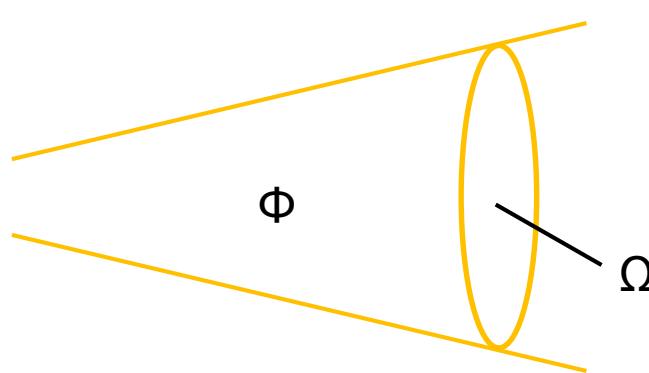
Symbol: $I = \Phi / \Omega$

Einheit: die Candela [cd] = [lm / sr] (Kerze)

cd ist Basis SI-Einheit; früher durch Standardkerze definiert, heute:

„Die Einheit 1 Candela ist die Lichtstärke in einer bestimmten Richtung einer Strahlungsquelle, die monochromatische Strahlung der Frequenz $540 \cdot 10^{12}$ Hz aussendet und deren Strahlstärke in dieser Richtung $1/683$ W pro Steradian beträgt.“

Hieraus folgt auch die Definition der photometrischen Strahlungsäquivalente:



$$K_m = 683 \frac{\text{lm}}{\text{W}} \quad \text{und} \quad K'_m = 1699 \frac{\text{lm}}{\text{W}}$$

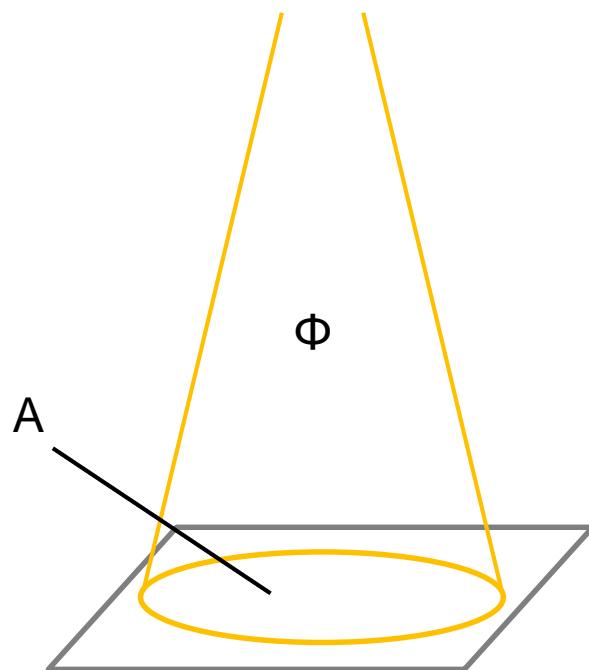
z.B. wichtig, um die räumliche Abstrahlung einer Lichtquelle zu charakterisieren

Beleuchtungsstärke

Der Lichtstrom Φ , der auf eine bestimmte Fläche A fällt

Symbol: $E = \Phi / A$

Einheit: das Lux [lux] = [lm / m²] (Licht)



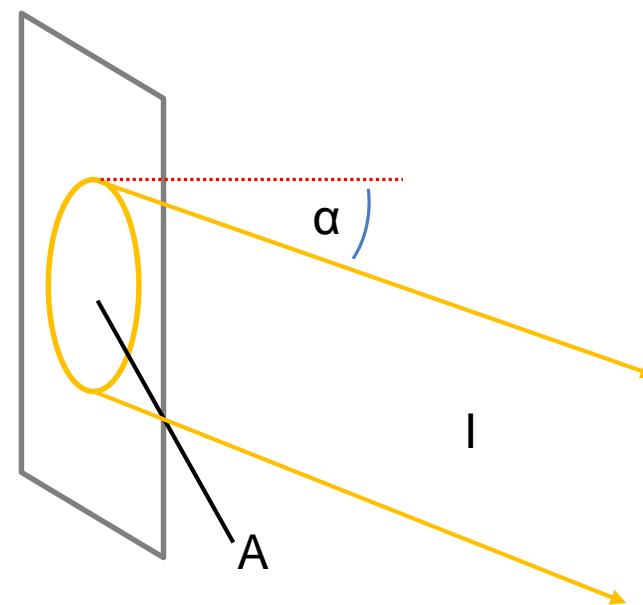
z.B. wichtig, für die Auslegung
von Arbeitsplätzen oder
Wohnräumen

Leuchtdichte

Die Lichtstärke I der leuchtenden Fläche A einer Lichtquelle oder Oberfläche, die unter dem Winkel α betrachtet wird

Symbol: $L = I / (A \cdot \cos(\alpha))$

Einheit: $[cd / m^2]$



z.B. wichtig, um leuchtende oder beleuchtete Flächen zu charakterisieren

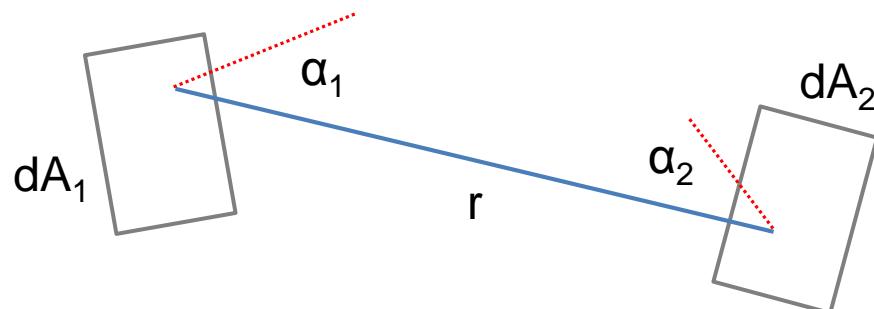
Wenn: $I = I_0 \cdot \cos(\alpha)$

ist die Abstrahlung der Fläche unabhängig vom Betrachtungswinkel

→ Lambertstrahler

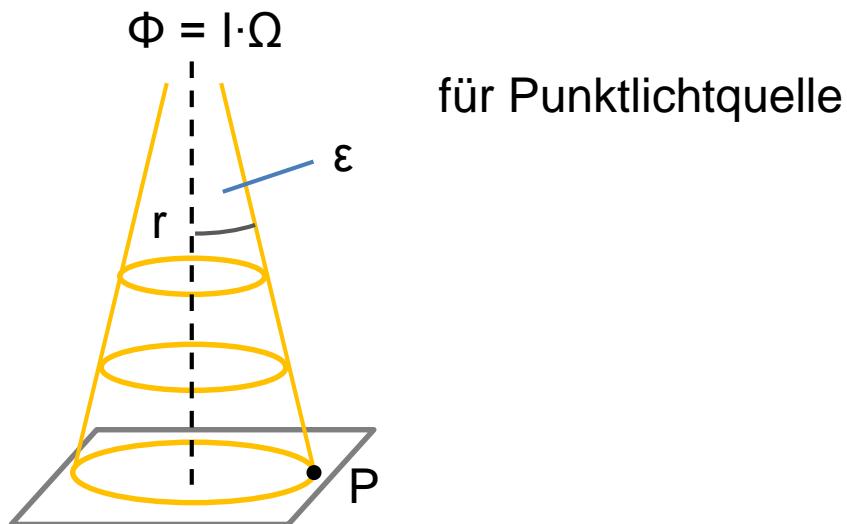
Wichtige Zusammenhänge

Photometrisches Grundgesetz



$$d^2\Phi_{1 \leftrightarrow 2} = L \frac{dA_1 \cos(\alpha_1) dA_2 \cos(\alpha_2)}{r^2}$$

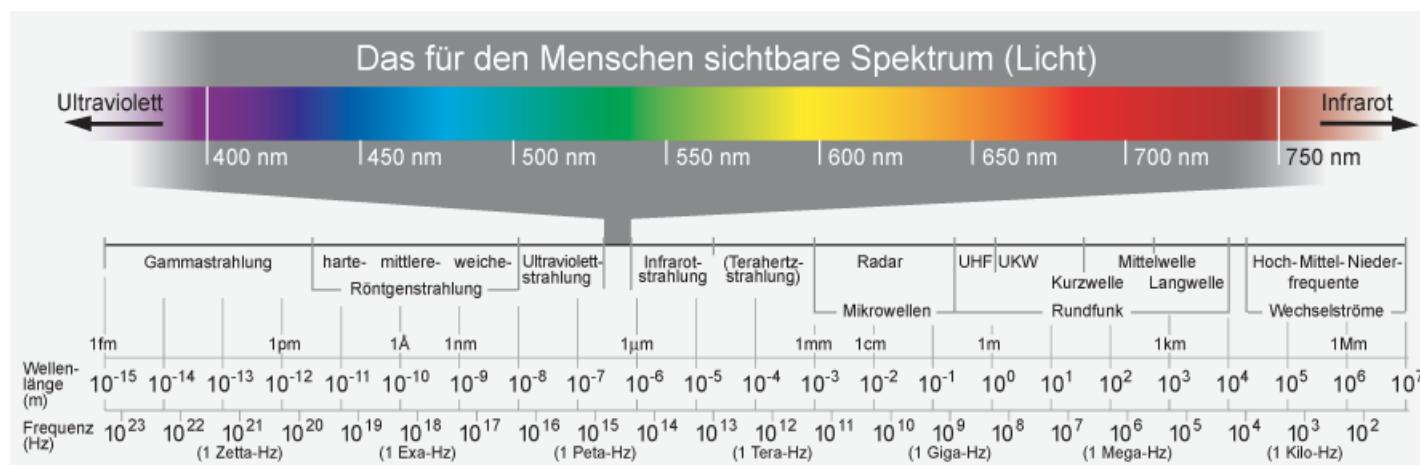
Photometrisches Abstandsgesetz



$$E = \frac{I}{r^2} \cdot \cos(\varepsilon)$$

Wahrnehmung von Farbe

Einzelne Wellenlängen (physikalische Größe) → Spektralfarben



Einer oder mehrere Spektralbereiche → Mischfarben

Farbreiz (abhängig von Lichtquelle und Material) → Farbempfindung

Farbmetrik

Drei verschiedene Zapfenarten (Farbstoffe) → Mischung der Signale

Drei Farbeigenschaften für Beschreibung benötigt

Farbvalenz: Farbreize, die die gleiche Farbempfindung bewirken

$$F(\lambda) = \bar{r}(\lambda) \cdot R + \bar{g}(\lambda) \cdot G + \bar{b}(\lambda) \cdot B$$

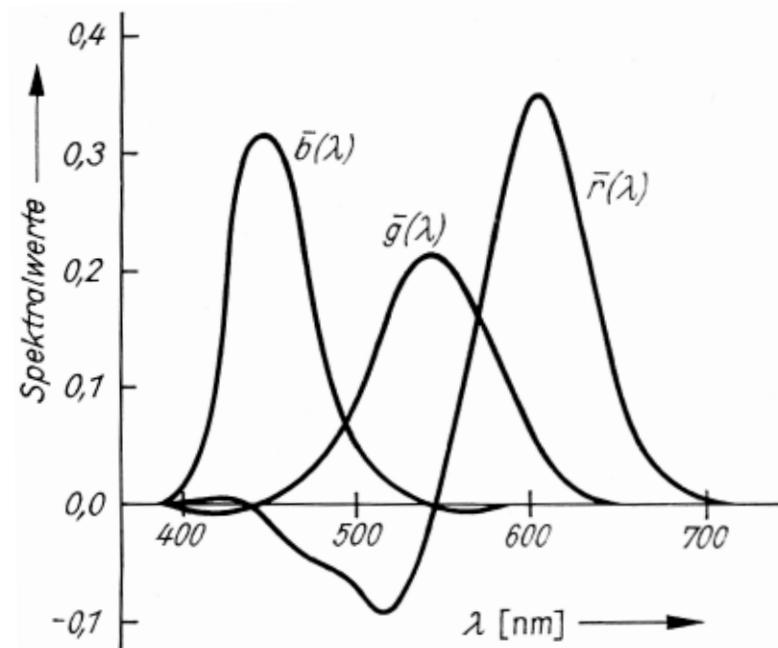
Primärvalenzen:

$$R + G + B = \text{unbunt}$$

Spektralwerte:

$$\bar{r}(\lambda), \bar{g}(\lambda), \bar{b}(\lambda)$$

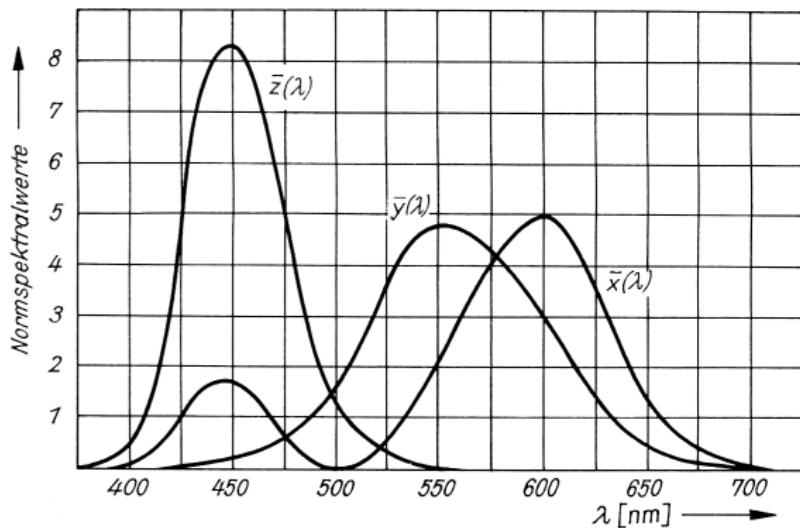
Mischung der Farbvalenzen



Quelle: Helbig, „Grundlagen der Lichtmesstechnik“, Geest & Portig (1972)

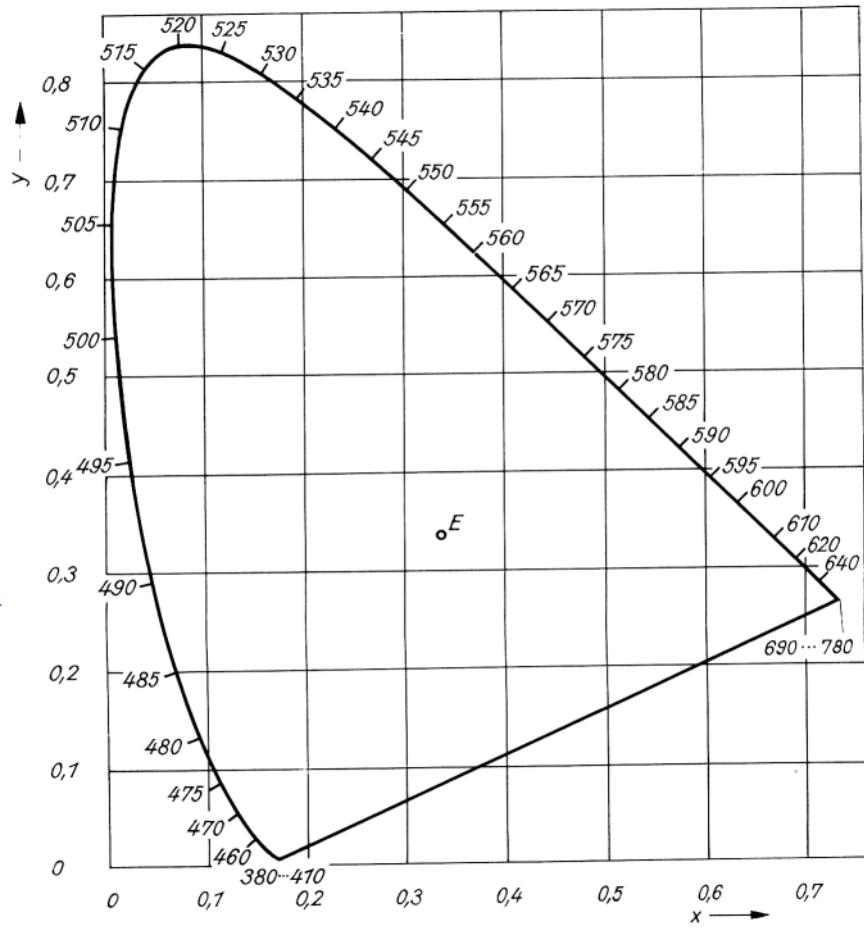
Farbmetrik

Normspektralwertkurven



- Farbton und Sättigung
- $z(\lambda)$ vertikal dazu (3D)
- Purpurgerade (blau-rot)
- Unbuntpunkt E

Spektralfarbenzug in der Normfarbtafel (2°)

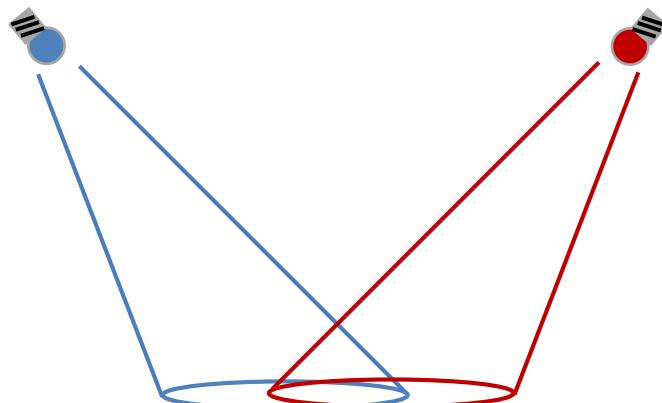


Quelle (beide Grafiken): Helbig, „Grundlagen der Lichtmesstechnik“, Geest & Portig (1972)

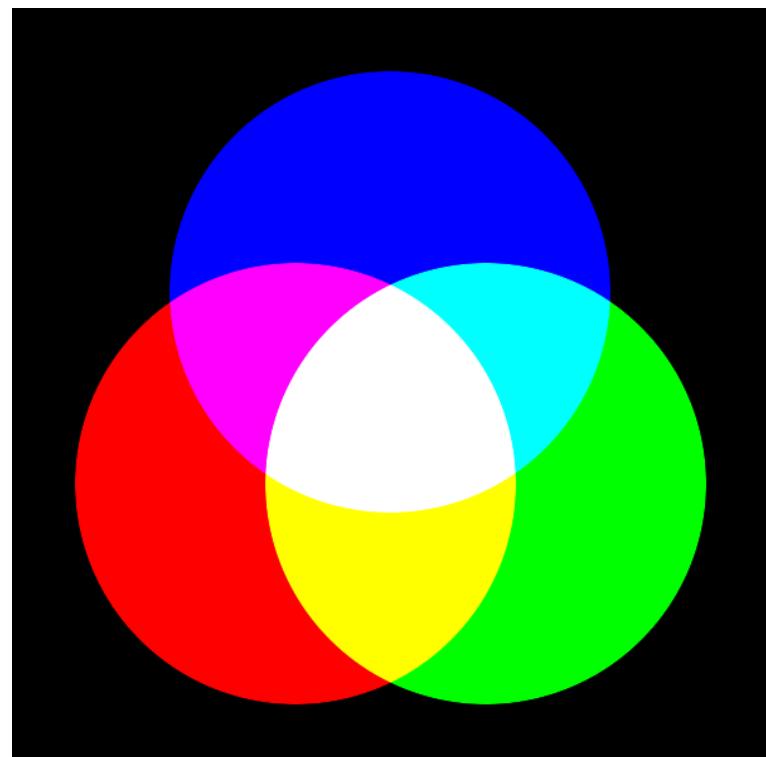
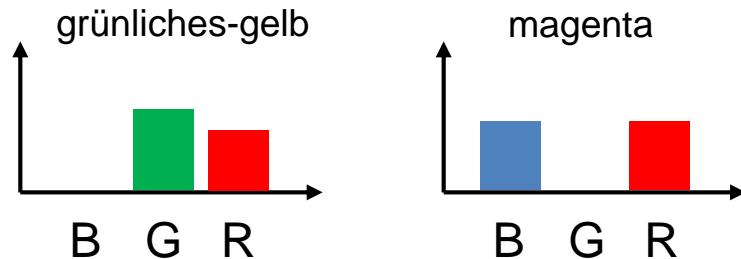
Additive Farbmischung - RGB

Spektren verschiedener Lichtquellen überlagern sich additiv

Wichtig für selbstleuchtende Objekte (Lampen, Bildschirme, ...) und Verfahren mit zeitlich oder räumlich additiver Überlagerung



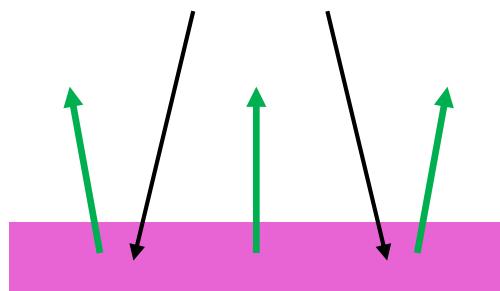
Farbreiz direkt mit Spektralwerten erklärbar



Subtraktive Farbmischung - CMY(K)

Teile des Beleuchtungsspektrum werden durch Material absorbiert, reflektiert, transmittiert oder gestreut und fehlen für Farbvalenz

Wichtig für beleuchtete Objekte (Druckverfahren, Diafilm, pigment- und farbstoffbasierte Farben, ...)

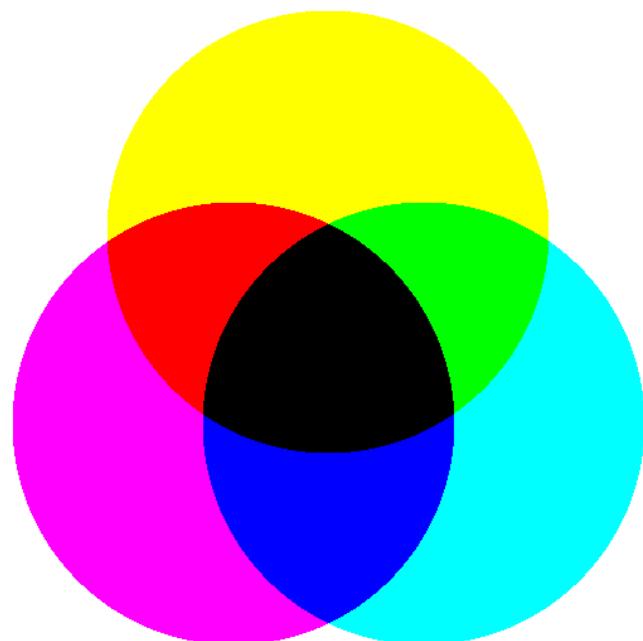


Grün (Objekt absorbiert rot/blau und reflektiert grün)

Abhängig von Beleuchtungsspektrum

Grundfarben komplementär zu RGB

Oft mit zusätzlichem Schwarz (K)



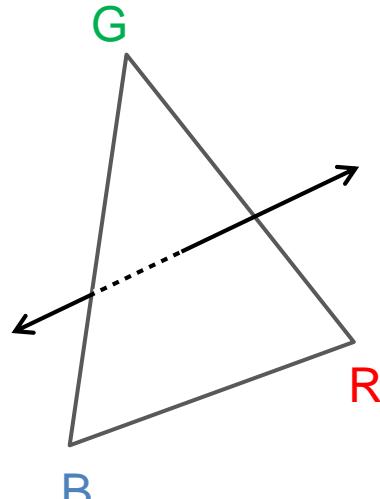
Farbräume

Darstellung von Farben durch drei Koordinaten vollständig

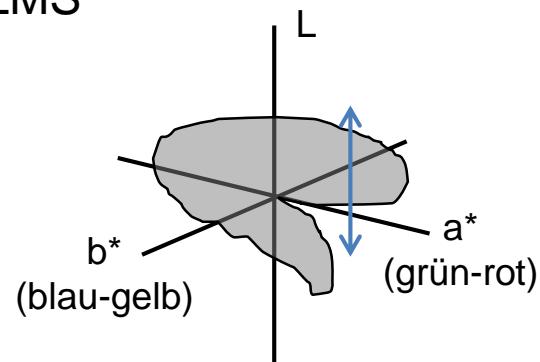
→ 3D Farbräume

Angepasste Farbräume für verschiedene Anwendungen:

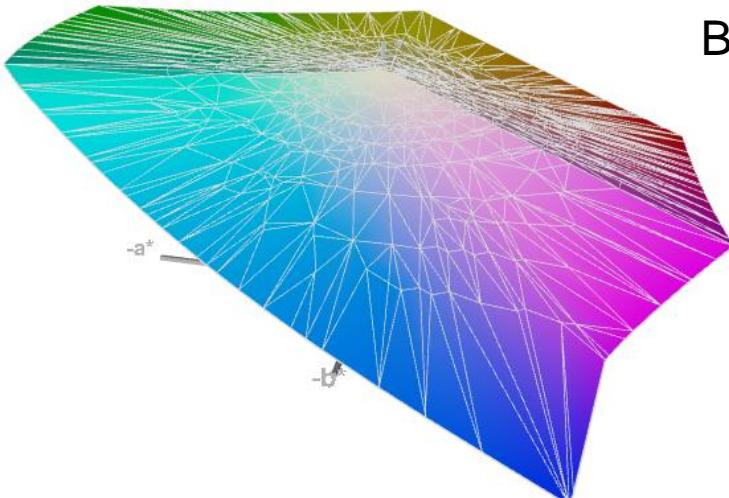
- rot, grün, blau → RGB
- cyan, magenta, gelb (yellow) → CMY
- Luminanz, Farbwert a^* , Farbwert b^* → Lab
- Farbton (Mischung zweier Farben), Sättigung (Anteil der Dritten Farbe), Helligkeit (Intensität aller Farben) → HSV
- Empfindlichkeit der drei Zäpfchenarten (Absorptionsmessung) → LMS



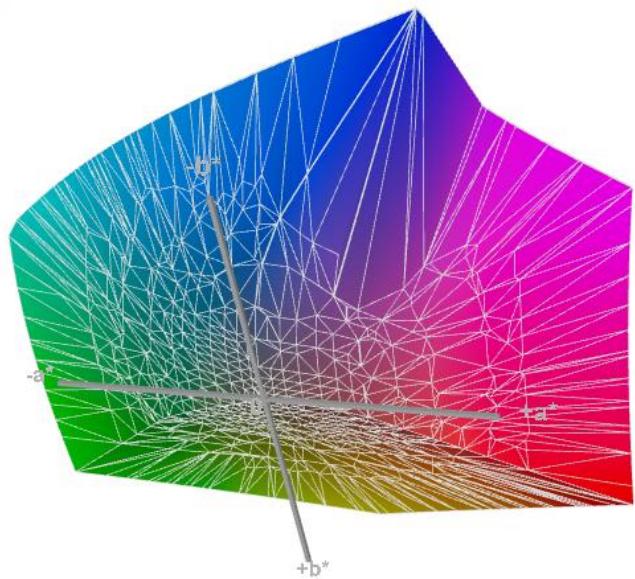
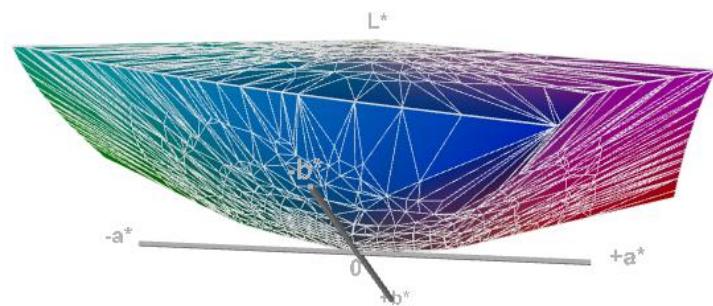
Weitere anwendungsspezifische Unterteilungen:
z.B. sRGB, AdobeRGB, eciRGB, ...



Farträume



Beispiel für die 3D Darstellung eines Farbraums:



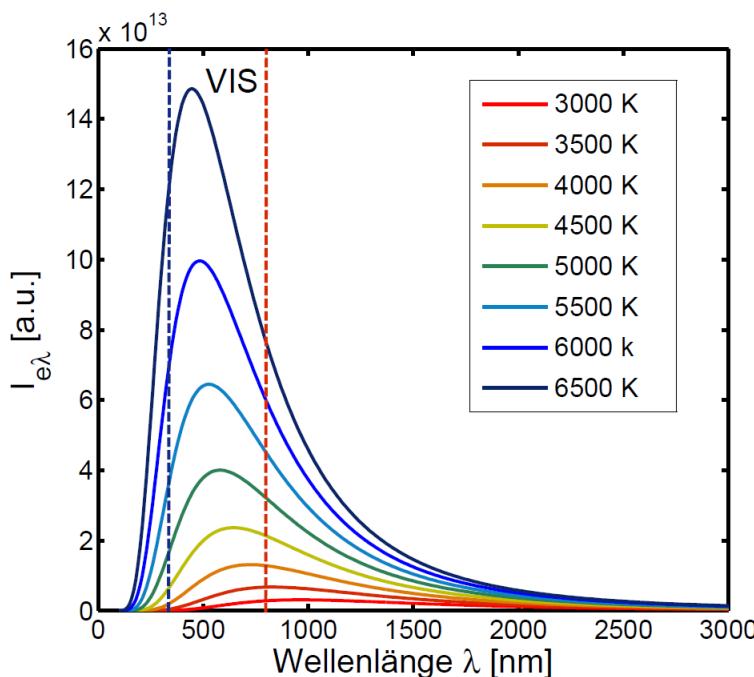
Lichtquellen - Thermische Strahler

Thermische Anregung von Schwingungen
→ kontinuierliches Spektrum

z.B. Sonne, Glühlampen, Kerze, ...

Beschreibung durch Plancksches Strahlungsgesetz (für idealen schwarzen Strahler):

$$I_{e\lambda} = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1}$$



Höhere Temperaturen des schwarzen Strahlers → Maximum blauverschoben

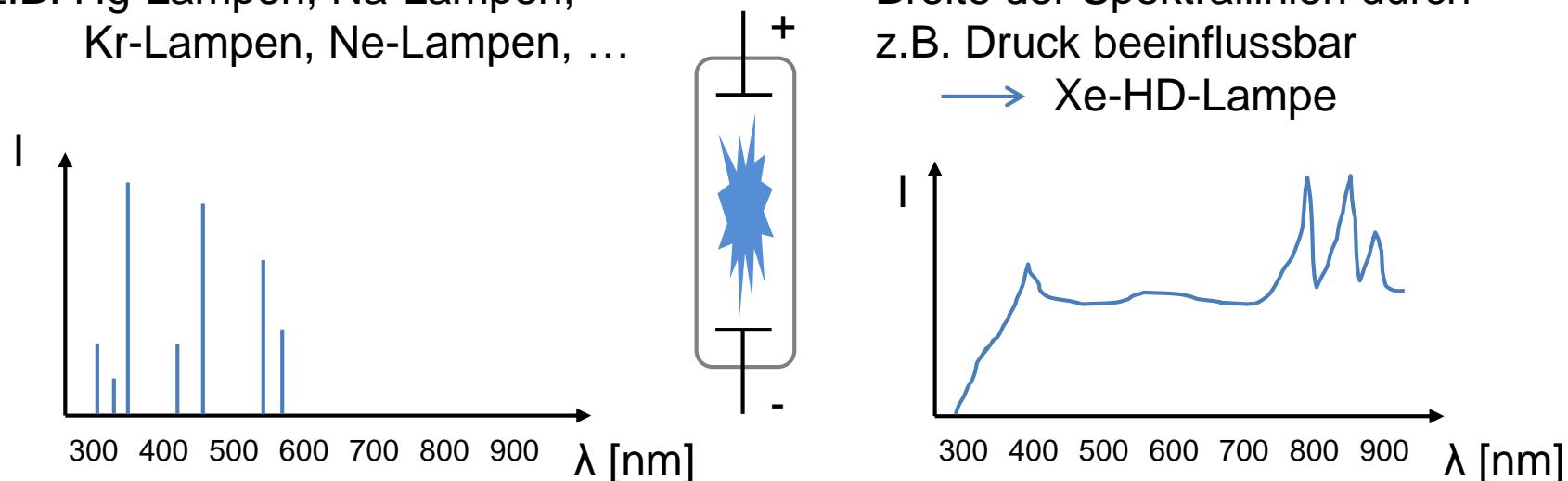
Farbeindruck als Temperaturäquivalent → Farbtemperaturen in K

z.B. Kerze 1500 K, Glühlampe 2600 K, Halogenlampe 3000 K,
Tageslicht 5600 K, Himmel 6000 K - 20000 K, ...

Lichtquellen - Spektrallampen

Meist Gasentladung (diskrete Energieübergänge in Molekülen oder Atomen)
→ diskretes Spektrum (mehrere Übergänge üblich/möglich)

z.B. Hg-Lampen, Na-Lampen,
Kr-Lampen, Ne-Lampen, ...



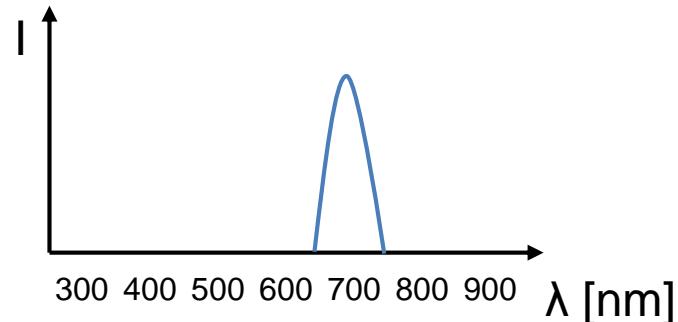
Breite der Spektrallinien durch
z.B. Druck beeinflussbar
→ Xe-HD-Lampe

Hg-Lampe mit Phosphoreszenzfarbstoff in Glaskolben

- absorbiert UV-Anteil und gibt Licht im grün-roten Bereich ab
- Leuchtstoffröhren, Energiesparlampen

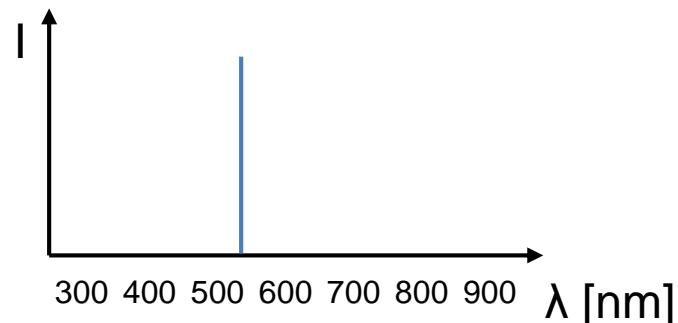
Lichtquellen - LED und Laser

Lichtemittierende Dioden (LED): Lichterzeugung durch Rekombination von Elektronen und Löchern in Halbleitern (Bandlücke bestimmt λ)



- Verschieden breite Spektren möglich, einige Lücken im sichtbaren Bereich
- UV-LED können mit Farbstoff versehen werden → weiße LED

LASER: Lichterzeugung durch Verstärkung stimulierter Emission (Resonator)



- Meist sehr schmalbandig, gerichtet, hohe Intensität möglich, Kohärent
- Unterschiedlichste Materialien: Gase, Festkörper, Farbstoffe, Halbleiter, ...

Wichtige Fachbegriffe: Deutsch - Englisch

Sehfeld	field of view
Helligkeit	brightness
spektrale Empfindlichkeit	spectral sensitivity
Tag- / Nachtsehen	daylight / night vision
Hell / Dunkel Adaption	light / dark adaption
Zäpfchen / Stäbchen	cone / rod cells
Wahrnehmung	perception
Dynamikbereich	dynamic range
optische Dichte	optical density
Sehschärfe	acuity (of vision)
binokular / stereoskopisch	binocular / stereoscopic
Raumwinkel	solid angle
Lichtstrom	luminous flux

Wichtige Fachbegriffe: Deutsch - Englisch

Lichtstärke	luminous intensity
Beleuchtungsstärke	illuminance
Leuchtdichte	luminance
Farbreiz	colour stimulus
Primärvalenz	primary colour
Spektralfarbenzug	spectral locus
Farbraum	colour space
thermische Lichtquelle	incandescent lamp
Glühlampe / Halogenlampe	bulb / halogen lamp
Gasentladungslampe	gas discharge lamp
Schwarzkörperstrahlung	black body radiation (Planck)
Farbtemperatur	colour temperature

Wellenoptik

Modell der Wellenoptik

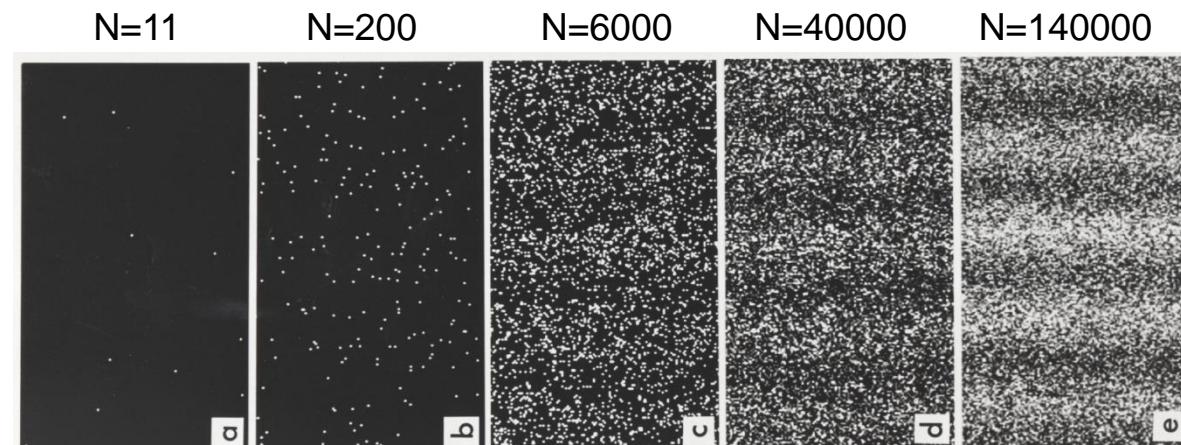
Beschreibung von Licht als elektromagnetische Welle (EM)

Grundlage:

- Maxwell Gleichungen
- in vektorieller Form gute Übereinstimmung mit den meisten optischen Phänomenen
- Einschränkungen: Emission, Absorption, Dispersion, Kohärenz
- für manche Anwendungen reichen auch skalaren Wellen

Bezug zur Quantenoptik (allgemeineres Modells):

für $N_{phot} \rightarrow \infty$ ergeben sich die gleichen Beschreibungen



Beugung am
Doppelspalt:

Quelle: Tonomura/Belsazar, Wikipedia

Grundlagen EM Wellen

- Maxwell Gleichungen beschreiben EM Felder und deren Kopplung
- für optische Anwendungen meist elektrische Komponente wichtiger
- Umstellen der Maxwellgleichungen für nur eine Feldart:
 - Wellengleichung (hier für Vakuum)

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E}(\vec{r}, t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \vec{E}(\vec{r}, t) \quad \text{3D, vektoriell}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} E_x(t) = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(t) \quad \text{1D, skalar}$$

allgemein beschreibt dieser Term die Ausbreitungsgeschwindigkeit einer Welle als: $\frac{1}{v^2}$

$$\rightarrow c^2 = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \quad \epsilon_0, \mu_0 \text{ sind Naturkonstanten}$$

Grundlagen EM Wellen

Wellengleichung beschreibt Zusammenspiel von Auslenkvorgang und Rückstellvorgang \rightarrow Schwingungen

mögliche mathematische Lösungen: $\sin(), \cos(), \text{Re} / \text{Im} \{e^{i\varphi}\}, e^{\pm x}$

EM Wellen sind transversal

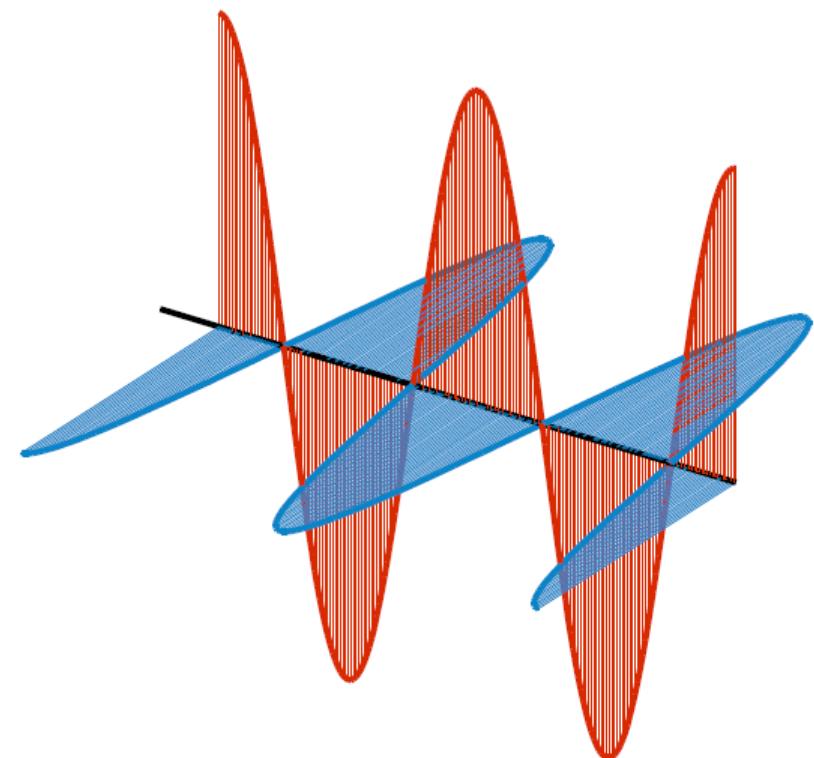
Wichtige Parameter:

$$\epsilon = \epsilon_0 \cdot \epsilon_r \quad \epsilon_r : \text{materialabhängig}$$

$$\mu = \mu_0 \cdot \mu_r \quad \mu_r : \text{materialabhängig}$$

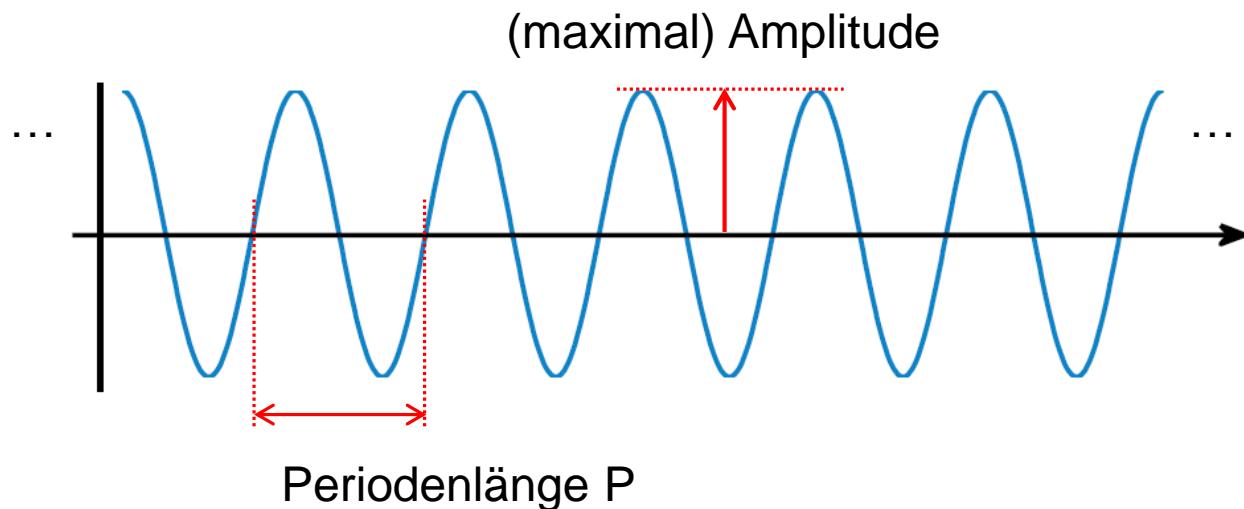
für Dielektrika ohne Absorption:

$$\left(\frac{c_0}{c_1} \right)^2 = \bar{n}^2 = \frac{\epsilon_r \epsilon_0}{\epsilon_0} = \epsilon_r$$



Grundlagen EM Wellen

Harmonischer Mode, z.B. $\cos()$:



Wellenlänge λ entspricht Periodenlänge P

Frequenz f entspricht Dauer T einer Periode $f = \frac{1}{T}$

Zusammenhang: $c = \lambda \cdot f$

Grundlagen EM Wellen

Einfachste Form:

- ebene Welle
- harmonischer Mode

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0(\vec{r}, t) \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t + \varphi_0)$$

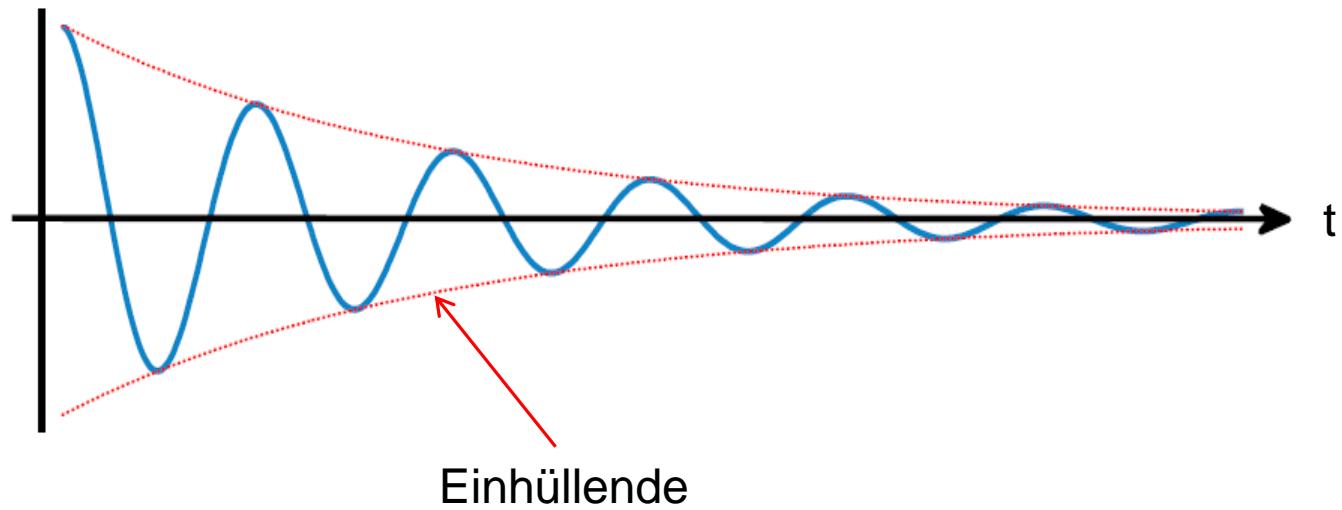
Diagram illustrating the components of the wave equation:

- momentane Amplitude (blue arrow pointing to \vec{E}_0)
- maximale Amplitude (blue arrow pointing to the coefficient of the cosine function)
- Wellenvektor (blue arrow pointing to \vec{k})
- Kreisfrequenz (blue arrow pointing to ω)
- Nullphase (blue arrow pointing to the phase term φ_0)

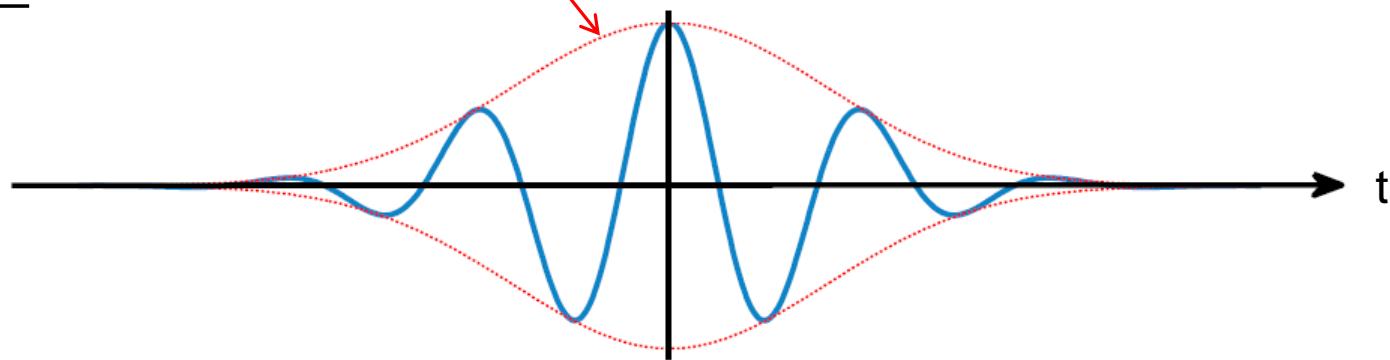
$$\vec{k} = \frac{2\pi}{\lambda} \vec{e}$$
$$\omega = 2\pi f$$

Grundlagen EM Wellen

Gedämpfte Welle:



Gauß Puls:



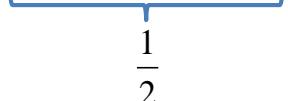
Amplitude und Intensität

- Frequenz von Licht ca. 100 THz – 1000 THz
- momentane Amplitude der Schwingung nicht detektierbar (zeitliche Mittelung)
- Detektion ist immer mit Energiefluss verbunden:

Intensität = Energie pro Fläche und Zeit (senkr. zur Ausbreitung)

Allgemein: Intensität \sim Amplitude²

mit zeitlicher Mittelung: $I \sim \langle E^2 \rangle_t = E_0^2 \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt$ \longrightarrow $I = \frac{c \epsilon_0}{2} E_0^2$



alternativ auch: $I = |E_0 \cdot E_0^*|$

Poyntingvektor: $\vec{S} = c^2 \epsilon_0 \vec{E} \times \vec{B}$ \longrightarrow $I = \langle S \rangle_t$

EM Wellen an Grenzflächen

Reflexionsgesetz und Brechungsgesetz:

→ können aus Maxwell Gleichungen abgeleitet werden

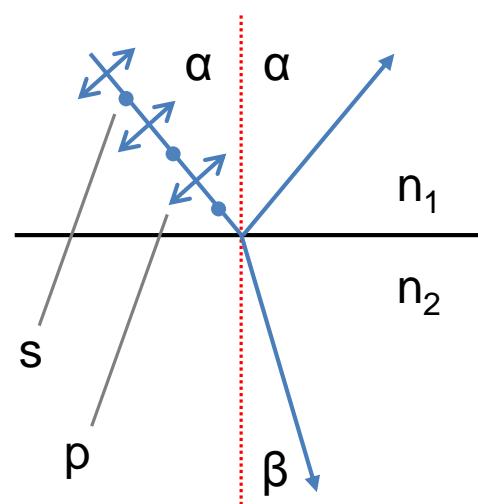
Aussage über Koeffizienten und Phasen von Reflexion und Transmission:

→ Fresnel Gleichungen (ebenfalls direkt aus Maxwell Gl.)

Amplitudenkoeffizienten (für Dielektrika ohne Absorption):

$$r_s = \left(\frac{E_r}{E_0} \right)_{\perp} = \frac{\bar{n}_1 \cos(\alpha) - \bar{n}_2 \cos(\beta)}{\bar{n}_1 \cos(\alpha) + \bar{n}_2 \cos(\beta)}$$

$$t_s = \left(\frac{E_t}{E_0} \right)_{\perp} = \frac{2\bar{n}_1 \cos(\alpha)}{\bar{n}_1 \cos(\alpha) + \bar{n}_2 \cos(\beta)}$$



$$r_p = \left(\frac{E_r}{E_0} \right)_{\parallel} = \frac{\bar{n}_2 \cos(\alpha) - \bar{n}_1 \cos(\beta)}{\bar{n}_2 \cos(\alpha) + \bar{n}_1 \cos(\beta)}$$

$$t_p = \left(\frac{E_t}{E_0} \right)_{\parallel} = \frac{2\bar{n}_1 \cos(\alpha)}{\bar{n}_2 \cos(\alpha) + \bar{n}_1 \cos(\beta)}$$

EM Wellen an Grenzflächen

E_{0s} , E_{rs} , E_{ts} und E_{0p} , E_{tp}

haben gleiche Phase bei gleichem Vorzeichen

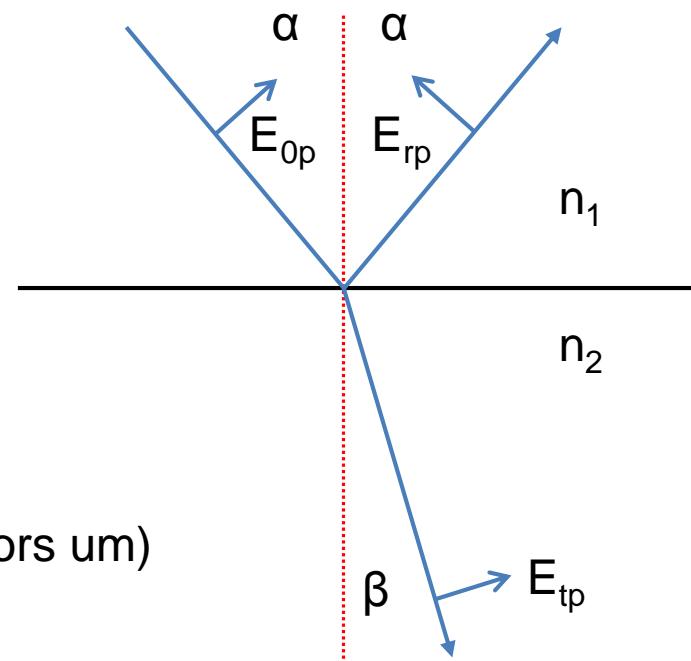
(Richtung der Vektoren wird nicht geändert)

E_{0p} , E_{rp}

haben gleiche Phase bei ungleichem Vorzeichen

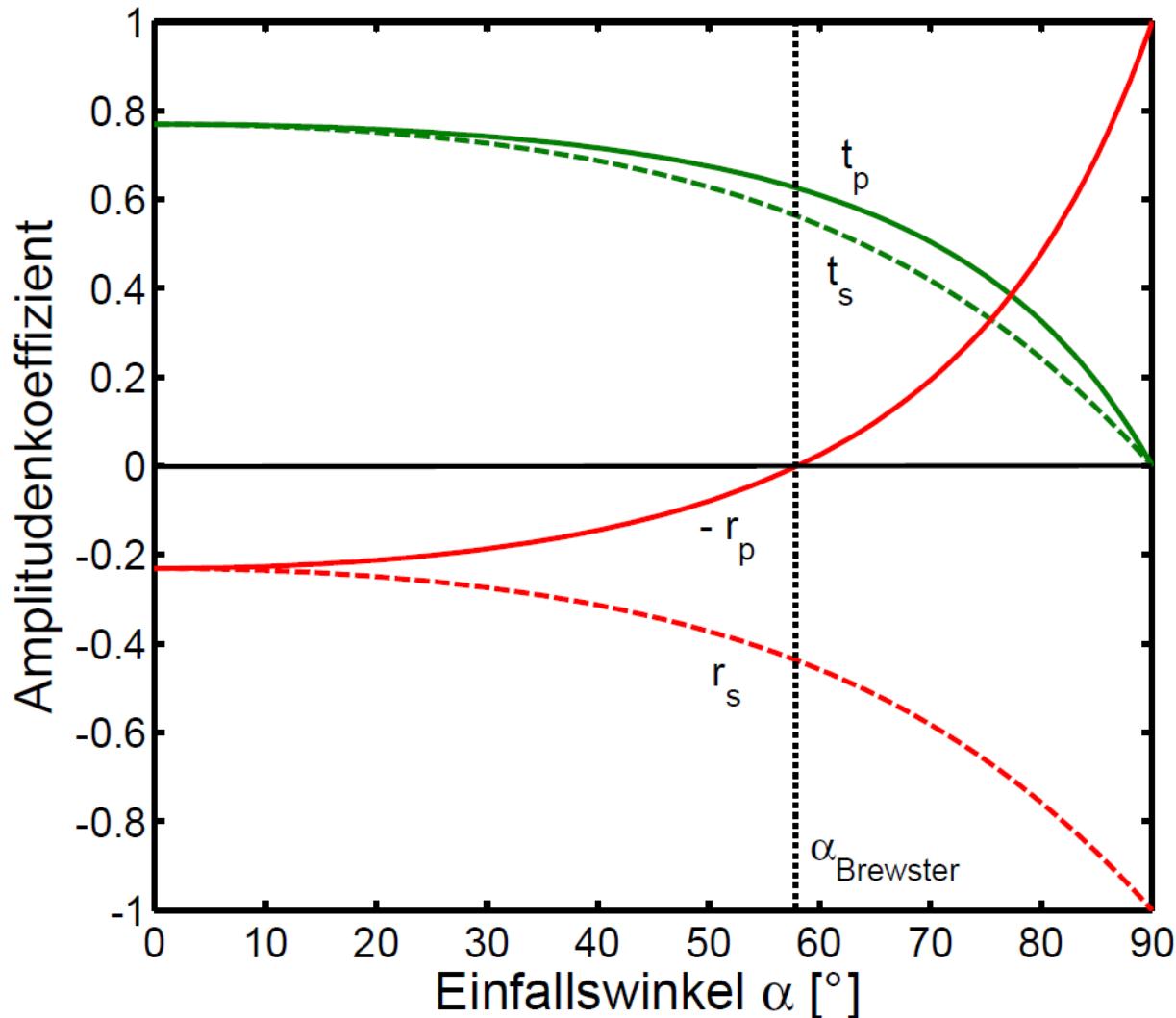
(durch Reflexion kehrt sich die Richtung des Vektors um)

→ - r_p ist im direkten Vergleich mit r_s hilfreich



EM Wellen an Grenzflächen

für $n_1 < n_2$ (hier: $n_1 = 1.0$ und $n_2 = 1.6$)

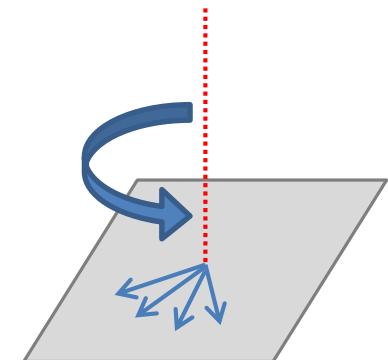


EM Wellen an Grenzflächen

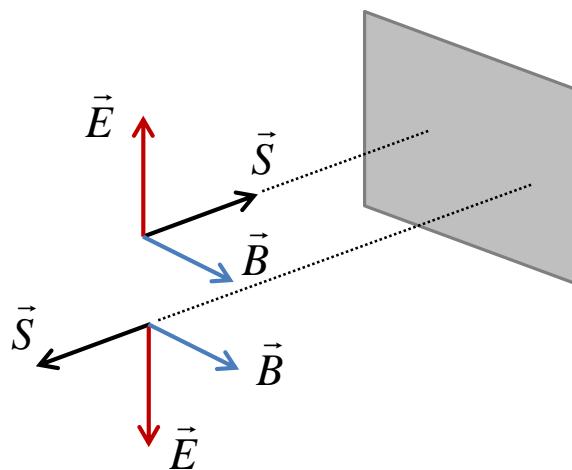
Bei senkrechtem Einfall sind s und p identisch

→ Vereinfachte Formeln:

$$r_s = \frac{\bar{n}_1 - \bar{n}_2}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} = -r_p \quad \text{und} \quad t_s = \frac{2\bar{n}_1}{\bar{n}_1 + \bar{n}_2} = t_p$$



Darstellung des Phasensprungs bei $n_2 > n_1$ anhand des Poyntingvektors:



Richtungsänderung des
Energieflusses \vec{S} bei Reflexion

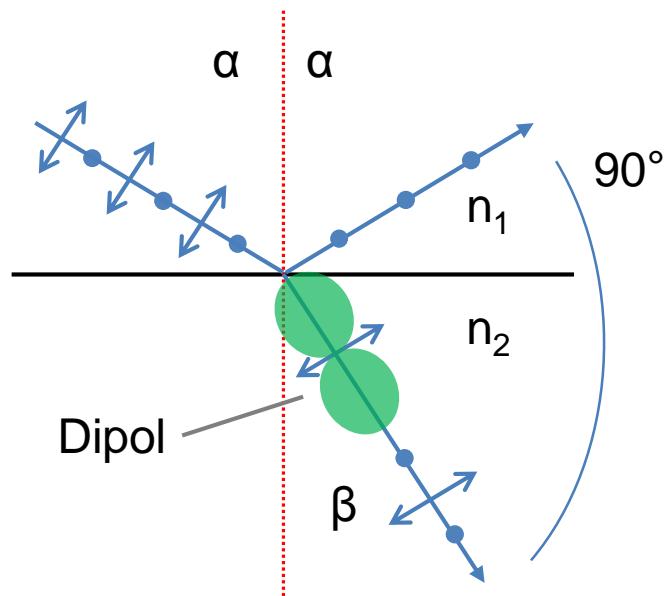
→ eine Komponente der
EM Welle muss die Phase
um π verschieben

EM Wellen an Grenzflächen

Brewsterwinkel:

- keine Reflexion für p Polarisation
- Bedingung: $\alpha + \beta = 90^\circ$

$$\rightarrow \alpha_{Brewster} = \arctan \left(\frac{\bar{n}_2}{\bar{n}_1} \right)$$



Phasenverschiebung bei Reflexion:

$$\text{für } n_1 < n_2 : \left\{ \begin{array}{l} r_s \longrightarrow \text{Phasenverschiebung um } \pi \\ -r_p \left\{ \begin{array}{l} \alpha < \alpha_{\text{Brewster}} \longrightarrow \text{Phasenverschiebung um } \pi \\ \alpha > \alpha_{\text{Brewster}} \longrightarrow \text{keine Phasenverschiebung} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

EM Wellen an Grenzflächen

Für Betrachtung von Intensitäten → Reflexions- / Transmissionsgrad

Reflexionsgrad:

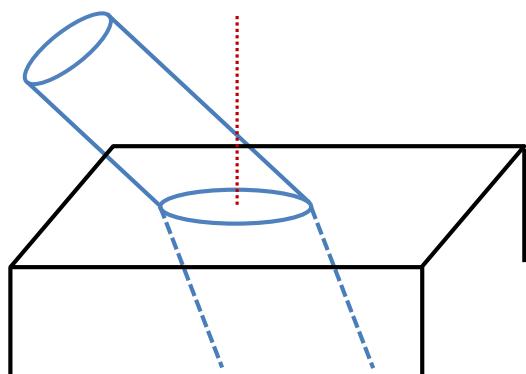
$$R_s = r_s^2$$

$$R_p = r_p^2$$

Transmissionsgrad:

Definition der Intensität !

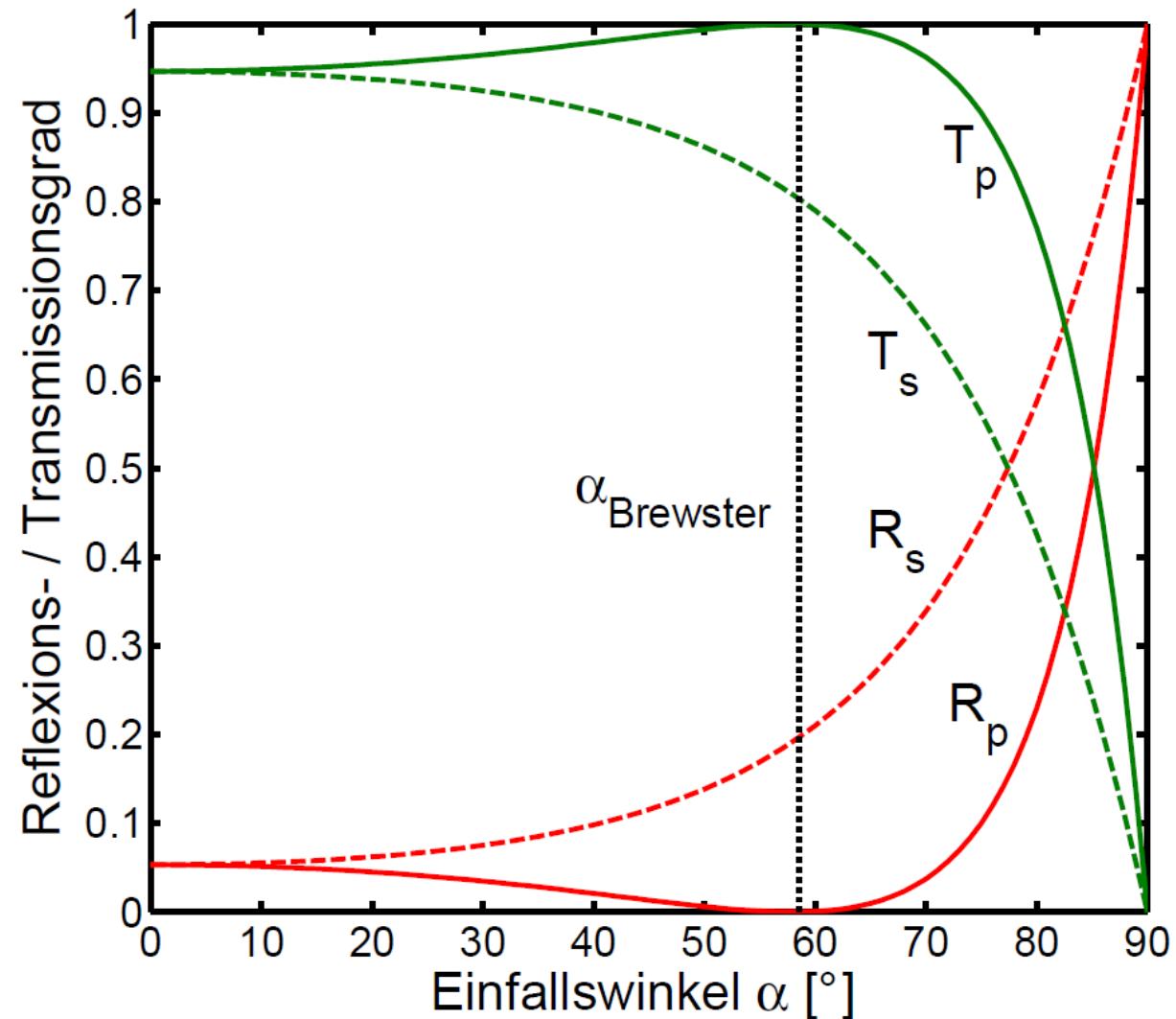
→ Einbeziehung des transmittierten Querschnitts
(geändert durch Brechung)



$$T_s = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)} t_s^2$$

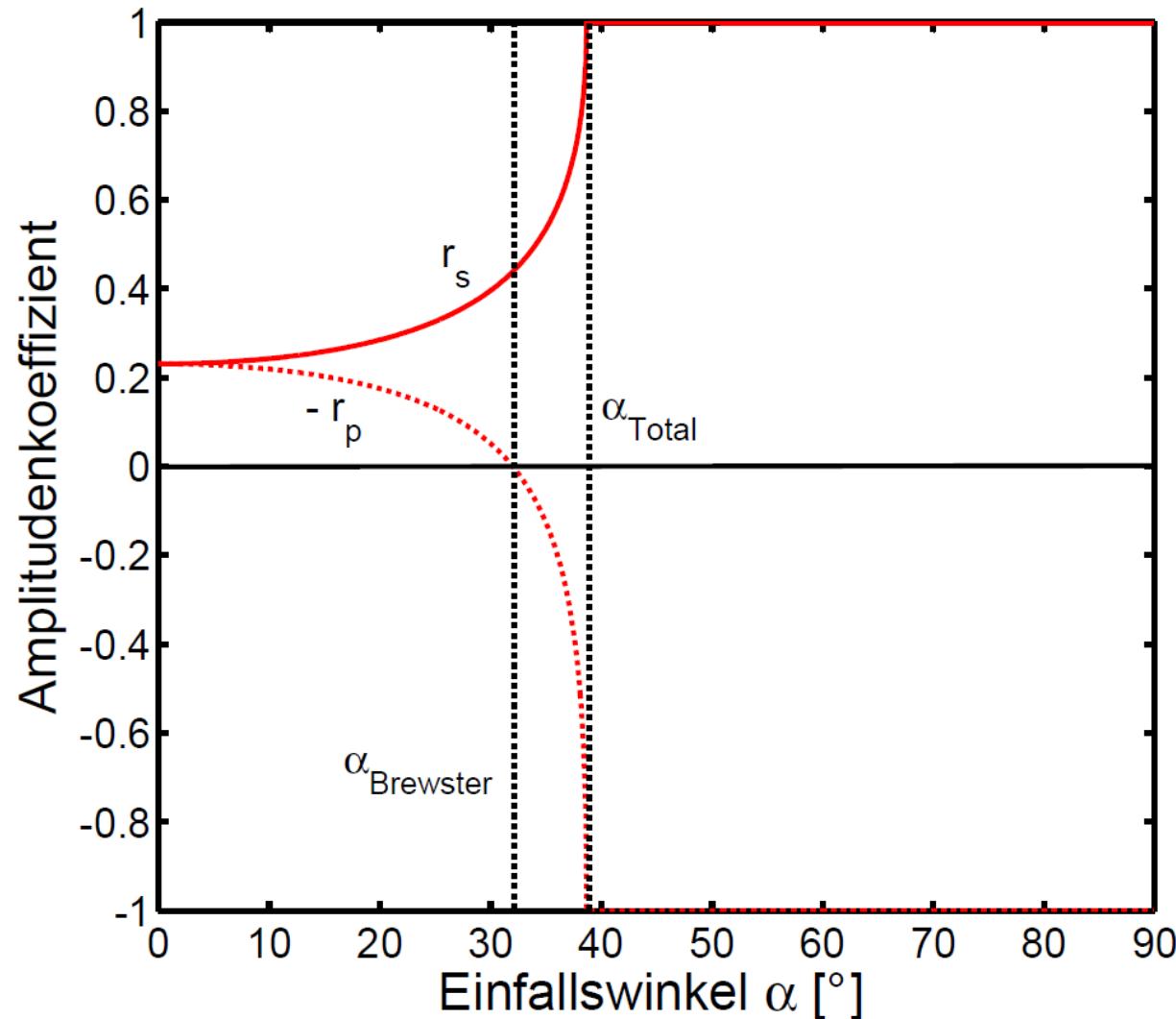
$$T_p = \frac{\tan(\alpha)}{\tan(\beta)} t_p^2$$

EM Wellen an Grenzflächen



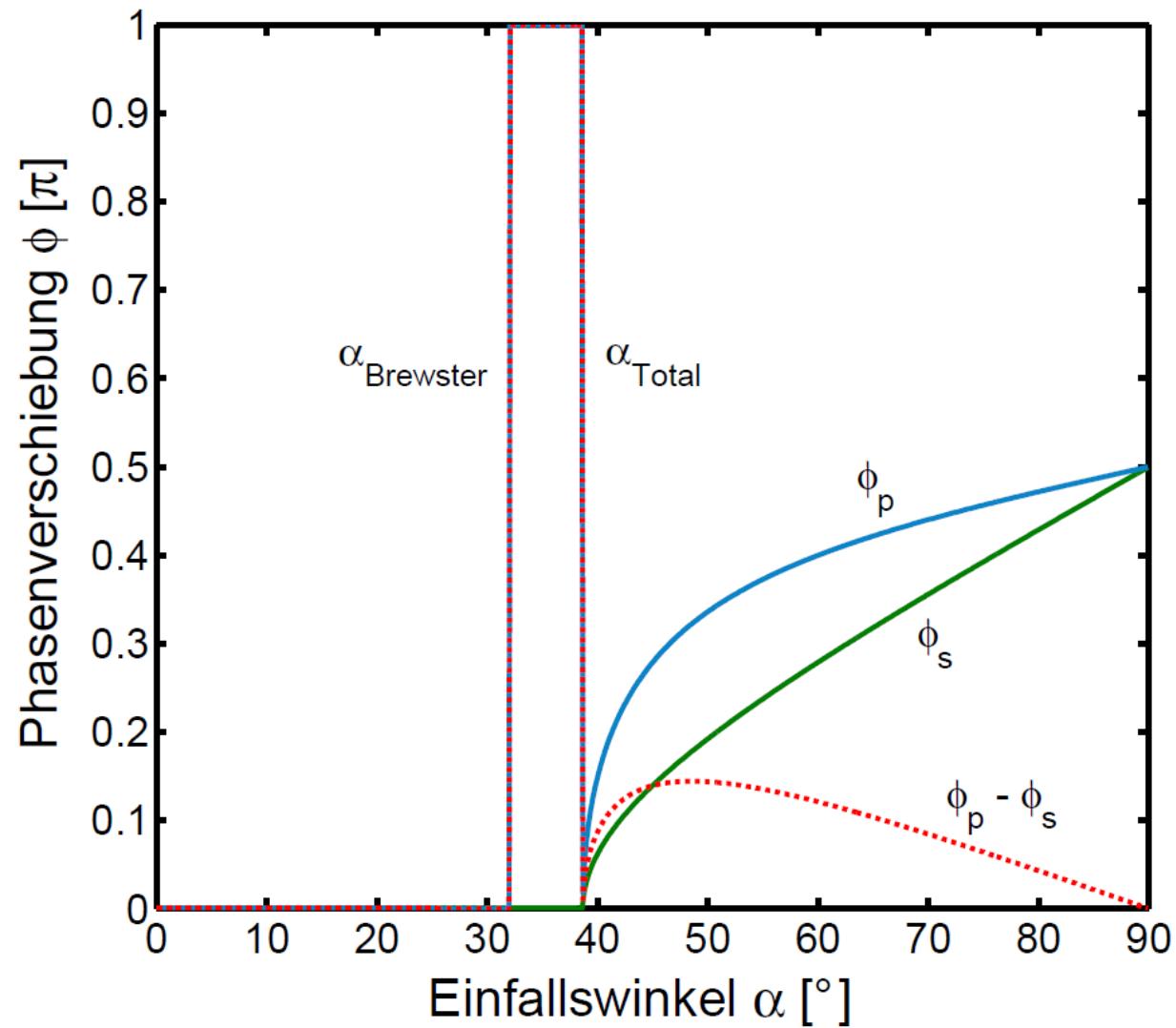
EM Wellen an Grenzflächen

für $n_1 > n_2 \rightarrow$ Totalreflexion möglich



EM Wellen an Grenzflächen

Bei Totalreflexion \longrightarrow kontinuierliche Phasenverschiebung (r_s und $-r_p$)



Polarisation von EM Wellen

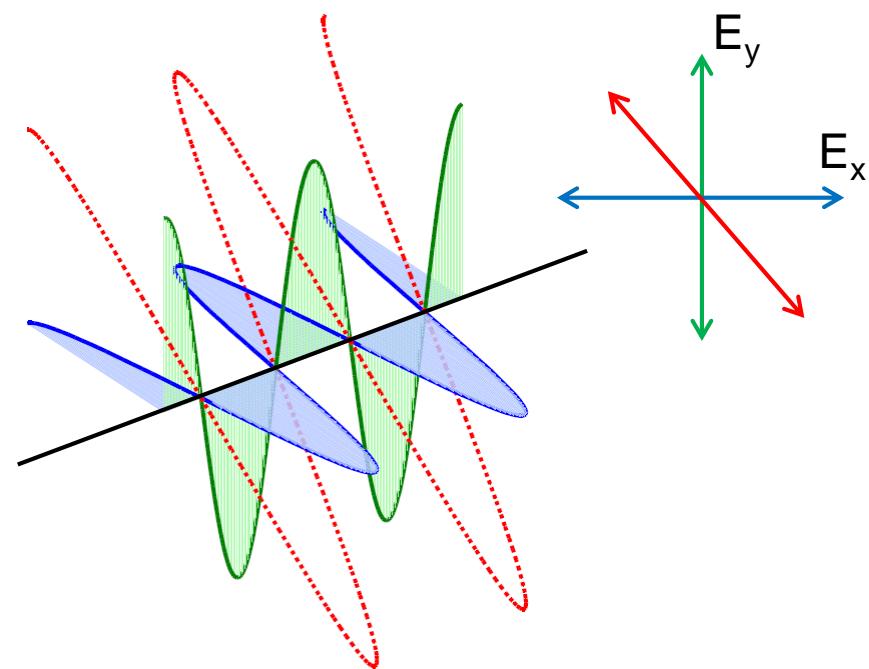
EM Wellen schwingen transversal

- Schwingungsebene
- Polarisation der Welle

kann aus zwei Komponenten E_x und E_y zusammengesetzt werden

Mehrere Zustände möglich:

- unpolarisiertes Licht
- linear polarisiertes Licht
- zirkular polarisiertes Licht (R & L)
- elliptisch polarisiertes Licht (R & L)



keiner der Zustände ist
perfekt realisierbar:

→ Polarisationsgrad

Superposition von EM Wellen

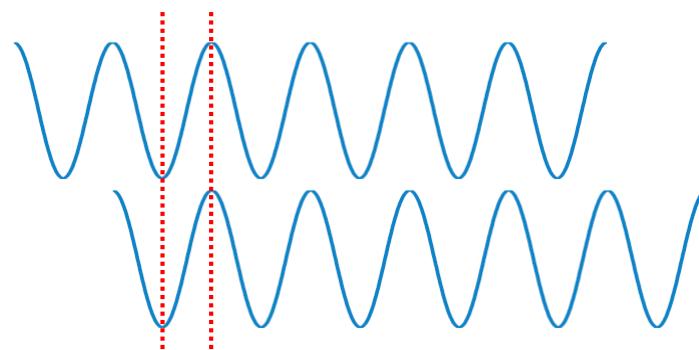
Aus den Eigenschaften der Maxwell- / Wellengleichungen folgt:

$$E_{\text{ges}} = E_1 + E_2 + \dots$$

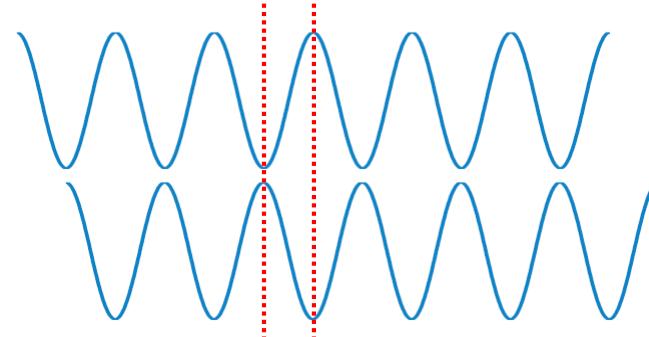
Überlagerung mehrerer Wellen + zeitliche Mittelung \longrightarrow beobachtete Intensität

Wenn $\lambda_1 = \lambda_2$ und $\text{Pol.}_1 = \text{Pol.}_2$

\longrightarrow Konstruktive Überlagerung



\longrightarrow Destruktive Überlagerung



Superposition von EM Wellen

Lineare Superposition von Wellen (1D):

Welle 1: E_1

Welle 2: E_2

Welle 3: $E_3 = E_1 + E_2$

$$\text{I: } \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_1 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_1 \quad \text{II: } \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2$$

$$\text{I + II: } \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_1 + \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_2 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_1 + \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_2$$

$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} \underbrace{(E_1 + E_2)}_{E_3} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \underbrace{(E_1 + E_2)}_{E_3}$$

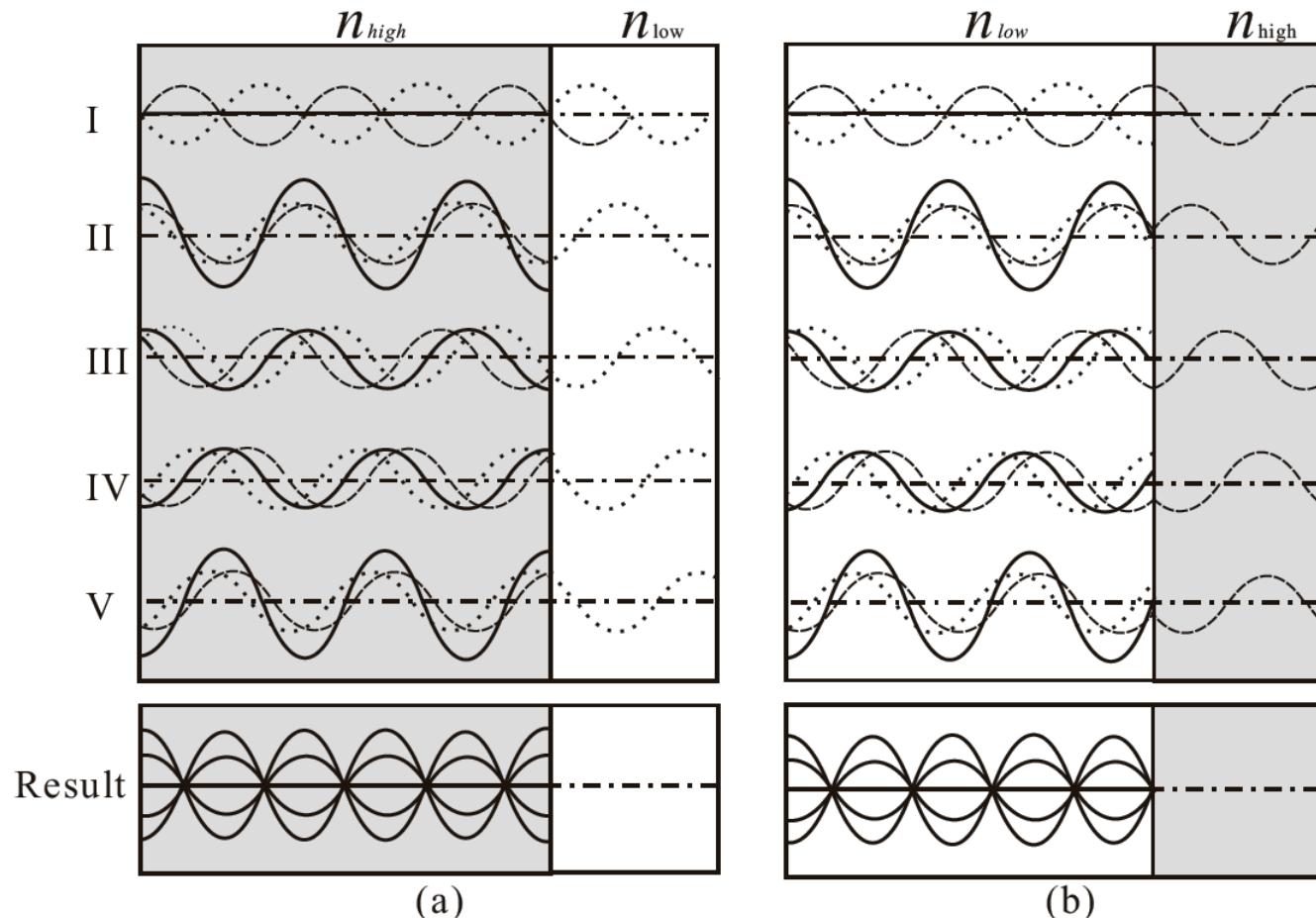
$$\rightarrow \frac{\partial^2}{\partial x^2} E_3 = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_3$$

Diese Eigenschaft ist die Basis für alle Bereiche der Wellenoptik !

Superposition von EM Wellen

Stehende Wellen / stationäre Moden

räumlich und/oder zeitlich stabile Ergebnisse von Superposition \longrightarrow Moden



nach: Gerthsen, „Physik“, Springer (1958)

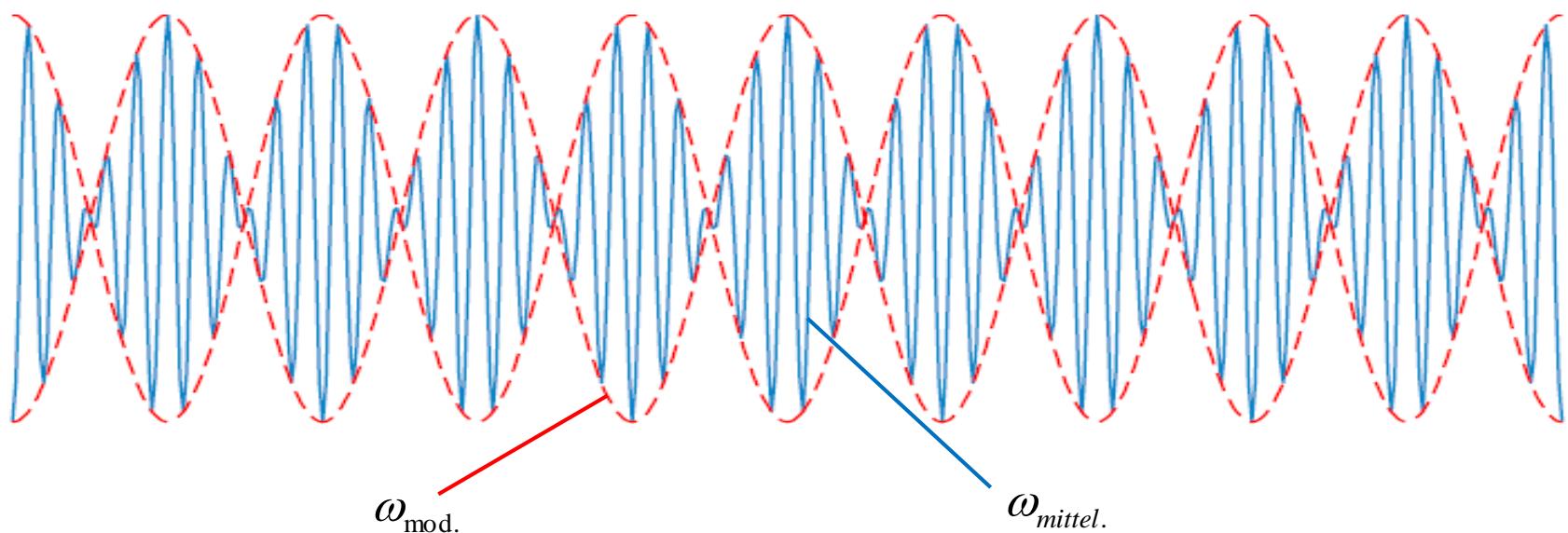
Superposition von EM Wellen

Wenn $\lambda_1 \neq \lambda_2 \longrightarrow$ Schwebungen

$$\vec{E}_1(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_1 t) \quad \vec{E}_2(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_2 t)$$

$$\longrightarrow \vec{E}_{ges}(\vec{r}, t) = 2\vec{E}_0 \cdot \cos(\vec{k}_{\text{mod.}} \cdot \vec{r} - \omega_{\text{mod.}} t) \cdot \cos(\vec{k}_{\text{mittel}} \cdot \vec{r} - \omega_{\text{mittel}} t)$$

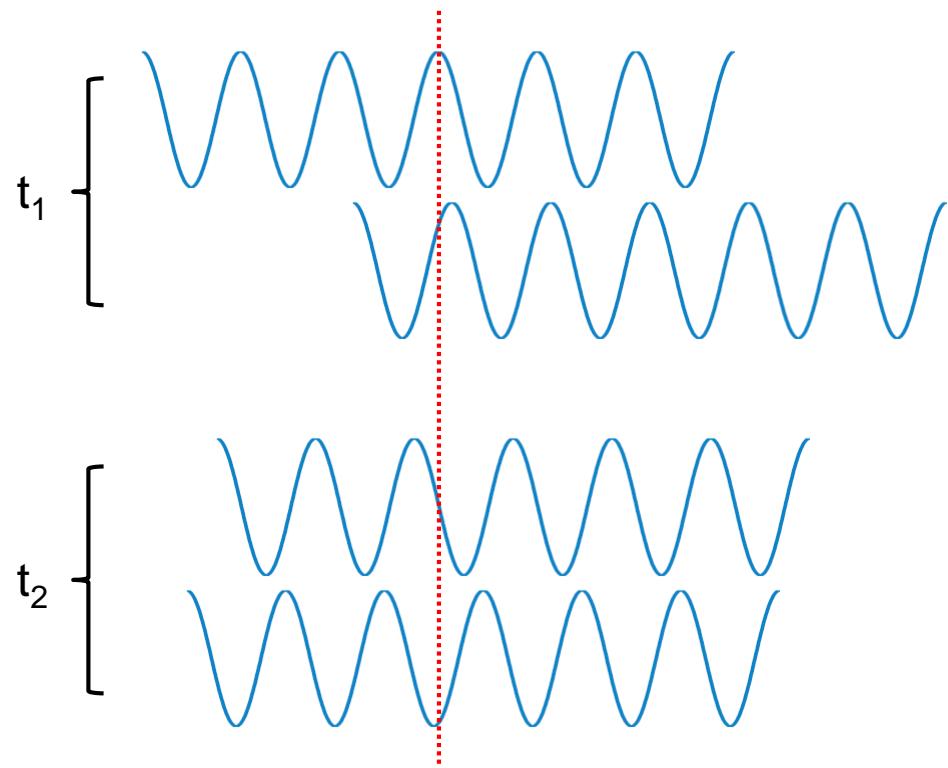
mit: $\omega_{\text{mod.}} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{2}$ und $\omega_{\text{mittel.}} = \frac{\omega_2 + \omega_1}{2}$



Kohärenz

Beobachtung von Moden:

- es besteht keine feste zeitliche und räumliche Beziehung der Phasen
→ alle Superpositionen mitteln sich zeitlich weg
- es besteht eine feste zeitliche und räumliche Beziehung der Phasen
→ Superpositionen sind immer gleich und ergeben stabilen Mode



Diese Beziehung der Phasen von Wellen wird als Kohärenz bezeichnet

Es gibt keine perfekt kohärente oder inkohärente Wellen → Kohärenzgrad

Kohärenz

- Kohärenz ist eine Eigenschaft von Wellenfeldern, basierend auf den Eigenschaften des Emissionsvorgangs
 - für genaue Beschreibung wird Quantenoptik benötigt
 - Ergebnisse sind für Wellenoptik wichtig
- da natürliche Lichtquellen keine hohen Kohärenzgrade aufweisen, wird für Untersuchungen von Superposition meist Licht einer Quelle aufgeteilt
- Aufteilung in zeitliche Kohärenz und räumlich Kohärenz oft praktisch
- genauere Behandlung folgt im Teil „Fourieroptik“
- Laser bieten die Möglichkeit mit hohen Kohärenzgraden zu arbeiten (meist aber trotzdem nur zu sich selbst → Strahlteilung)

Skalierbarkeit

Die Maxwell Gleichungen erlauben das Skalieren von Strukturen:

eine optische Struktur (z.B.) ein Gitter sei für eine Wellenlänge λ_1 optimiert

um es für eine Wellenlänge $\lambda_2 = 1.1 \cdot \lambda_1$ zu optimieren, braucht man nur das Gitter ebenfalls um den Faktor 1.1 zu skalieren

hierbei muss beachtet werden, ob die Materialeigenschaften für den Skalierungsbereich konstant bleiben

Wellenoptik

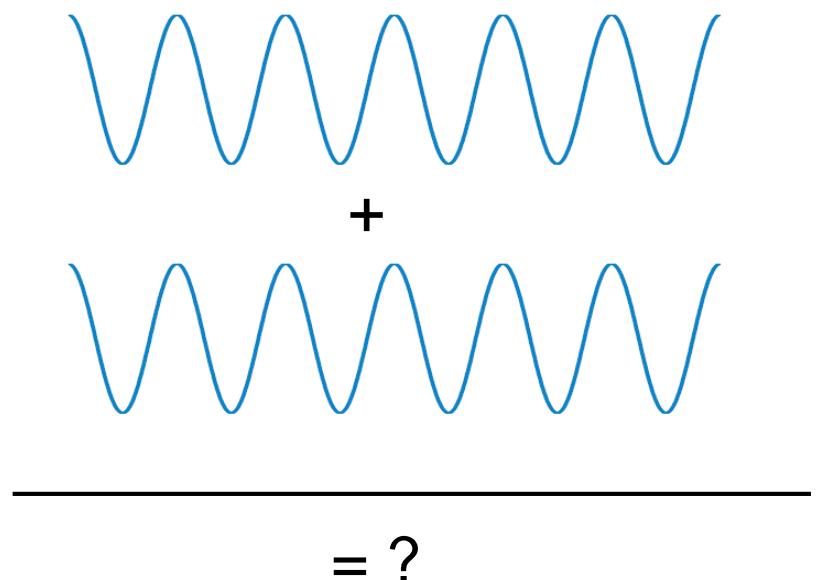
(Zweistrahlinterferenz)

Zweistrahlinterferenz

Interferenz: allgemein die Abweichung von der normale Addition der Einzelintensitäten bei Überlagerung von Wellen

Voraussetzungen:

- ausreichende Kohärenz
- gleiche Frequenz ($\omega_1 = \omega_2$)
- parallele Polarisationskomponenten



Vorgehensweise bei Superposition:

- addieren (vektoriell) der einzelnen Feldstärken
- zeitliches Mittel des Quadrats der resultierenden Feldstärke

Zweistrahlinterferenz

$$\vec{E}_{ges} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$$

$$I_{ges} = \langle (E_1 + E_2)^2 \rangle_t = \langle (E_1 \cdot \sin(\phi_1) + E_2 \cdot \sin(\phi_2))^2 \rangle_t =$$

$$= \underbrace{E_1^2 \sin^2(\phi_1)}_{I_1} + \underbrace{E_2^2 \sin^2(\phi_2)}_{I_2} + \underbrace{2E_1E_2 \sin(\phi_1)\sin(\phi_2)}_{\text{mit}}$$

$$\phi_1 = \vec{k}_1 \vec{r}_1 - \omega t + \varphi_1$$

$$\sin(\alpha) \cdot \sin(\beta) = \frac{1}{2} (\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta))$$

und

$$\phi_2 = \vec{k}_2 \vec{r}_2 - \omega t + \varphi_2$$

$$\longrightarrow \frac{1}{2} \left(\underbrace{\langle \cos(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \vec{r}_2 + \varphi_1 - \varphi_2) - \cos(\vec{k}_1 \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \vec{r}_2 - 2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \rangle_t}_{\text{nicht zeitabhängig}} \right) = 0$$

Zweistrahlinterferenz

$$I_{ges} = I_1 + I_2 + 2E_1 E_2 \frac{1}{2} \left(\underbrace{\left(\cos(\vec{k}_1 \vec{r}_1 - \vec{k}_2 \vec{r}_2 + \varphi_1 - \varphi_2) - \cos(\vec{k}_1 \vec{r}_1 + \vec{k}_2 \vec{r}_2 - 2\omega t + \varphi_1 + \varphi_2) \right)}_t \right) = 0$$

nicht zeitabhängig

mit $E = \pm \sqrt{2I}$

$$I_{ges} = I_1 + I_2 + 2 \underbrace{\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\phi)}_{\text{Interferenzterm}}$$

Phase des Interferenzterms ist nur von k und r abhängig

→ Einfluss des Gangunterschiedes zwischen
beiden Wellen unter Berücksichtigung von

$$\delta = n \cdot d$$

Zweistrahlinterferenz

Intensität verläuft abhängig von Gangunterschied zwischen :

$$I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}$$

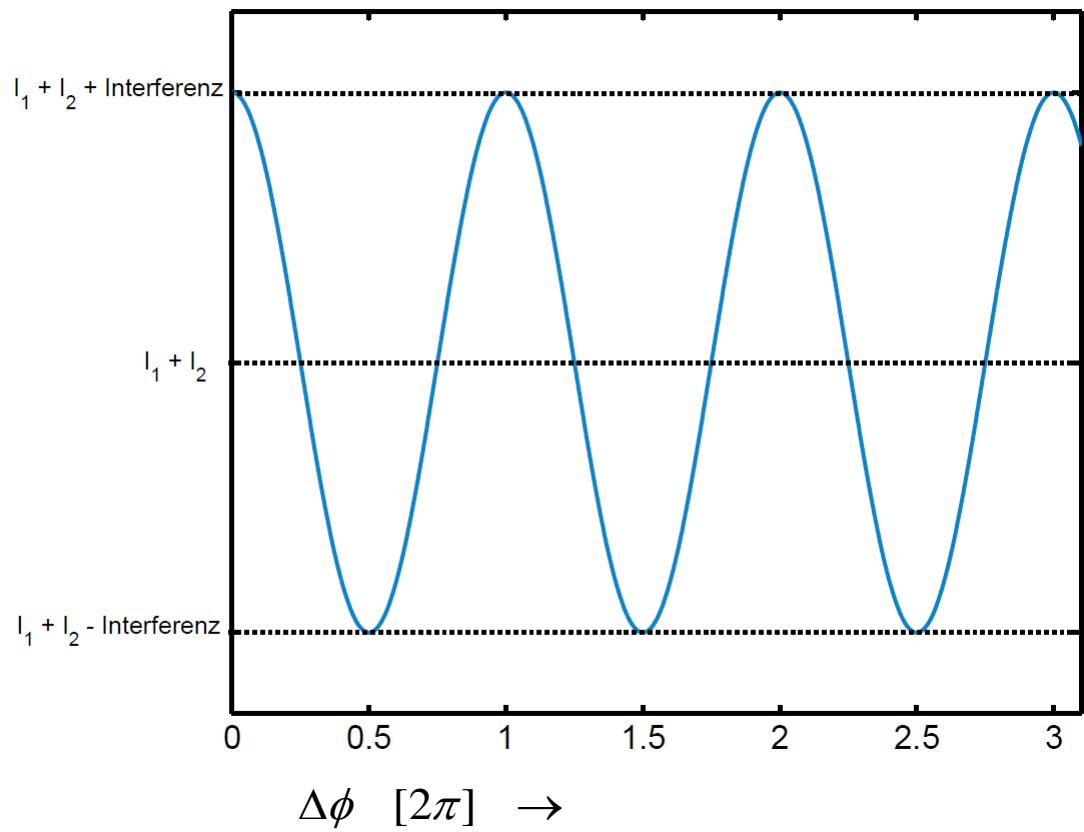
- konstruktive Interferenz
- bei Gangunterschied:

$$\Delta\phi = 2m\pi$$

$$I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2}$$

- destruktive Interferenz
- bei Gangunterschied:

$$\Delta\phi = (2m-1)\pi$$



mit $m = 1, 2, 3, 4, \dots$

Zweistrahlinterferenz

Bei $I_1 = I_2$ (also auch $E_1 = E_2$) ergibt sich der maximale Interferenzeffekt:

$$I_{\max} = 4 \cdot I \quad \text{und} \quad I_{\min} = 0 \cdot I \quad (\text{völlige Auslöschung})$$

Normalisierter Modulationskontrast des Interferogramms:

$$M = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \rightarrow 0 \dots 1$$

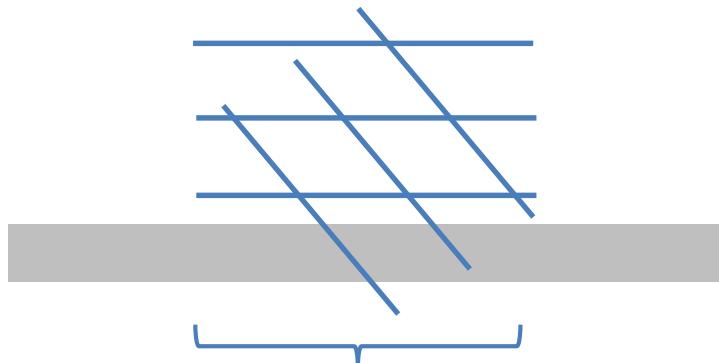
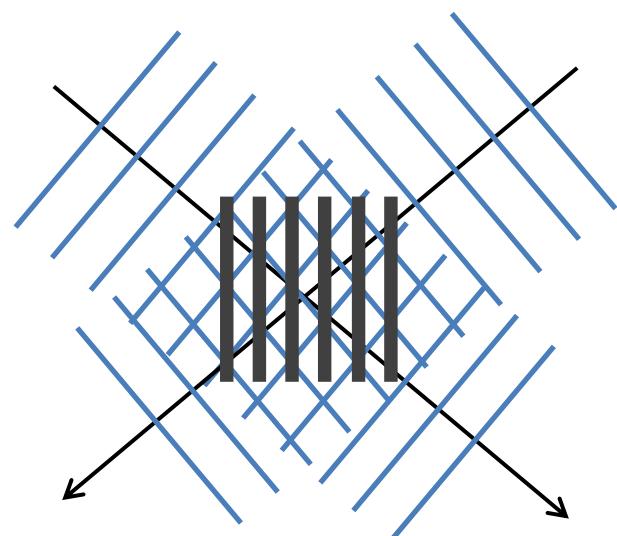
Beobachtung von Interferenz auf einem Schirm:



$$\Delta\phi \rightarrow$$

Zweistrahlinterferenz

Interferenz zweier Strahlen unter einem Winkel α

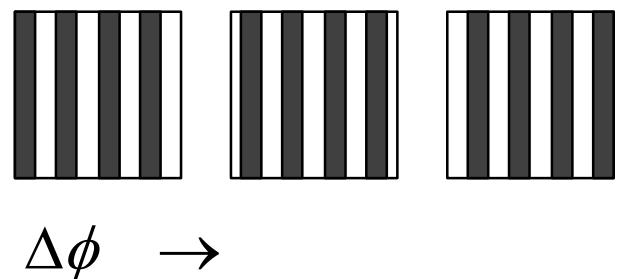


Gangunterschied variiert kontinuierlich

Ortsabhängige Änderung der Intensität → Streifenmuster

Ausrichtung parallel zur Winkelhalbierenden

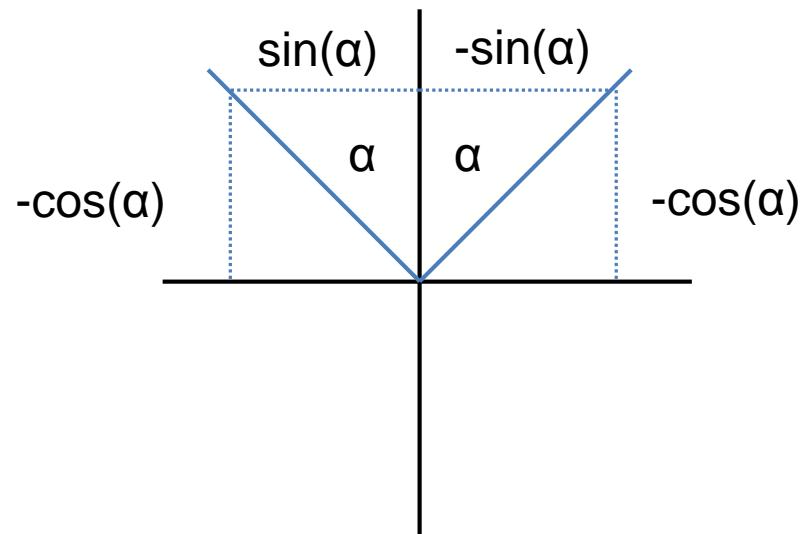
Bei Variation des Gangunterschiedes wandert die Lage des Streifenmusters



Zweistrahlinterferenz

Berechnung des Interferogramms mit Hilfe der Wellenvektoren:

$$\Delta\phi = \vec{r}(\vec{k}_1 - \vec{k}_2) + \Delta\varphi$$

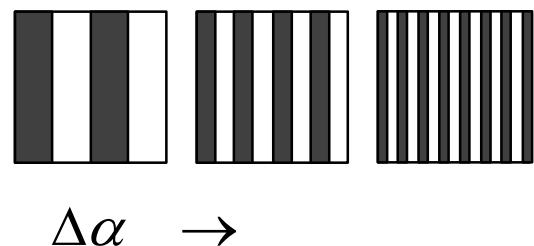


$$\Delta\phi = \vec{r} \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \left(\begin{pmatrix} \sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -\sin(\alpha) \\ -\cos(\alpha) \end{pmatrix} \right) = r_x \cdot \frac{2\pi}{\lambda} 2 \cdot \sin(\alpha)$$

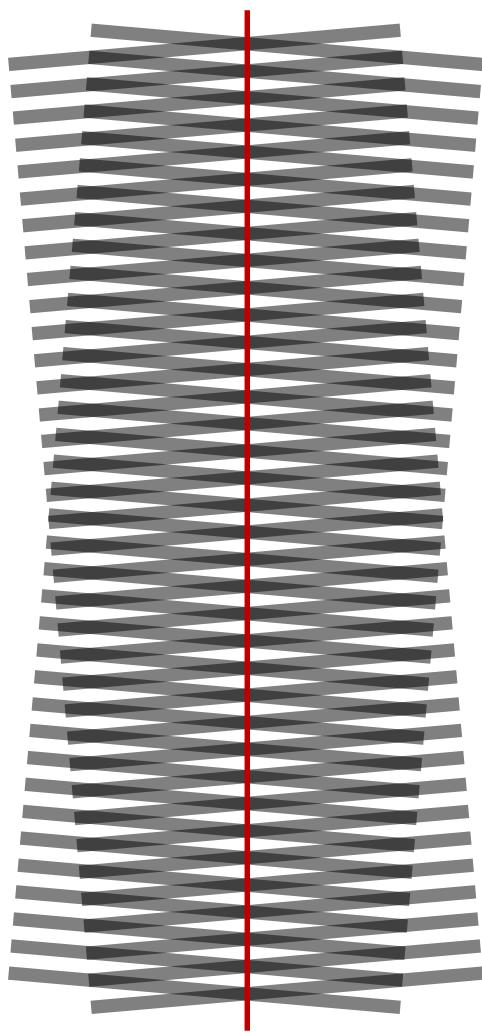
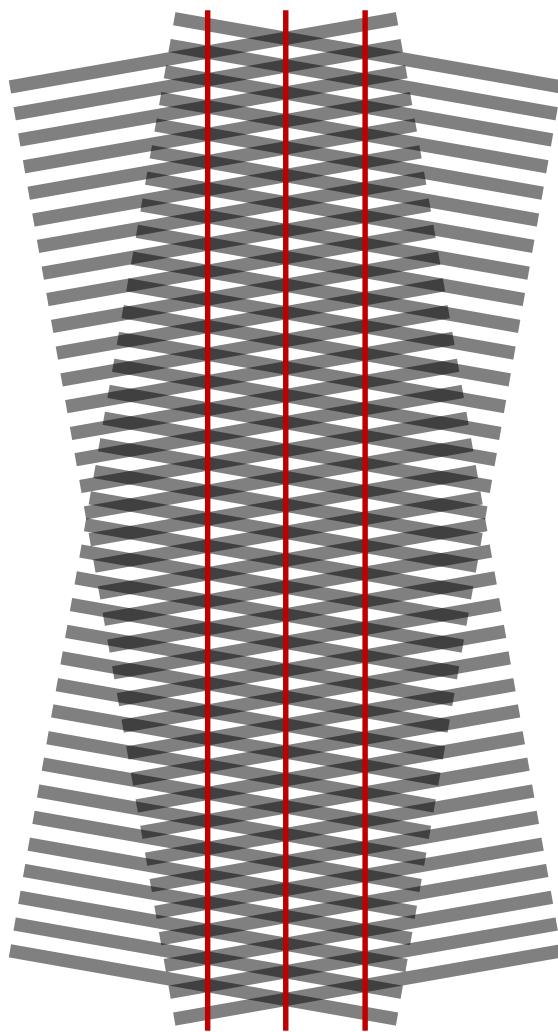
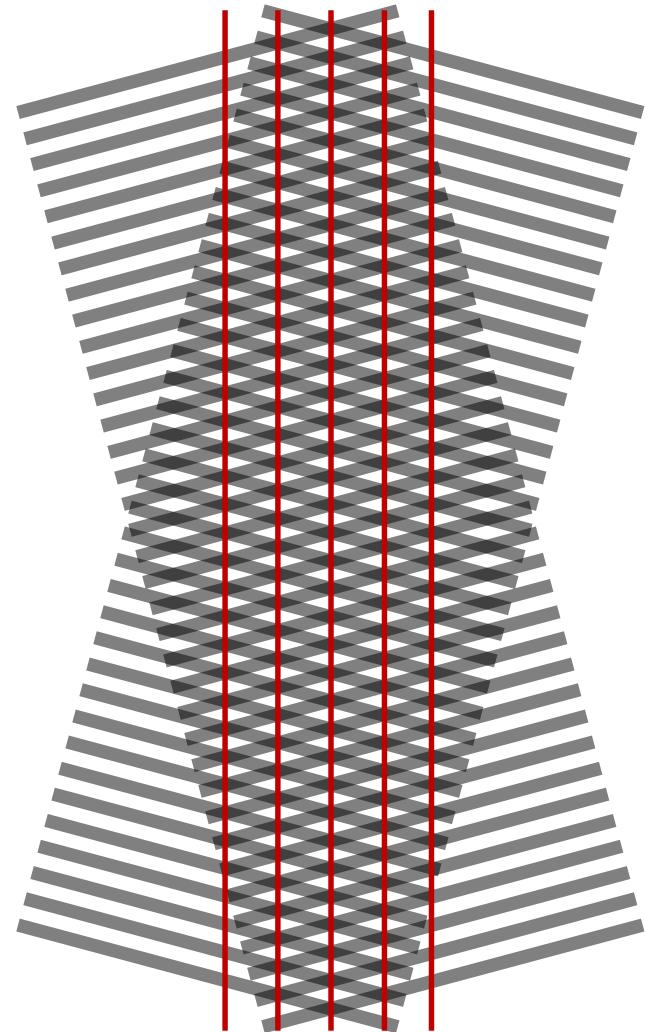
Variation der Periode P des Streifenmusters:

α ist klein \longrightarrow P wird groß

α ist groß \longrightarrow P wird klein



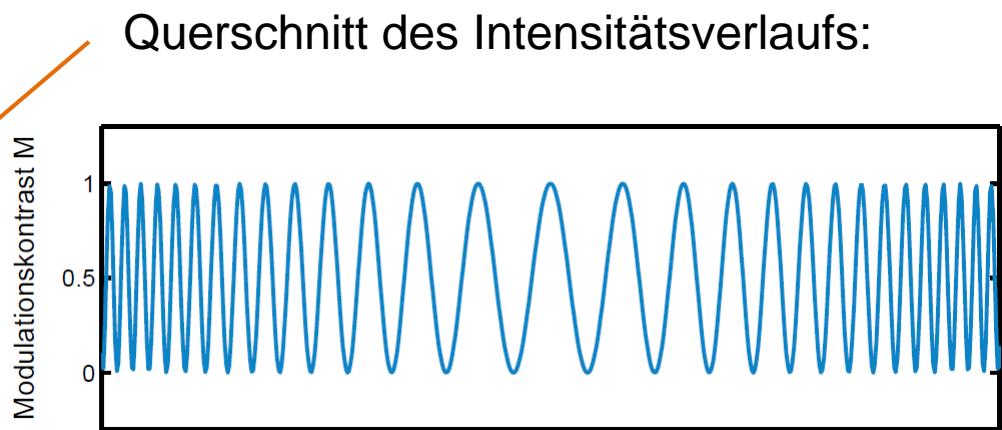
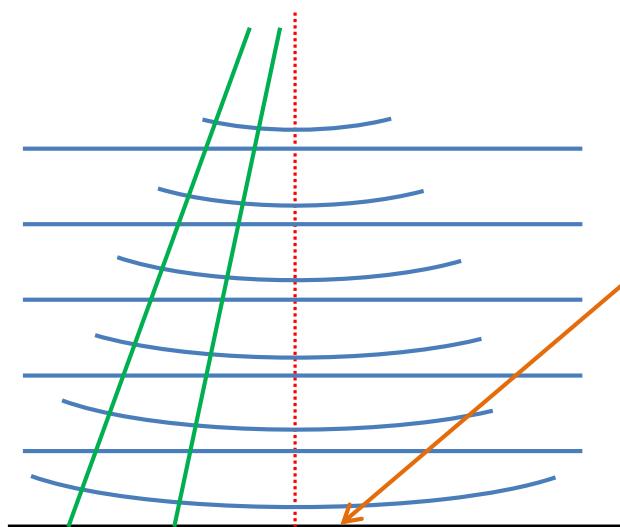
Zweistrahlinterferenz - Moiré

 10°  20°  30°

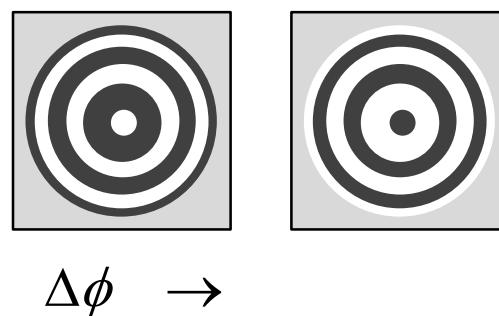
Zweistrahlinterferenz

Interferenz von ebener und Kugelwelle

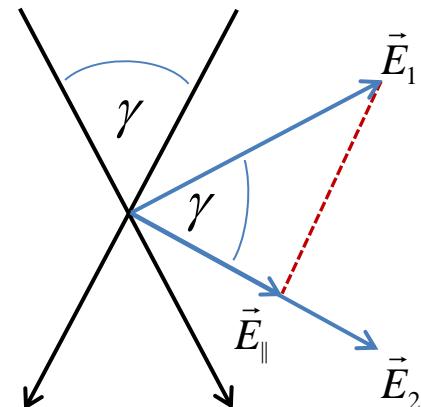
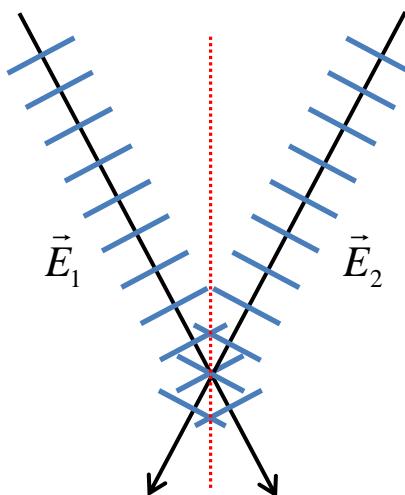
Winkel zwischen Wellen ändert sich kontinuierlich in Abhängigkeit des Ortes



- Kreisförmiges Streifenmuster
- Streifen wandern für unterschiedliche Gangunterschiede von innen nach außen



Interferenz und Polarisation



$$|\vec{E}_{\parallel}| = \vec{E}_1 \cdot \vec{E}_2 \xrightarrow{\text{blue arrow}} |\vec{E}_{\parallel}| = |\vec{E}| \cdot \cos(\gamma)$$

Nur parallel polarisierte Anteile der Wellen können interferieren

Bei p-Polarisation nehmen diese mit zunehmenden Winkel γ ab

$$I_{ges} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_{1\parallel} I_{2\parallel}} \cos(\Delta\phi)$$

Interferenz und Polarisation

$$I_{ges} = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_{1\parallel} I_{2\parallel}} \cos(\Delta\phi)$$

↓

$$I_1 \cos^2(\gamma) \cdot I_2 \cos^2(\gamma)$$

für z.B. $\gamma=35^\circ$

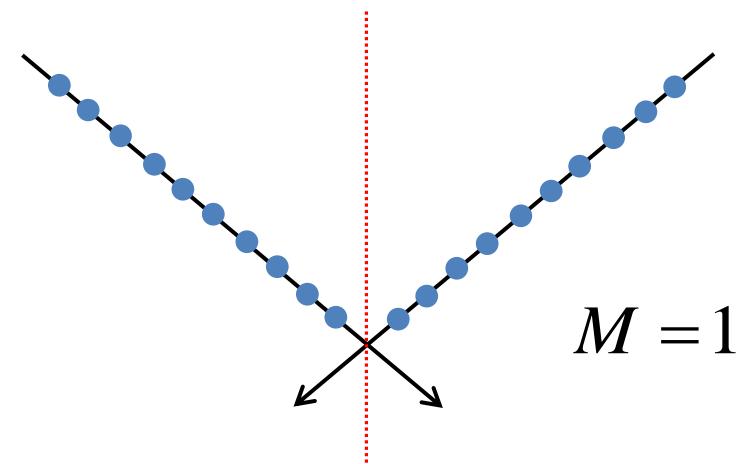
wenn $|E_1|=|E_2|$

→ Verwendung von s-polarisierten Wellen vorteilhaft

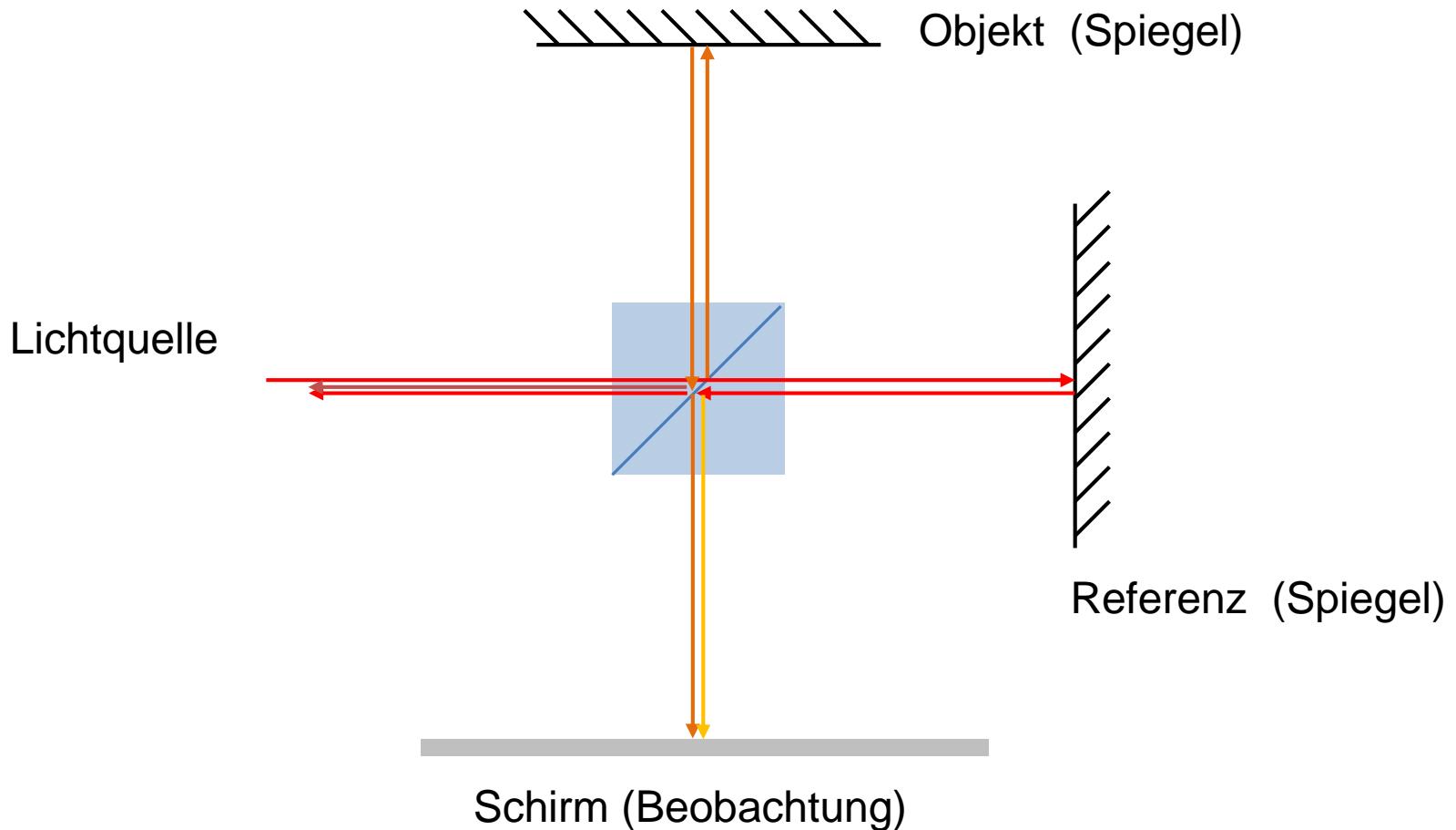
→ $I_{ges} = 2 \cdot I \pm 2 \cdot 0.67 \cdot I$

und

$$M = 0.67$$



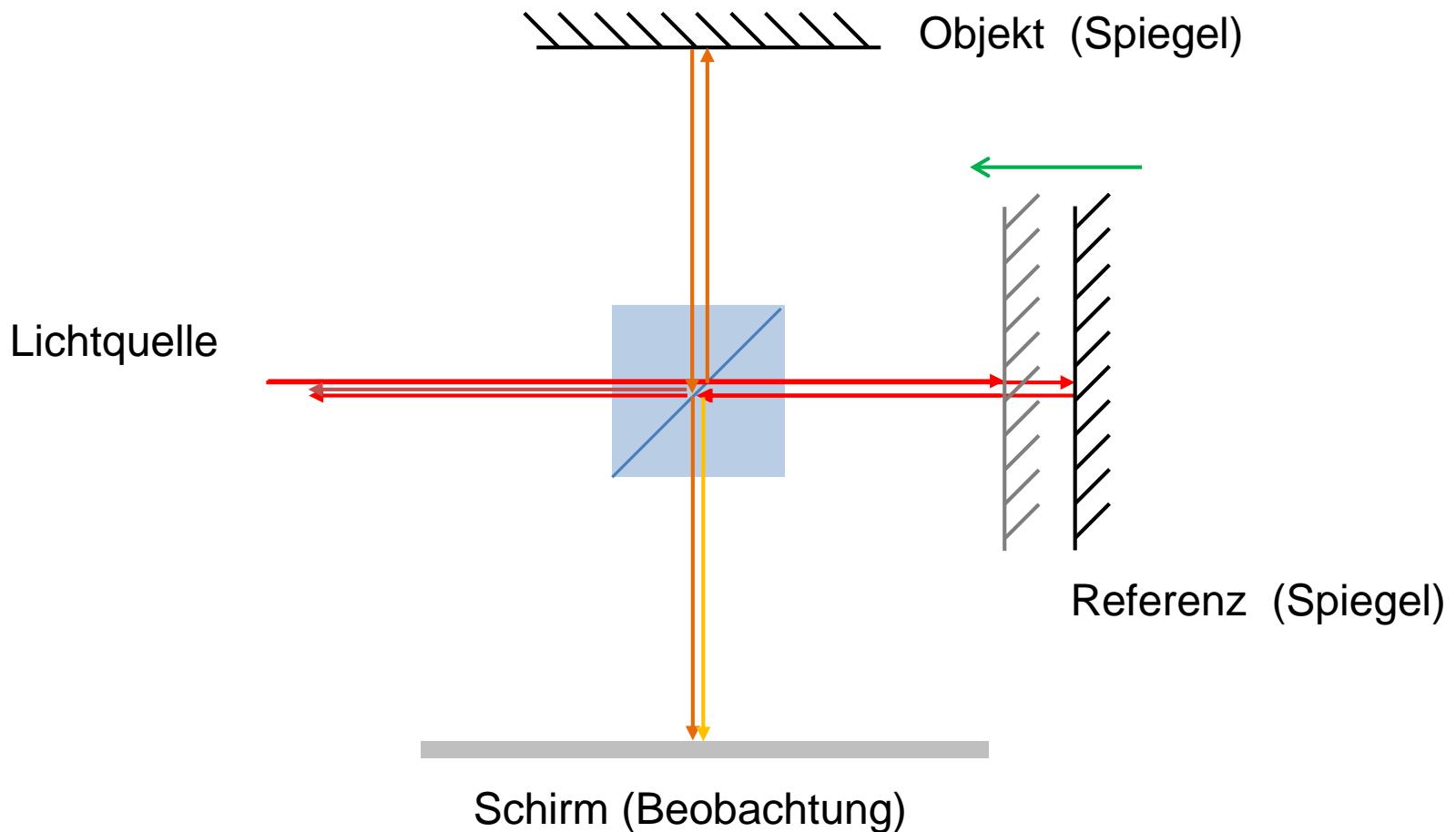
Michelson Interferometer



Aufteilung der Welle und anschließende Zusammenführung nach passieren unterschiedlicher Interferometerarme \longrightarrow Gangunterschied

Zweiter Ausgang (Energieerhalt !)

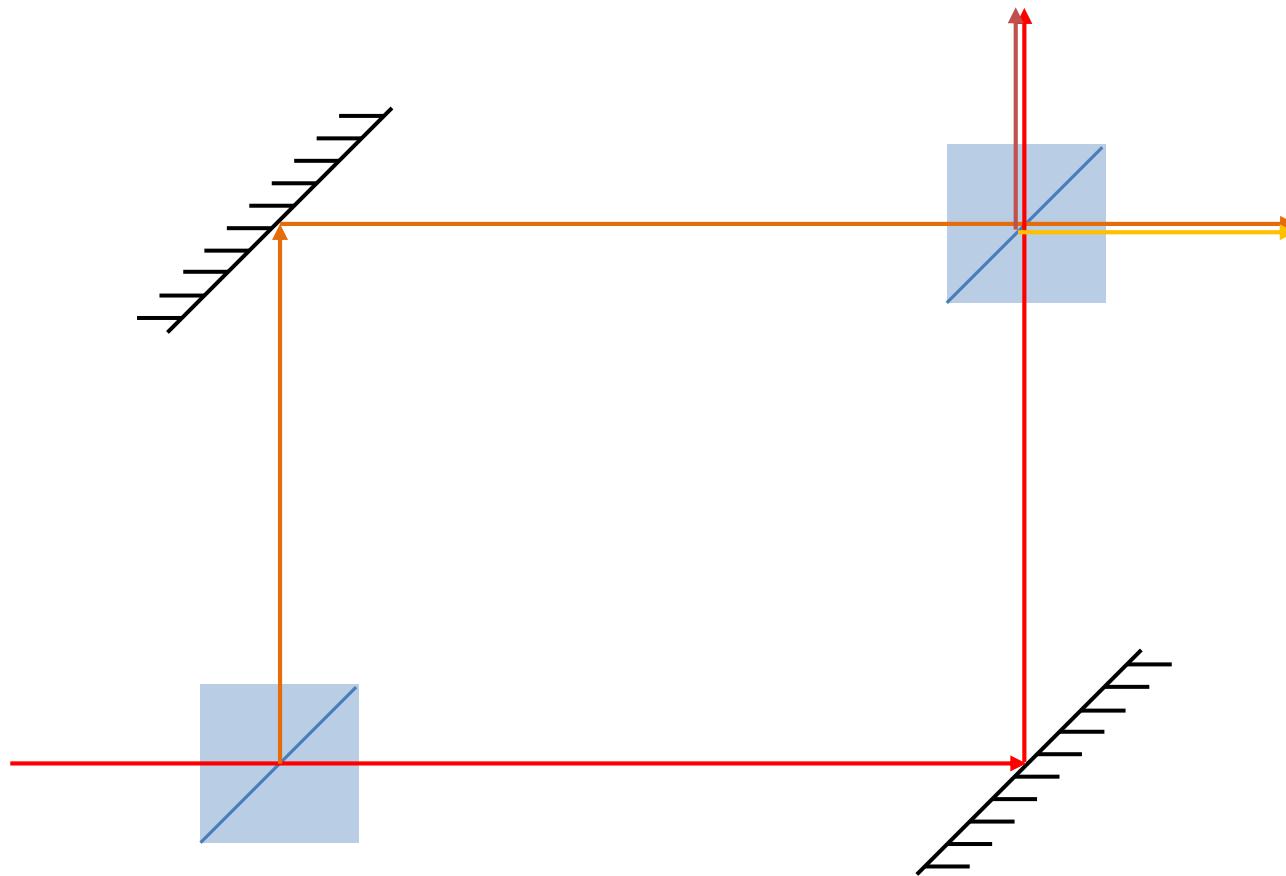
Michelson Interferometer



Wellen laufen zweimal durch den Interferometerarm (Reflexion)

→ Gangunterschied = $2 \times$ optischer Weglängenunterschied!

Mach-Zehnder Interferometer

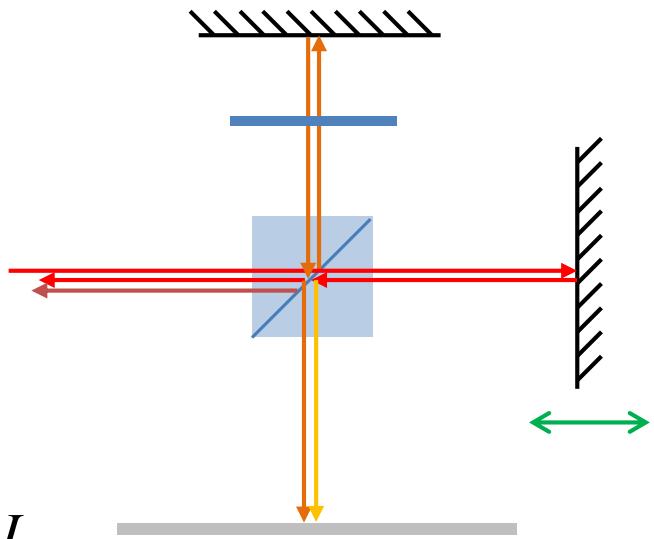


Wellen laufen nur einmal durch Interferometerarme

Zweiter Ausgang (Energieerhalt !)

Beispiel Michelson Interferometer

Die Dicke eines dünnen Glasblättchen soll mit einem Michelseninterferometer bestimmt werden. Die Beiden Armlängen sind zuerst abgeglichen ($\delta=0$), bei Einfügen des Glasblättchens werden 20 Hell-/Dunkel-Wechsel beobachtet. $n_{\text{Glas}}=1.46$, $\lambda=633 \text{ nm}$



Verschiebung L bewirkt Gangunterschied $\delta = 2L$

Ein Hell-Dunkel-Wechsel entspricht $\phi = 2m\pi = \vec{k} m \lambda = \vec{k} \Delta \vec{r}$

Gangunterschied: $\Delta \vec{r} = \delta = 2\bar{n}_1 d_1 - 2\bar{n}_2 d_2$

Dicke des Glasblättchens:

$$\delta = m\lambda = 2\bar{n}_{\text{Glas}} d_{\text{Glas}} - 2\bar{n}_{\text{Luft}} d_{\text{Glas}}$$

$$d_{\text{Glas}} = \frac{m\lambda}{2(n_{\text{Glas}} - n_{\text{Luft}})} = 13.76 \mu\text{m}$$

Wellenoptik

(Mehrstrahlinterferenz)

Mehrstrahlinterferenz

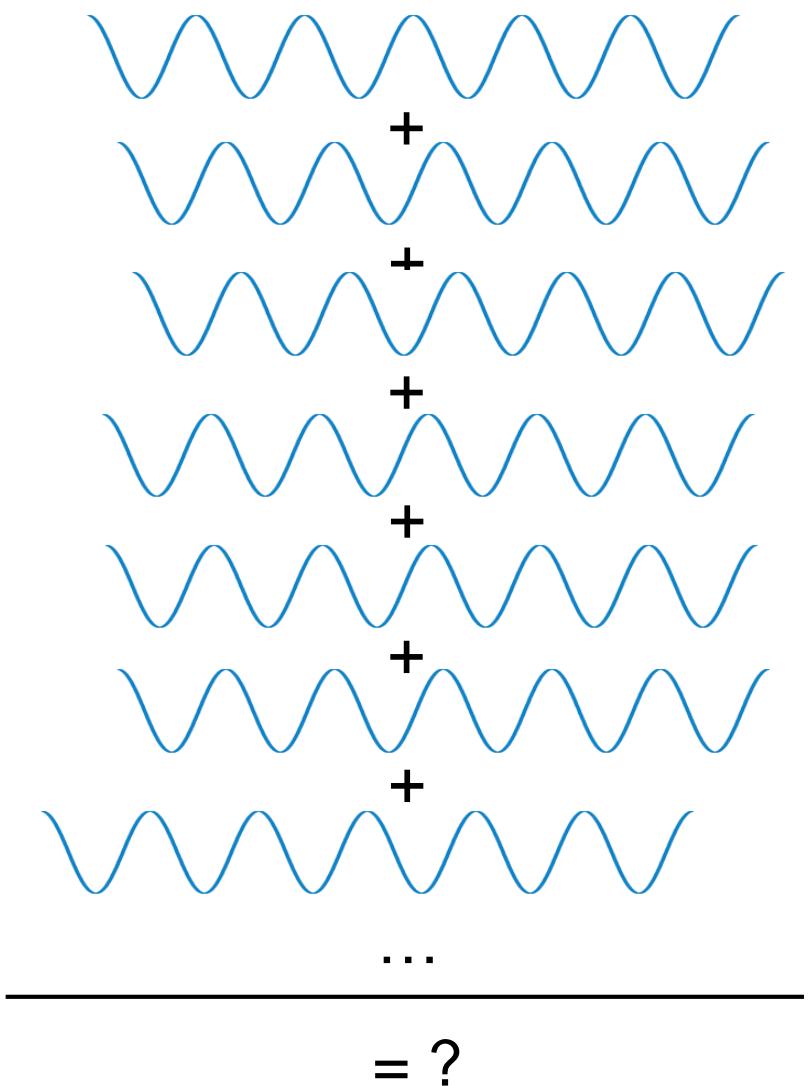
Was geschieht bei der Überlagerung von mehreren Wellen ($N > 2$)?

Gleiche Voraussetzungen:

- ausreichende Kohärenz
- gleiche Frequenz ($\omega_1 = \omega_2$)
- parallele Polarisationskomponenten

Gleiche Vorgehensweise:

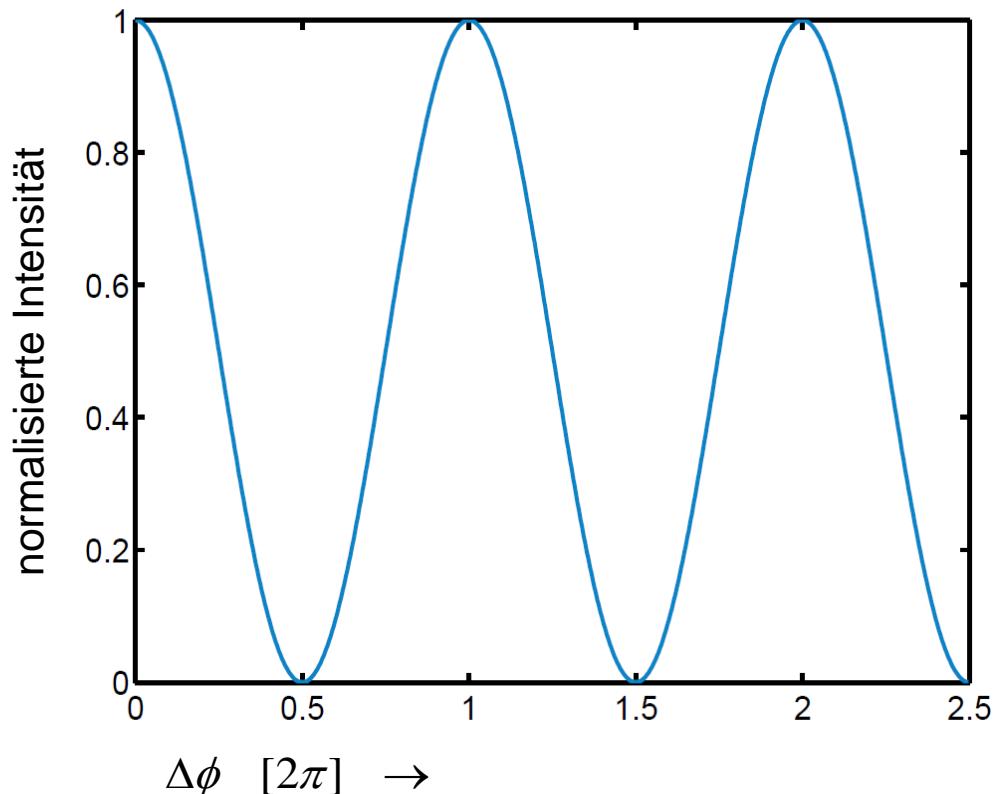
- Addition der einzelnen Feldstärken
- zeitliches Mittel des Quadrats der resultierenden Feldstärke



Mehrstrahlinterferenz

Anschauliche Erklärung:

Bekanntes Ergebnis bei
Zweistrahlinterferenz



Mehrstrahlinterferenz

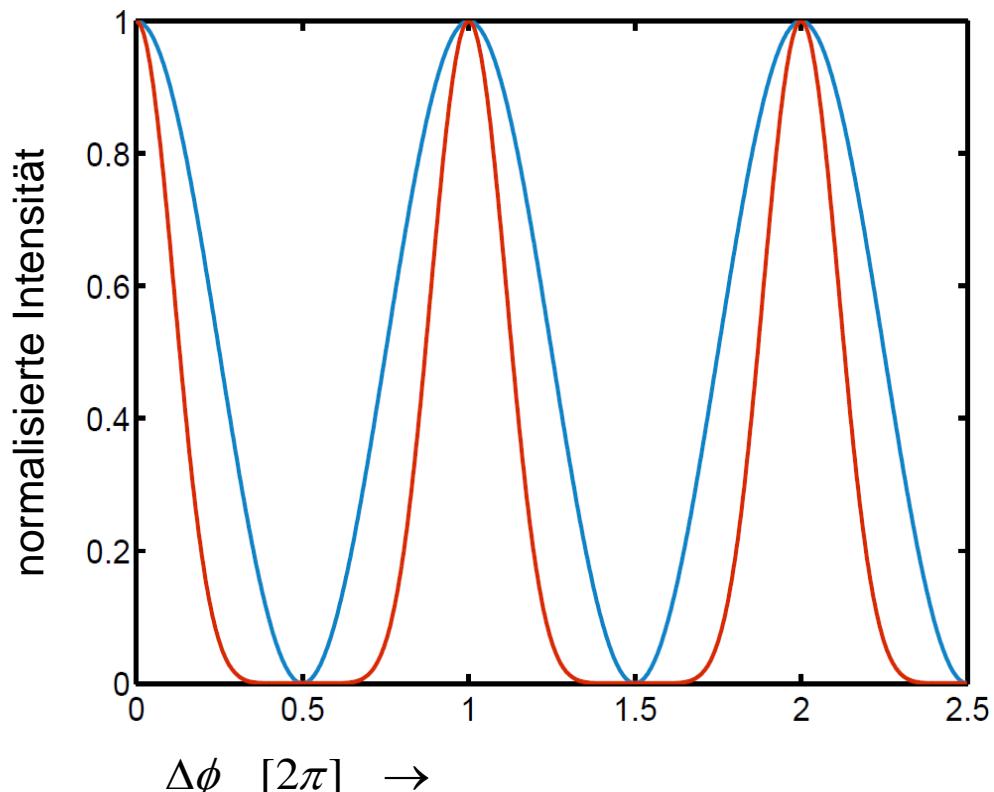
Anschauliche Erklärung:

Bekanntes Ergebnis bei
Zweistrahlinterferenz

Bei mehreren Wellen wird die
maximale Intensität nur erreicht,
wenn alle Wellen konstruktiv
interferieren

Die Maxima liegen weiterhin bei

$$\Delta\phi = m \cdot 2\pi$$



Mehrstrahlinterferenz

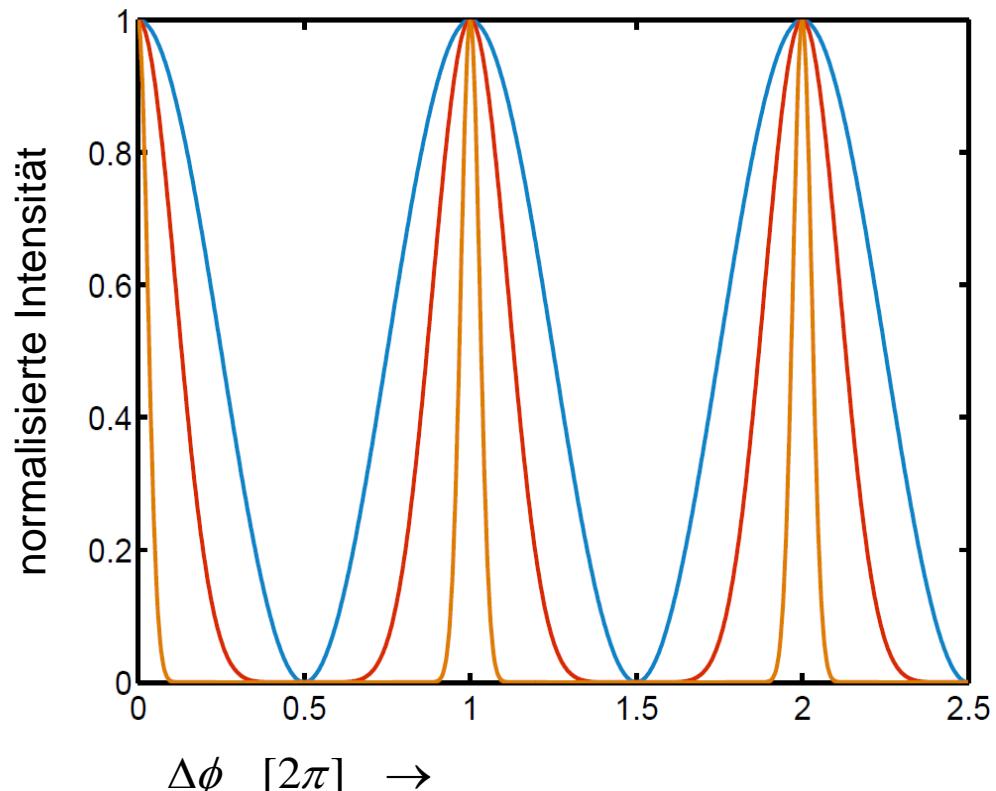
Anschauliche Erklärung:

Bekanntes Ergebnis bei
Zweistrahlinterferenz

Bei mehreren Wellen wird die
maximale Intensität nur erreicht,
wenn alle Wellen konstruktiv
interferieren

Die Maxima liegen weiterhin bei

$$\Delta\phi = m \cdot 2\pi$$



Bei steigender Anzahl von interferierenden Wellen wird der Effekt von teilweiser
oder völliger Auslöschung immer dominanter \longrightarrow Maxima werden schmäler

Mehrstrahlinterferenz

Überlagerung mehrere Wellen (vereinfacht):

- alle Einzelwellen mit gleicher Amplitude
- Wellen haben identischen Phasenversatz zueinander

verschiedene Wellen: $E_1 = E \cdot \sin(kx - \omega t)$

$$E_2 = E \cdot \sin(kx - \omega t + \Delta\phi)$$

$$E_3 = E \cdot \sin(kx - \omega t + 2 \cdot \Delta\phi)$$

⋮

$$E_N = E \cdot \sin(kx - \omega t + (N-1) \cdot \Delta\phi)$$

Berechnen von

$$E_{ges} = \sum_{m=1}^N E_m \quad \text{mit Hilfe von} \quad e^{i\varphi} = \cos(\varphi) + i \sin(\varphi)$$

Mehrstrahlinterferenz

$$E_{ges} = \operatorname{Im} \left\{ E \cdot \sum_{m=1}^N e^{i(kx - \omega t + (m-1)\Delta\phi)} \right\} = \operatorname{Im} \left\{ E \cdot \sum_{m=0}^{N-1} e^{i(kx - \omega t + m\Delta\phi)} \right\}$$

$$= \operatorname{Im} \left\{ E \cdot e^{i(kx - \omega t)} \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\Delta\phi} \right\}$$

$$\left(\sum_{m=0}^Z q^k = \frac{1-q^{Z+1}}{1-q} \quad , \quad \text{mit } q = e^{i\Delta\phi} \text{ und } k = m \right) \xleftarrow{\text{geometrische Reihe}}$$

$$\xrightarrow{\quad} \sum_{m=0}^{N-1} e^{im\Delta\phi} = \frac{1 - e^{iN\Delta\phi}}{1 - e^{i\Delta\phi}} = \frac{e^{iN\frac{\Delta\phi}{2}} \cdot \left(e^{iN\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-iN\frac{\Delta\phi}{2}} \right)}{e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} \cdot \left(e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} \right)} = e^{i\left(N\frac{\Delta\phi}{2} - \frac{\Delta\phi}{2}\right)} \cdot \frac{\left(e^{iN\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-iN\frac{\Delta\phi}{2}} \right)}{\left(e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} \right)}$$

$\xleftrightarrow{\cdot(-1)}$ $\xleftrightarrow{\cdot(-1)}$

Mehrstrahlinterferenz

Einsetzen für E_{ges}

$$E_{\text{ges}} = \text{Im} \left\{ E \cdot e^{i(kx - \omega t)} \cdot e^{i\left(N\frac{\Delta\phi}{2} - \frac{\Delta\phi}{2}\right)} \cdot \frac{\left(e^{iN\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-iN\frac{\Delta\phi}{2}} \right)}{\left(e^{i\frac{\Delta\phi}{2}} - e^{-i\frac{\Delta\phi}{2}} \right)} \right\}$$

$$\sin(x) = \frac{(e^{ix} - e^{-ix})}{2i}$$

$= 2i \cdot \sin(\dots)$

$= 2i \cdot \sin(\dots)$

$$E_{\text{ges}} = \text{Im} \left\{ E \cdot e^{i\left(kx - \omega t + (N-1)\frac{\Delta\phi}{2}\right)} \right\} \cdot \frac{\sin\left(N\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\sin\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

$= \sin(\dots)$

Mehrstrahlinterferenz

Berechnen der beobachtbaren Intensität:

$$I_{ges} \sim E^2 \underbrace{\left\langle \sin^2 \left(kx - \omega t + (N-1) \frac{\Delta\phi}{2} \right) \right\rangle_t}_{=I_0} \cdot \frac{\sin^2 \left(N \frac{\Delta\phi}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right)}$$

$$\longrightarrow I \sim I_0 \cdot \frac{\sin^2 \left(N \frac{\Delta\phi}{2} \right)}{\sin^2 \left(\frac{\Delta\phi}{2} \right)}$$

ohne Berücksichtigung von unterschiedlichen E

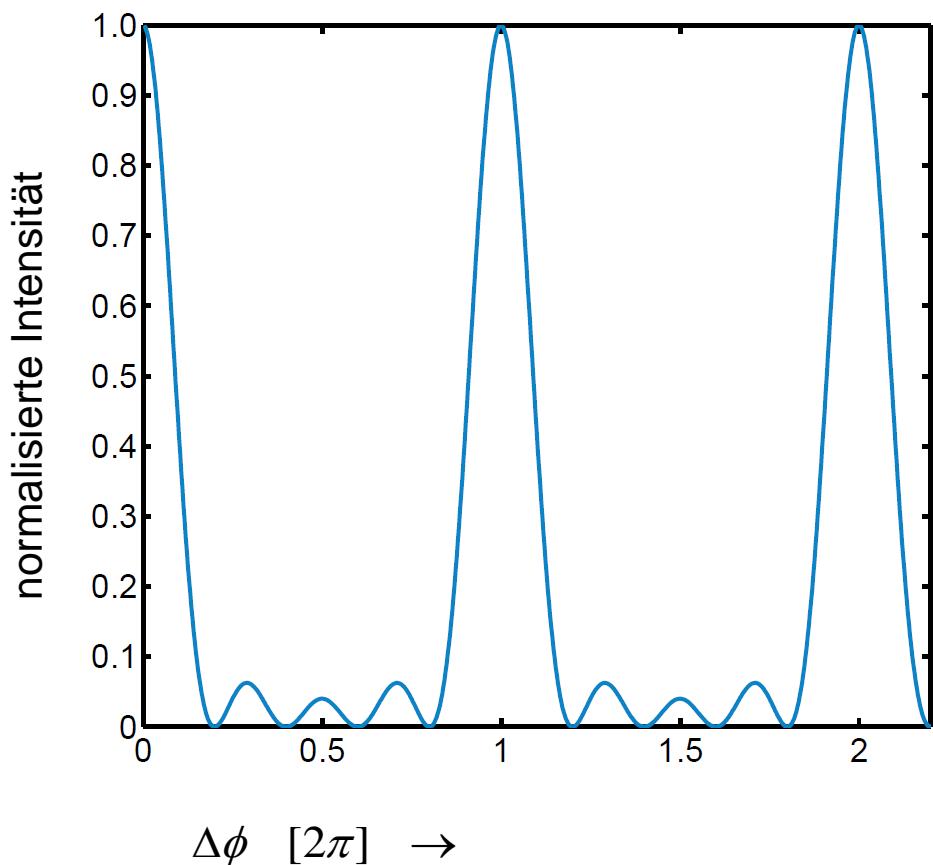
Mehrstrahlinterferenz

Vergleich mit erster Erklärung:

Maxima an gleichen Stellen

(N-2) Nebenmaxima

(N-1) Nebenminima



Mehrstrahlinterferenz

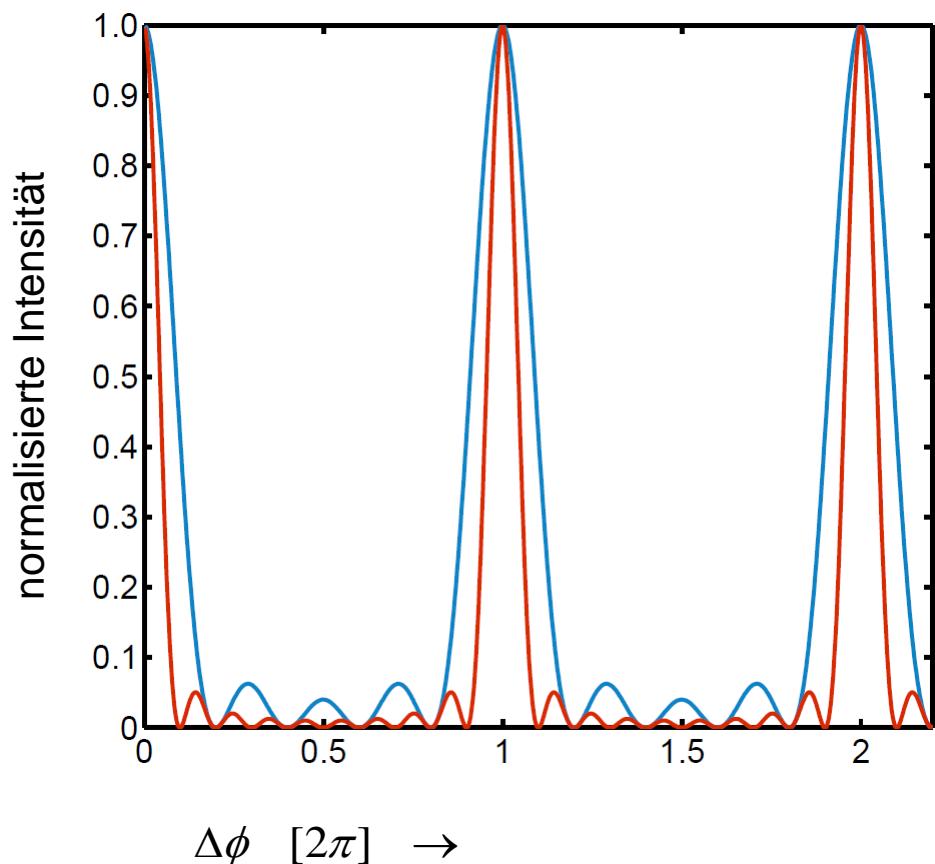
Vergleich mit erster Erklärung:

Maxima an gleichen Stellen

(N-2) Nebenmaxima

(N-1) Nebenminima

Maxima werden bei zunehmender Anzahl von interferierenden Wellen schmäler



Mehrstrahlinterferenz

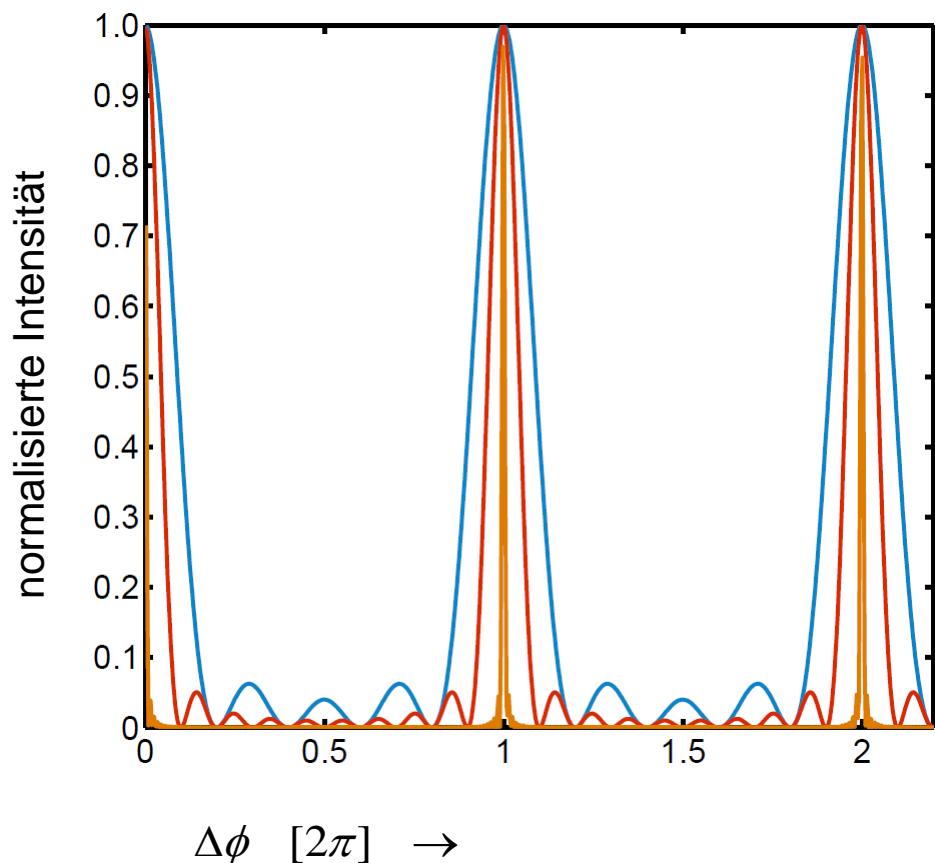
Vergleich mit erster Erklärung:

Maxima an gleichen Stellen

(N-2) Nebenmaxima

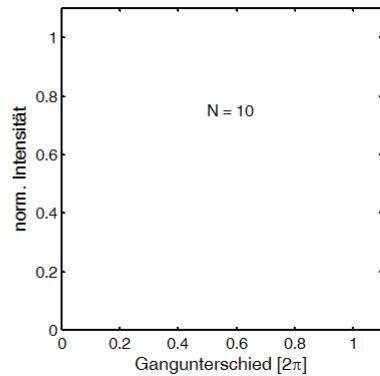
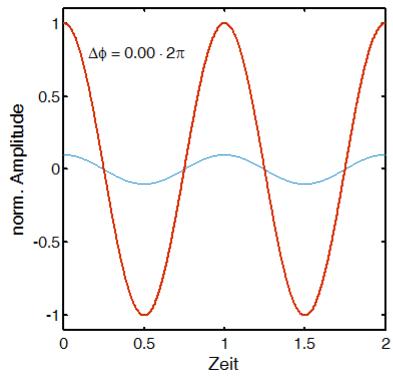
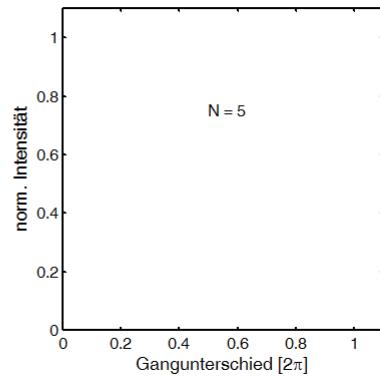
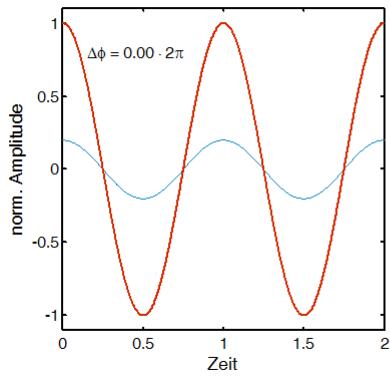
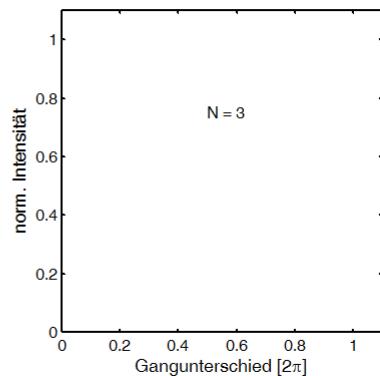
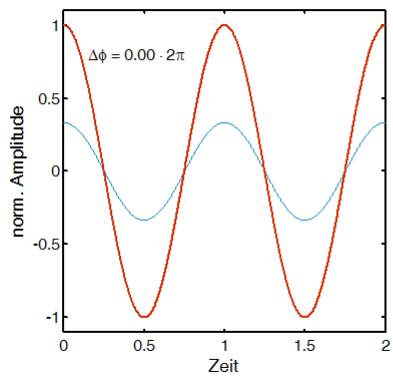
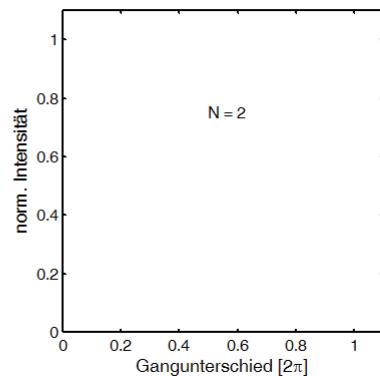
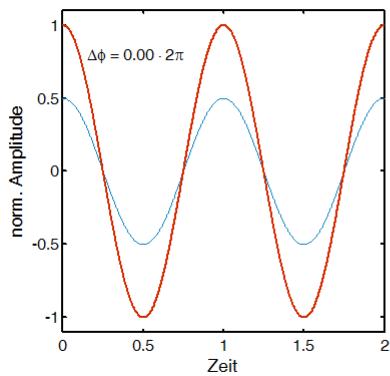
(N-1) Nebenminima

Maxima werden bei zunehmender Anzahl von interferierenden Wellen schmäler

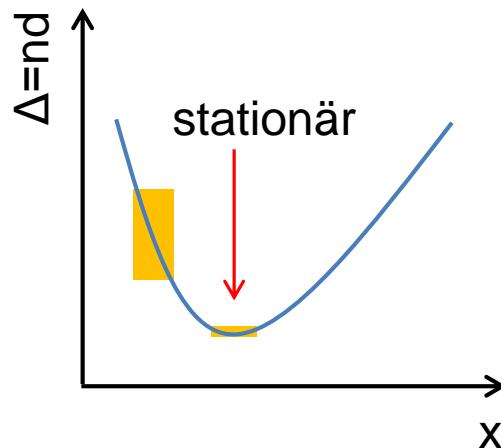


für $N \rightarrow \infty$ verschwinden die Nebenmaxima und -minima

Mehrstrahlinterferenz

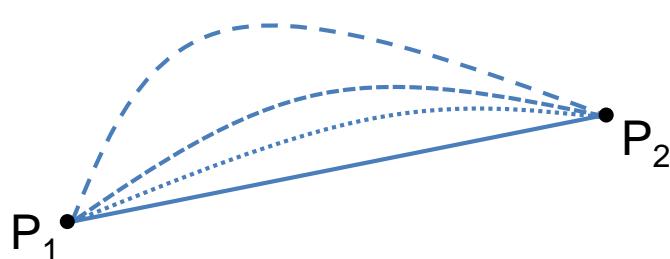


Fermatsches Prinzip - Ergänzung



kleine Änderung Δx am stationären Punkt
→ kleine Änderung der optischen Weglänge

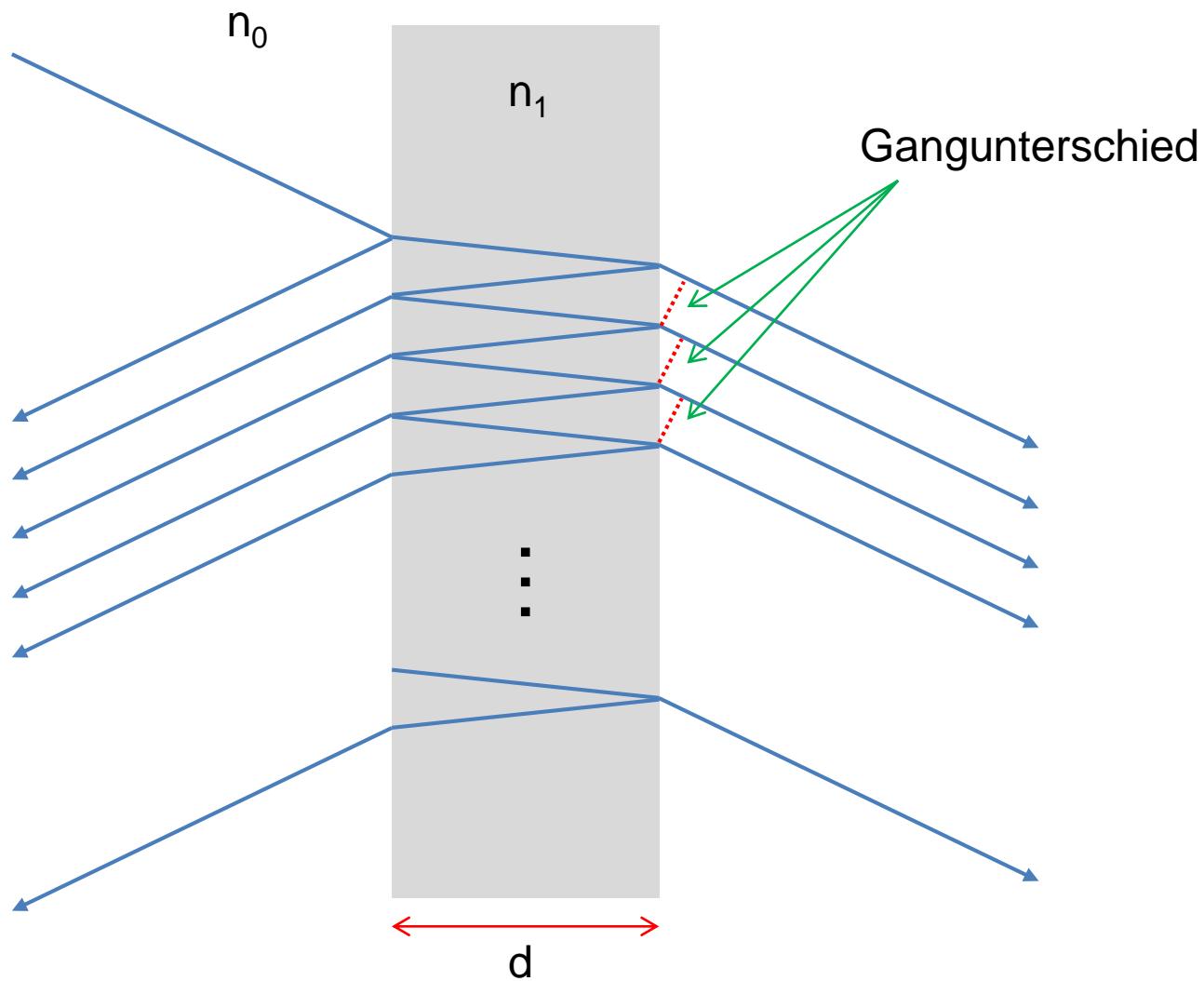
kleine Änderung entfernt vom stationären Punkt
→ große Änderung der optischen Weglänge



- Wege in Nähe des stationären Punkts führen zu phasengleicher Überlagerung
- Weiter entfernte Wege überlagern sich nicht mehr konstruktiv (Phasenversatz)

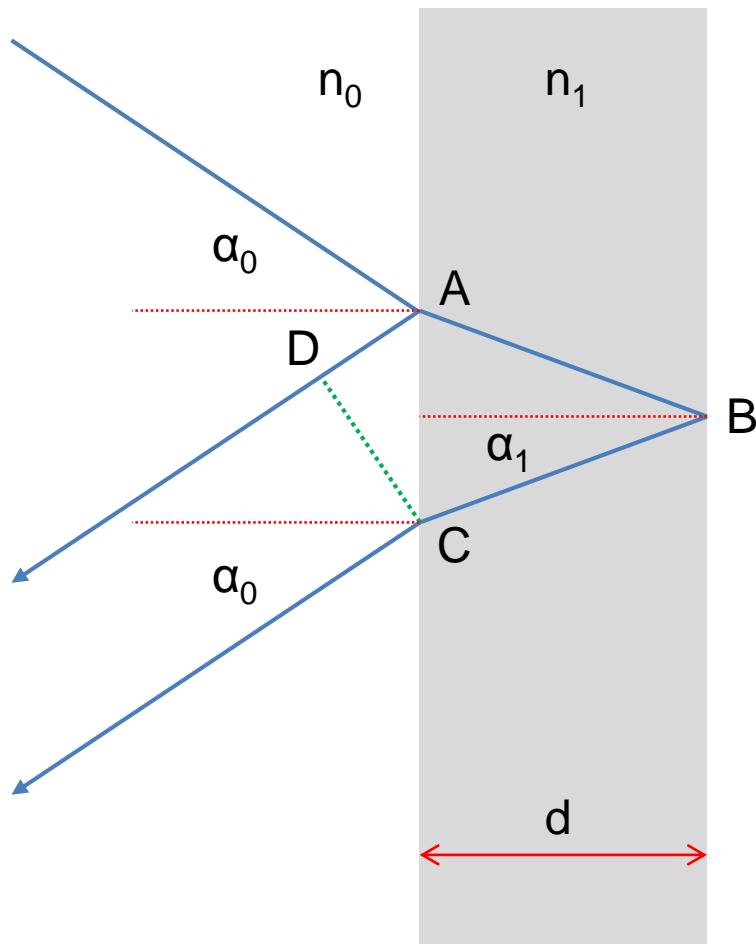
Dieses Konzept ist auch auf Photonen anwendbar → QED
(Überlagerung von Wahrscheinlichkeiten)

Mehrstrahlinterferenz



Mehrstrahlinterferenz

Winkelabhängigkeit des optischen Gangunterschieds



$$\overline{AB} + \overline{BC} - \overline{AD} = 2 \cdot \overline{AB} - \overline{AD}$$

mit:

$$\overline{AB} = \frac{d}{\cos(\alpha_1)}$$

$$\overline{AD} = \overline{AC} \cdot \sin(\alpha_0)$$

$$\overline{AC} = 2d \cdot \tan(\alpha_1)$$

$$\sin(\alpha_0) = \frac{\overline{n}_1}{\overline{n}_0} \cdot \sin(\alpha_1)$$

Mehrstrahlinterferenz

$$2 \cdot \overline{AB} - \overline{AD} = \frac{2d}{\cos(\alpha_1)} - 2d \cdot \tan(\alpha_1) \cdot \frac{\bar{n}_1}{\bar{n}_0} \sin(\alpha_1)$$

optischer Weg $\delta = \bar{n} \cdot d$

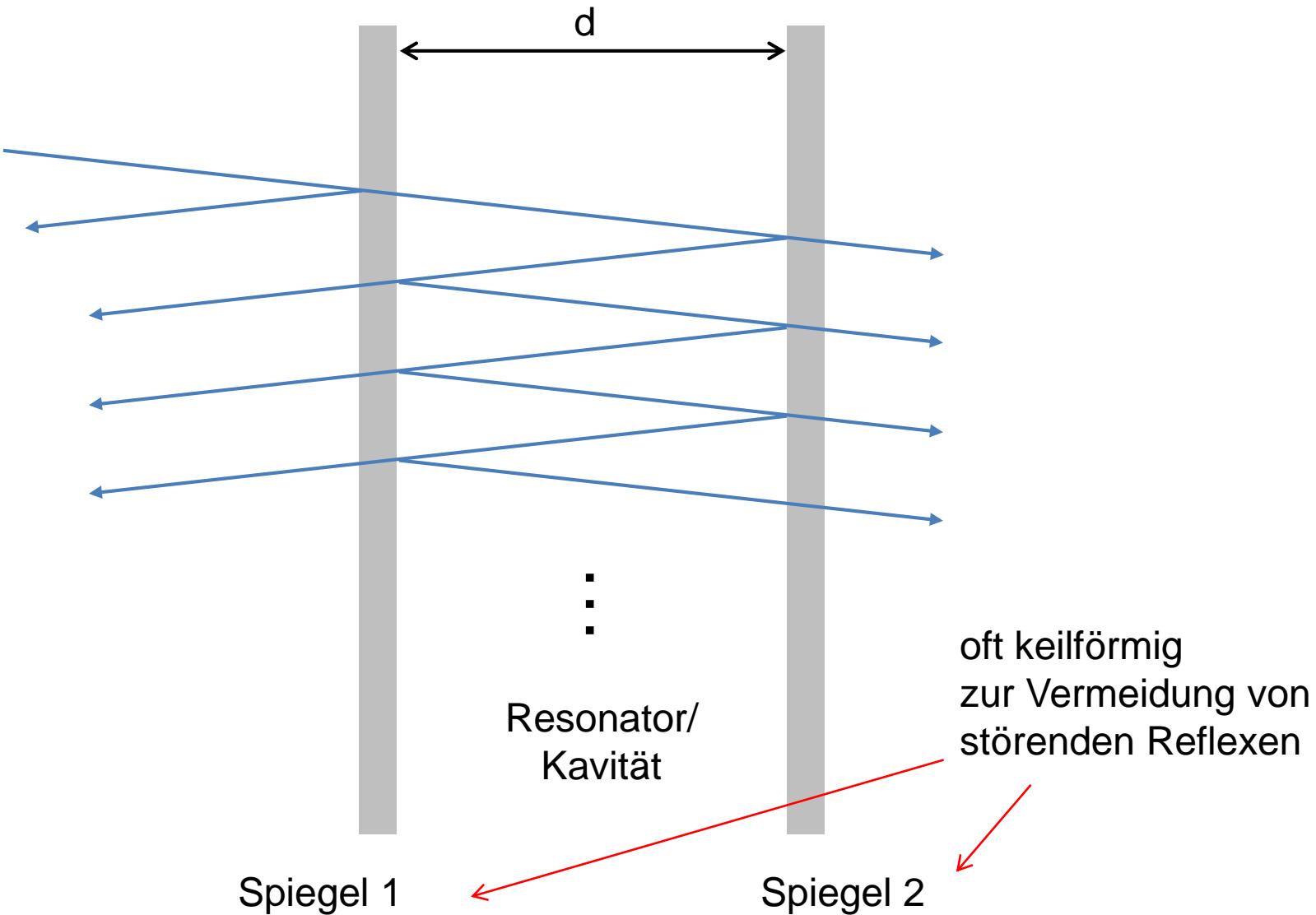
$$\begin{aligned} \longrightarrow \quad 2\bar{n}_1 \cdot \overline{AB} - \bar{n}_0 \cdot \overline{AD} &= \frac{2\bar{n}_1 d - 2\bar{n}_1 d \cdot \sin^2(\alpha_1)}{\cos(\alpha_1)} \\ &= \frac{2\bar{n}_1 d \cdot (1 - \sin^2(\alpha_1))}{\cos(\alpha_1)} = 2\bar{n}_1 d \cdot \cos(\alpha_1) \end{aligned}$$

$$\longrightarrow \quad \Delta\phi = \frac{4\pi}{\lambda} \cdot \bar{n}_1 d \cdot \cos(\alpha_1)$$

Optischer Gangunterschied verkleinert sich für schrägen Einfall

\longrightarrow Interferenzmaxima wandern zu kürzeren Wellenlängen

Fabry-Pérot Interferometer



Fabry-Pérot Interferometer

Berechnung von Reflexion und Transmission erfolgt analog zu Intensität:

- Aufstellen der Einzelwellen mit entsprechenden Koeffizienten r und t
- Summierung und Reihenbildung (hier mit $N \rightarrow \infty$)
- Umformung und Berechnung der Intensität
- Verhältnis zu I_0 bilden

$$R_{FP} = \frac{F \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}{1 + F \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$
$$T_{FP} = \frac{1}{1 + F \cdot \sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

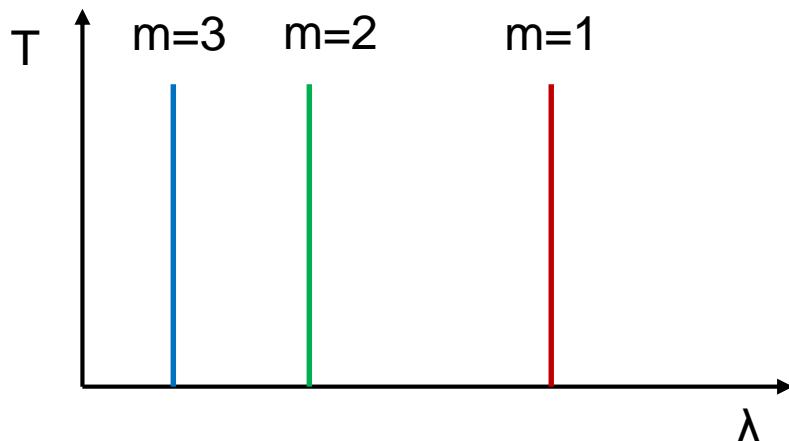
mit Finessefaktor $F = \frac{4R}{(1-R)^2}$

Fabry-Pérot Interferometer

Konstruktive Interferenz im Resonator für:

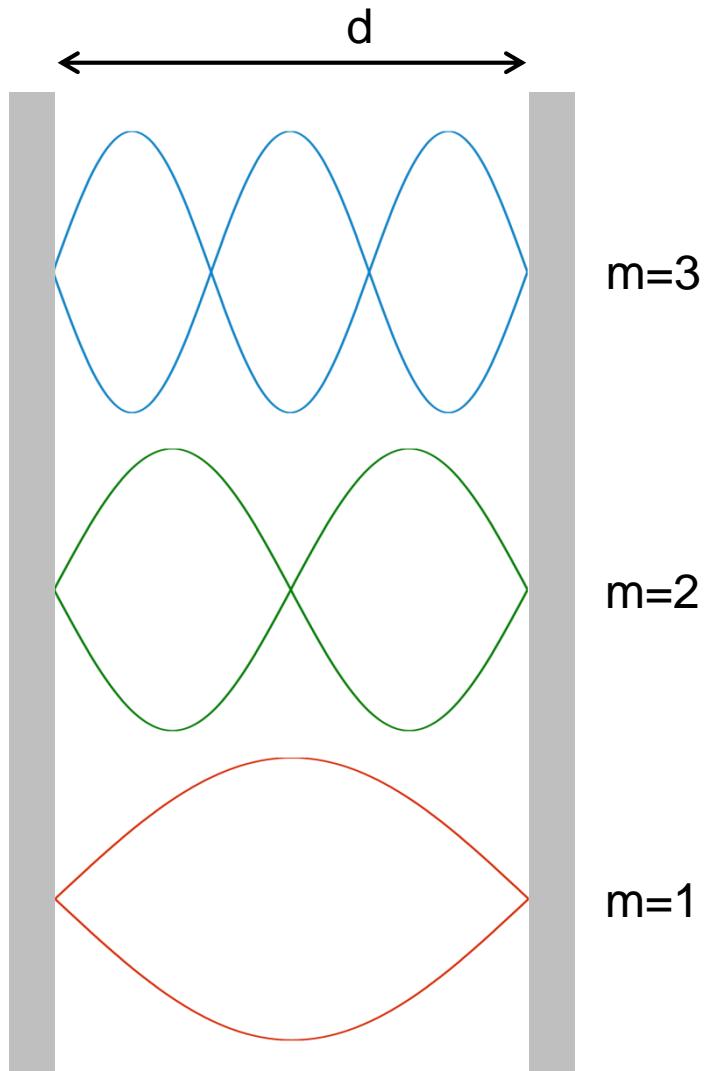
$$d = m \cdot \frac{\lambda}{2\bar{n}}$$

(Kohärenz muss berücksichtigt werden)

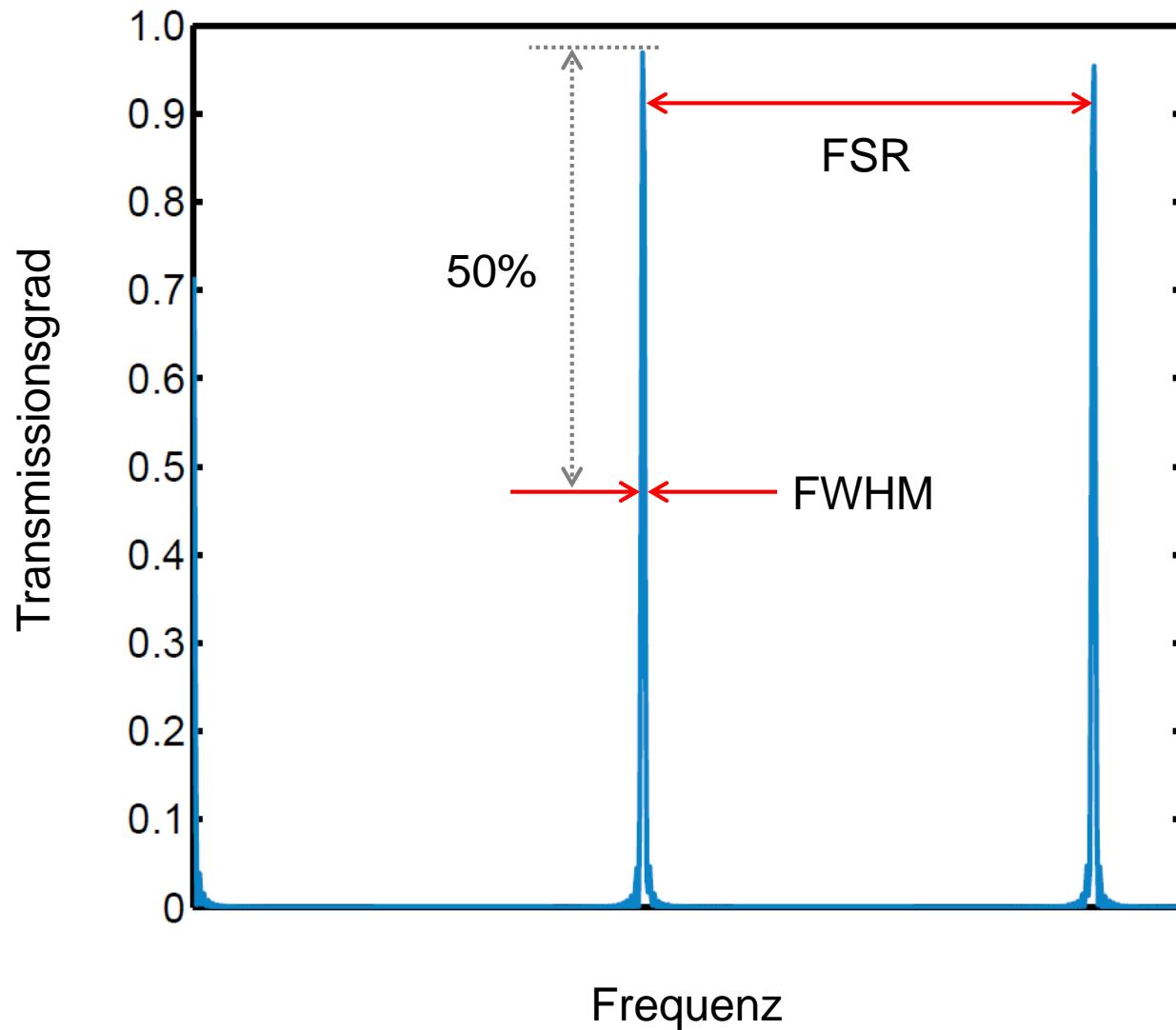


Energieerhalt:

$$T + R + A = 1$$



Fabry-Pérot Interferometer



Fabry-Pérot Interferometer

FSR Freier Spektralbereich

FWHM Halbwertsbreite

Finess

$$\mathcal{F} = \frac{FSR}{FWHM} = \frac{\pi\sqrt{F}}{2} = \frac{\pi\sqrt{R}}{1-R}$$

FSR hängt von Resonatorlänge ab:

$d \uparrow$ \longrightarrow FSR \downarrow

FWHM hängt von Resonatorlänge und Reflektivität der Spiegel ab:

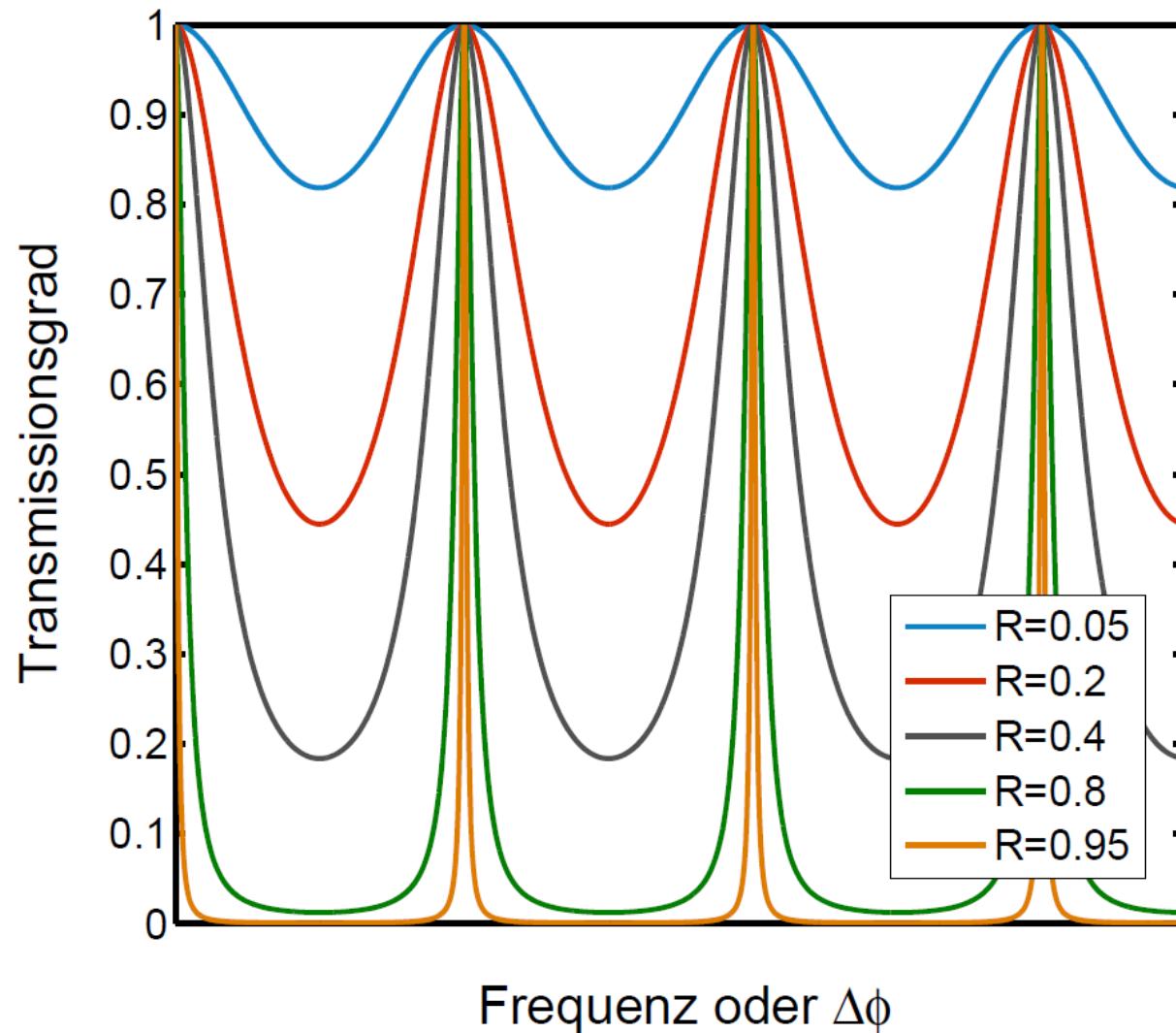
$d \uparrow$ \longrightarrow FWHM \downarrow

$$R \uparrow \longrightarrow \text{FWHM} \downarrow$$

Chromatisches Auflösungsvermögen:

$$\mathcal{R} = \frac{\lambda_0}{(\Delta\lambda_0)_{\min}} \approx m \cdot F$$

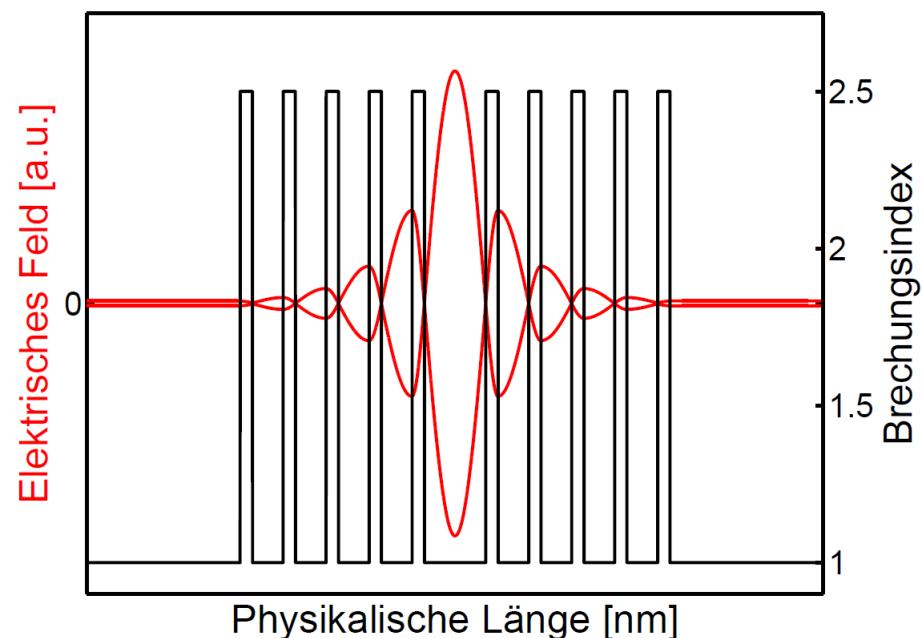
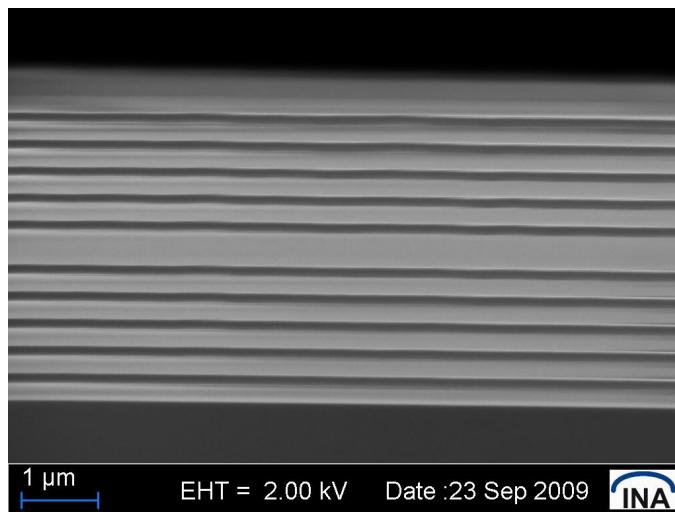
Fabry-Pérot Interferometer



Fabry-Pérot Interferometer

Problem: metallische Spiegel mit $R_{\max} < 95\%$ und hoher Absorption
→ Kompromiss zwischen hohem \mathcal{F} und guter Transmission

Lösung: Reflektoren aus mehreren Dünnschichten



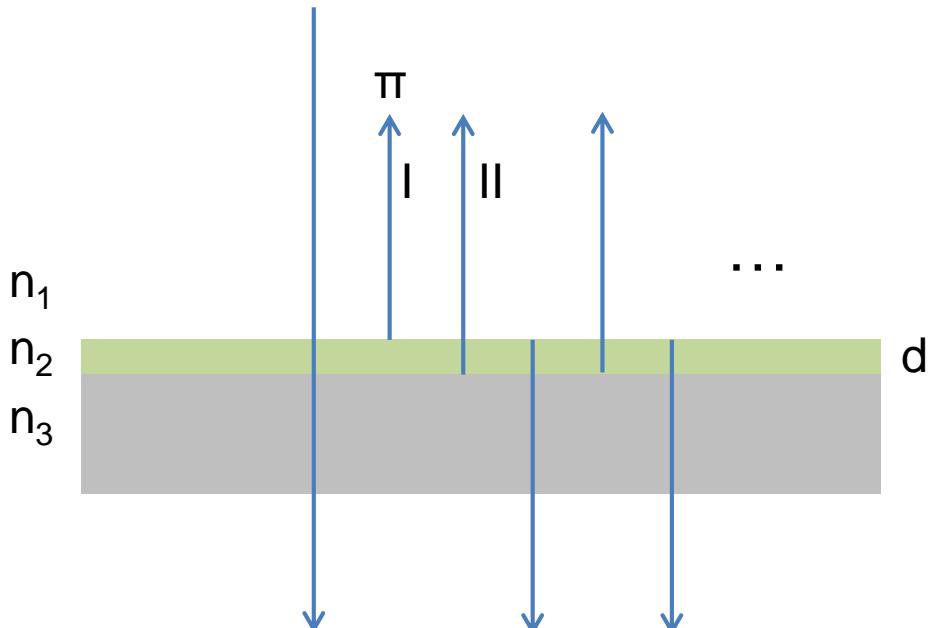
Alternativer Rechenansatz:

- Transfermatrizen für Grenzflächen und Schichtdicken (analog zu 2-Tor)
- besser bei komplexeren Strukturen
- ideal für Computerprogramme

Dünnschichtoptik

Einzelschicht auf Substrat Fall 1:

$$\bar{n}_2 > \bar{n}_1, \bar{n}_3$$



$$d = \frac{\lambda}{4\bar{n}_2}$$

optischer Gangunterschied I & II:

$$\Delta\delta = 2 \cdot \frac{\lambda}{4\bar{n}_2} - \pi = 0$$

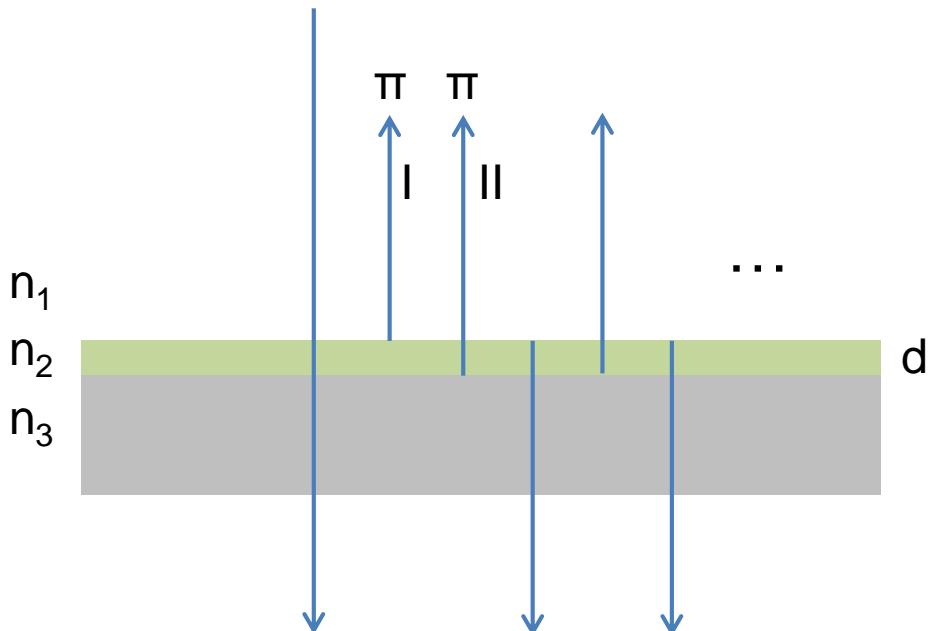
→ konstruktive Interferenz, d.h. erhöhte Reflexion

Erklärung nur für $d = \frac{\lambda}{4\bar{n}_2}$ möglich → Vielstrahlinterferenz!

Dünnschichtoptik

Einzelschicht auf Substrat Fall 2:

$$\bar{n}_3 > \bar{n}_2 > \bar{n}_1$$



$$d = \frac{\lambda}{4\bar{n}_2}$$

optischer Gangunterschied I & II:

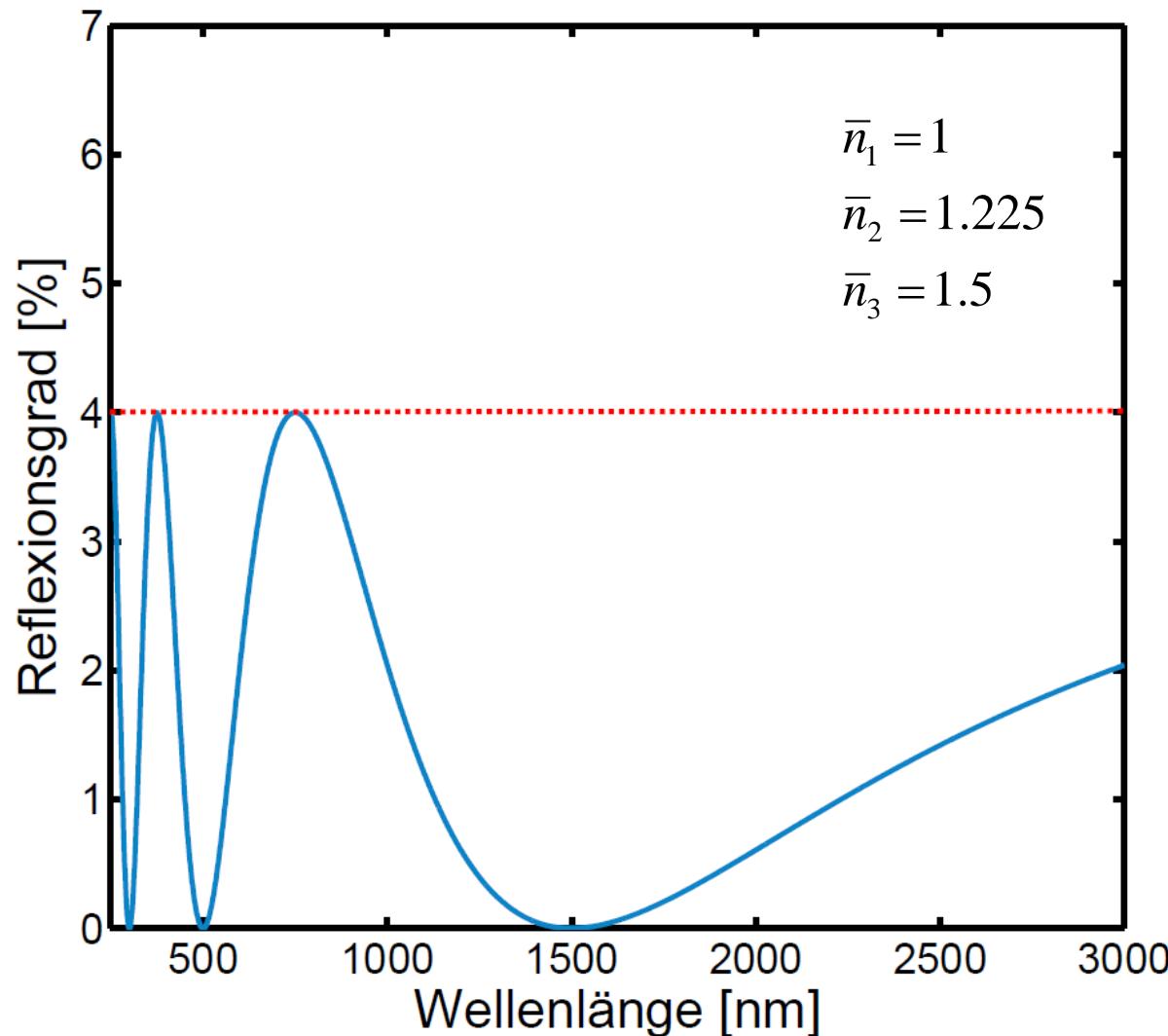
$$\Delta\delta = 2 \cdot \frac{\lambda}{4\bar{n}_2} + \pi - \pi = \pi$$

→ destruktive Interferenz, d.h. verminderte Reflexion

Erklärung nur für $d = \frac{\lambda}{4\bar{n}_2}$ möglich → Vielstrahlinterferenz!

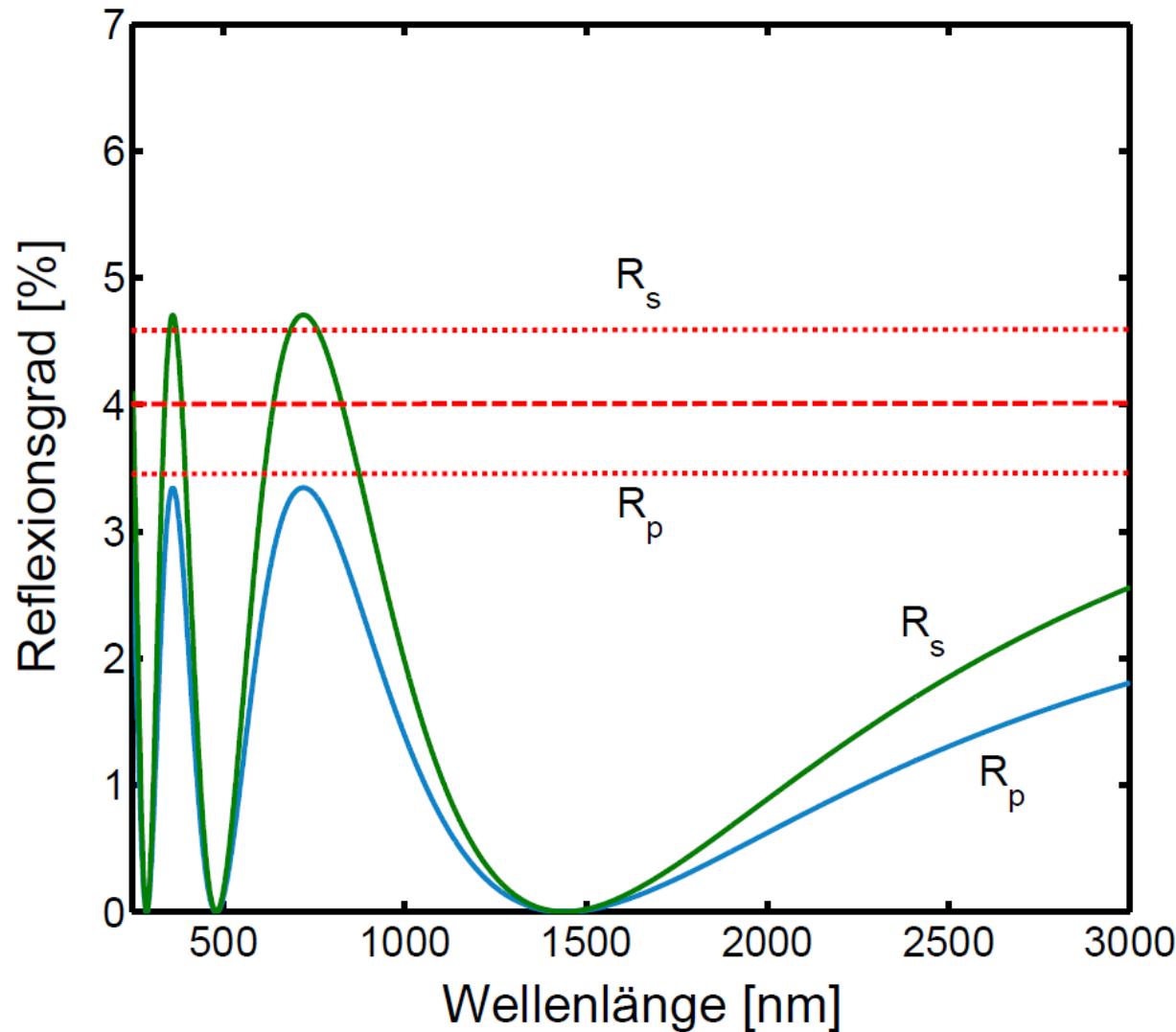
Dünnschichtoptik - Antireflexschicht

Interferenz optimal für $E_1=E_2$ \longrightarrow wird erreicht für $\bar{n}_2 = \sqrt{\bar{n}_1 \bar{n}_3}$

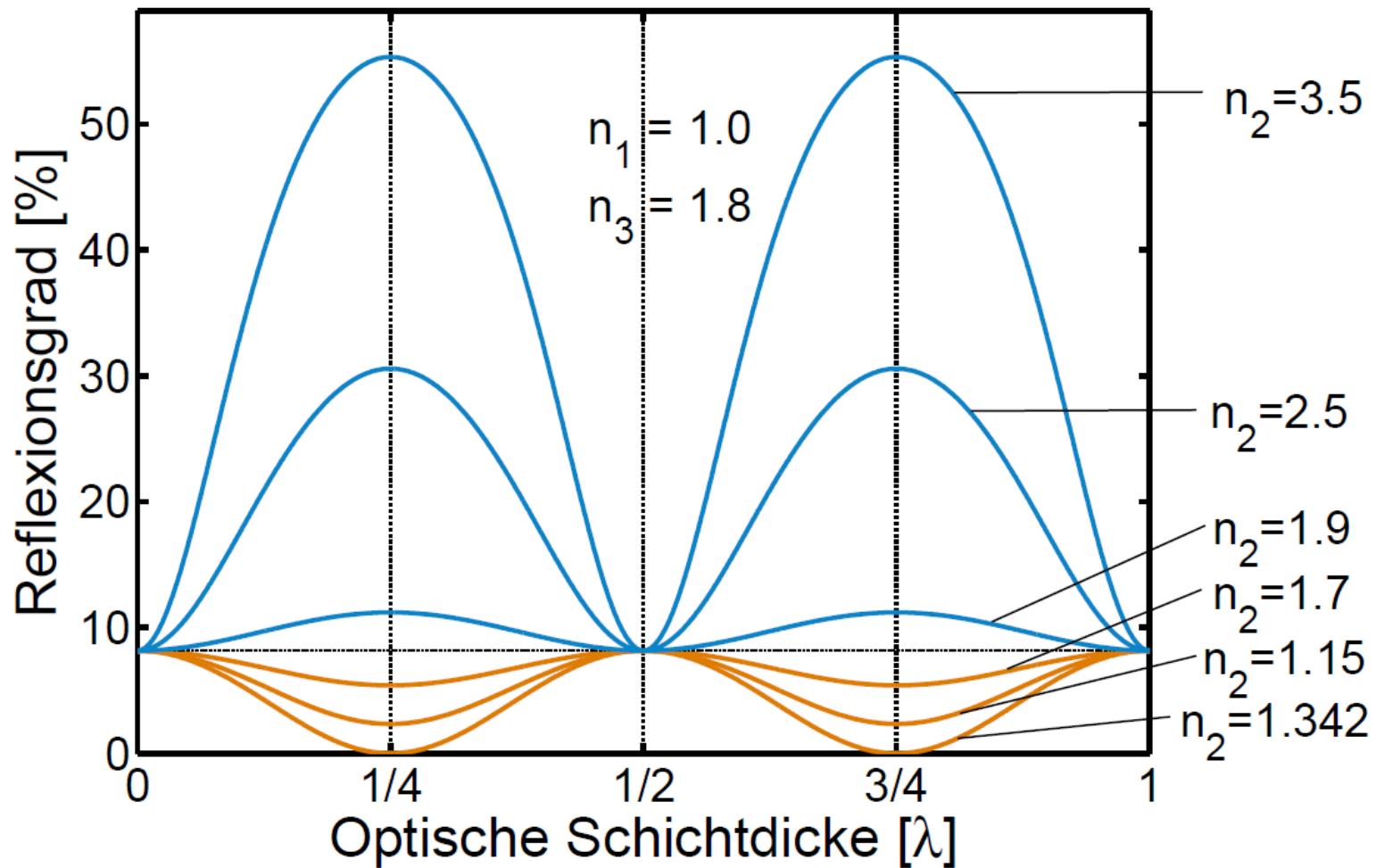


Dünnschichtoptik - Antireflexschicht

Bei schrägem Einfall: Polarisationsabhängigkeit + λ Verschiebung



Dünnschichtoptik



Beobachtbar z.B. auch bei Seifenblasen oder Ölfilmen (Wellenlängenabhängigkeit!)

Wellenoptik

(Beugung)

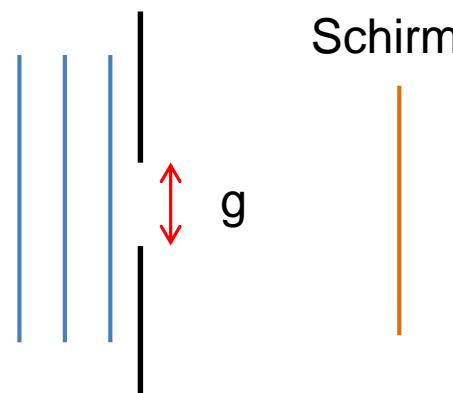
Beugung

Licht trifft auf Objekte (Kanten, Spalte, Gitter, ...)

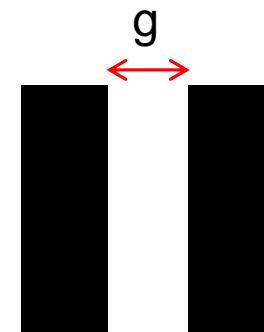
Geometrische Optik: perfekter Schattenwurf

Tatsächlich: Lichtmuster im Schattenbereich
Effekt wird stärker wenn $g \approx \lambda$

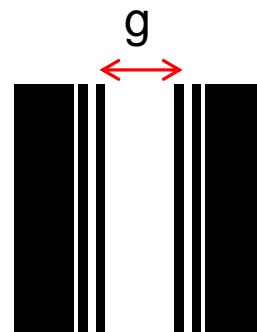
→ Wellenoptik: Beugung



beleuchteter Spalt



Schatten des Spalts

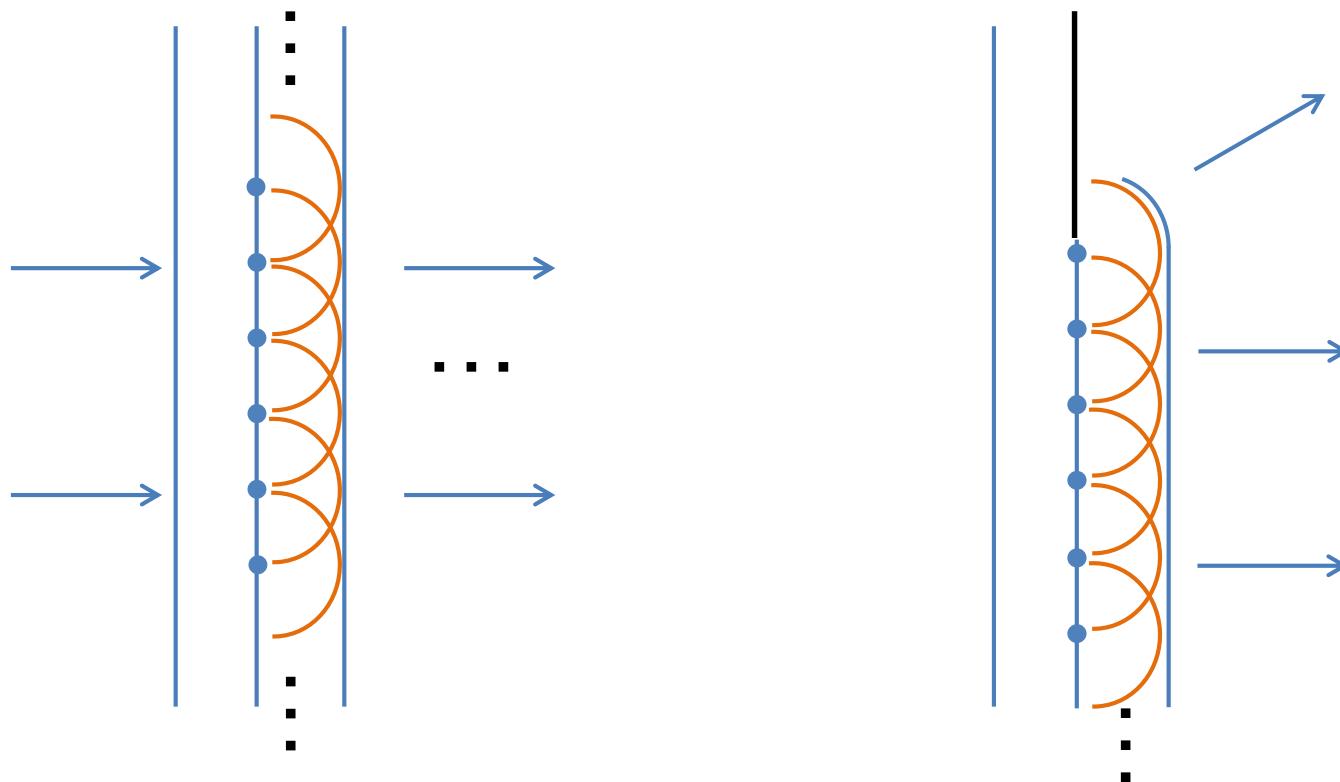


tatsächliche Beobachtung

Huygensche Prinzip

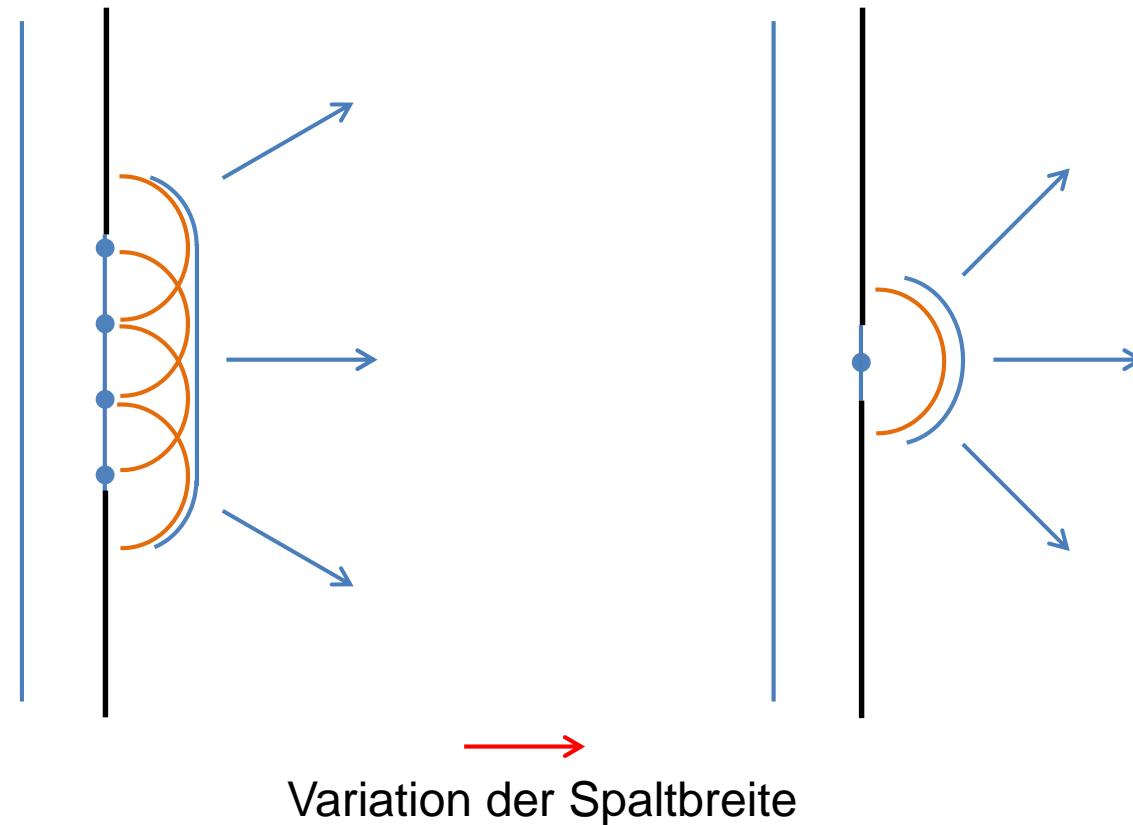
Sehr anschauliche Erklärung für Wellenausbreitung:

- Jeder Punkt einer Wellenfront ist Ausgangspunkt einer neuen Elementarwelle
- Die Einhüllende aller dieser Elementarwellen ergibt die nächste Wellenfront

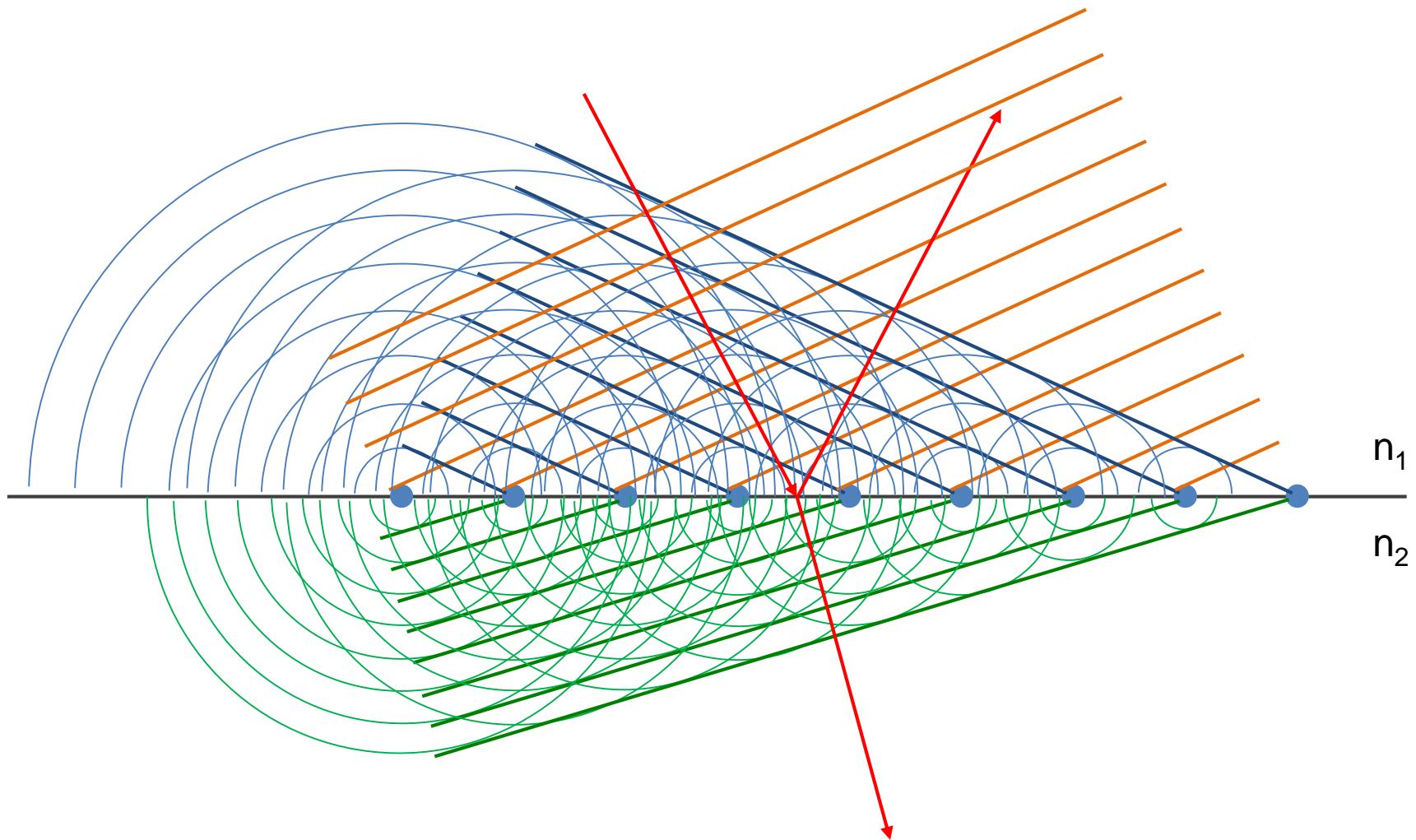


Huygensche Prinzip

- Alle Elementarwellen haben die Wellenlänge der Ausgangswelle, sind beliebig eng angeordnet und schwach
- Keine Erklärung der Ausbreitungsrichtung oder genaue Beschreibung der Beugung möglich



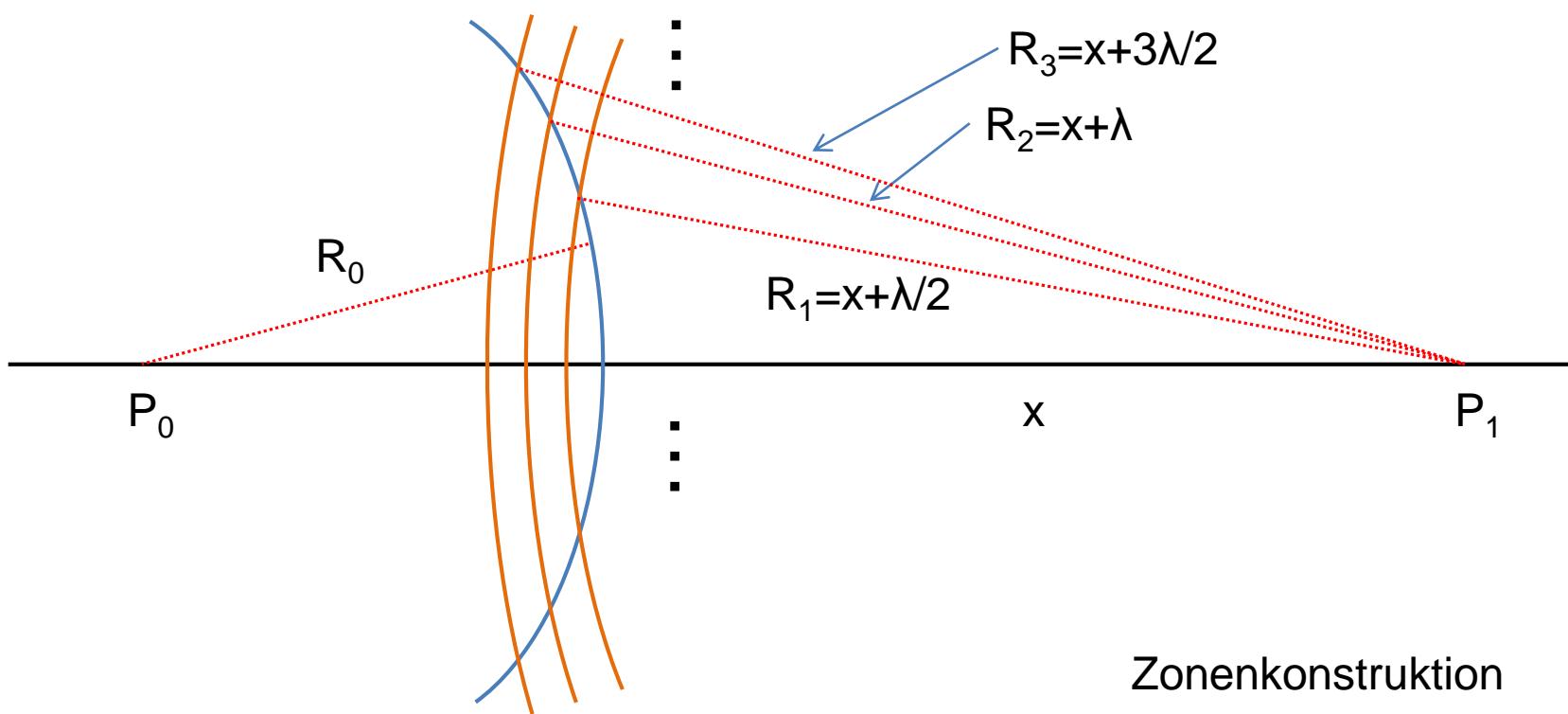
Huygensche Prinzip – Reflexion & Brechung



Fresnell-Huygensche Prinzip

Erweiterung durch Fresnel:

- Amplitude und Phase einer Welle im Punkt P_1 ergeben sich aus Superposition aller Elementarwellen einer Wellenfront, die sich dort treffen
- Einführung einer Richtungsfunktion der Intensität K_m



Fresnell-Huygensche Prinzip

Gangunterschiede: $(R_1 - x) \leq \frac{\lambda}{2}$ konstruktive Interferenz

$$\frac{\lambda}{2} \leq (R_2 - x) \leq \lambda \quad \text{destruktive Interferenz}$$

$$\lambda \leq (R_4 - x) \leq \frac{3\lambda}{2} \quad \text{konstruktive Interferenz}$$

...

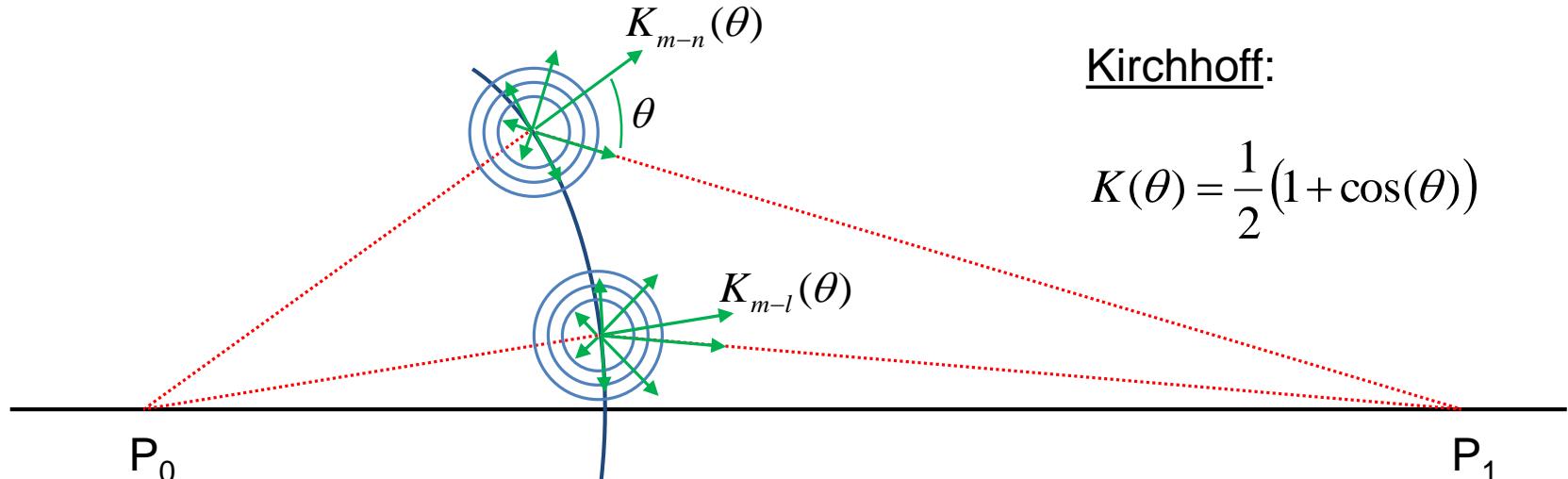
...

Addition aller Beiträge der einzelnen Zonen \longrightarrow Resultierende Intensität

$$E_{\text{ges}} = K_1|E_1| - K_2|E_2| + K_3|E_3| - K_4|E_4| + \dots + K_m|E_m|$$

- K_m nimmt mit größerem Winkel zur Normalen ab
- Beiträge von benachbarten Zonen unterscheiden sich nur minimal

Fresnell-Huygensche Prinzip



Kirchhoff:

$$K(\theta) = \frac{1}{2}(1 + \cos(\theta))$$

$$E_{ges} = K_1 \frac{|E_1|}{2} + \left(K_1 \frac{|E_1|}{2} - K_2 E_2 + K_3 \frac{|E_3|}{2} \right) + \left(K_3 \frac{|E_3|}{2} - K_4 E_4 + K_5 \frac{|E_5|}{2} \right) + \dots$$

$$+ \left(K_{m-2} \frac{|E_{m-2}|}{2} - K_{m-1} E_{m-1} + K_m \frac{|E_m|}{2} \right) + K_m \frac{|E_m|}{2}$$

K und E variieren nur geringfügig zwischen benachbarte Zonen

→ geklammerter Term ≈ 0

$$E_{ges} = K_1 \frac{|E_1|}{2} + K_m \frac{|E_m|}{2} \approx \frac{|E_1|}{2}$$

↓ ↓
 →1 →0

Fresnel-Huygensche Prinzip

Schwächen:

~~Es müssen willkürliche Zusatzannahmen gemacht werden
(Elementarwellen mit Richtungsfunktion der Intensität)~~

Stärken:

Sehr anschauliche und leistungsfähige Darstellung von Wellenausbreitung

Mathematische Formulierung:

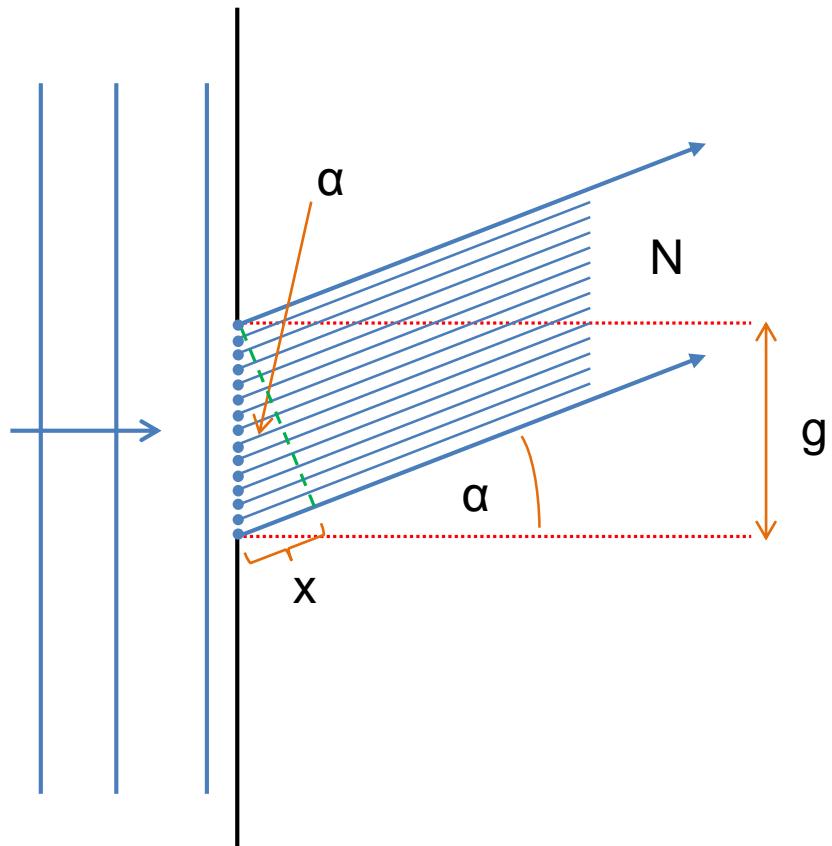
Kirchhoffsche Beugungsintegral

→ Ergebnisse des Fresnel-Huygenschen Prinzip können aus der skalaren Wellengleichung hergeleitet werden (damit auch aus den Maxwell Gleichungen)

Exakte Beugungstheorien sind sehr kompliziert (vektoriell, Einbeziehen der Randbedingungen des Objekts, ...)

Beugung am Spalt

Unter Anwendung der Mehrstrahlinterferenz



Berechnung der Intensität
für verschiedene
Ausbreitungswinkel α

Gangunterschied:

$$\Delta\phi_{ges} = kx = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot g \cdot \sin(\alpha)$$

$$\Delta\phi = \frac{\Delta\phi_{ges}}{N}$$

Beugung am Spalt

$$I \sim E^2 \cdot \frac{\sin^2\left(N \frac{\Delta\phi_{ges}}{2N}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2N}\right)}$$

mit $E \sim \frac{g}{N}$ und $N \rightarrow \infty$

$$I \sim \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{g}{N}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2N}\right)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{g}{N}\right)^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2N}\right)^2}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2N}\right) \cdot \left(\frac{2N}{\Delta\phi_{ges}}\right)^2}$$

für kleine Argumente wird:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sin^2\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2N}\right) \approx \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2N}\right)^2$$

Beugung am Spalt

$$I \sim \lim_{N \rightarrow \infty} g^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2}\right) \cdot \left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2N}\right)^2}{\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2N}\right)^2} \cdot \left(\frac{2}{\Delta\phi_{ges}}\right)^2 = g^2 \cdot \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2}\right)^2} = g^2 \cdot \text{sinc}^2\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2}\right)$$

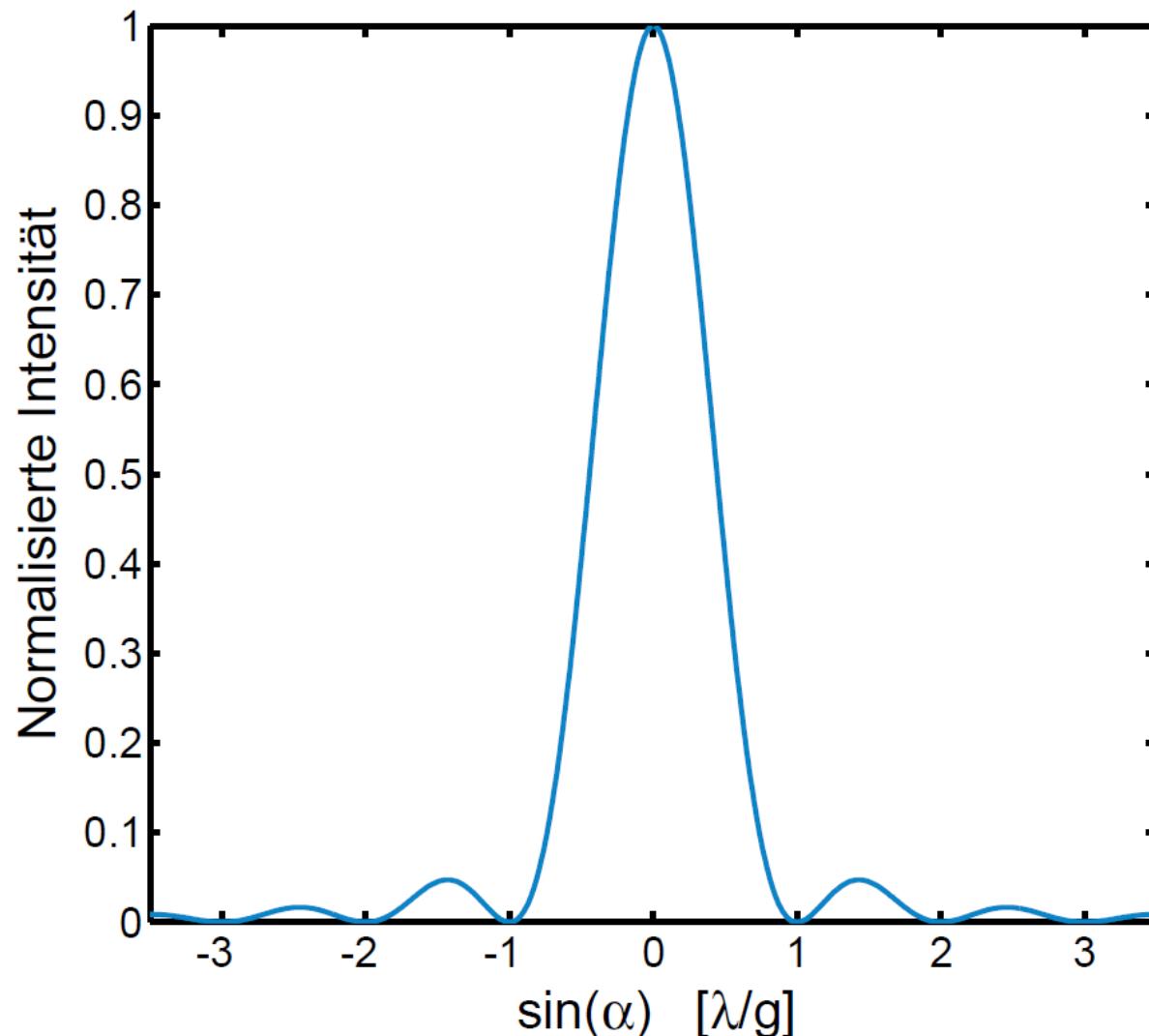
mit $\Delta\phi_{ges} = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot g \cdot \sin(\alpha)$ gilt für $\alpha = 0 \rightarrow I \sim g^2$

Nullstellen der Funktion: $\sin \frac{\Delta\phi_{ges}}{2} = 0 \rightarrow \Delta\phi_{ges} = 2m\pi \quad m = 1, 2, 3, \dots$

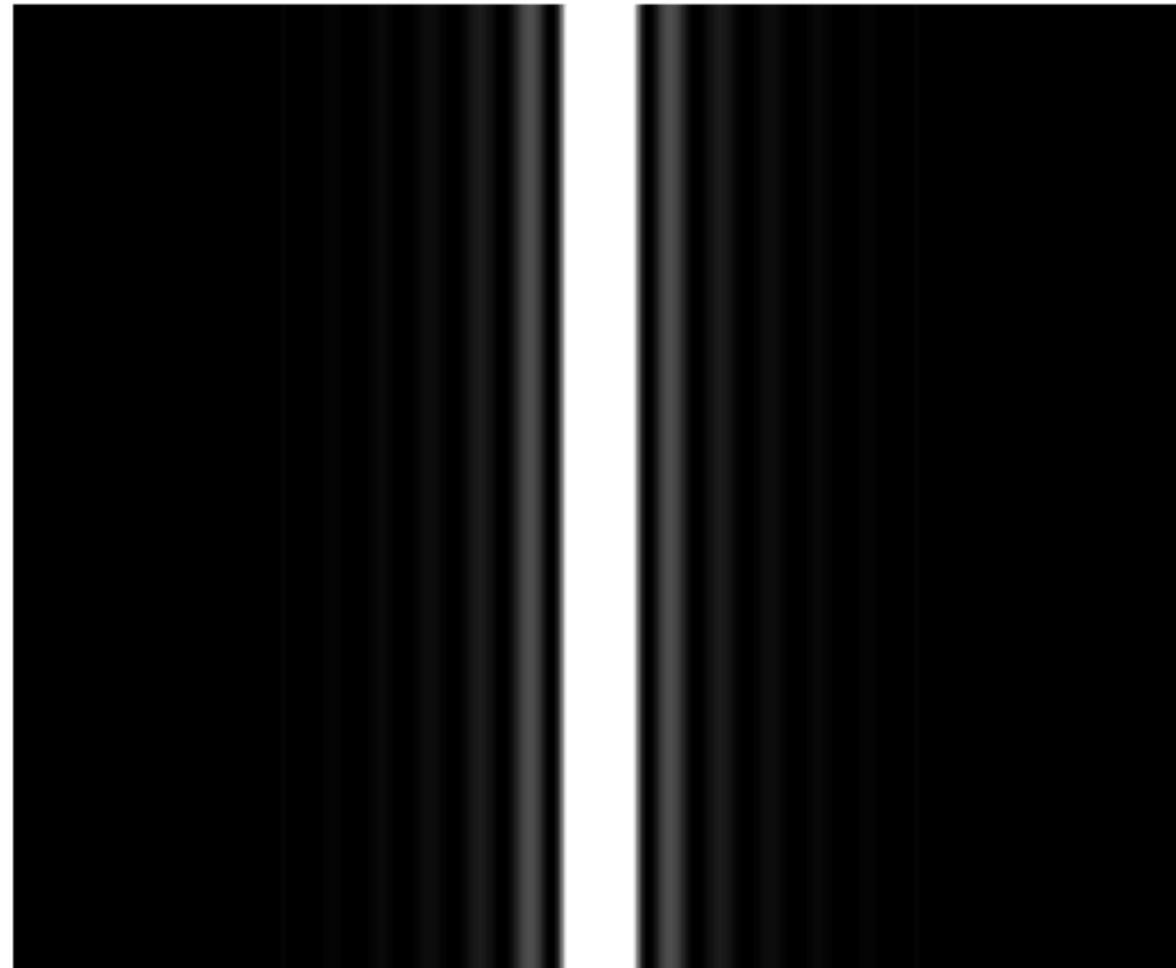
$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot g \cdot \sin(\alpha) = 2m\pi \quad \longrightarrow \quad \sin(\alpha) = m \cdot \frac{\lambda}{g}$$

Beugungswinkel ist von Strukturgröße abhängig (und λ)

Beugung am Spalt

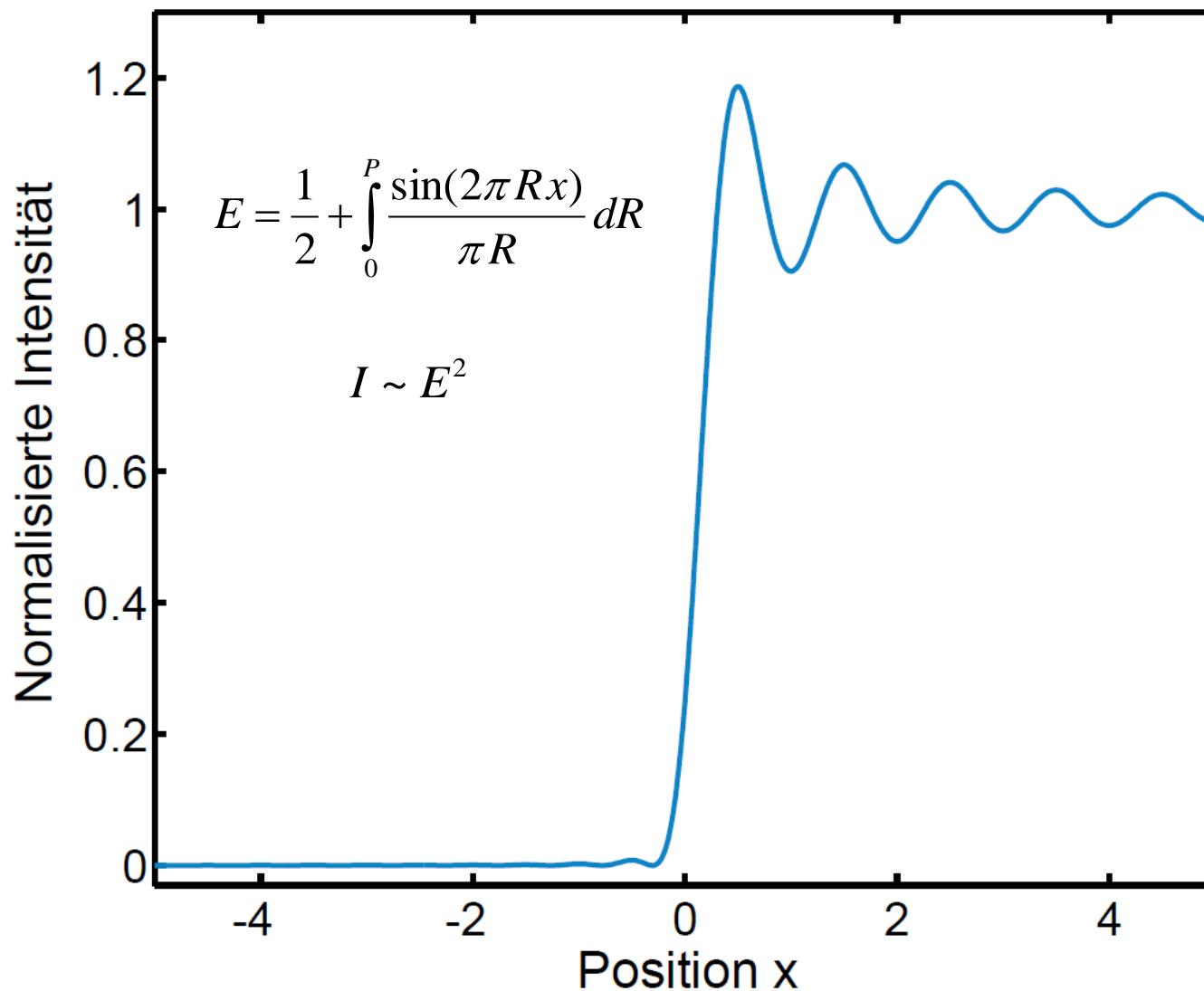


Beugung am Spalt



Intensitätsbild (stark überhöht!)

Beugung an einer Kante



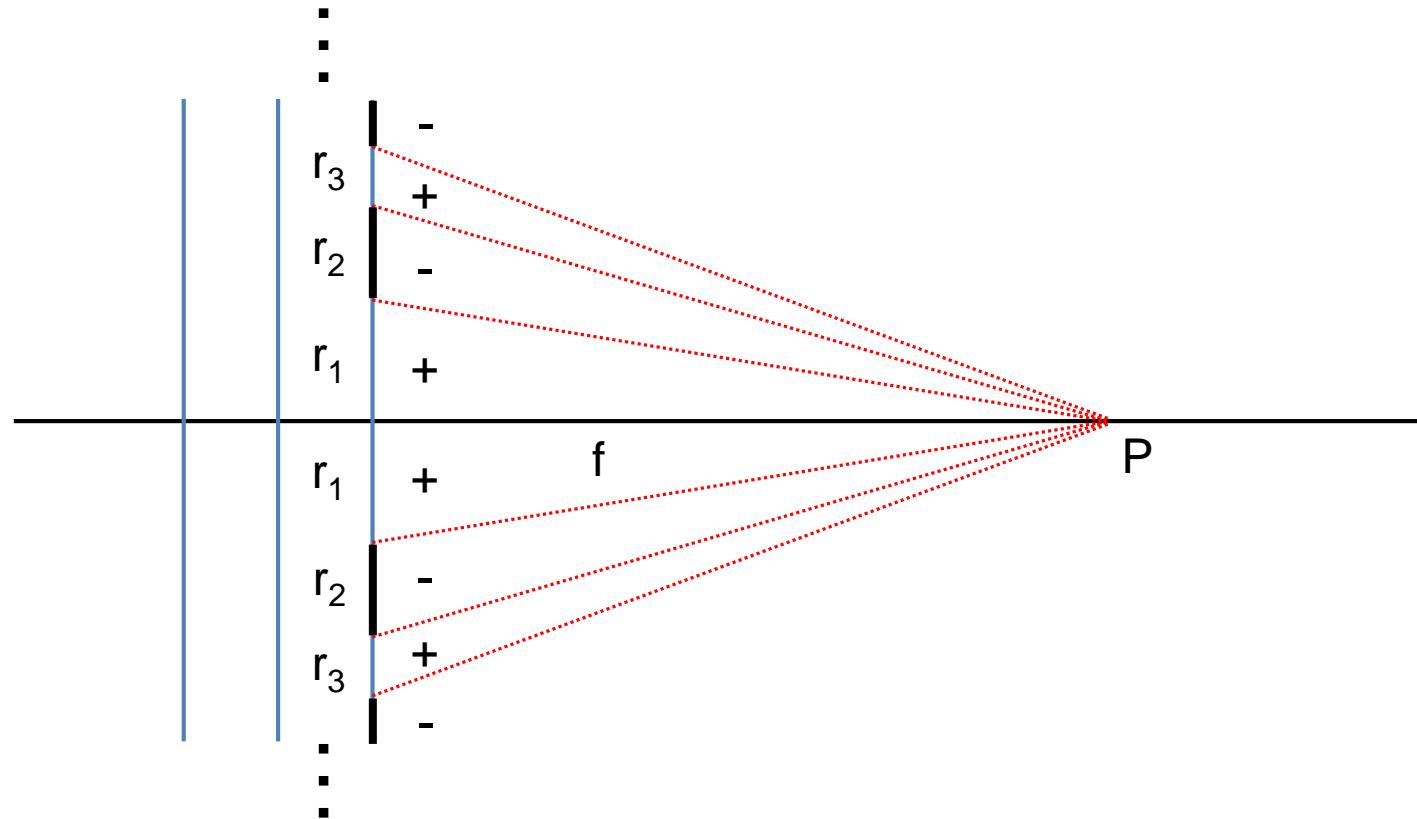
Beugung an einer Kante



Intensitätsbild (stark überhöht!)

DOEs - Zonenplatte

Diffraktiv Optische Elemente nutzen Beugung statt Brechung oder Reflexion



Soll eine Welle im Punkt P fokussiert werden, müssen die destruktiven Anteile:

- durch Abschattung ausgeblendet werden, oder
- in der Phase um π verschoben werden (dann konstruktiver Beitrag)

DOEs – Gittertypen

Amplitudengitter

Variation der Absorption



Transmissionsgitter

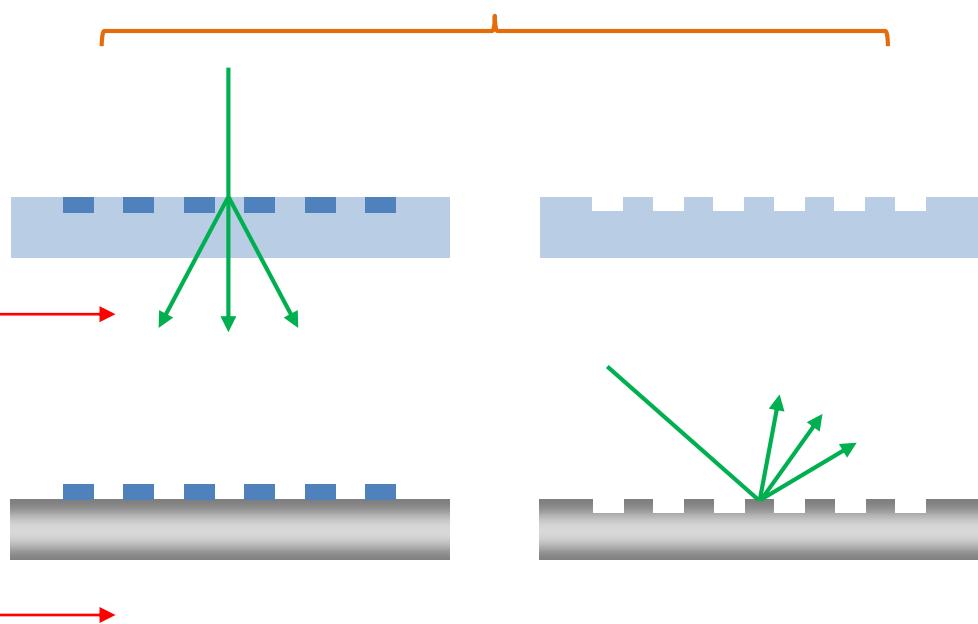


Reflexionsgitter

- hohe Verluste
- kostengünstig

Phasengitter

Variation der optischen Weglänge: $\Delta=n \cdot d$



- geringe Verluste
- Herstellung schwieriger
(= höhere Kosten)

DOEs - Zonenplatte

Berechnung der Radien der einzelnen Zonen:

$$r_m^2 = \left(f + \frac{m}{2} \lambda \right)^2 - f^2 \quad (\text{Pythagoras})$$

mit $a^2 - b^2 = (a+b) \cdot (a-b)$

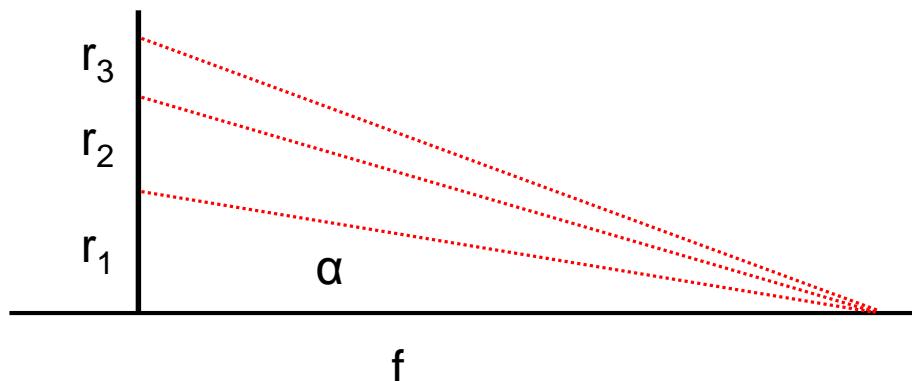
$$r_m^2 = \left(f + \frac{m}{2} \lambda + f \right) \cdot \left(\cancel{f + \frac{m}{2} \lambda - f} \right) = \frac{m^2}{4} \lambda^2 + m \lambda f$$

da $f \gg \lambda$

$$\longrightarrow r_m \approx \pm \sqrt{m \lambda f}$$

DOEs - Zonenplatte

Abbildung durch eine Zonenplatte:



$$f = \frac{r_m}{\tan(\alpha_m)}$$

$$\sin(\alpha_m) = \frac{\lambda}{g_m}$$

für kleine Winkel gilt: $\tan(\alpha) \approx \sin(\alpha) \approx \alpha$ $\longrightarrow \alpha_m = \frac{r_m}{f} = \frac{\lambda}{g_m}$

$$\longrightarrow \frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{f_2}{f_1} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2}$$

Starke chromatische Abhängigkeit

Abbildungsgleichungen dünner Linsen können verwendet werden

DOEs - Zonenplatte

Gitter mit Rechteckverlauf:

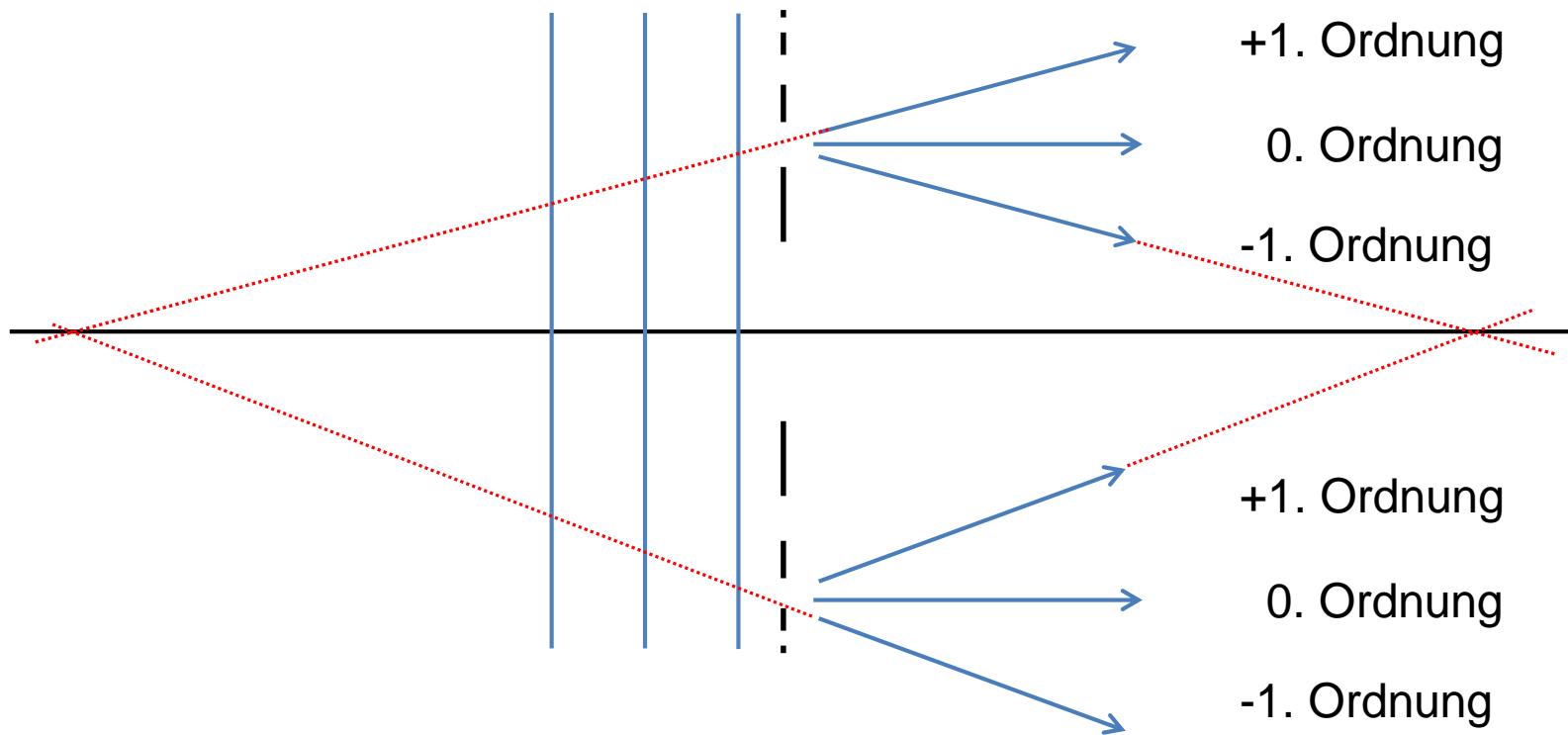
harmonisches Gitter:

dickes Bragg-Gitter:

viele Beugungsordnungen

-1., 0., +1. Beugungsordnung

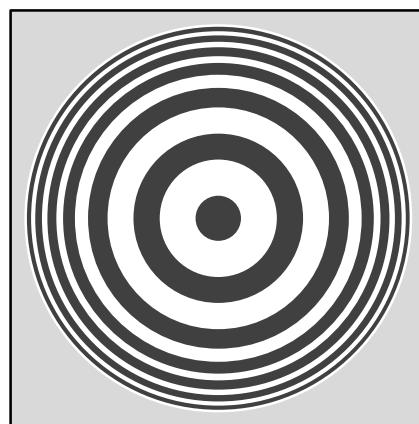
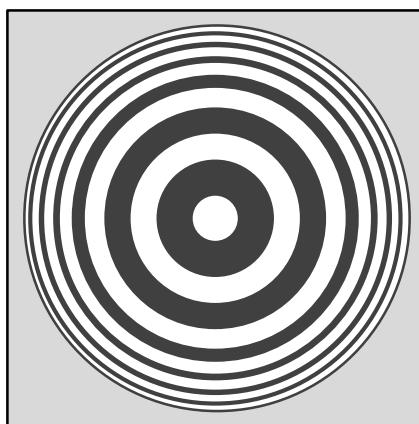
eine einzige Beugungsordnung möglich



Jede Beugungsordnung bildet eine Fokus → Negativlinse + Positivlinse

DOEs - Zonenplatte

- Radiale Verteilung eines Gitters
- Gitterkonstante g nimmt mit zunehmenden Radius r ab
- Anschaulich: Beugungswinkel für große Radien ist größer
→ fokussierende Wirkung



Inverser Aufbau ebenso möglich (Babinet'sches Prinzip)

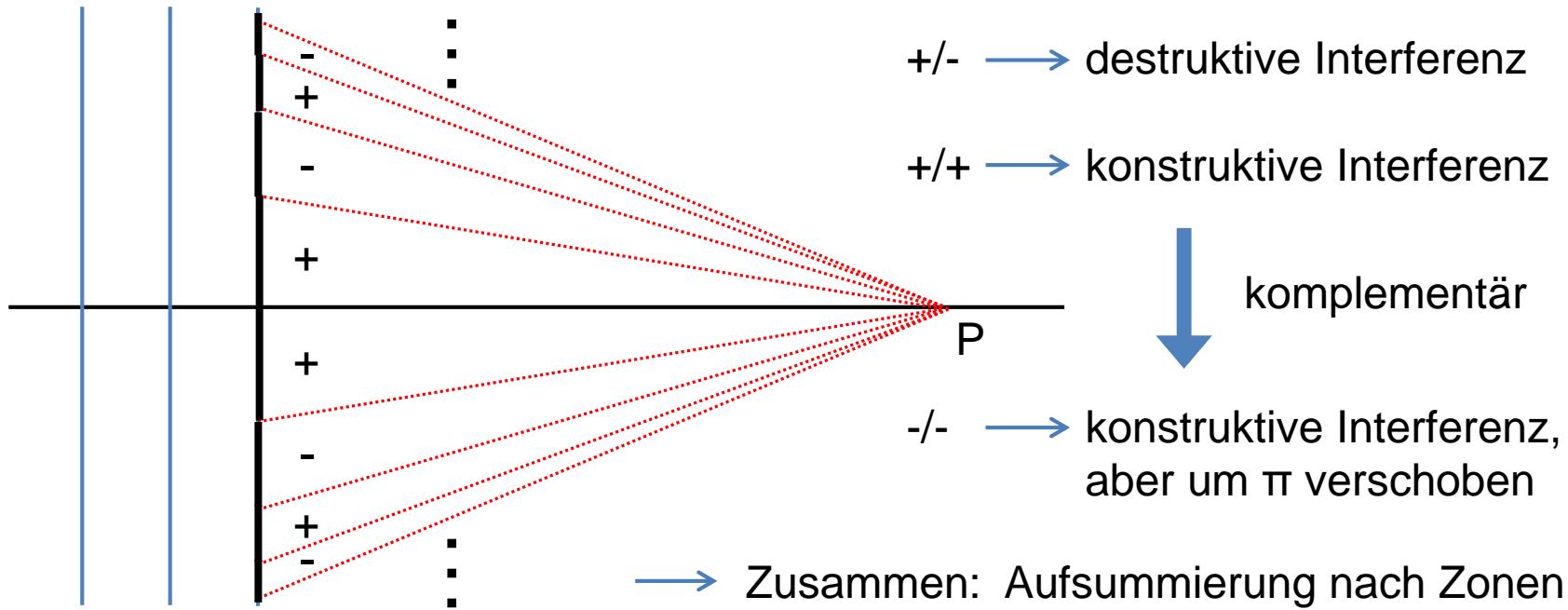
Prinzip von Babinet

von Jacques Babinet (19. Jhd.):

Die Beugung an zwei komplementären Strukturen (d.h. deren Öffnungen) entspricht zusammen der Ausbreitung der ungestörten Welle.

$$E_{\text{original}} + E_{\text{komplementär}} = E_0$$

Anschauliche Erklärung anhand der Zonenkonstruktion:





Prinzip von Babinet

Weiteres wichtiges Ergebnis:

Für P gilt $E_{\text{original}} = -E_{\text{komplementär}}$ (Phasenversatz von π)

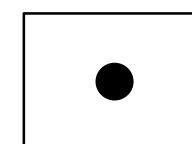
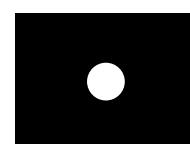
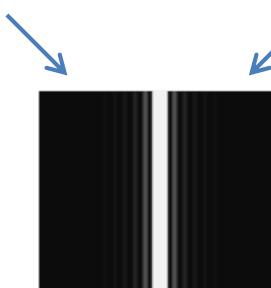
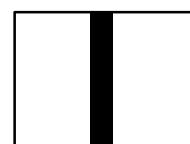
→ Resultierende Intensität ist aber identisch $I_{\text{original}} = I_{\text{komplementär}}$

Lage von P und Form der Öffnung sind beliebig

→ komplementäre Öffnungen haben gleiche Beugungsbilder

z.B. Spalt und Draht

oder Lochblende und Kreisplatte



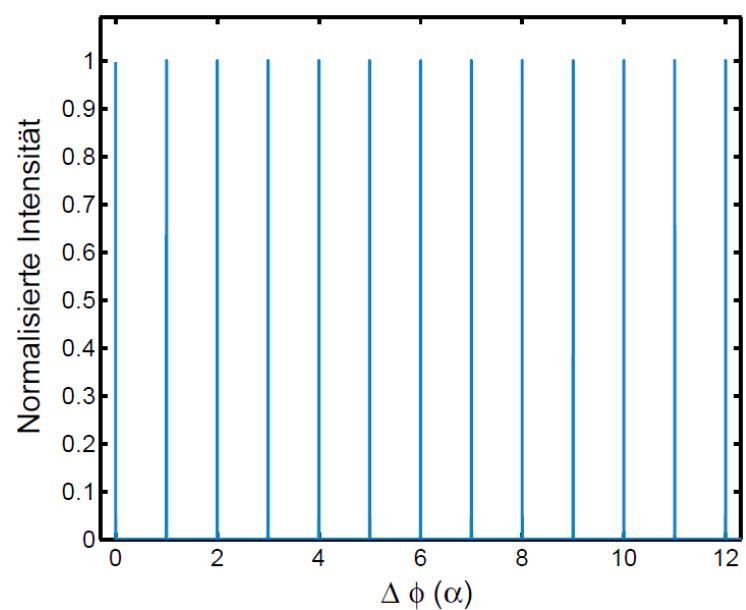
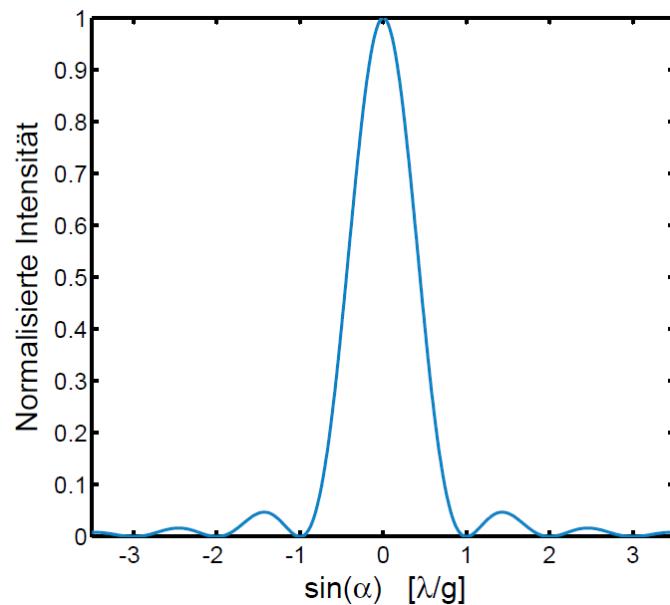
Wellenoptik

(Beugung II)

Beugung - Doppelspalt/mehrere Spalte

Beugungsbild eines Einzelspaltes

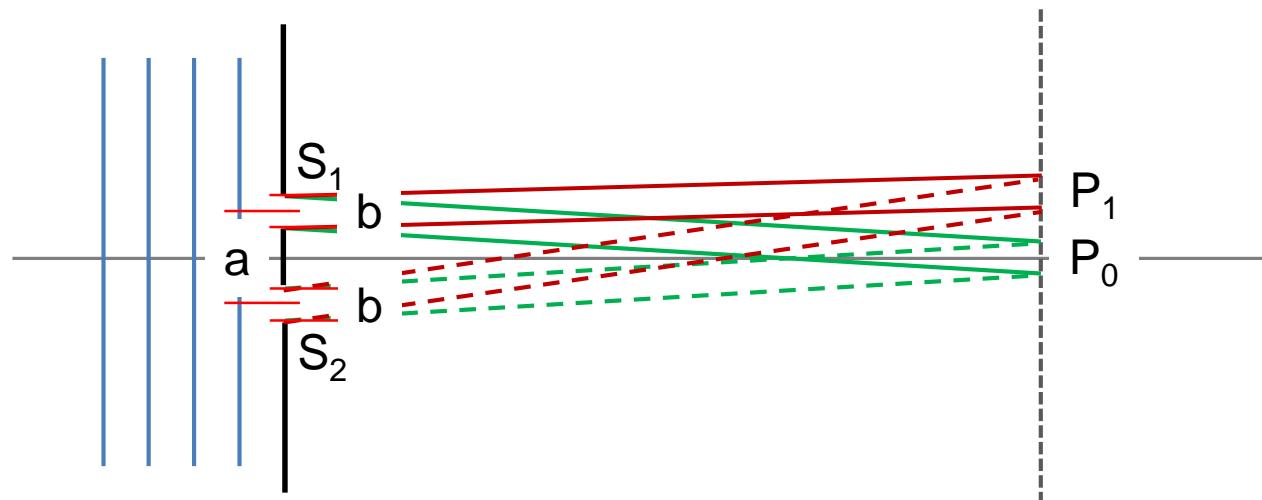
Interferenz zwischen den gebeugten Wellen mehrerer Spalte



→ Überlagerung von Beugungsbild und Interferenzeffekt

Beugung - Doppelspalt

Zwei Spalte mit Breite b und Abstand a (symmetrisch zur optischen Achse)



- Beide Spalte erzeugen das selbe Beugungsbild
- Überlagerung der gebeugten Wellen aus S_1 und S_2 auf Schirm
 - Kein Gangunterschied in P_0
 - Gangunterschied $\neq 0$ in P_1 und anderen Orten

Beugung - Doppelspalt

Linienmuster durch Mehrstrahlinterferenz

Überlagert durch Einhüllende des Beugungsbild eines einzelnen Spaltes

Spaltbreite & α

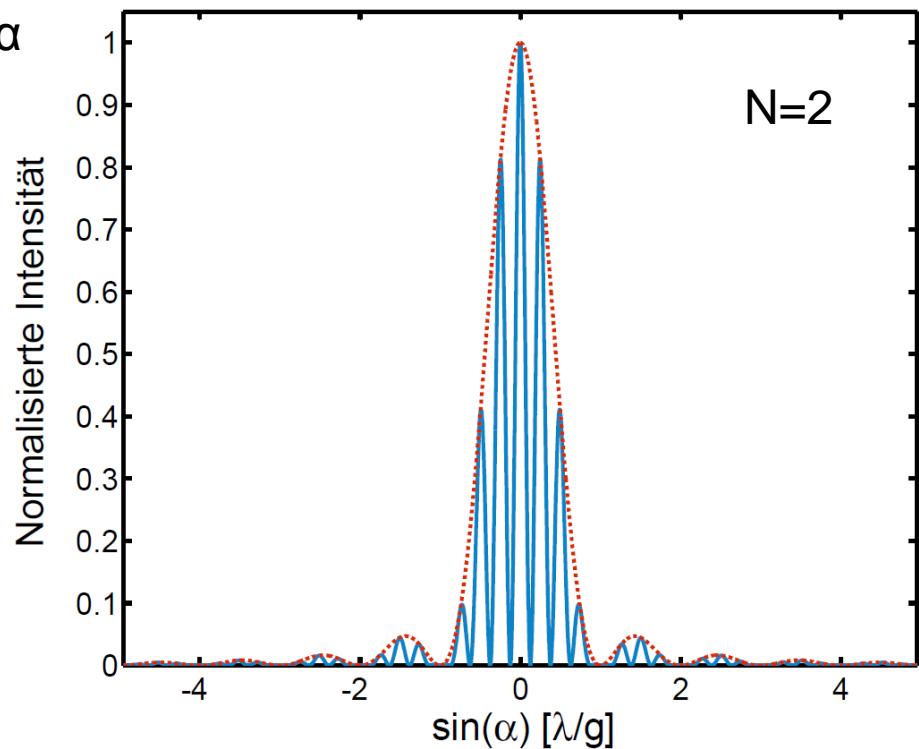
$$I \sim \frac{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2}\right)}{\left(\frac{\Delta\phi_{ges}}{2}\right)^2} \cdot \frac{\sin^2\left(N \frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

Einzelspalt

Spaltabstand & α

$$\frac{\sin^2\left(N \frac{\Delta\phi}{2}\right)}{\sin^2\left(\frac{\Delta\phi}{2}\right)}$$

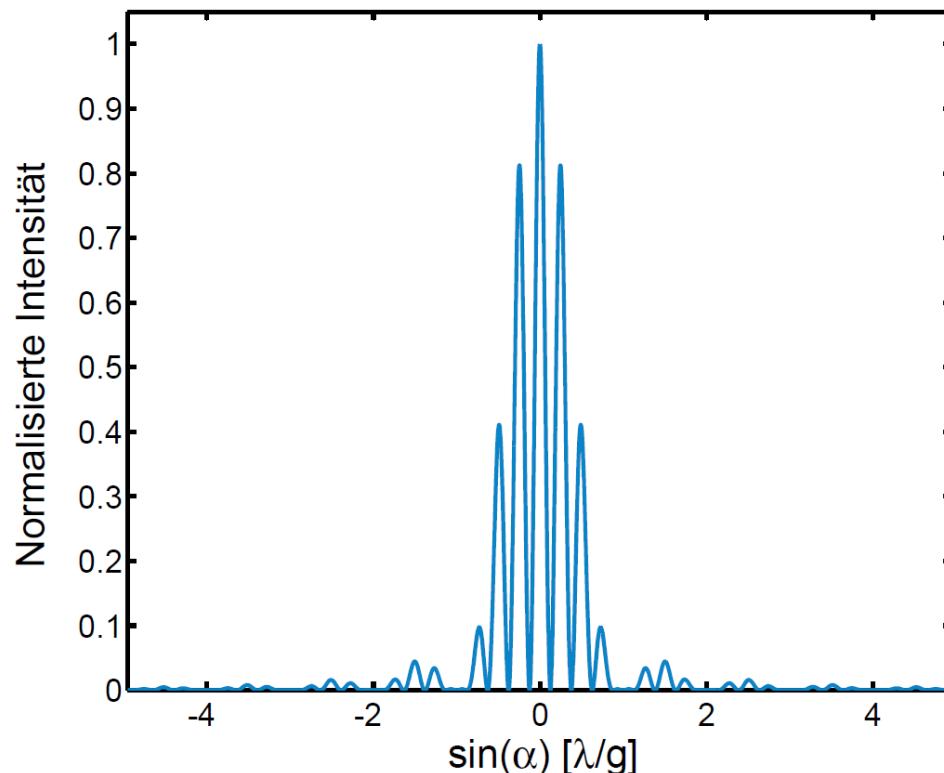
Mehrstrahl-
Interferenz



Beugung - Doppelspalt

Funktion der Intensität
(Winkelabhängig)

Beugungsordnungen
können durch die
überlagerte Einhüllende
unterdrückt werden



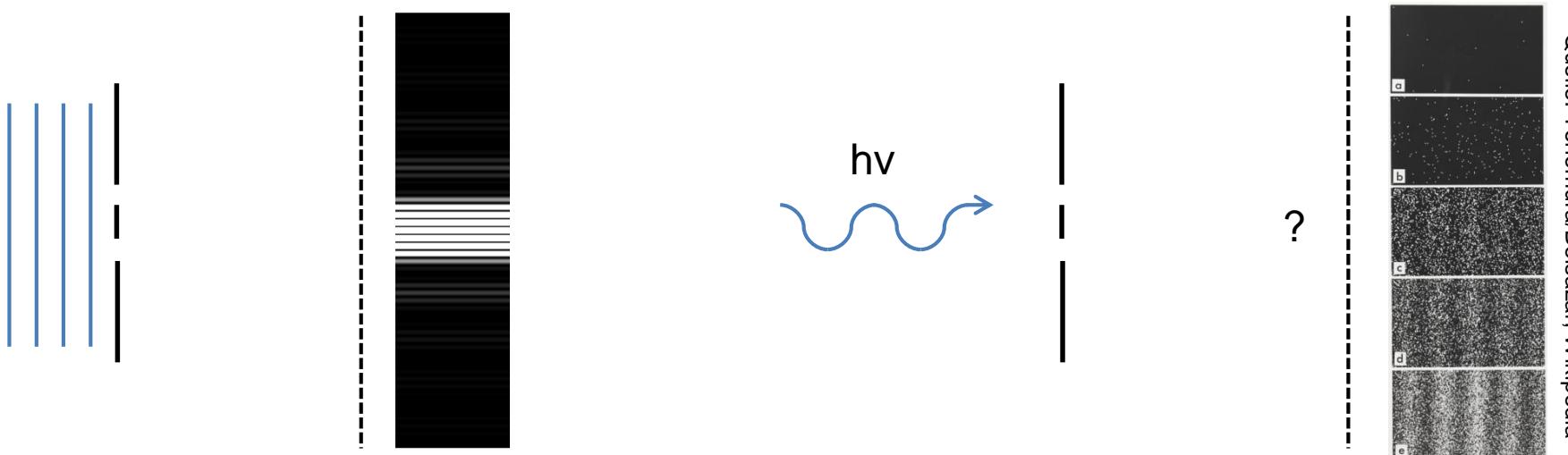
Intensitätsbild auf einem
Beobachtungsschirm
(überhöht)





Beugung - Doppelspalt

Doppelspaltversuch mit einem einzelnen Photon (Quantenoptik)



Beleuchtung mit ebener Welle (viele Photonen) \longrightarrow Beugungsbild

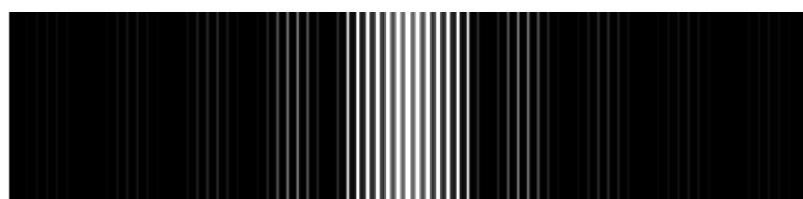
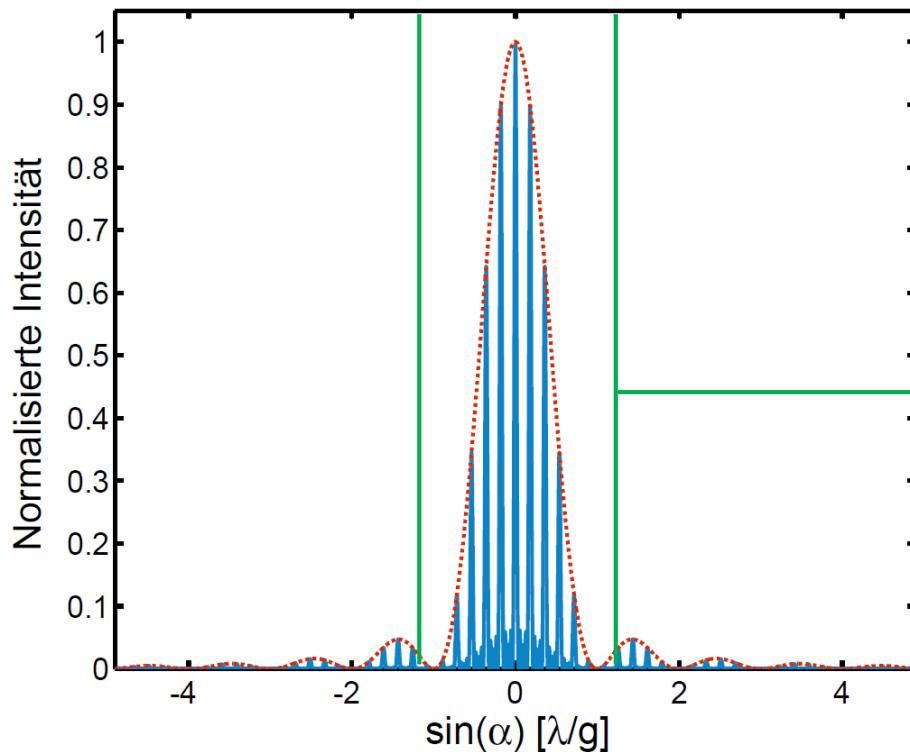
Einzelnes Photon kann nur an einem Ort detektiert werden

Doppelspalt verändert die Aufenthaltswahrscheinlichkeit des Photons

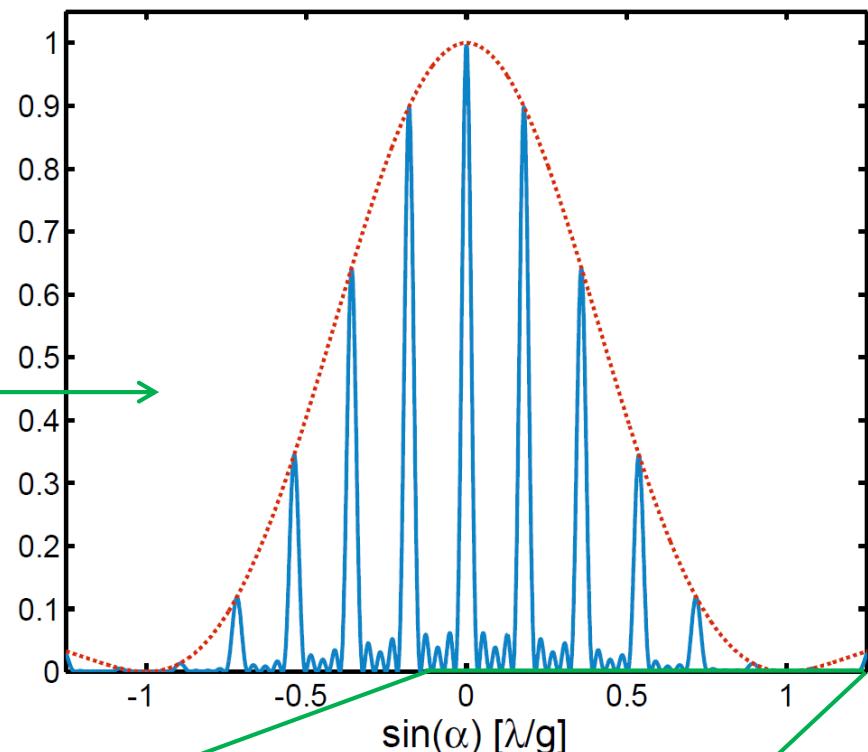
Beugungsfunktion entspricht der Wahrscheinlichkeit das Photon zu detektieren

Beugung - Mehrere Spalte

Beispiel mit $N=5$: schmalere Hauptmaxima, $(n-2)$ Nebenmaxima

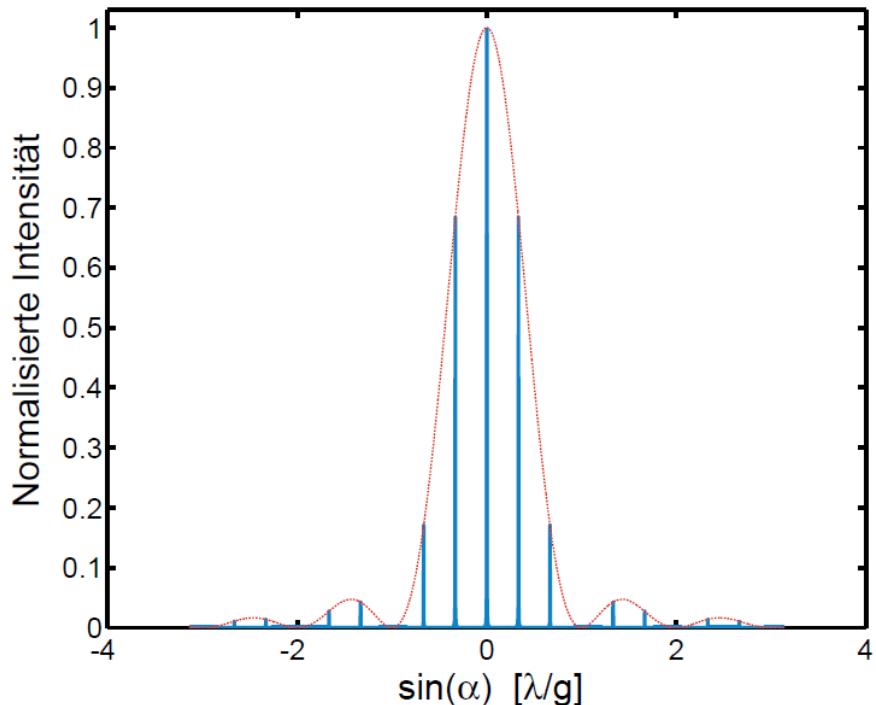
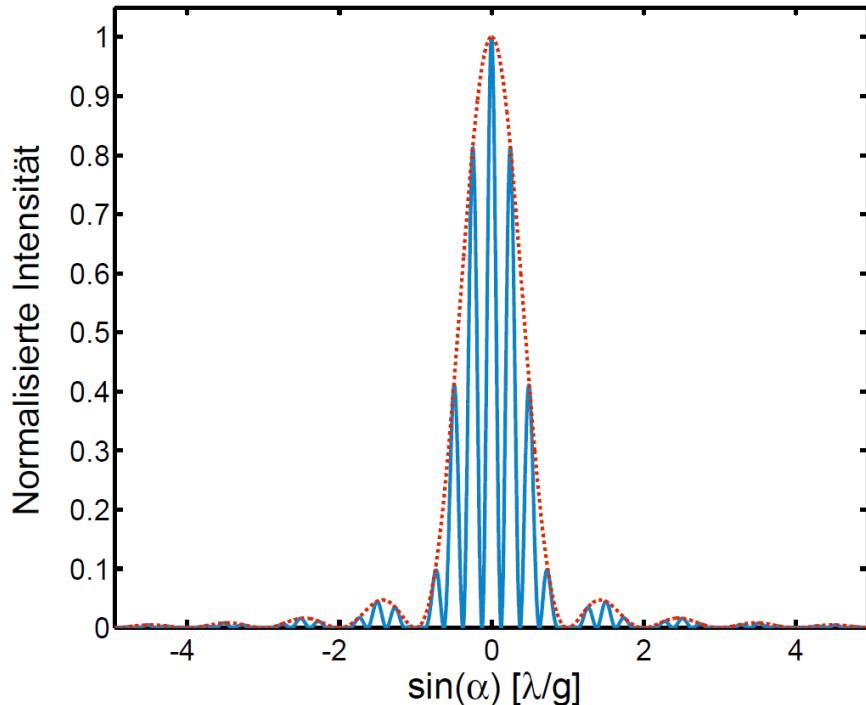


Intensitätsbild (überhöht)



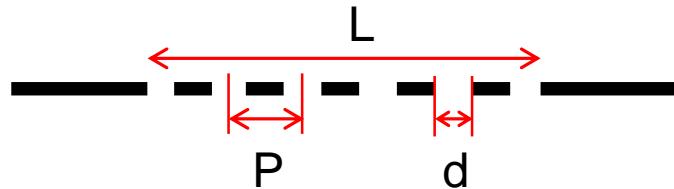
Intensitätsbild (überhöht)

Beugung - Gitter



Regelmäßige Anordnung von vielen Spalten \longrightarrow Gitter

Abhängig von Gitterperiode, Tastverhältnis/Füllfaktor, Anzahl von Gitterperioden



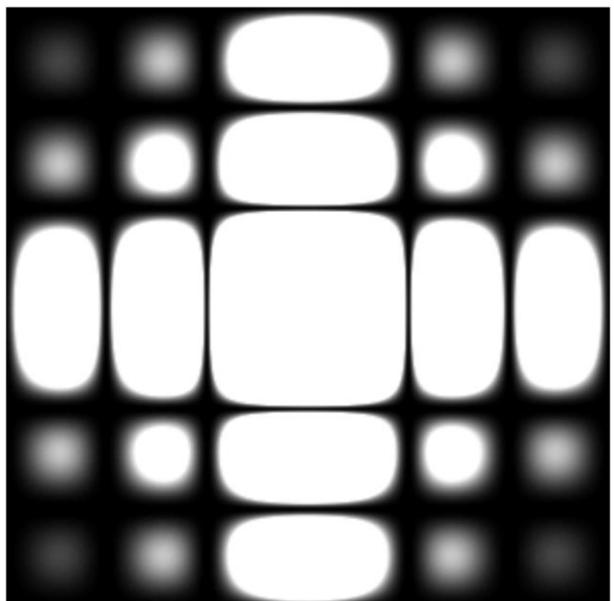
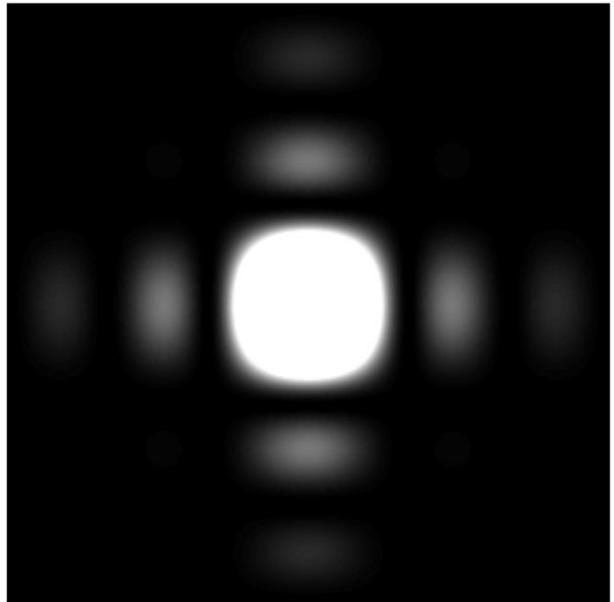
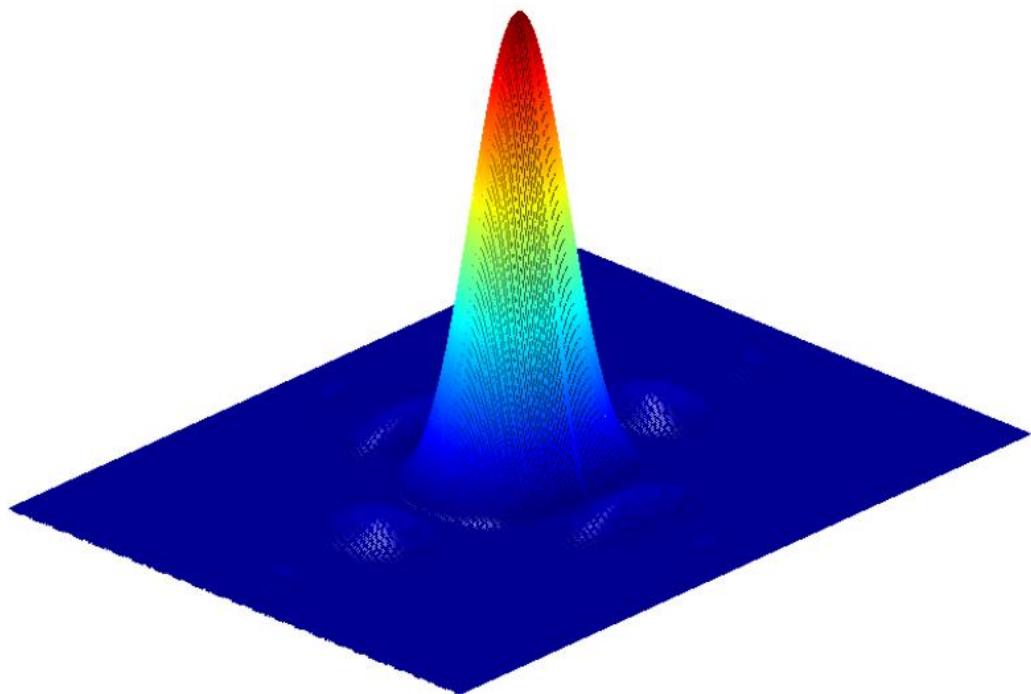
$$dc = ff = \frac{d}{P} \quad \text{und} \quad N = \frac{L}{P}$$

Beugung - 2D Blende (Quadrat)

Beugungsfigur:

Intensitätsverteilung in Fläche
(weit) hinter dem beugenden Objekt

$$I \sim \text{sinc}^2(x) \cdot \text{sinc}^2(y)$$



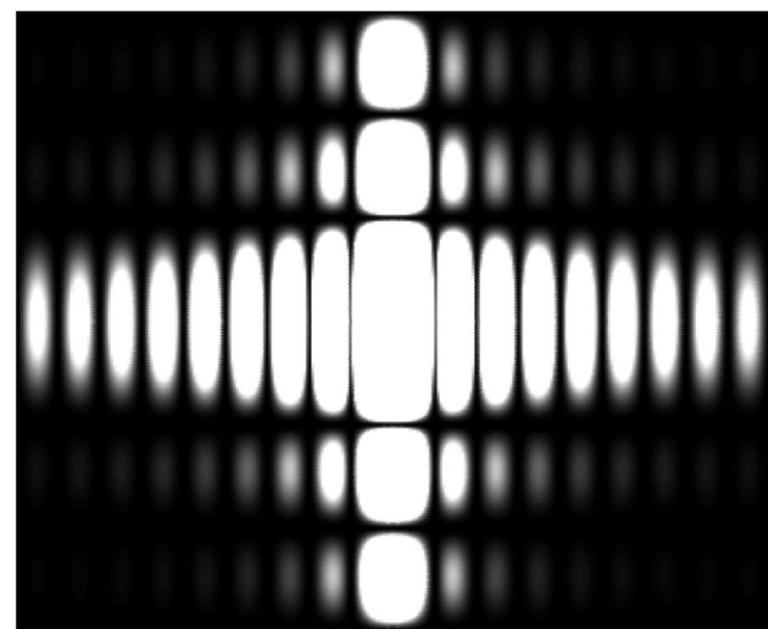
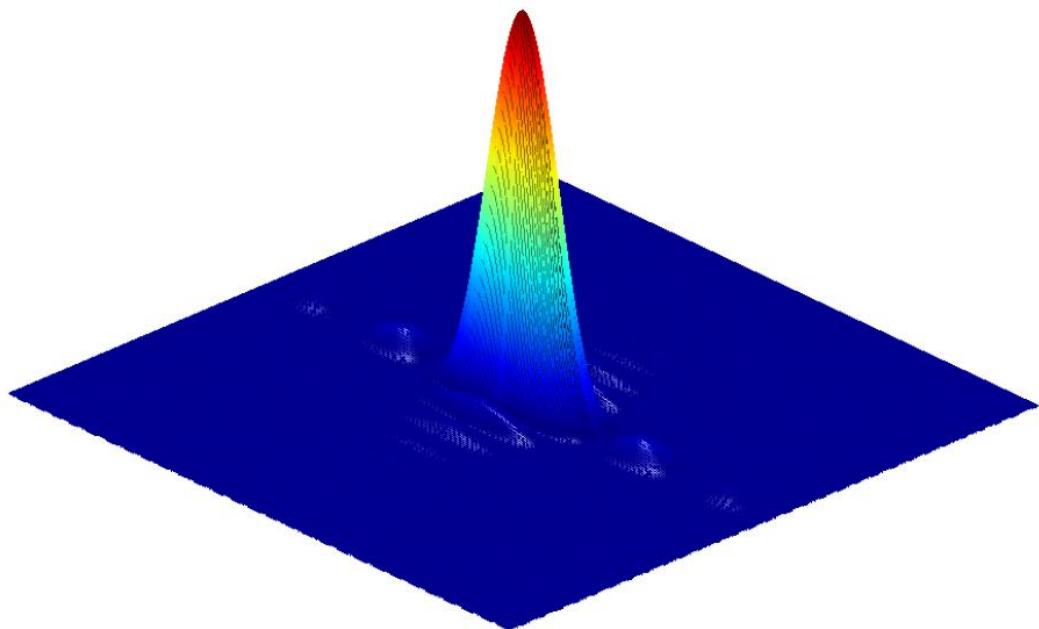
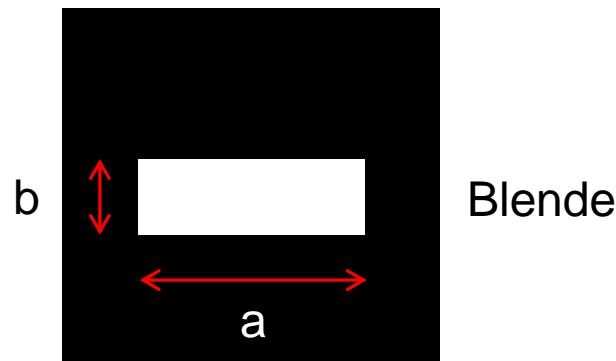
Beugung - 2D Blende (Rechteck)

Beugungsfigur wird asymmetrisch:

enger Spalt \rightarrow größer Beugungswinkel

breiter Spalt \rightarrow kleiner Beugungswinkel

$$I \sim \text{sinc}^2(ax) \cdot \text{sinc}^2(by)$$



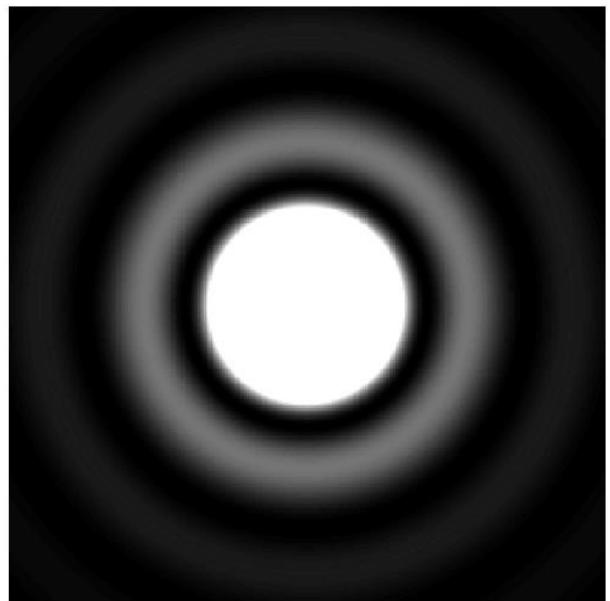
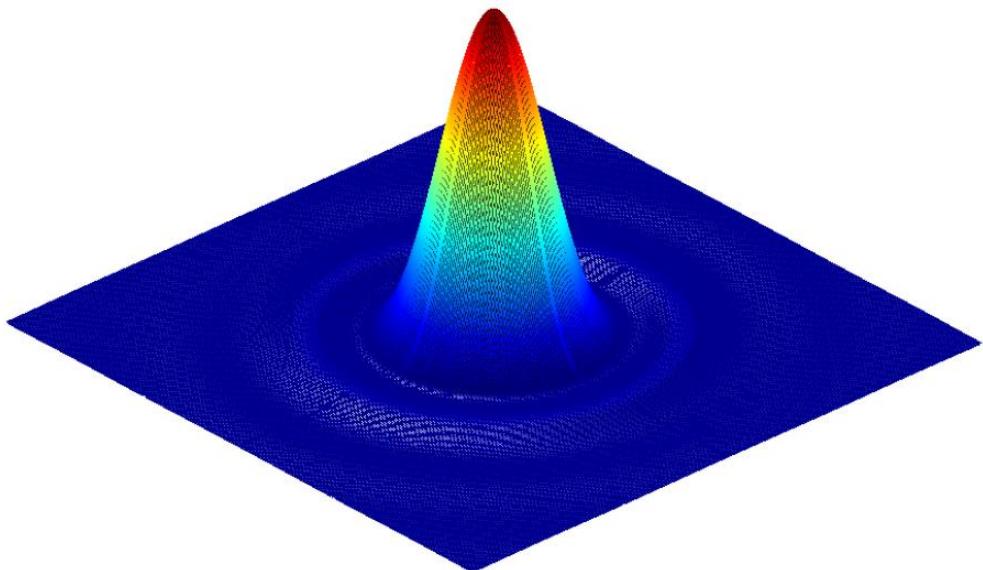
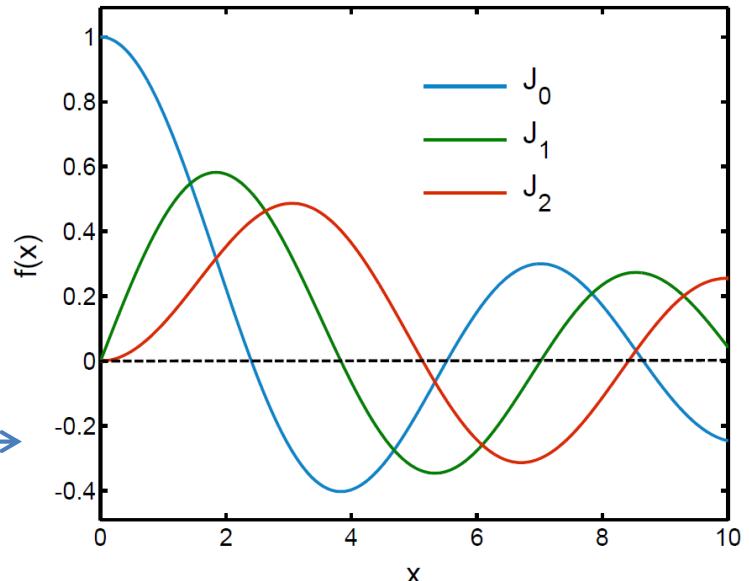
Beugung - 2D Blende (Kreis)

$$I \sim \left[\frac{J_1 \left(\frac{2\pi R}{\lambda} \cdot \sin(\alpha) \right)}{\frac{2\pi R}{\lambda} \cdot \sin(\alpha)} \right]^2$$

J_1 Besselfunktion 1. Art, 1. Ordnung \rightarrow

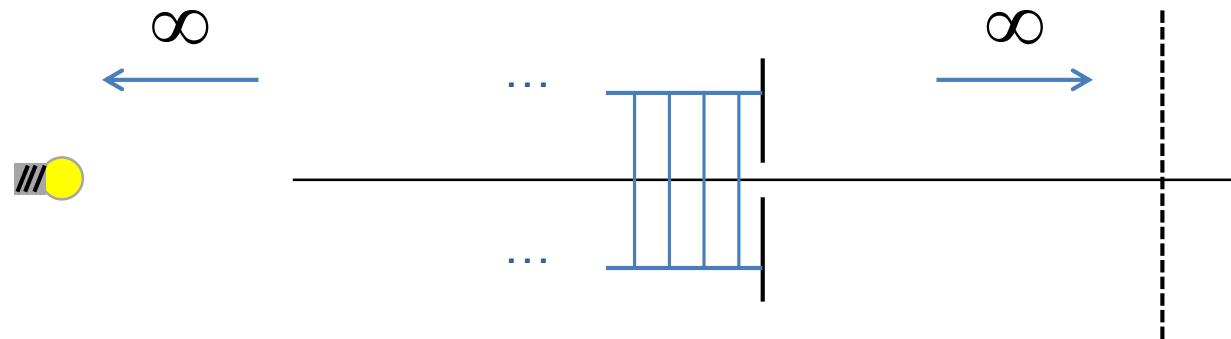
R Blendenradius

α Beugungswinkel

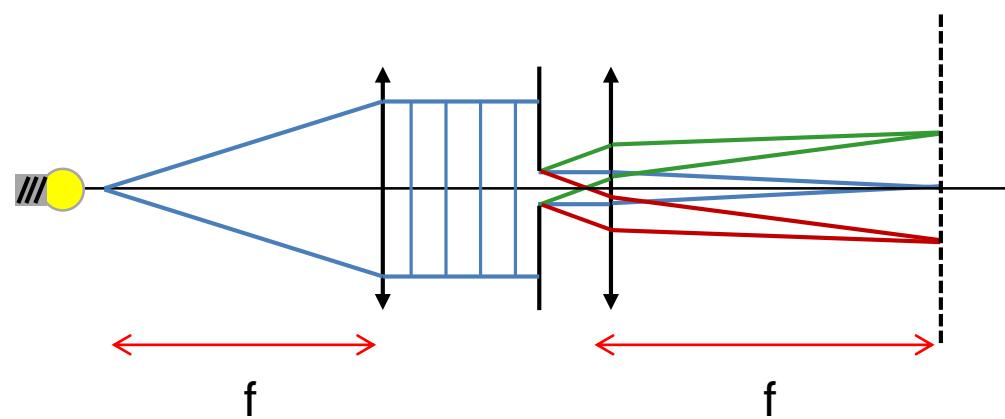


Fresnel / Fraunhofer Beugung

Bisherige Betrachtungen nur für ebene Wellen gültig (Fraunhofer Beugung)
→ d.h. Lichtquelle und Beobachtung im Unendlichen



Leichter realisierbar durch Abbildung mit Linsen



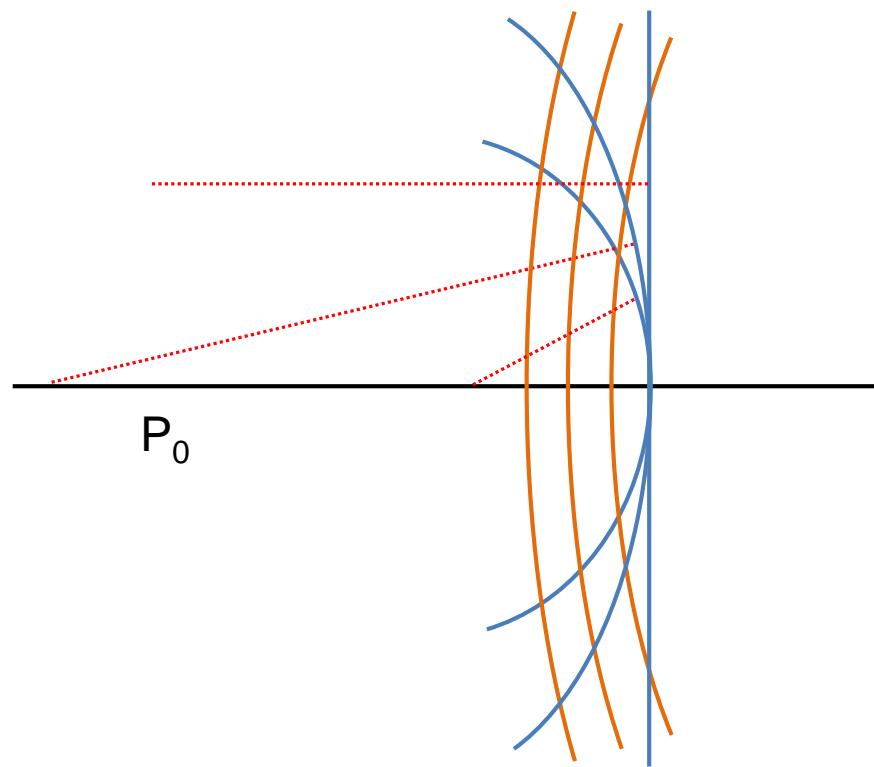
Fresnel / Fraunhofer Beugung

Beleuchtung aus geringem Abstand (Kugelwellen)

Anschauliche Erklärung durch Zonenkonstruktion

Deutliche Änderung der Beugungseigenschaften
für unterschiedliche Kugelwellen

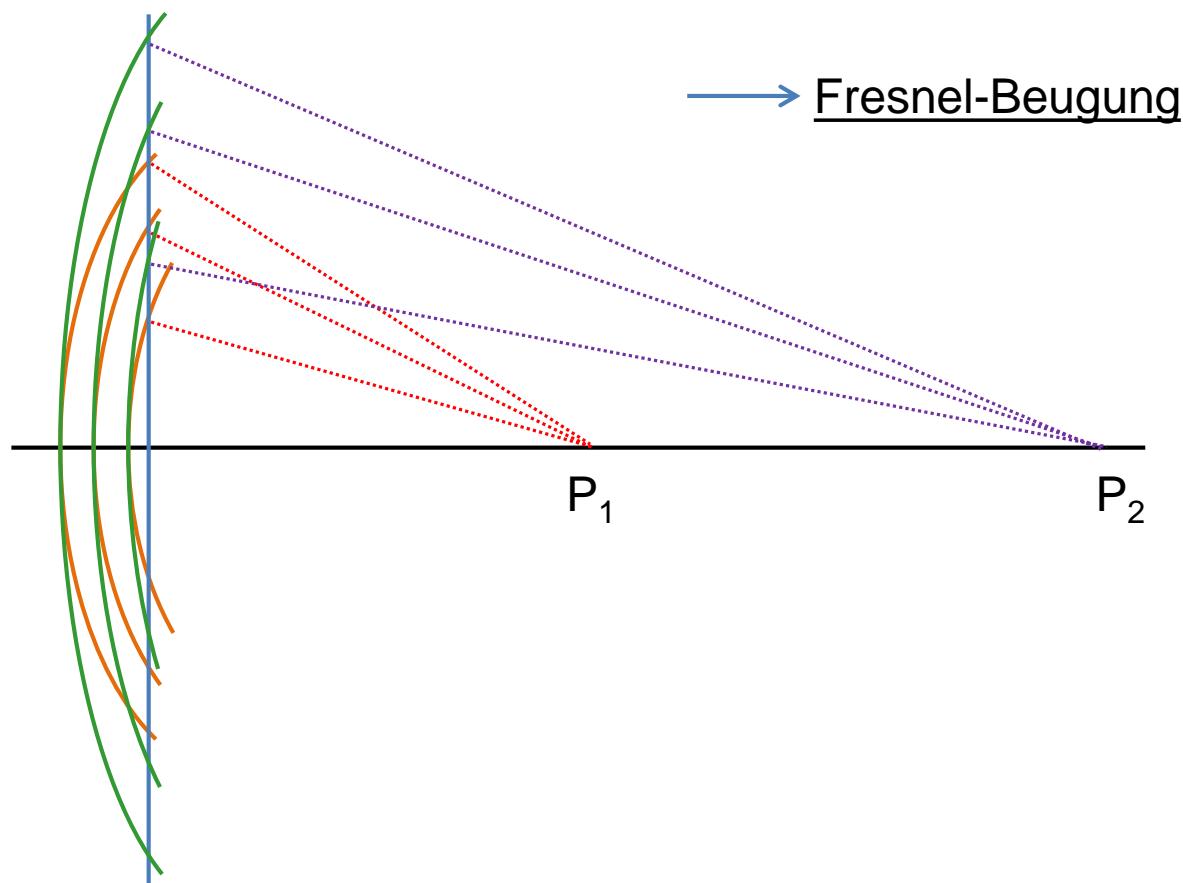
→ Fresnel-Beugung



Fresnel / Fraunhofer Beugung

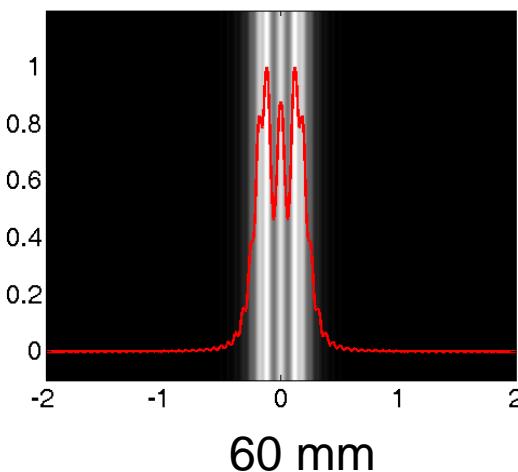
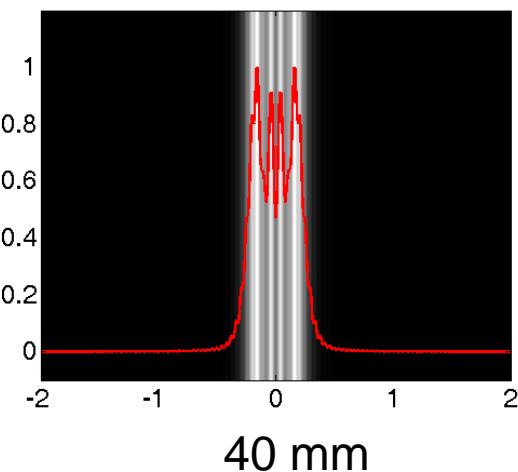
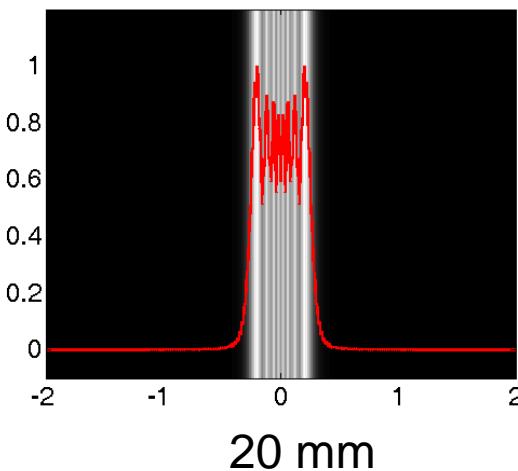
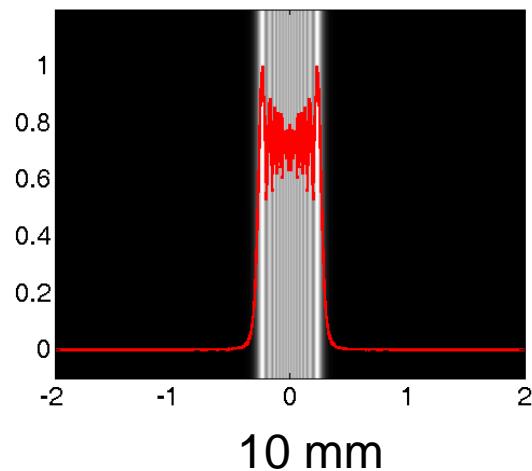
Beleuchtung mit ebener Welle, aber Beobachtung aus geringem Abstand

Deutliche Änderung der Beugungseigenschaften/-bilder für unterschiedliche Beobachtungsabstände

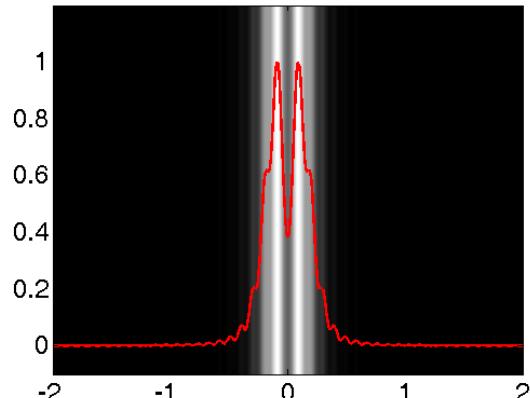


Fresnel / Fraunhofer Beugung

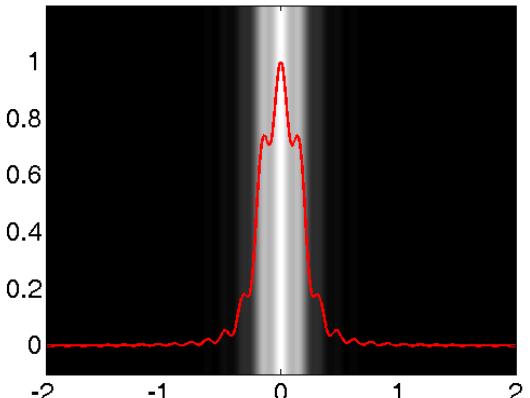
Beugungsbild eines aus ∞ beleuchteten Spalts ($0,6 \text{ mm}$, $\lambda = 600 \text{ nm}$)



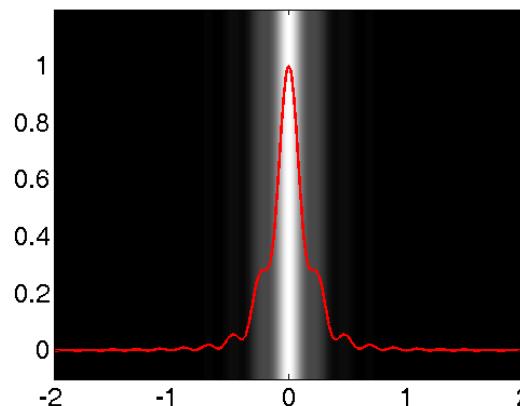
Fresnel / Fraunhofer Beugung



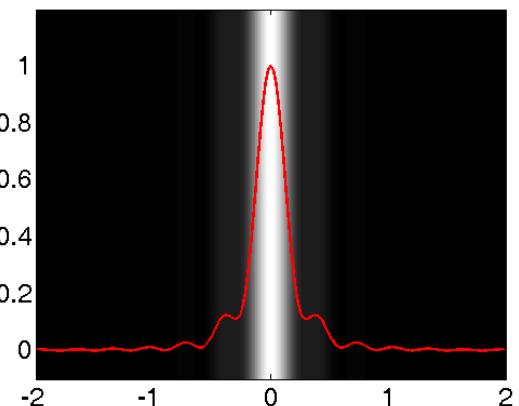
90 mm



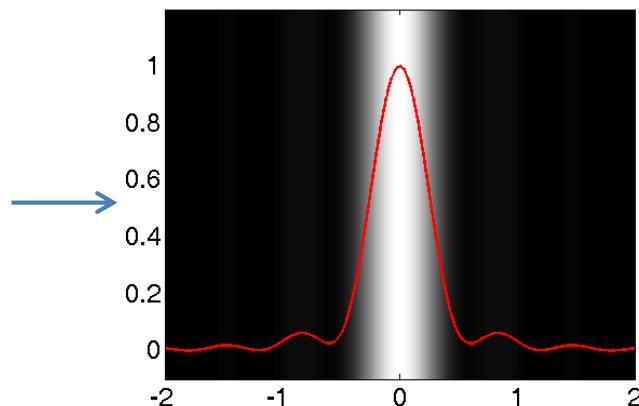
140 mm



200 mm



300 mm

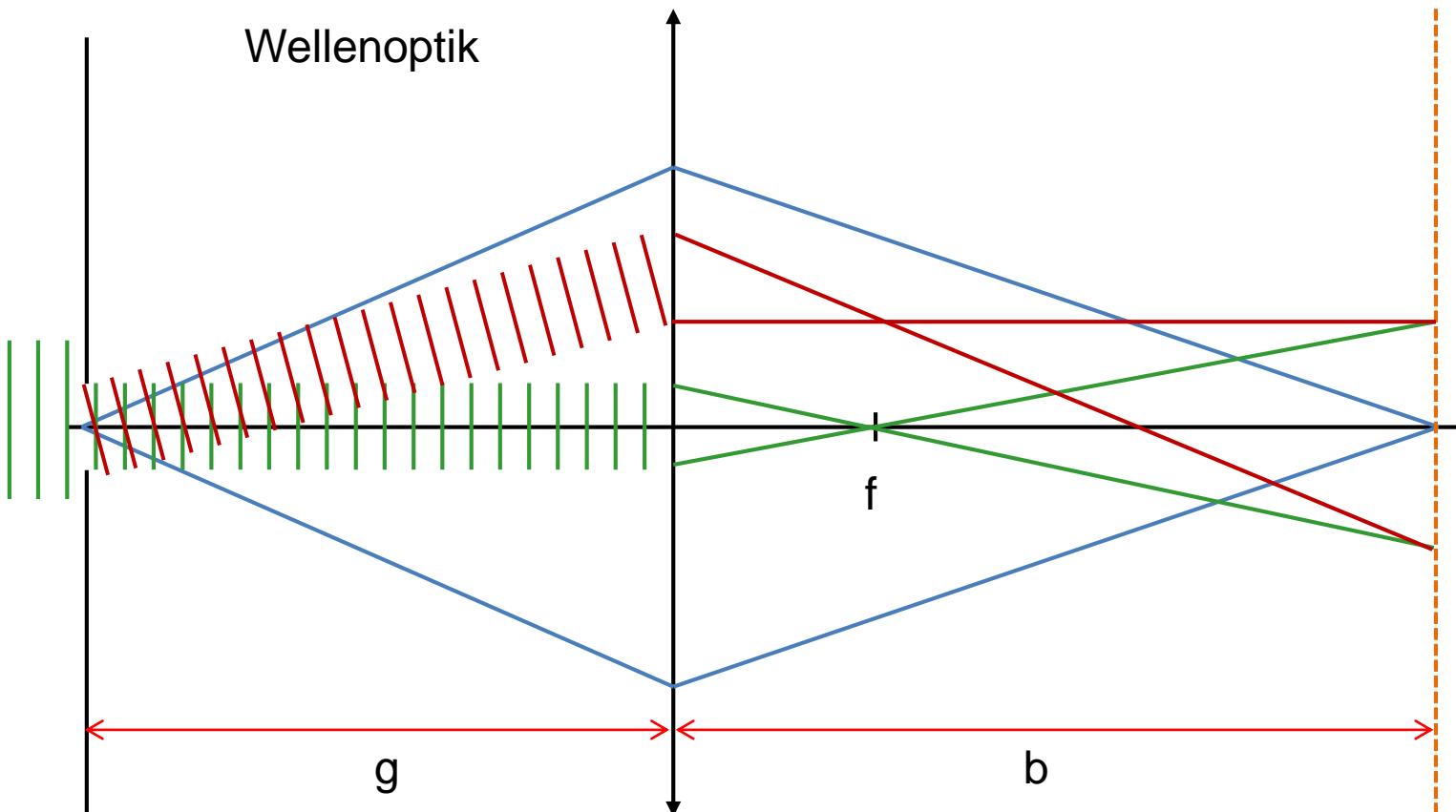


600 mm

Für große Abstände Spalt / Schirm → Fraunhofer Beobachtungsart
Fraunhofer Beugungsfigur ähnelt dem Objekt (letztes Bild)

Abbildung - Wellenoptisch

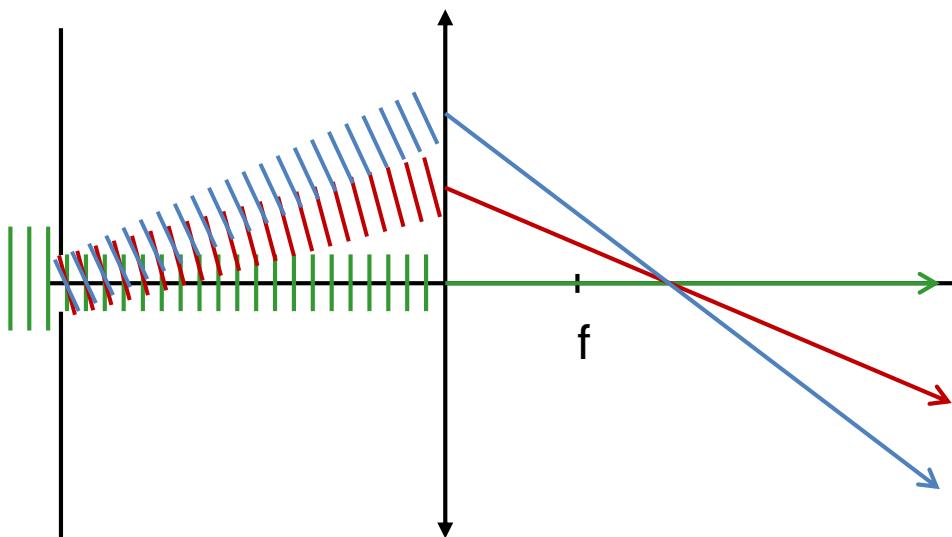
geometrische Optik



für alle Beugungswinkel
(hier nur zwei Beispiele)

Superposition aller Wellen
→ Bildentstehung

Abbildung - Wellenoptisch



Kleine Strukturen im Objekt → großer Beugungswinkel

→ großer Winkel zwischen interferierenden Wellen

→ kleine Strukturen (Perioden) im Interferenzbild

Beugungswinkel wird durch Rand des optischen System begrenzt

→ Informationen der kleinen Strukturen fehlen im Bild

→ Begrenzung des Auflösungsvermögens

Abbildung - Wellenoptisch

Abbildung eines idealen Punktes
(z.B. Stern)

Optische Systeme sind im
allgemeinen rotationssymmetrisch

→ Punktbild entspricht
Beugungsfigur an Kreisblende

Intensität innerhalb des ersten
Minimums → Airy-Scheibchen

Nullstellen der Funktion:



$$\sin(\alpha_1) = 0.610 \frac{\lambda}{R}$$

$$\sin(\alpha_2) = 1.116 \frac{\lambda}{R}$$

$$\sin(\alpha_3) = 1.619 \frac{\lambda}{R}$$

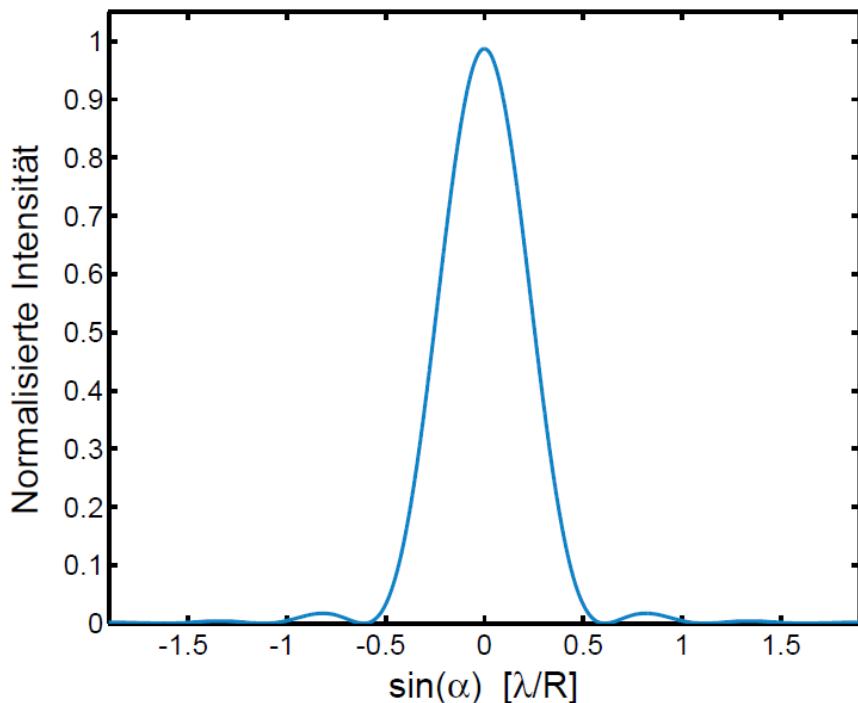
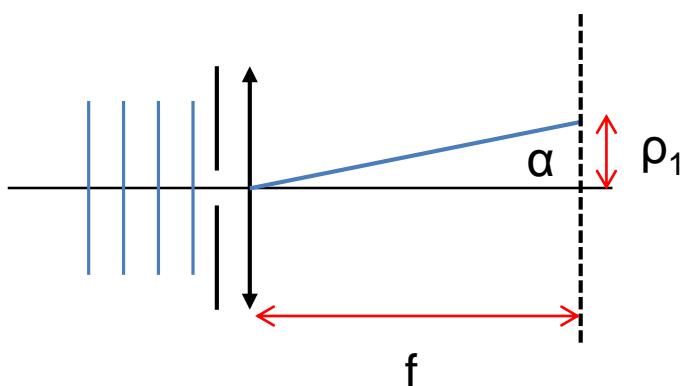


Abbildung - Wellenoptisch

Kriterium für Auflösungsgrenze:

Maximum des Punkbildes liegt im
1. Minimum eines benachbarten
Punktbildes (Rayleigh-Kriterium)

$$\rho_1 = 0.610 \cdot \frac{\lambda f}{R}$$



$$\rightarrow \sin(\alpha) \approx \frac{\rho_1}{f} = 0.610 \frac{\lambda}{R}$$

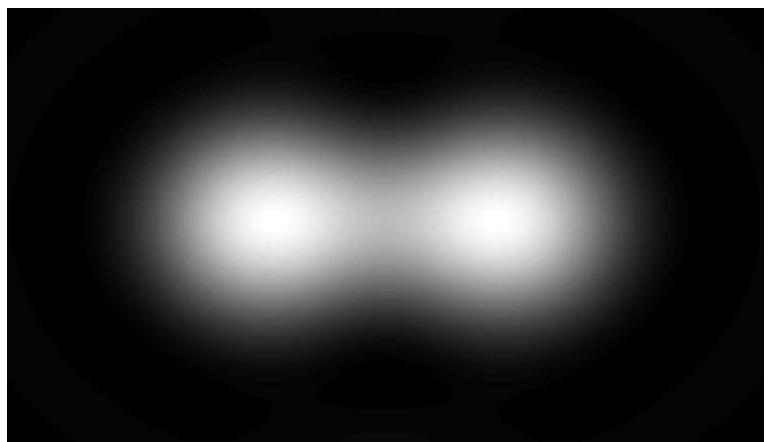
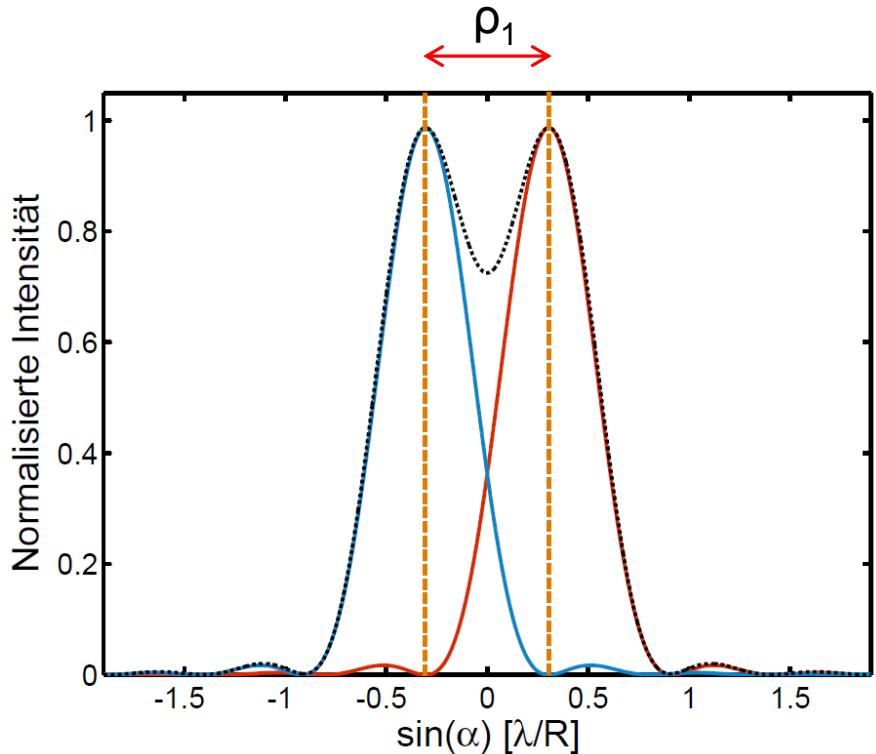
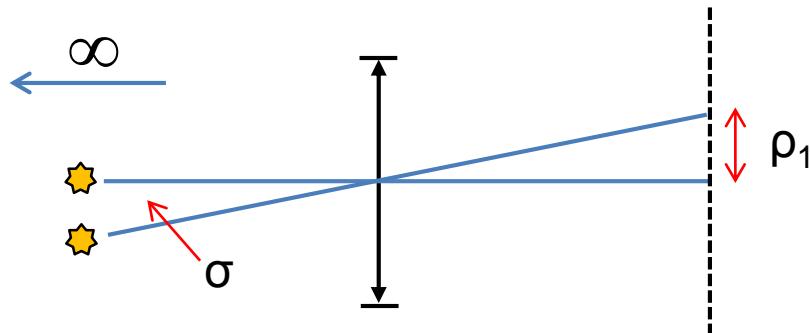


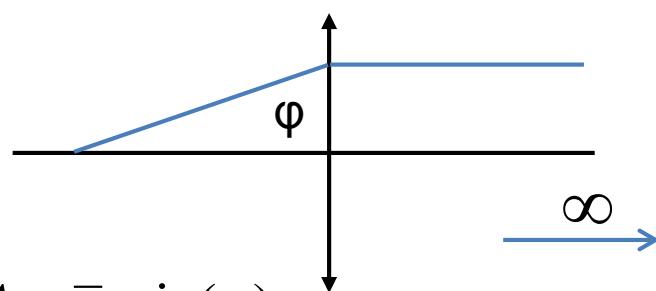
Abbildung - Wellenoptisch

Winkelauflösung von Teleskopen:



$$\sin(\sigma) = 0.610 \cdot \frac{\lambda}{R}$$

Auflösungsgrenze von Mikroskopen

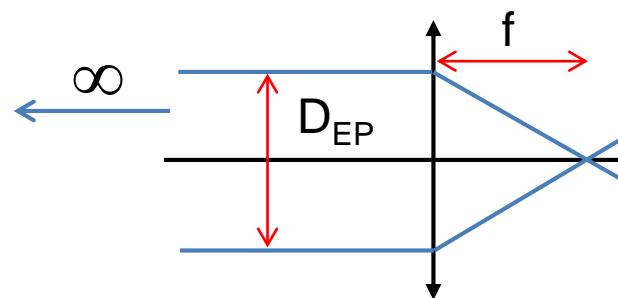


$$\text{mit } NA = \bar{n} \cdot \sin(\varphi)$$

$$\rho_1 = 0.610 \cdot \frac{\lambda}{NA}$$

und

Objektiven:



$$\text{mit } k = \frac{f}{D_{EP}} \quad \text{und} \quad NA = \frac{1}{2 \cdot k}$$

$$\rho_1 = 1.22 \cdot \lambda k$$

Wellenoptik

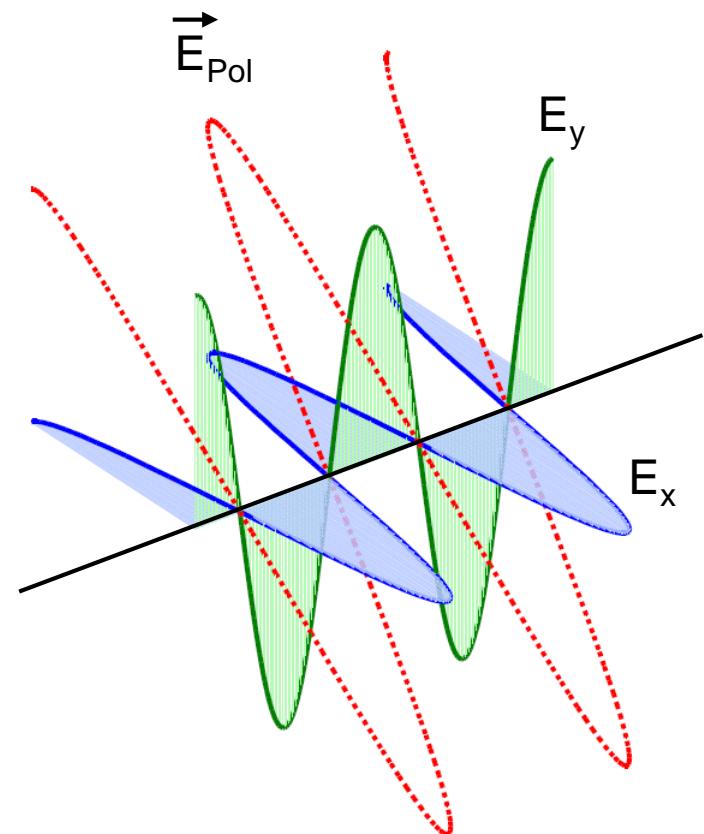
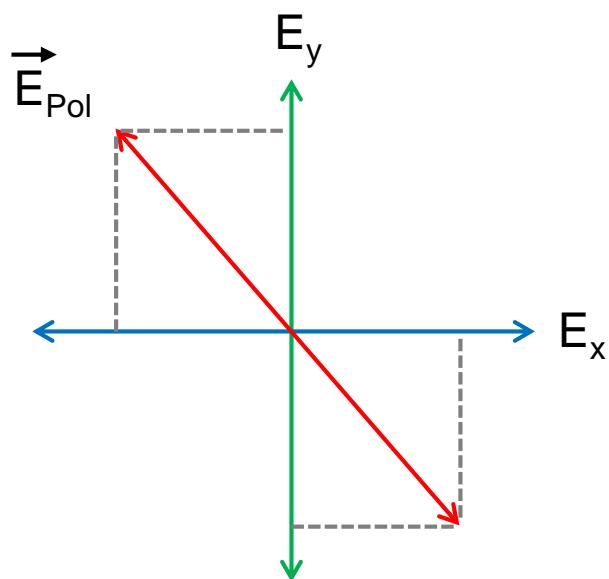
(Polarisation)

Polarisation von EM Wellen

EM Wellen schwingen transversal

- Schwingungsebene
- Polarisation der Welle

kann aus zwei Komponenten E_x und E_y zusammengesetzt werden

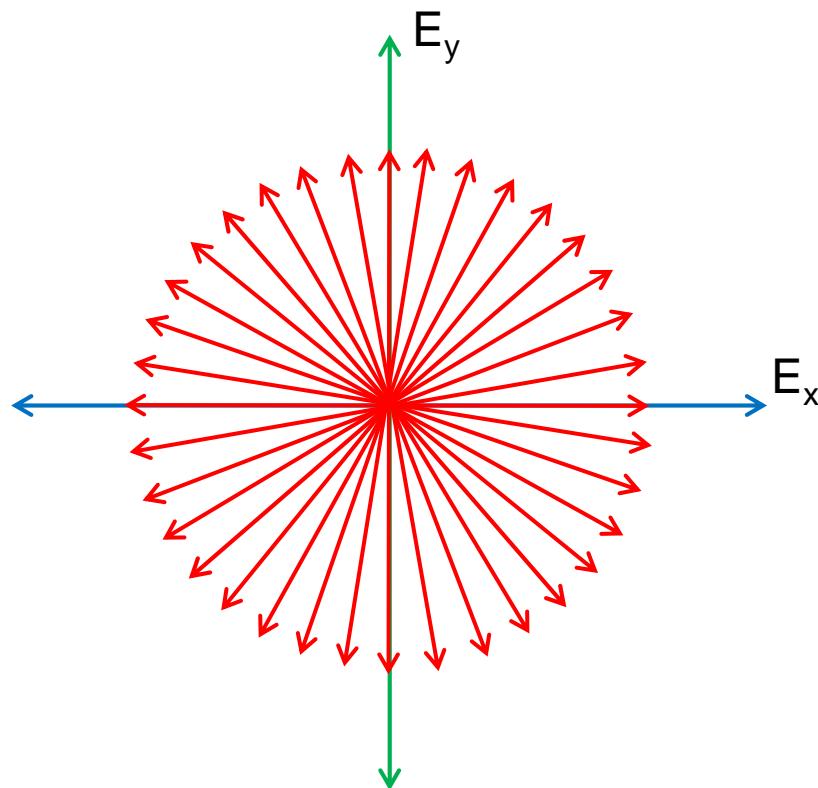


Unpolarisiertes Licht

Natürliche Lichtquellen \longrightarrow spontane Emission

\longrightarrow statistische Verteilung von Phase, Richtung, Polarisation und evtl. λ

\longrightarrow d.h. im zeitlichen Mittel sind alle Polarisationsebenen vorhanden



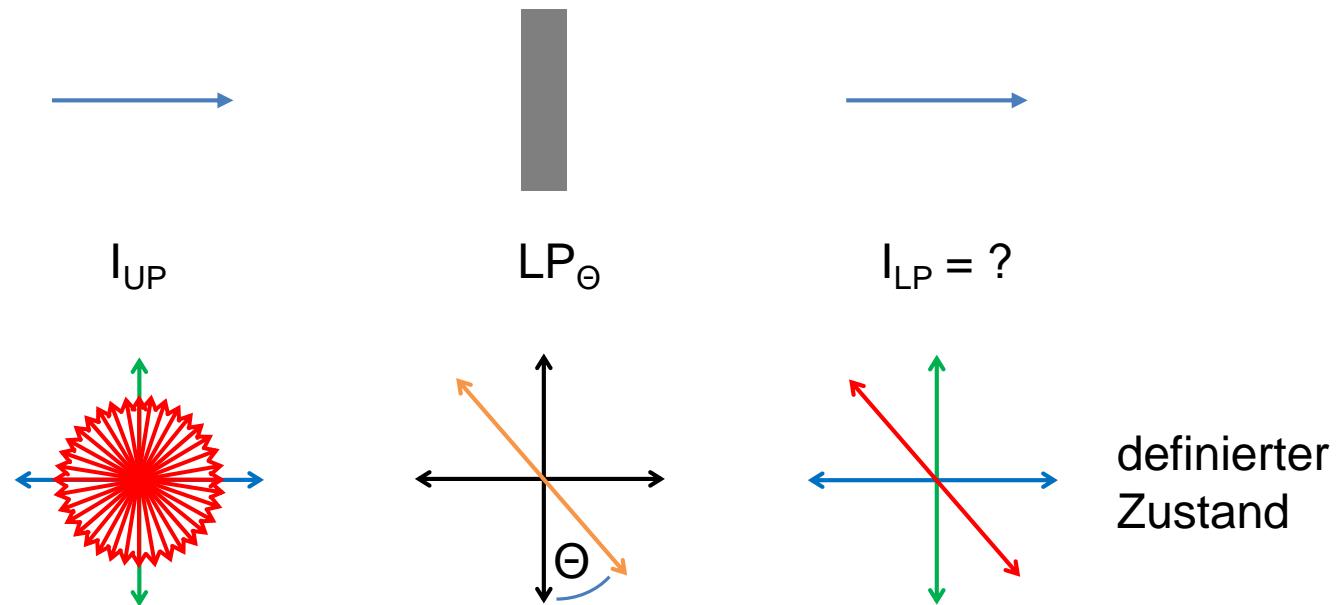
im Idealfall:

- alle Richtungen gleich häufig
- alle Richtungen gleich stark

Linear-Polarisationsfilter

Filter ist polarisationsabhängig, nur eine Schwingungsebene wird transmittiert

z.B. Drehwinkel $\Theta = 0^\circ \rightarrow T = 1$, Drehwinkel $\Theta = 90^\circ \rightarrow T = 0$



Unpolarisiertes Licht: alle Richtungen gleich $\rightarrow I_x = I_y$

$$\rightarrow I_{LP} = \frac{1}{2} I_{UP}$$

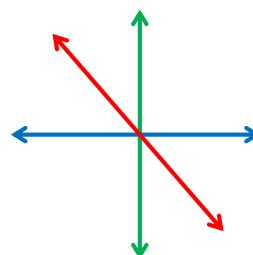
unabhängig von Drehwinkel Θ

Linear-Polarisationsfilter

Linear polarisiertes Licht fällt auf Polarisationsfilter LP



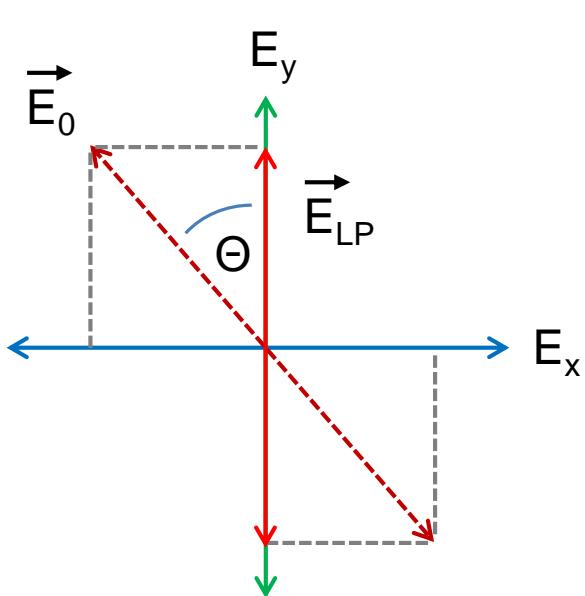
I_0



LP_Θ



$I_{LP} = ?$



$$|\vec{E}_{LP}| = |\vec{E}_0| \cdot \cos(\theta)$$

da $I \sim |E|^2 \longrightarrow I_{LP} = I_0 \cdot \cos^2(\theta)$
(Regel von Malus)

Linear-Polarisationsfilter

spezielle Fälle:

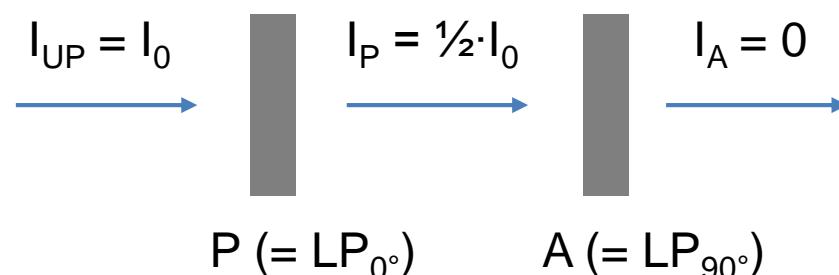
$$\theta = 0^\circ \rightarrow I_{LP} = I_0$$

$$\theta = 45^\circ \rightarrow I_{LP} = 0.5 \cdot I_0$$

$$\theta = 90^\circ \rightarrow I_{LP} = 0 \cdot I_0$$

wichtiger Aufbau für Messungen:

Polarisator-/Analysator-Anordnung (gekreuzte Anordnung)

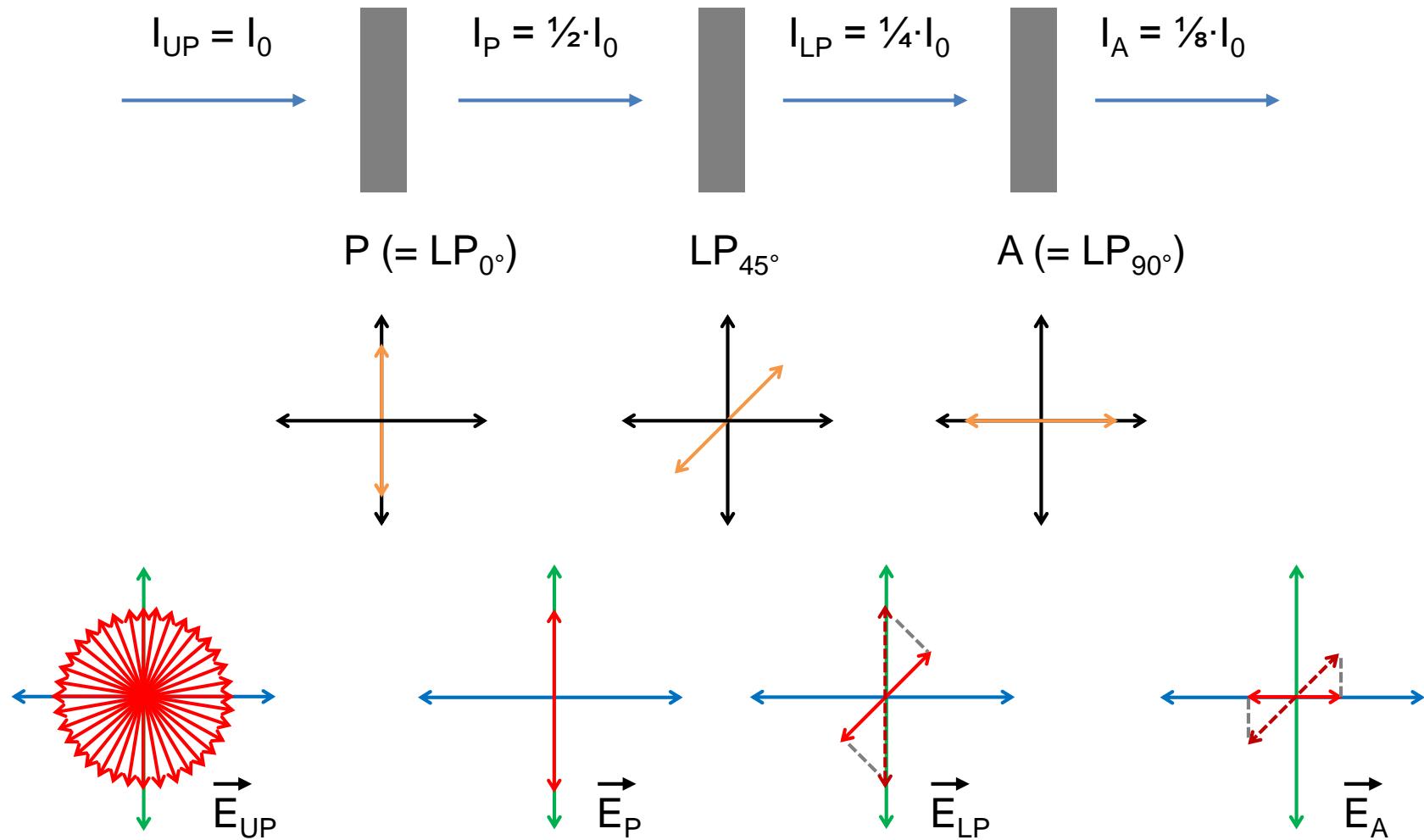


Einbringen einer Probe zwischen Polarisator und Analysator

→ Änderung der Polarisierung → Änderung der Intensität I_A (messbar)

Linear-Polarisationsfilter

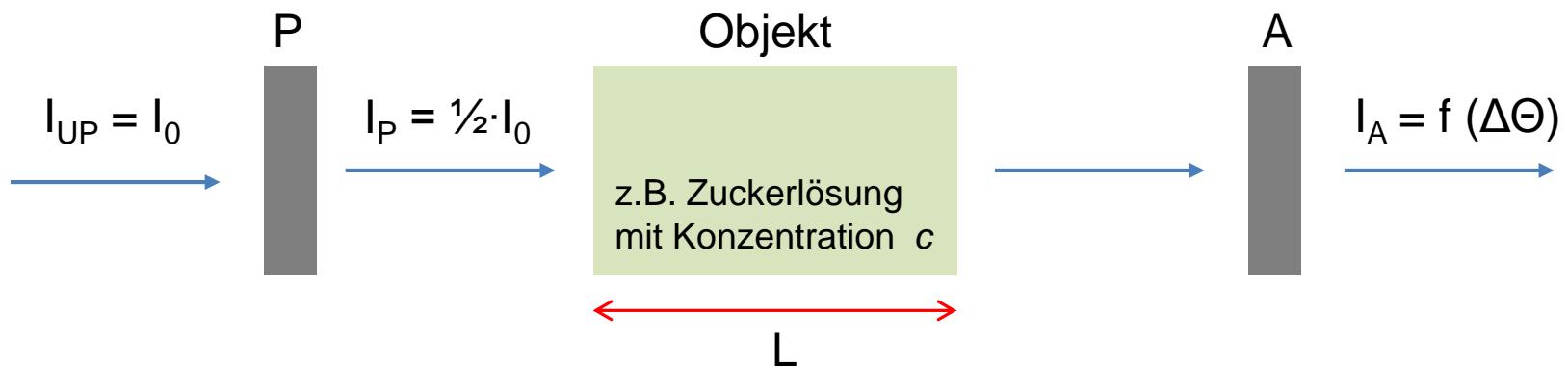
Beispiel: dritter Polfilter mit $\Theta = 45^\circ$ zwischen P und A



Optische Aktivität

Eigenschaft von speziellen Materialien:

Lage der Schwingungsebene einer Welle wird bei Durchlaufen des Materials kontinuierlich gedreht (nicht mit **laseraktiven** Materialien zu verwechseln !)



$$\Delta\theta \sim c$$

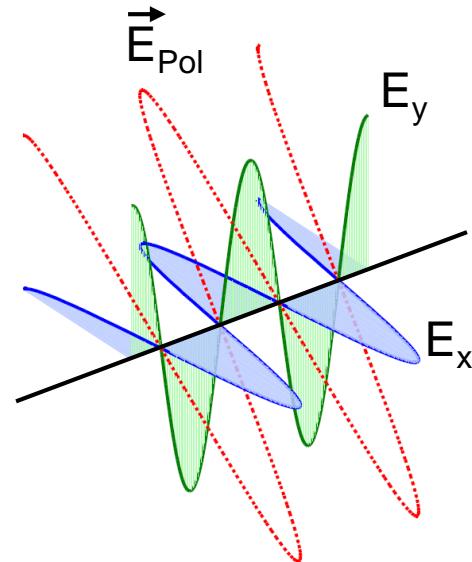
$$\Delta\theta \sim L$$

Allgemeine Beschreibung von Polarisation

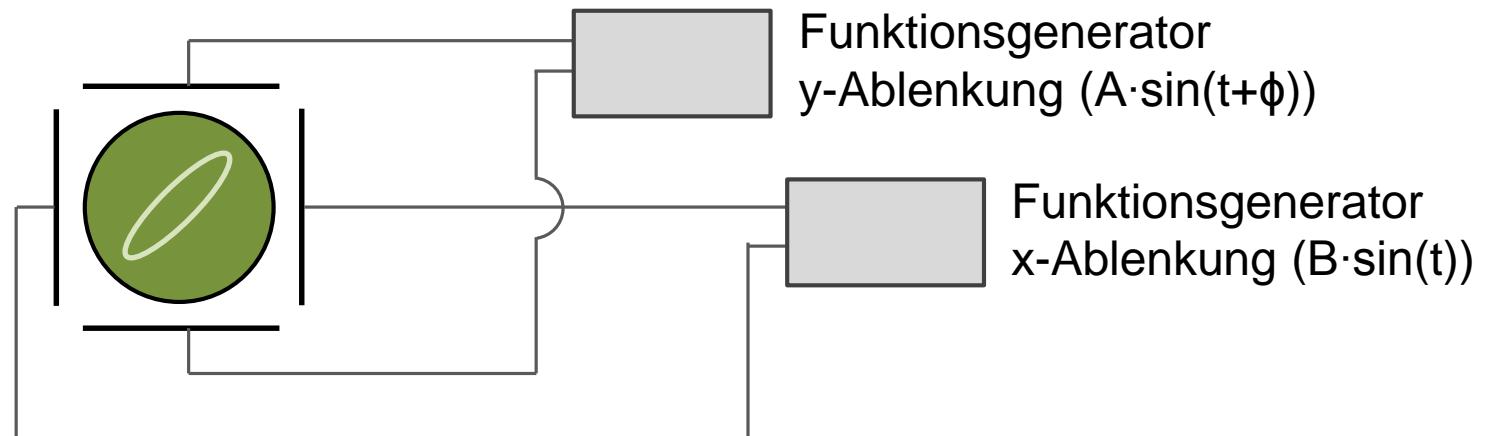
Bisher: Linear polarisiertes Licht durch Vektoraddition von E_x und E_y

d.h. Superposition von Wellen, aber keine Interferenz (nur senkrechte Komponenten)

Zusätzlich ist aber auch ein Phasenversatz zwischen E_x und E_y möglich

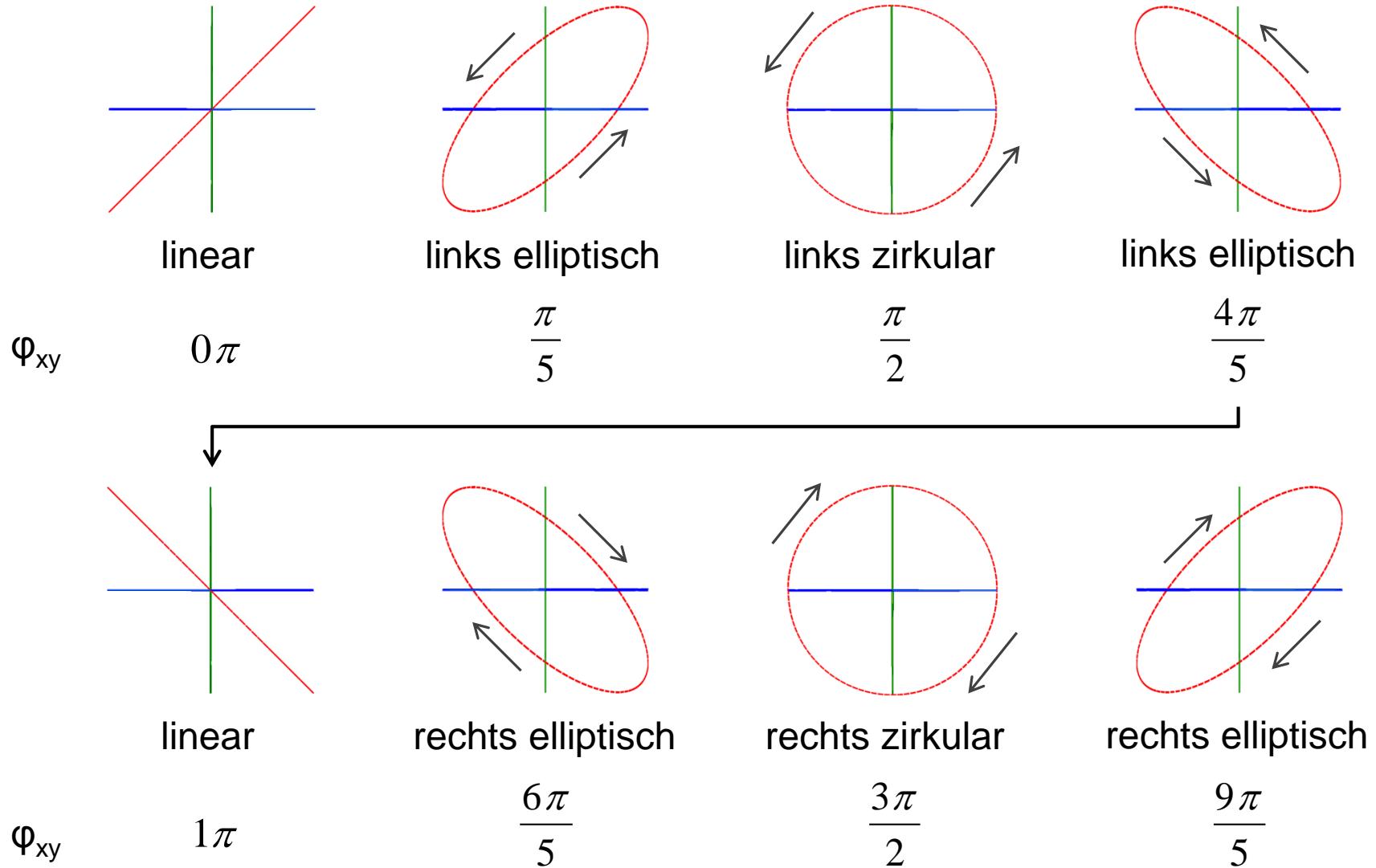


→ entspricht Lissajous-Figuren am Oszilloskop

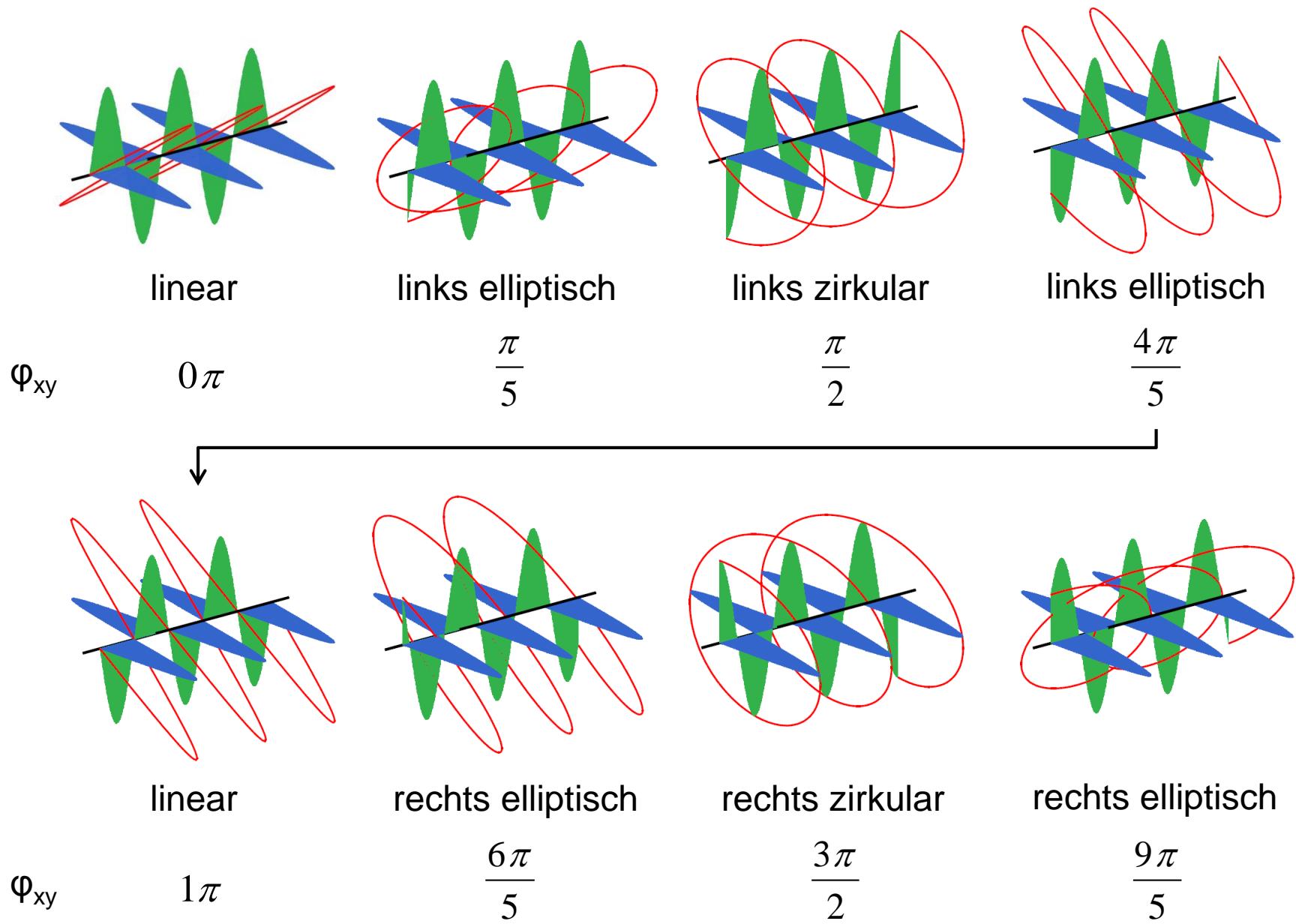


Allgemeine Beschreibung von Polarisation

Veränderung von Phasenversatz Φ_{xy} mit $E_x = E_y$



Allgemeine Beschreibung von Polarisation



Allgemeine Beschreibung von Polarisation

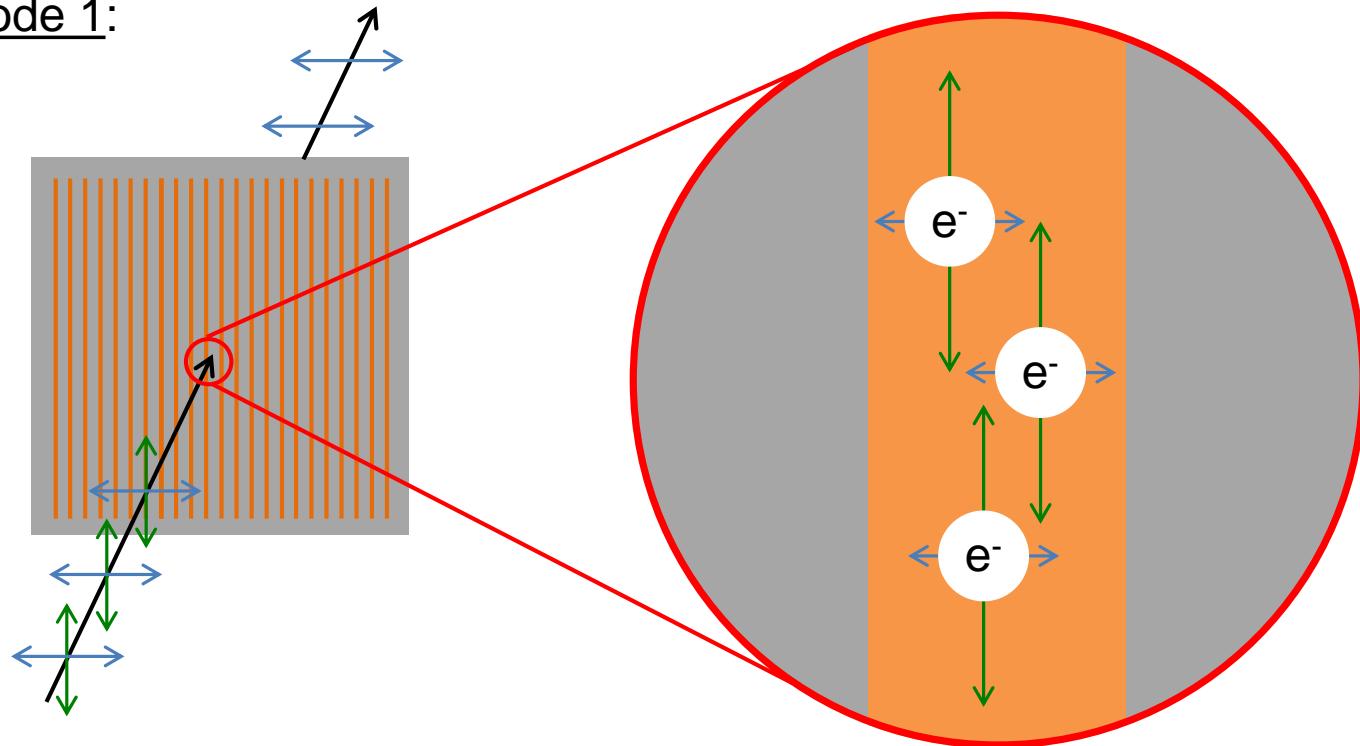
Mathematische Beschreibung:

$$\vec{E} = E_x \cdot \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r}) + E_y \cdot \sin(\omega t - \vec{k} \vec{r} + \varphi_{xy})$$

- Zirkular polarisiertes Licht nur möglich wenn $E_x = E_y$
- Elliptisch polarisiertes Licht ist der allgemeine Zustand, linear und zirkular polarisiertes Licht sind Sonderfälle
- Elliptisch polarisiertes Licht bedeutet nicht zwingend, dass $E_x \neq E_y$
- Polarisationszustände sind nie perfekt —> Polarisationsgrad

Linear-Polarisationsfilter

Methode 1:



- Folie mit langkettigen, evtl. gestreckten (organischen) Molekülen
- Bewegliche Ladungsträger absorbieren EM Wellen
- Ähnliche Polarisatoren durch Strukturierung (Gitter)
- Dichroitische Kristalle (polarisationsabhängige Absorption)

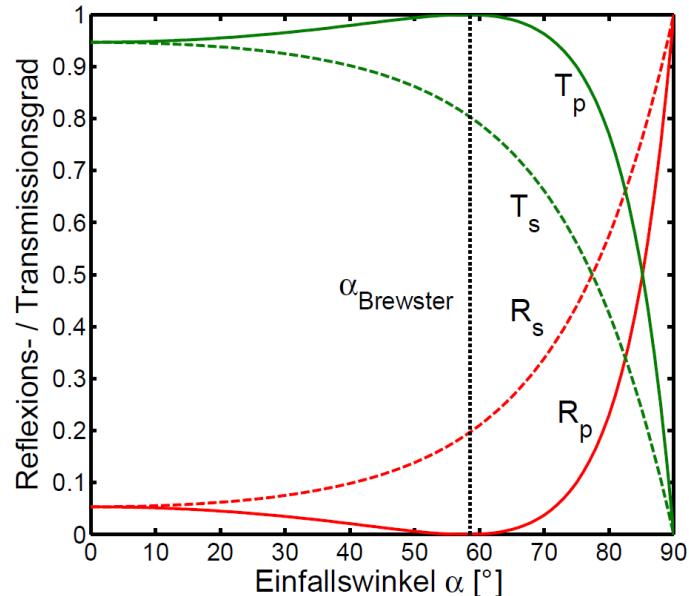
Linear-Polarisationsfilter

Methode 2: Ausnutzung des Brewster-Winkels (Fresnel-Formeln)

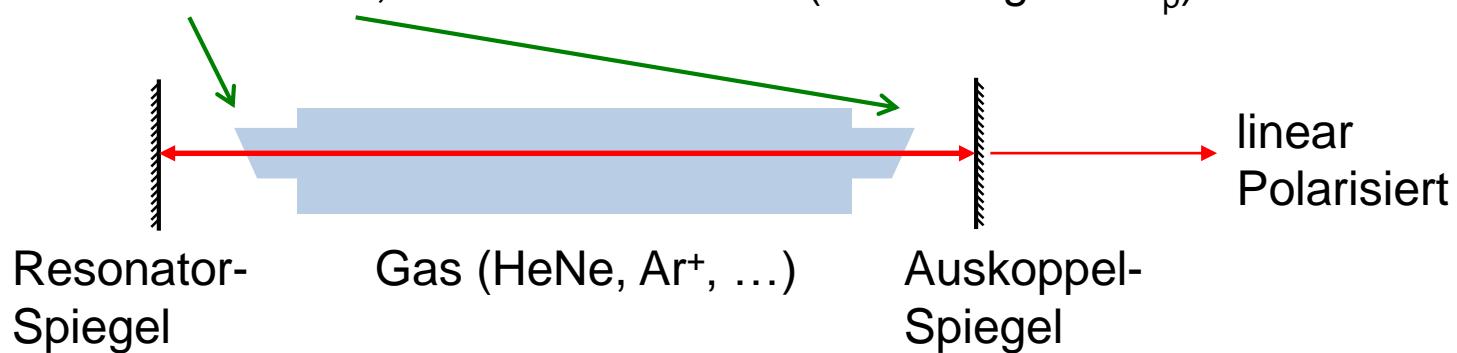
Reflektiertes Licht ist linear polarisiert (R_s)

R_s abhängig von Δn (meist eher gering)

Kann auch zur Unterdrückung von
Reflexen an nicht-metallischen
Oberflächen genutzt werden (Glas,
Wasser, Pflanzen, ...)



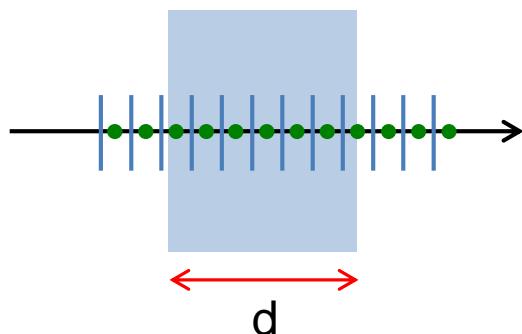
Wichtig: Brewster-Fenster, z.B. für Gas-Laser (Erhöhung von T_p)



Phasenschiebende Elemente

Wie kann der Phasenversatz ϕ_{xy} gezielt eingestellt werden?

→ Doppelbrechung



Brechungsindex:

$$\bar{n}_x \neq \bar{n}_y$$

optischer Weg:

$$\delta_x \neq \delta_y$$

$$\Delta\delta = \bar{n}_x d - \bar{n}_y d$$

$\frac{\bar{n}_x}{\bar{n}_y}$ ist materialabhängig und fest

→ durch Dicke d kann der Phasenversatz eingestellt werden
dieser wird nur für eine Wellenlänge λ erreicht

Phasenschiebende Elemente

Wichtige Bauelemente:

$\frac{\lambda}{4}$ - Platte: linear Pol. \longrightarrow zirkular Pol. (auch umgekehrt)

$\frac{\lambda}{2}$ - Platte: linear Pol. \longrightarrow Schwingungsebene wird gespiegelt
zirk./ellip. Pol. \longrightarrow Drehrichtung wird invertiert

λ - Platte: für λ_0 wird eine Komponente um 2π geschoben
 \longrightarrow keine Änderung des Polarisationszustandes
 \longrightarrow für alle anderen λ \longrightarrow Änderung der Polarisierung

Unterscheidung von unpolarisiertem Licht und zirk. Pol. Licht ?

In beiden Pol. Zuständen kommen x- und y-Komponenten gleich vor

\longrightarrow $\frac{\lambda}{4}$ - Platte und linear Polfilter

Doppelbrechung

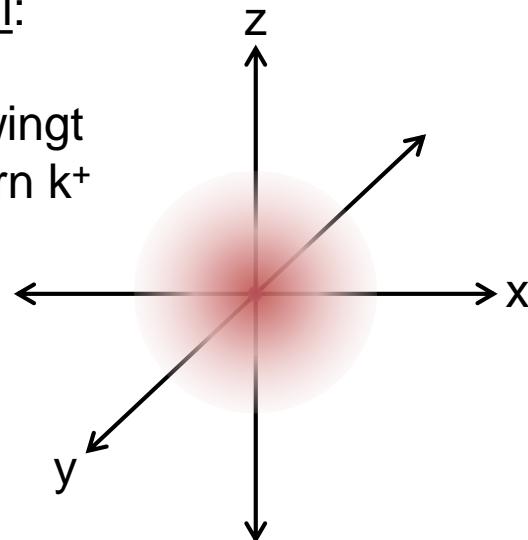
Ursachen der Doppelbrechung:

Anisotropie (richtungsabhängige Eigenschaften) aufgrund

- 1) Aufbau der Materie
- 2) Strukturierung (Nanostrukturen)
- 3) äußere Einflüsse (mechanische Kräfte, EM Felder, ...)

Oszillator Modell:

Elektron e^- schwingt um den Atomkern k^+



Bindungskräfte bestimmen die Eigenfrequenz der Schwingung („Federkonstante“)

Brechungsindex und Absorption hängen von Eigenfrequenz ab

Sind Bindungskräfte anisotrop
→ Doppelbrechung

Doppelbrechung

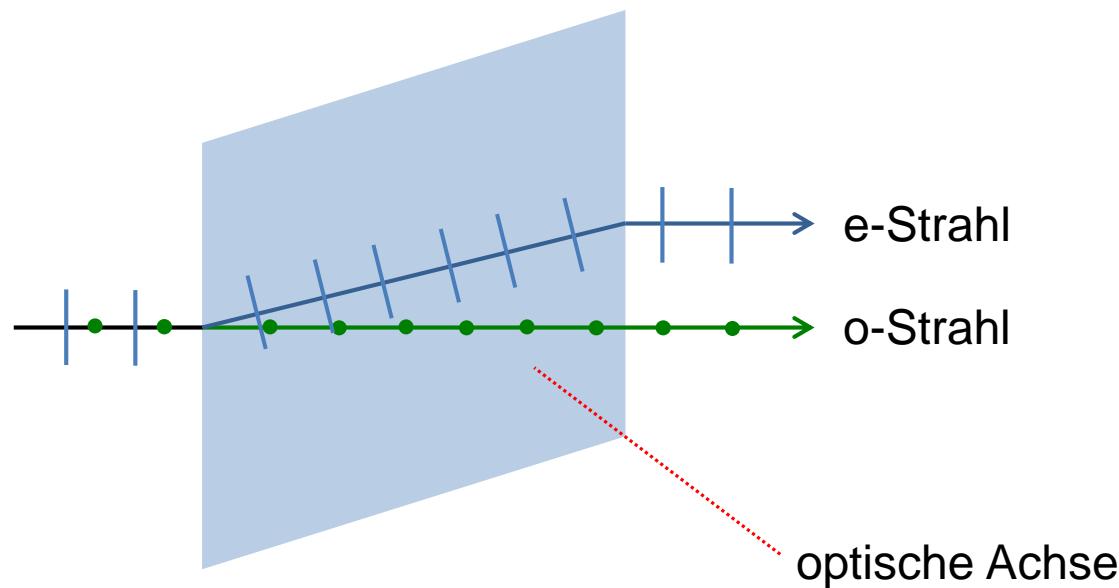
Häufig in kristallinen Materialien (Abhängig von Symmetrie, Aufbau, ...)

Abweichung der Eigenfrequenz in einer Richtung → einachsiger Kristall

Abweichung der Eigenfrequenz in zwei Richtungen → zweiachsiger Kristall

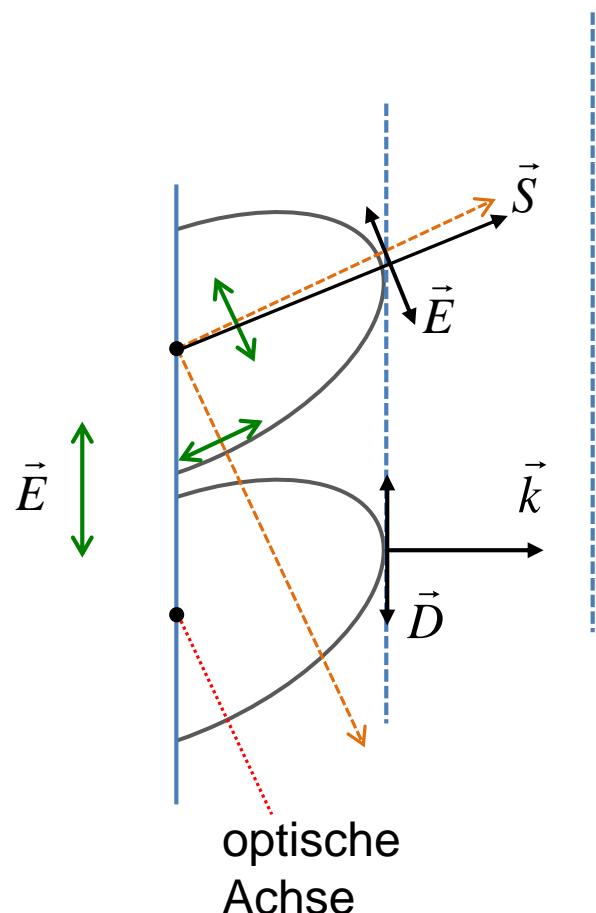
Definition der optischen Achse für einachsige Kristalle:

Richtung der höchsten Eigenfrequenz = des niedrigsten Brechungsindex

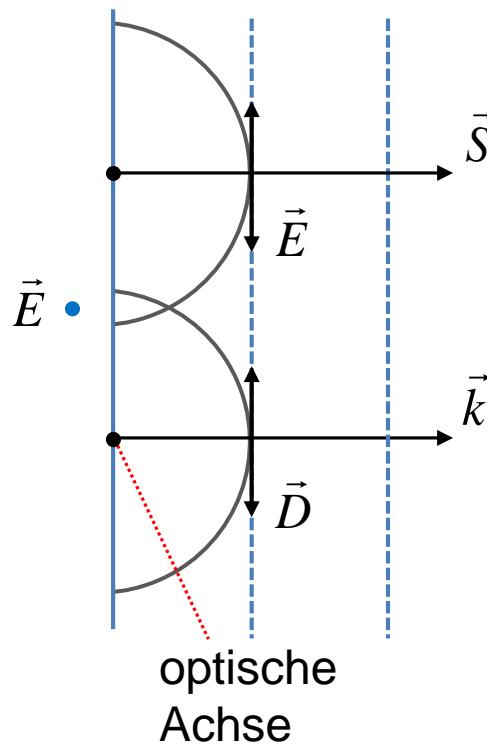




Doppelbrechung



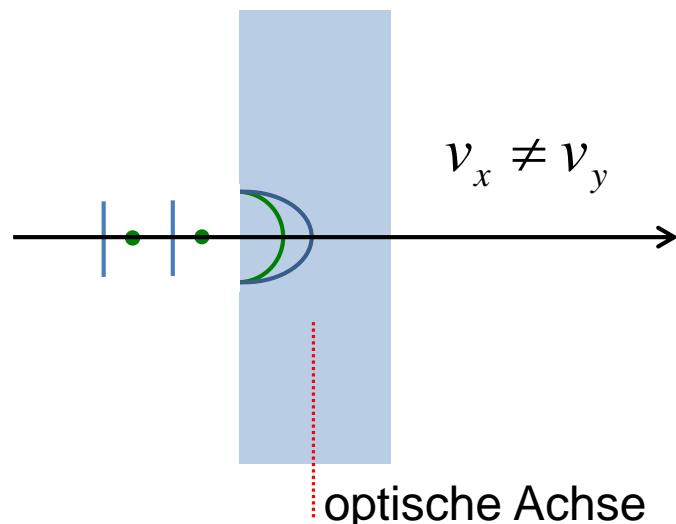
e-Strahl



o-Strahl

Doppelbrechung

$\frac{\lambda}{4}$ - Platte und $\frac{\lambda}{2}$ - Platte



Phasenversatz zwischen x- und y-Komponente ist fest

Winkel ψ zwischen optischer Achse und einfallender Polarisationsebene bestimmt Verhalten

$\frac{\lambda}{4}$ - Platte: bei $\psi=45^\circ$ zirk. Pol. (wenn $E_x = E_y$), ansonsten ellip. Pol.

$\frac{\lambda}{2}$ - Platte: lin. Pol. Licht wird an optischer Achse gespiegelt $\Delta\Theta = 2\cdot\psi$

Doppelbrechung

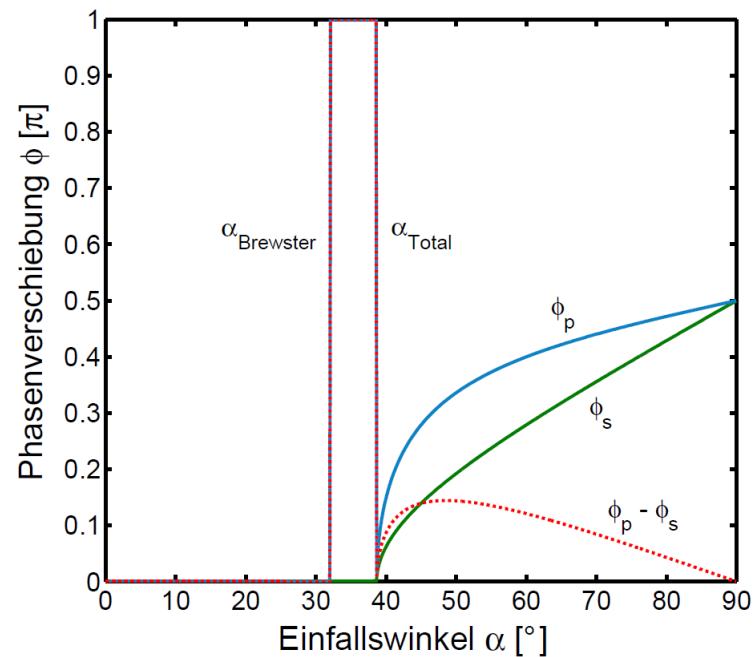
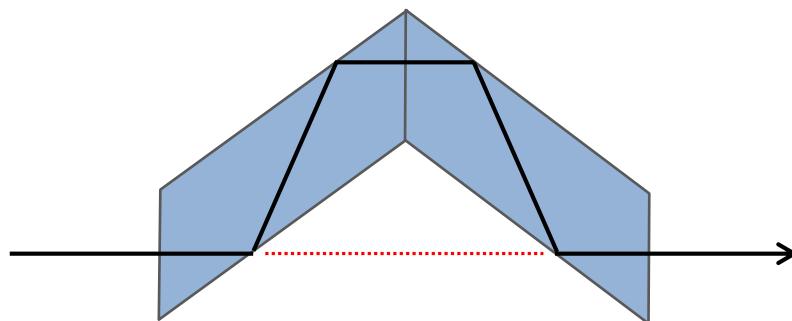
Weitere wichtige doppelbrechende optische Bauelemente:

Nicol-Prisma, Glan-Foucault-Prisma, Glan-Thompson-Prisma,
Wollaston-Prisma (lin. Polarisatoren, pol. Strahlteiler)

Phasenschieber ohne starke chromatische Abhängigkeit:

Ausnutzung der Totalreflexion

→ Fresnelsches Parallelepiped



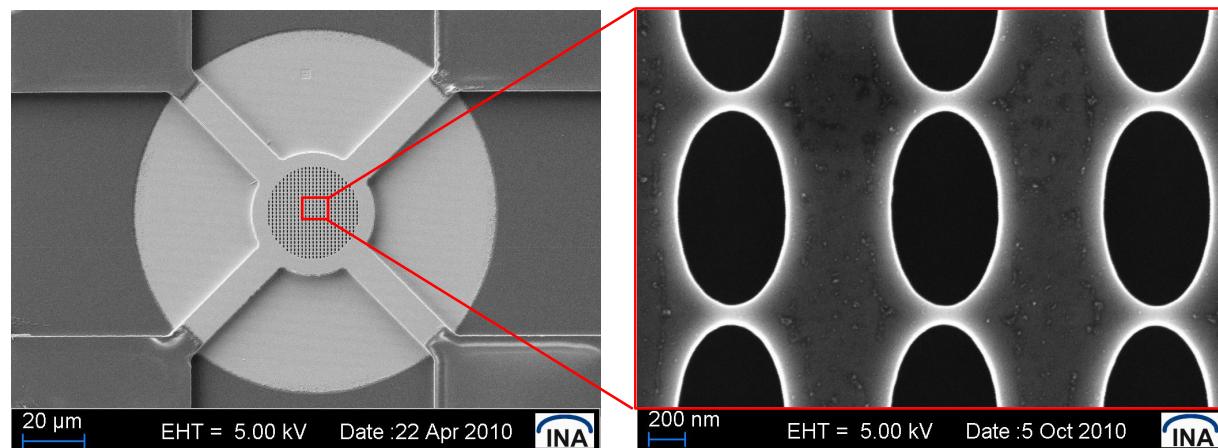
Doppelbrechung

Weitere Ursachen für Doppelbrechung:

mechanische Kräfte, Druck, Verspannung (spannungsinduzierte Doppelbrechung)
→ zwischen gekreuzten Polarisatoren als Helligkeitsbild sichtbar

elektrische oder magnetische Felder (bei speziellen Materialien)
→ Kerr-, Pockels-, Faraday- Effekt (wird z.B. für Modulatoren eingesetzt)

Strukturierung von Materialien im Größenbereich unterhalb der Wellenlänge
strukturbedingte Doppelbrechung, bzw. ~ Polarisatoren



Polarisation in Matrizenform

Vereinfachte Berechnung (z.B. mit Computer)

Beschreibung des Polarisationszustands:

z.B. Jones Vektoren (es gibt auch noch Stokes Vektoren)

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} E_{0x} e^{i\varphi_x} \\ E_{0y} e^{i\varphi_y} \end{bmatrix} \quad \xrightarrow{\text{mit}} \quad \begin{aligned} E_{0x} &= E_{0y} \\ \varphi_x &= \varphi_y \end{aligned} \quad \xrightarrow{\text{ }} \quad \vec{E} = E_{0x} e^{i\varphi_x} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Normiert auf 1:

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad 0^\circ$$

linear polarisiert

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad +45^\circ$$

linear polarisiert

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \quad \text{links}$$

zirkular polarisiert

$$\vec{E} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad 90^\circ$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} \quad -45^\circ$$

$$\vec{E} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} \quad \text{rechts}$$

Polarisation in Matrizenform

Beschreibung von polarisationsoptischen Bauelementen:

z.B. Jones Matrizen (es gibt auch noch Müller Matrizen)

$$\vec{E}_2 = \mathbf{A} \vec{E}_1 \Rightarrow \begin{bmatrix} E_{x2} \\ E_{y2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_{x1} \\ E_{y1} \end{bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} E_{x2} &= a_{11}E_{x1} + a_{12}E_{y1} \\ E_{y2} &= a_{21}E_{x1} + a_{22}E_{y1} \end{aligned}$$

linear Polarisatoren

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad 0^\circ$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \quad -45^\circ$$

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad 90^\circ$$

$$\mathbf{A} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad +45^\circ$$

$\lambda/4$ -Platte

$$\mathbf{A} = e^{\frac{i\pi}{4}} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & i \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} &0^\circ & 90^\circ \\ \text{Lage der optischen Achse} & \end{aligned}$$

Berechnung durch mehrere Elemente mittels Multiplikation:

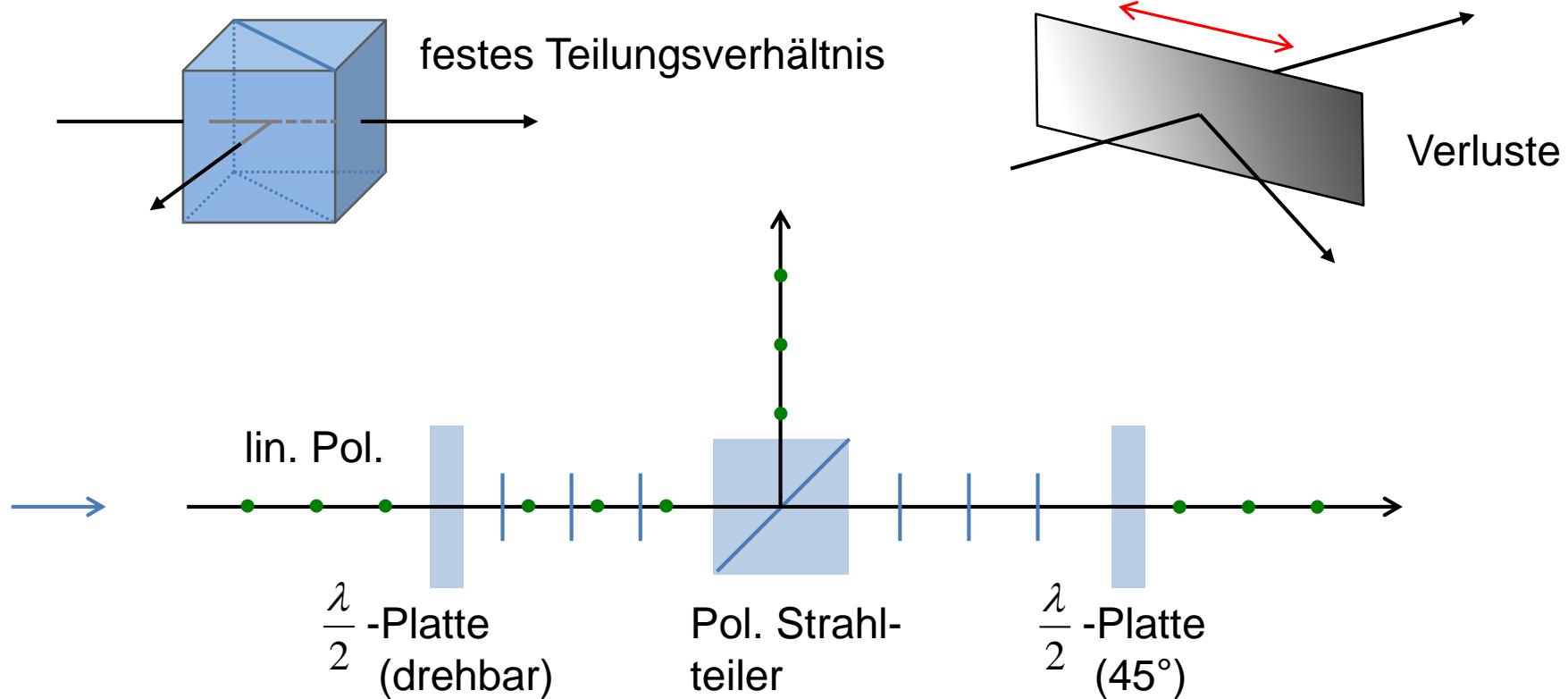
$$\vec{E}_n = \mathbf{A}_n \dots \mathbf{A}_2 \mathbf{A}_1 \vec{E}_1 \quad (\text{Reihenfolge beachten!})$$

Anwendungen der Polarisation

Anwendungsgebiete:

Messtechnik, Mikroskopie, Sonnenbrillen, Fotografie, Datenübertragung, Lasertechnik, nichtlineare Optik, ...

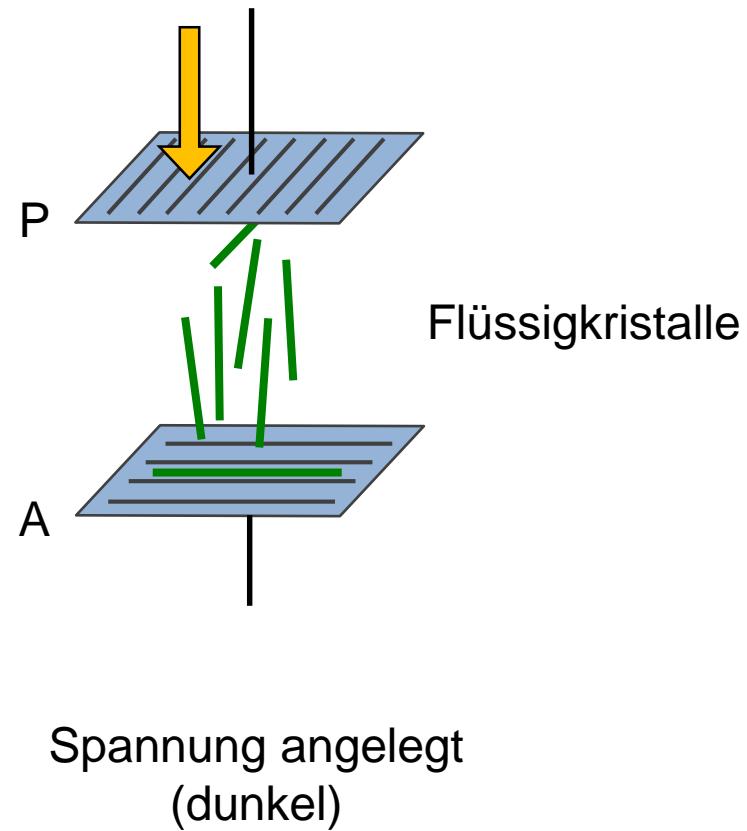
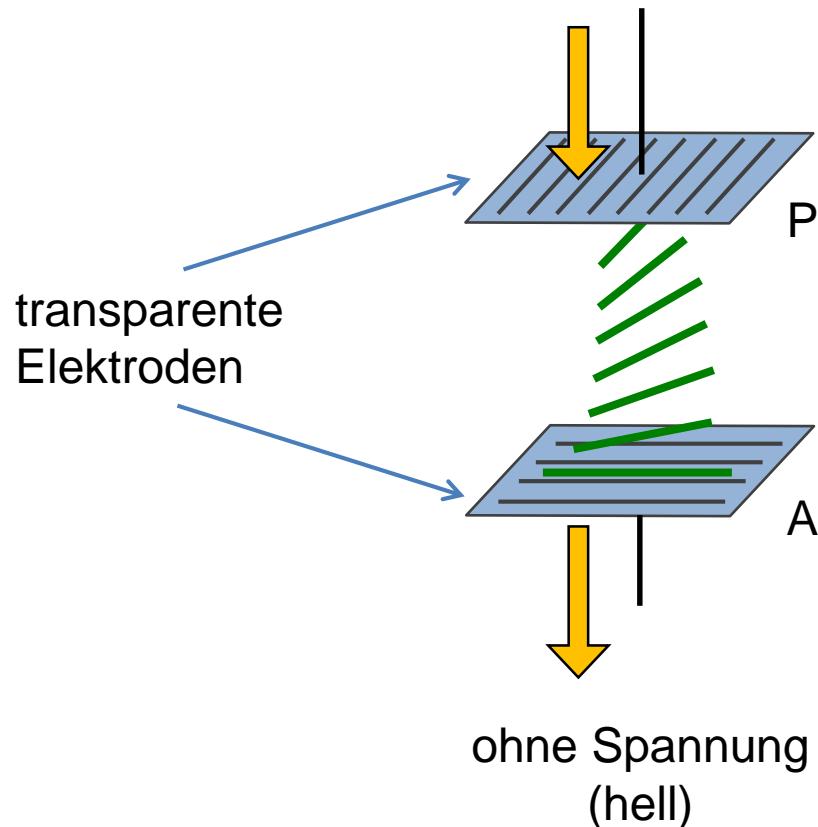
Beispiel: verlustfreier, variabler Strahlteiler



Anwendungen der Polarisation

Weiteres Beispiel:

Flüssigkristall-Anzeigen



Flüssigkristalle: längliche, polare, organische Moleküle
Anisotropie \longrightarrow Polarisationsabhängigkeit

Wichtige Fachbegriffe: Deutsch - Englisch

harmonischer Mode	harmonic mode
ebene Welle	plane wave
Kugelwelle	spherical wave
Einhüllende	envelope
Grenz- / Oberfläche	interface / surface
Phasenverschiebung / -sprung	phase shift / phase jump
Totalreflexion	total internal reflection (TIR)
Schwebung	beat (frequency)
Zweistrahlerinterferenz	two beam interference
Interferenzmuster/-streifen	interference pattern / fringes
Gangunterschied	path difference
Viel- / Mehrstrahlerinterferenz	multi beam interference
Kavität	cavity

Wichtige Fachbegriffe: Deutsch - Englisch

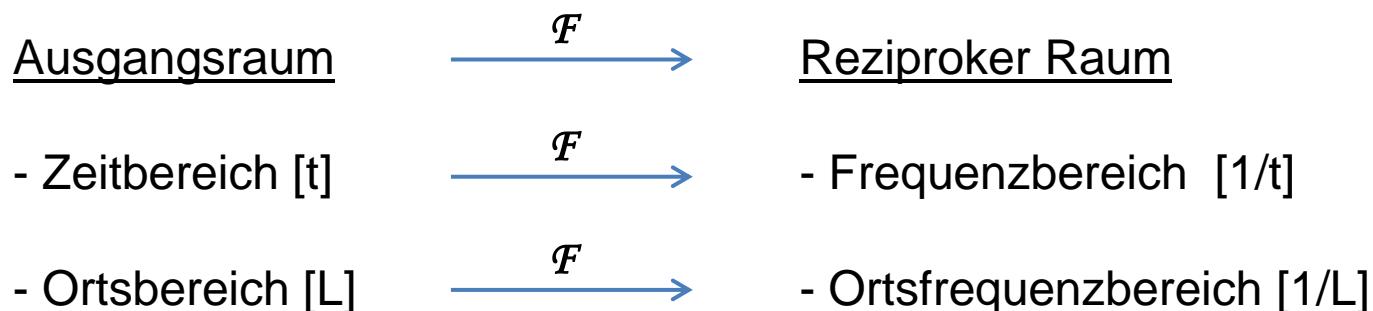
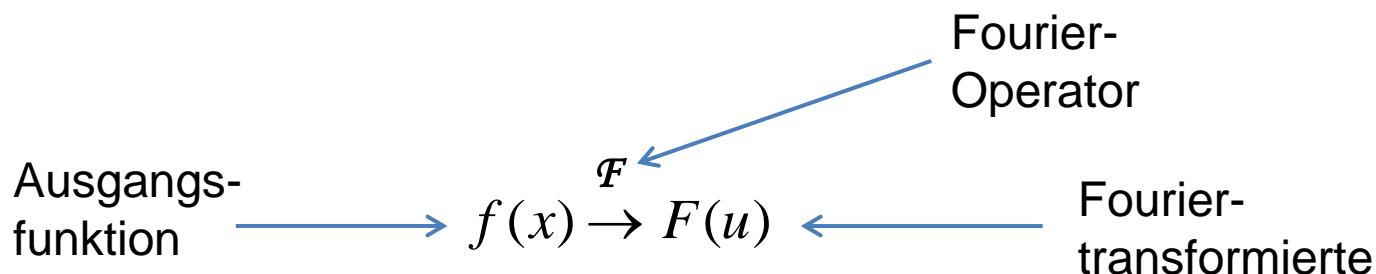
Halbwertsbreite	full width at half maximum (FWHM)
freier Spektralbereich	free spectral range (FSR)
chrom. Auflösungsvermögen	chromatic resolution
Dünnschichtoptik	thin-film optics
Beugung	diffraction
beugungsoptische Elemente	diffractive optical elements (DOE)
Beugungsgitter	diffraction grating
Auflösungsgrenze	resolution limit
Doppelbrechung	birefringence (alt: double refraction)
Phasenschieberplatte	phase retardation plate
Flüssigkristallanzeige	liquid crystal display (LCD)

Fourieroptik

Motivation & Grundlagen

Mit Hilfe der Fouriertransformation können Funktionen durch die Überlagerung von verschiedenen harmonischen Schwingungen beschrieben werden.

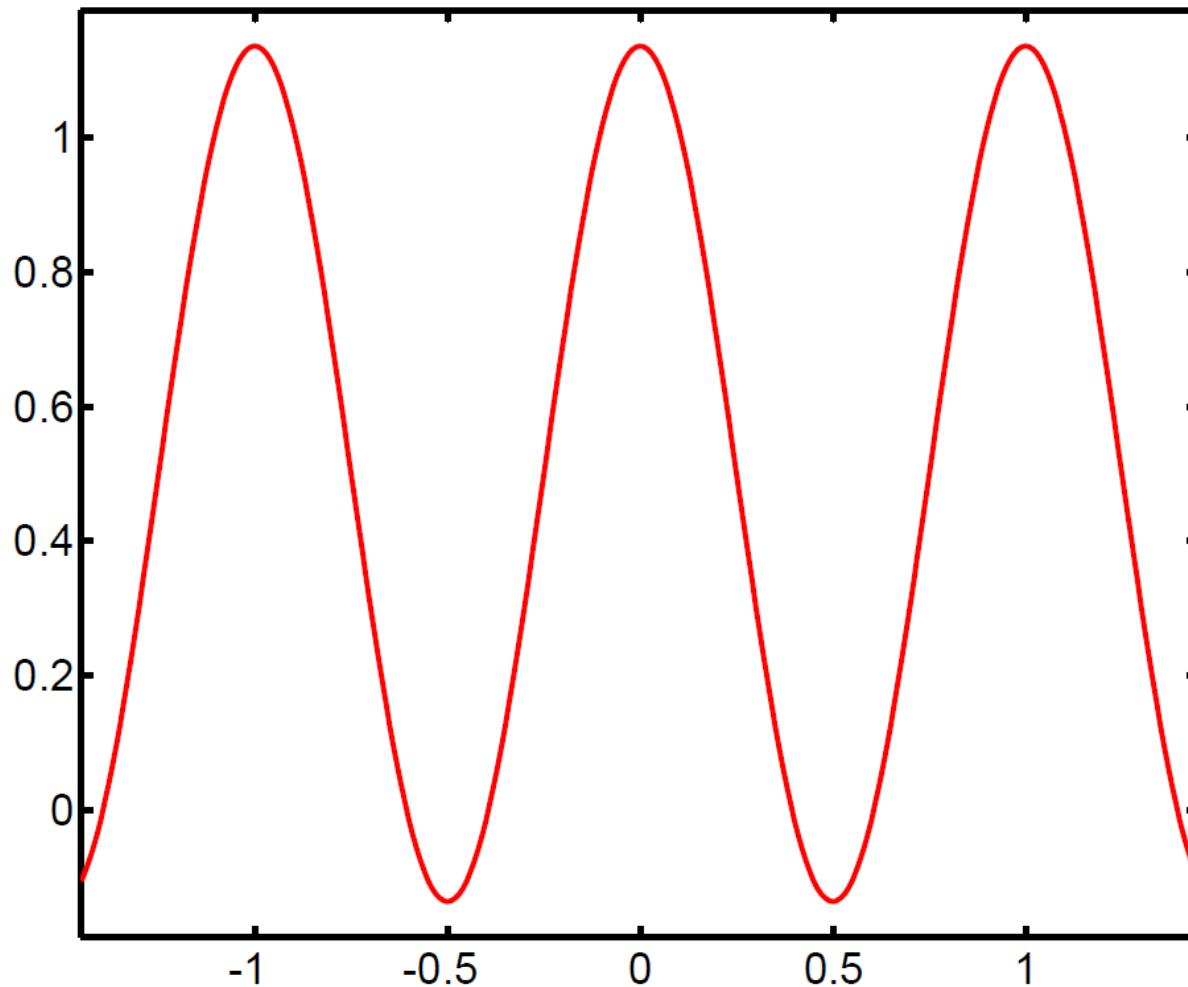
Die Ausgangsfunktionen beschreiben dabei z.B. zeitliche oder räumliche Signale oder Strukturen



Fourierreihen

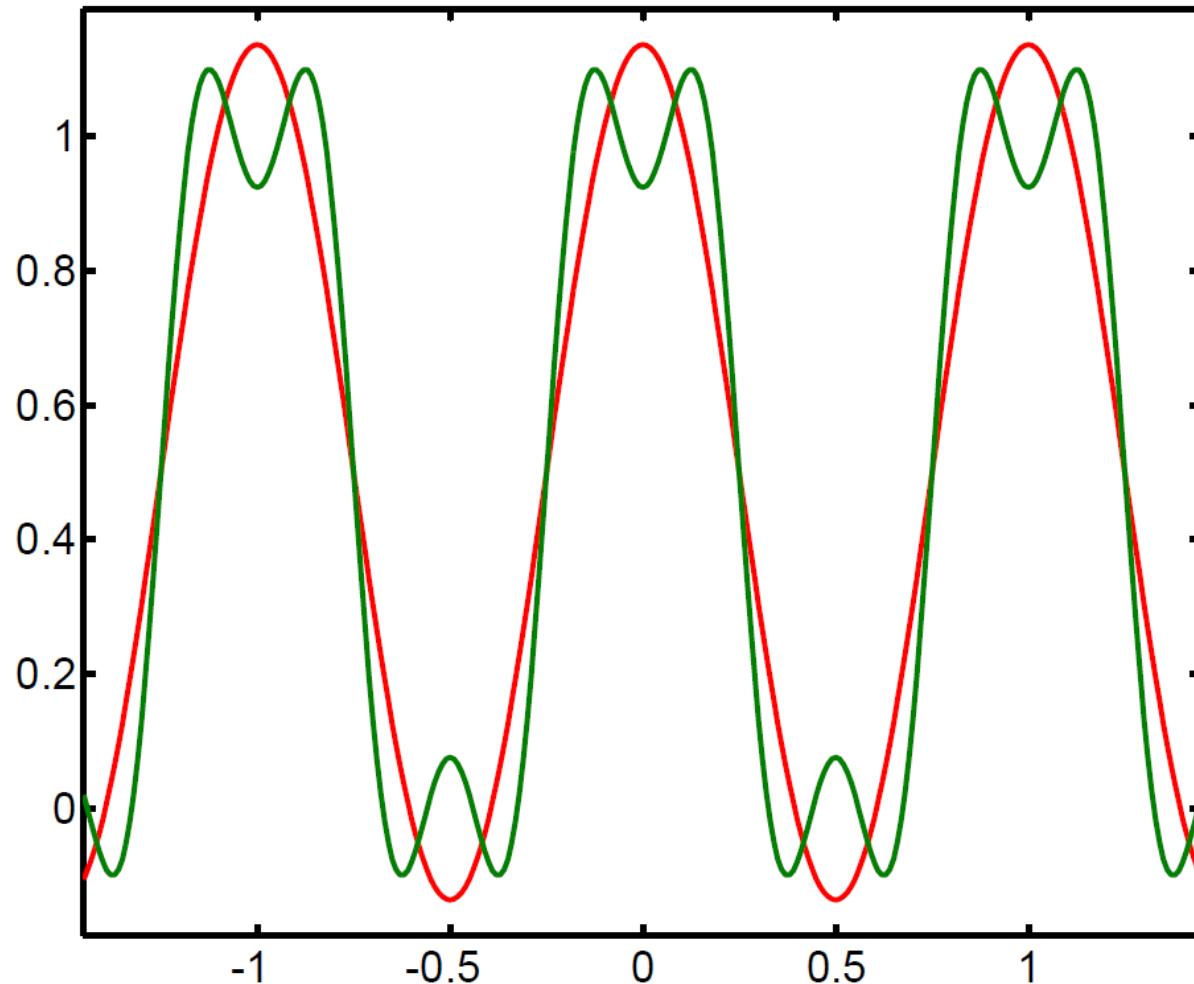
Beispiel:

Periodische Rechteckfunktion



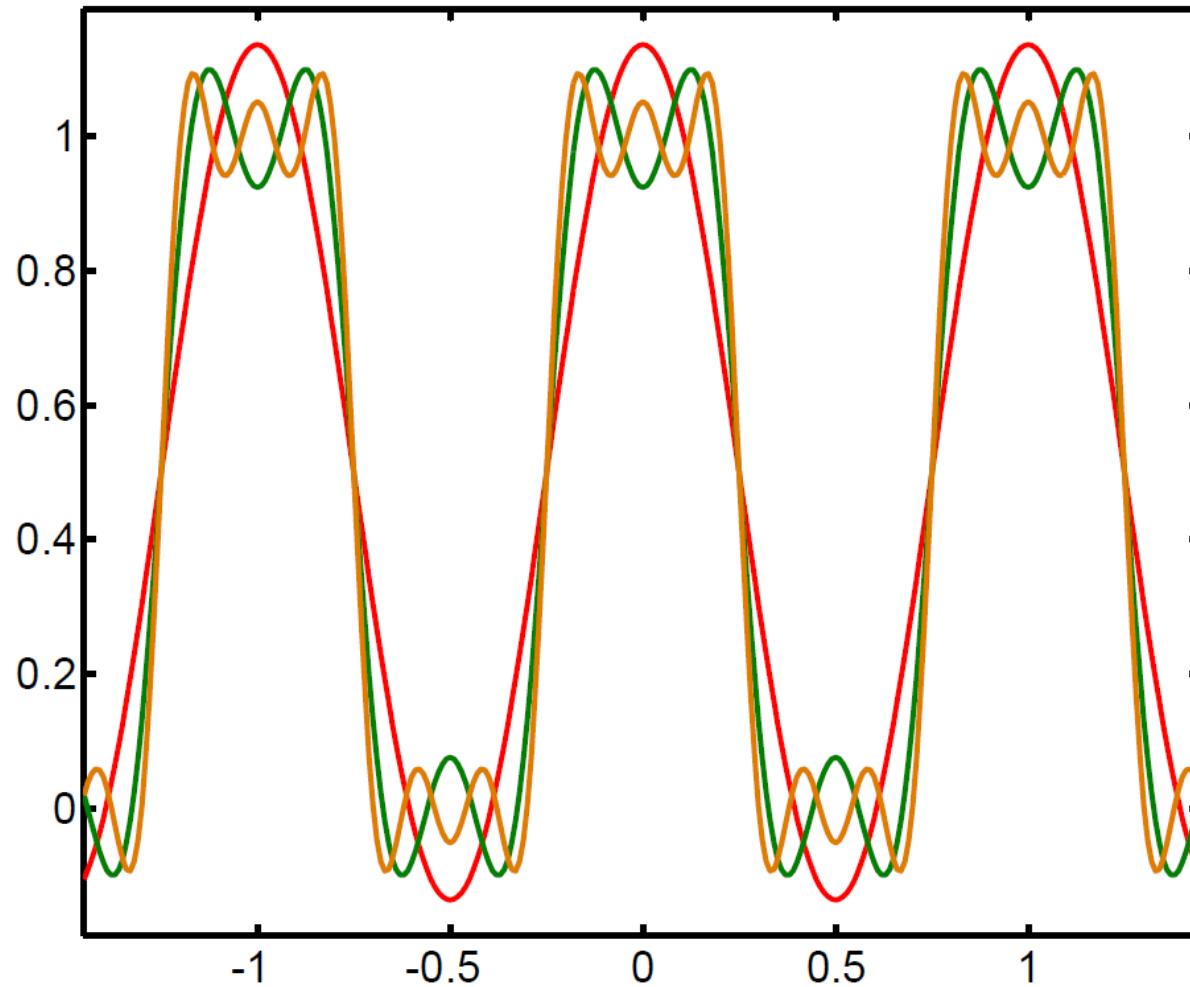
Fourierreihen

Aufsummieren von N Schwingungen mit höheren Frequenzen, $N = 3$



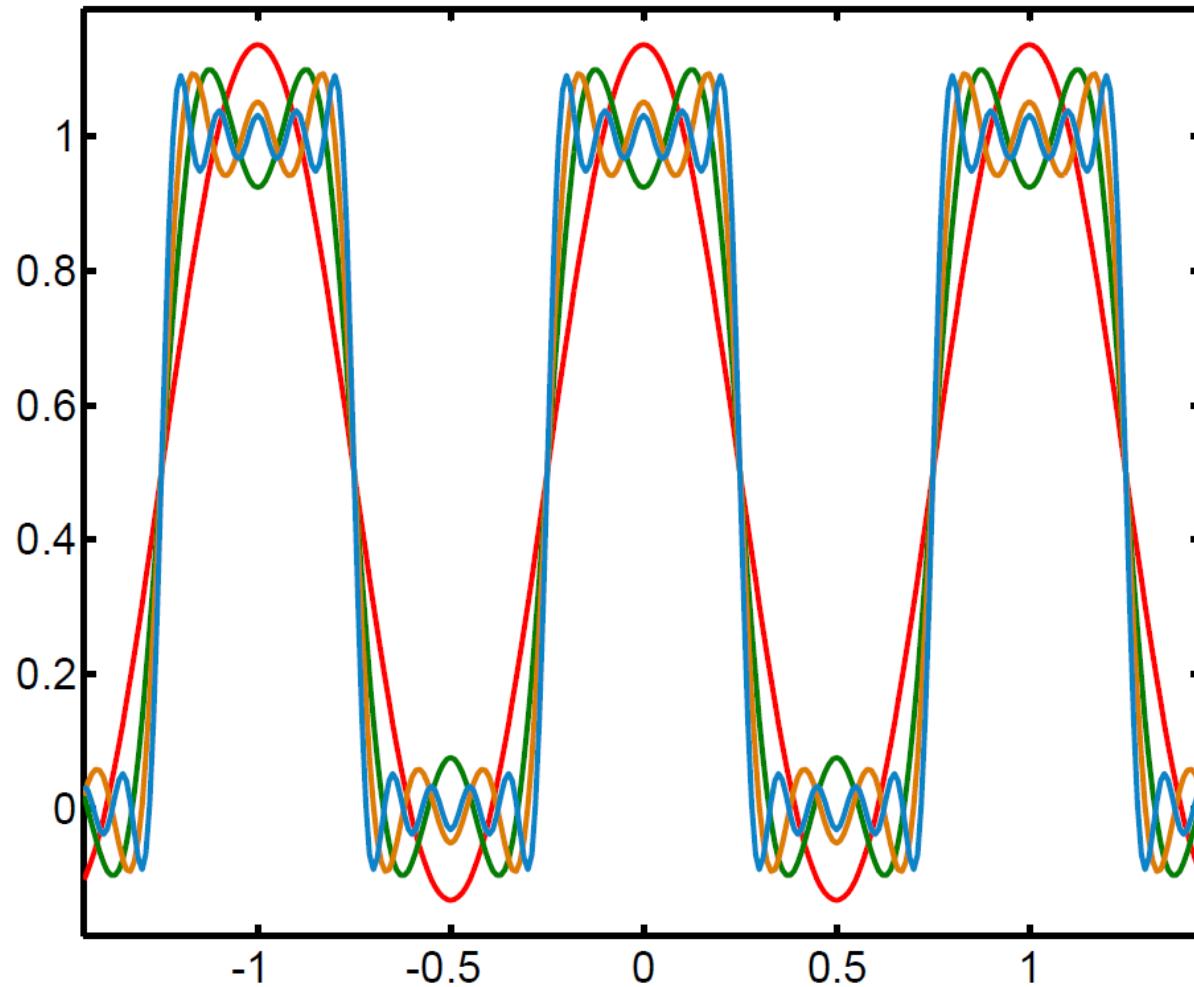
Fourierreihen

Aufsummieren von N Schwingungen mit höheren Frequenzen, $N = 5$



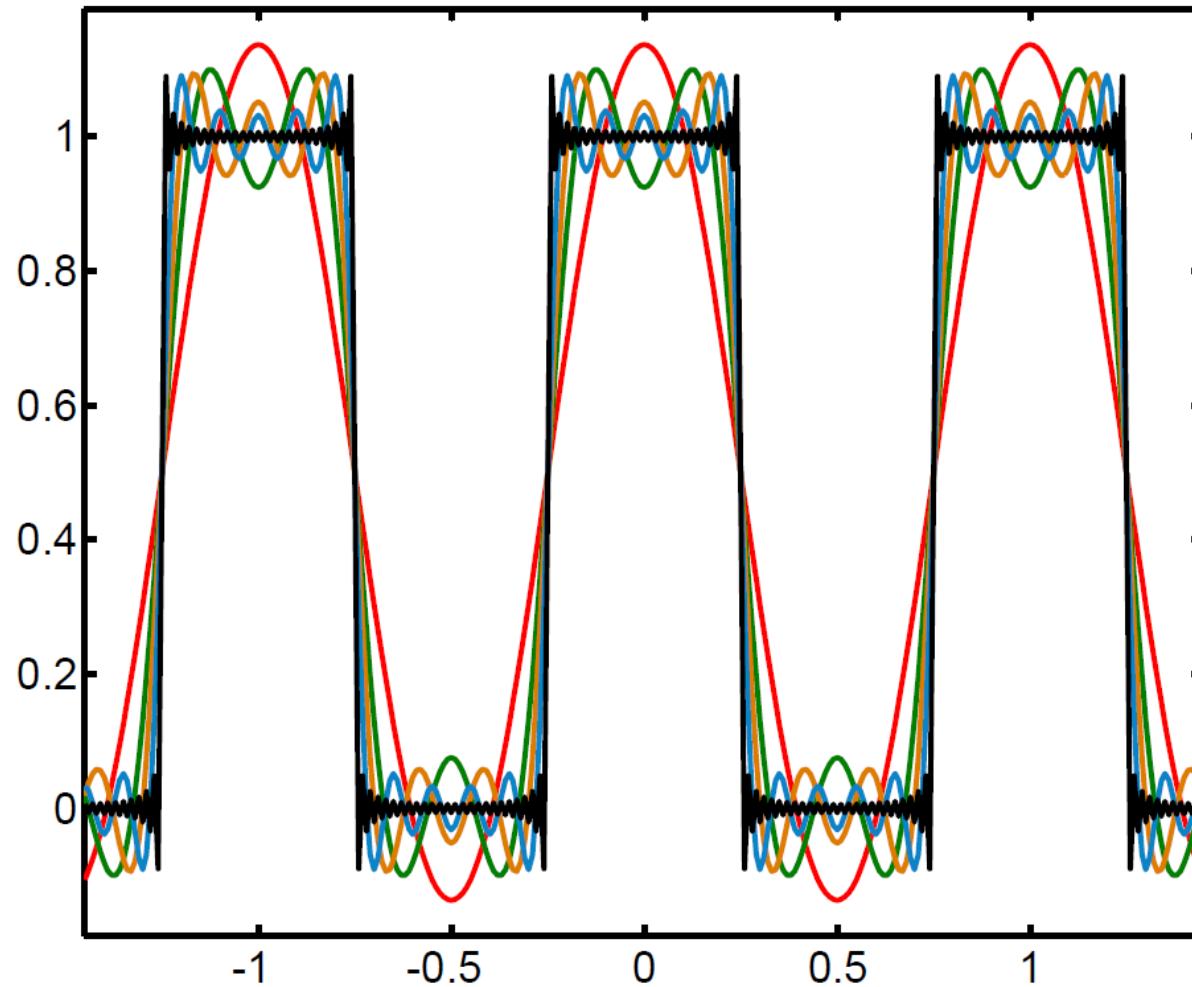
Fourierreihen

Aufsummieren von N Schwingungen mit höheren Frequenzen, $N = 10$



Fourierreihen

Aufsummieren von Schwingungen mit höheren Frequenzen, $N = 50$



Fourierreihen

Für $N \rightarrow \infty$ ergibt sich die rect() Funktion

Mathematisch (allgemein) :

$$f(x) = A_0 + 2 \cdot \sum_{u=1}^N [A_u \cos(2\pi u x) + B_u \sin(2\pi u x)]$$

A_u und B_u \longrightarrow Fourierkoeffizienten
(bestimmen den Beitrag einzelner Schwingungskomponenten und damit die Form von $f(x)$)

Für Rechteckfunktion:

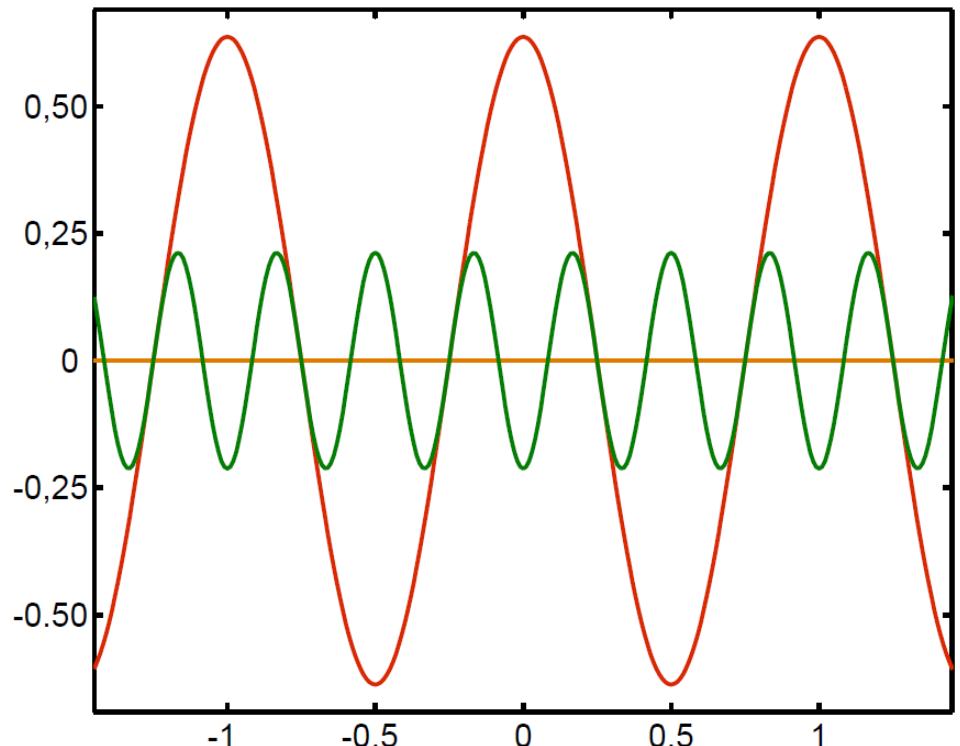
$$\text{rect}(x) = \frac{1}{2} + \sum_{u=1}^N \left[\frac{\sin\left(\frac{\pi u}{2}\right)}{\frac{\pi u}{2}} \cdot \cos(2\pi u x) \right]$$

Diagramm zur Darstellung der Fourierreihe der Rechteckfunktion:

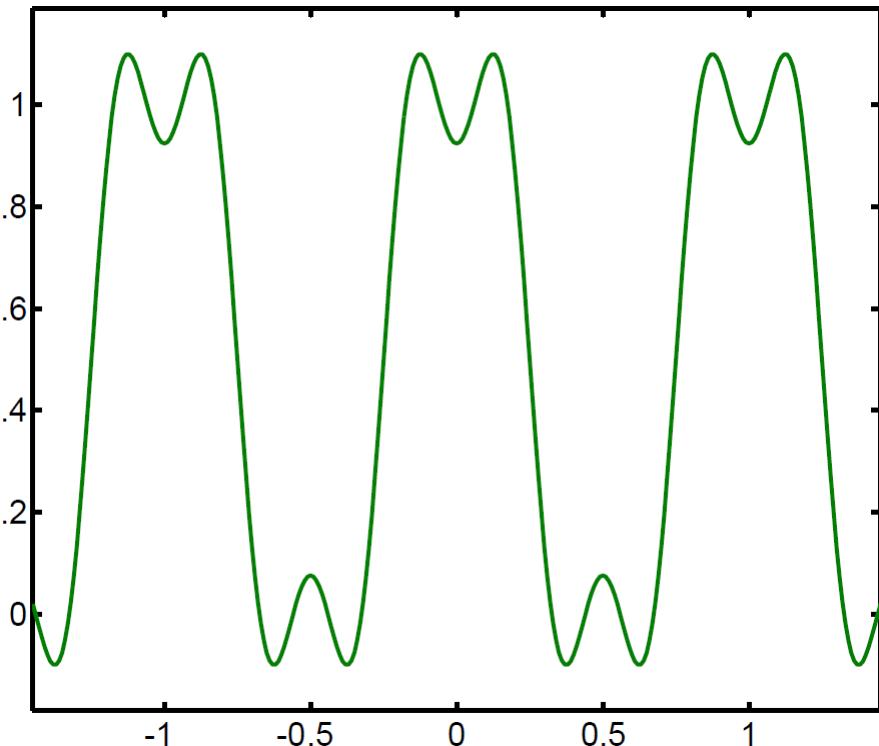
- Ein blauer Pfeil weist auf den Glied A_0 hin.
- Ein blauer Pfeil weist auf den Glied A_u hin.
- Ein blauer Pfeil weist auf die Klammer hin, die nur die $\cos(2\pi u x)$ Terme zusammenfasst und beschriftet mit "nur $\cos()$ Terme".

Fourierreihen

Aufsummieren von Schwingungen mit höheren Frequenzen, $N = 3$



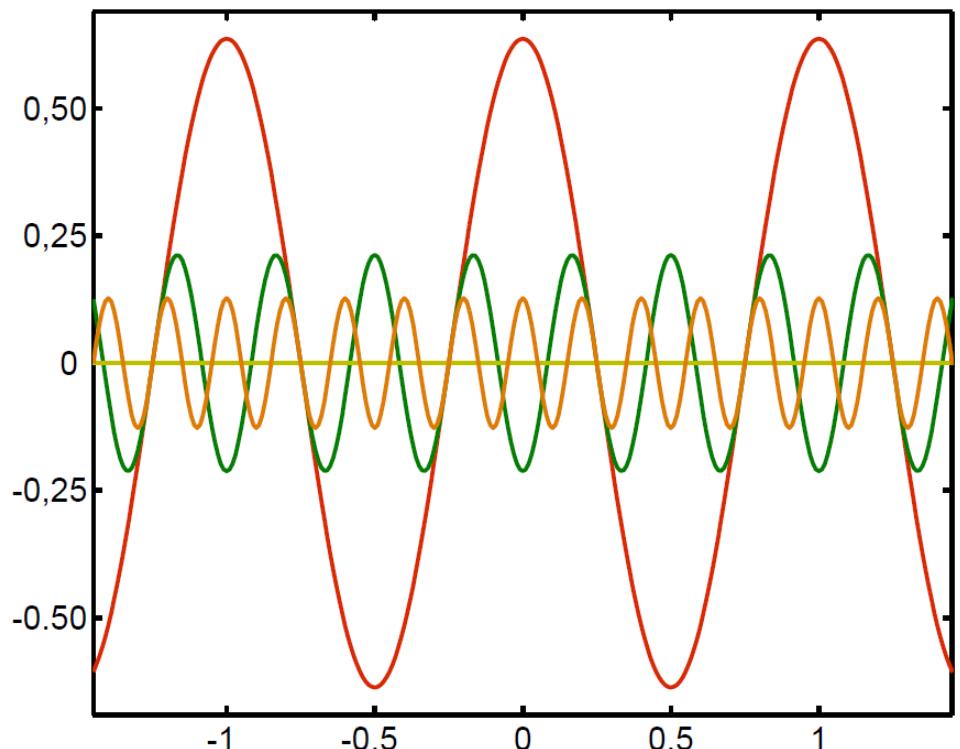
Einzelne Komponenten
(+ Offset: $A_0=0.5$)



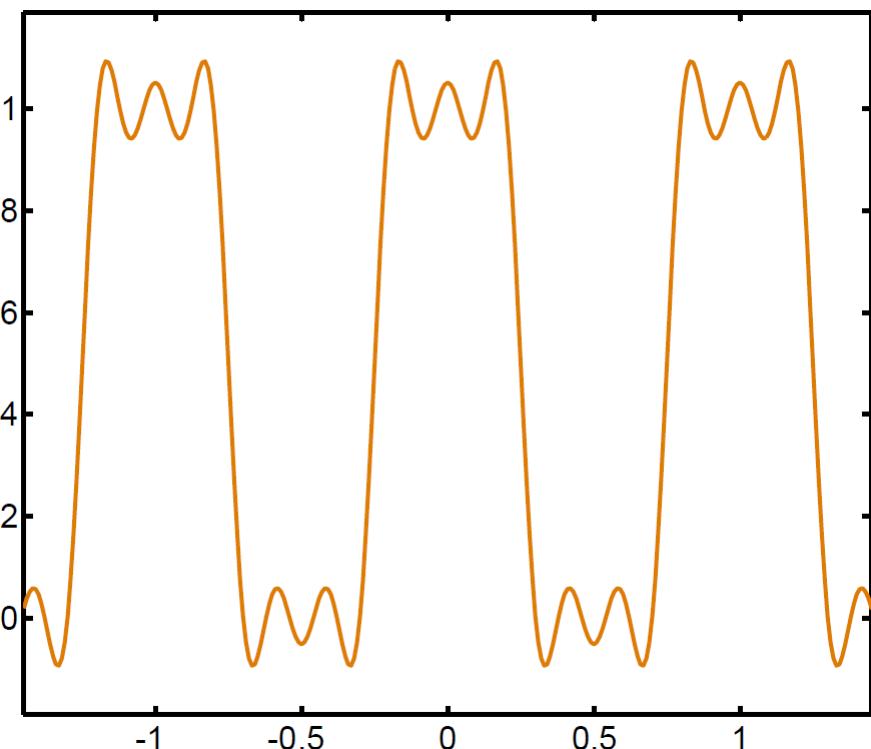
Summe der Komponenten

Fourierreihen

Aufsummieren von Schwingungen mit höheren Frequenzen, $N = 5$



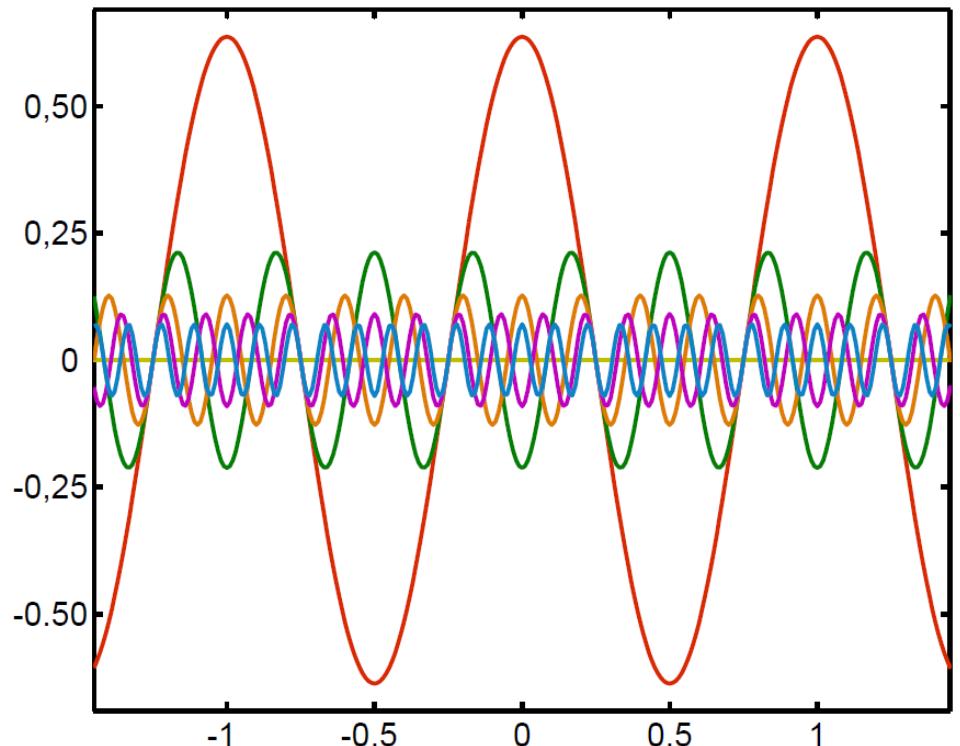
Einzelne Komponenten
(+ Offset: $A_0=0.5$)



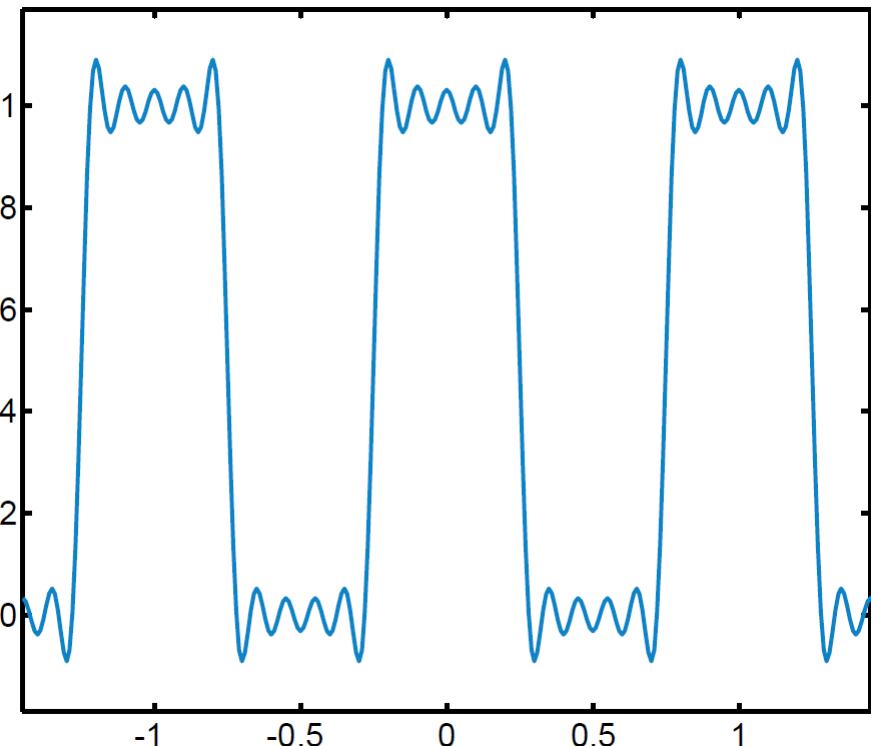
Summe der Komponenten

Fourierreihen

Aufsummieren von Schwingungen mit höheren Frequenzen, $N = 10$



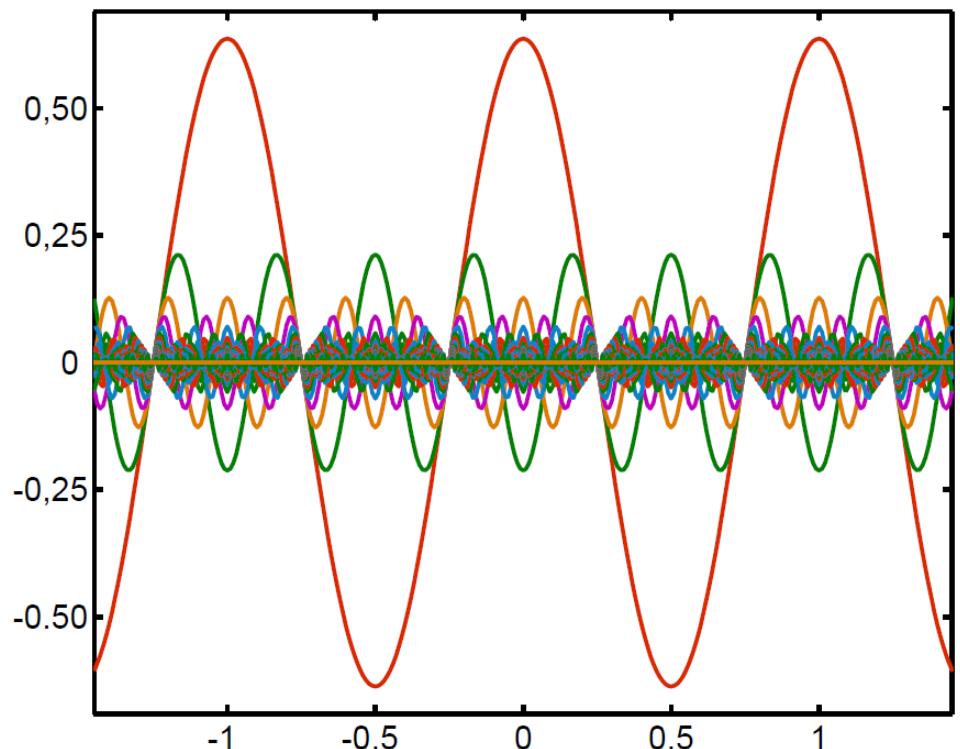
Einzelne Komponenten
(+ Offset: $A_0=0.5$)



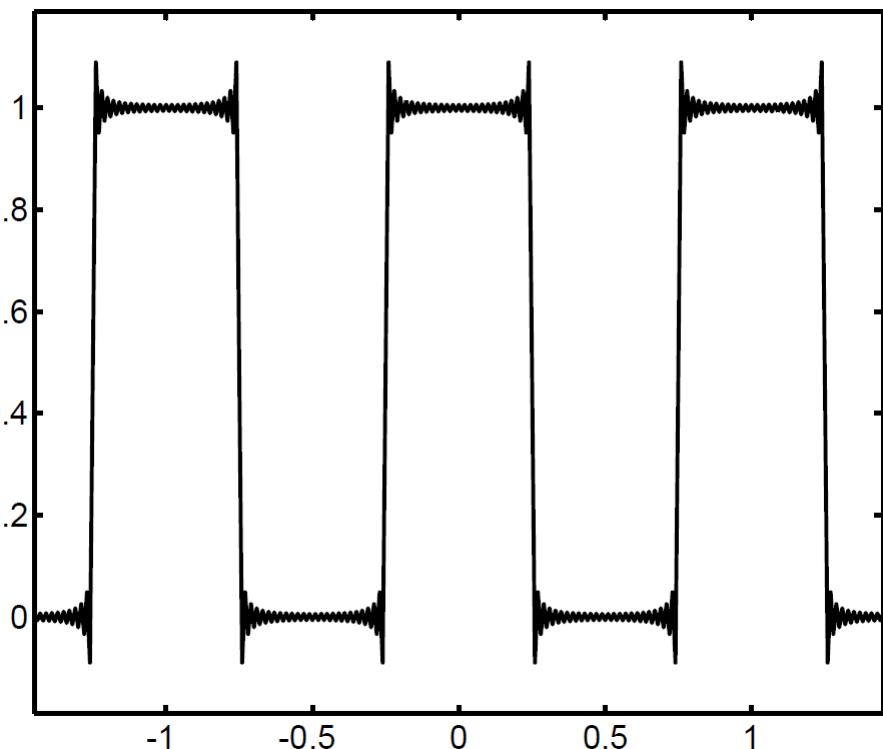
Summe der Komponenten

Fourierreihen

Aufsummieren von Schwingungen mit höheren Frequenzen, $N = 50$



Einzelne Komponenten
(+ Offset: $A_0=0.5$)



Summe der Komponenten

Fourierintegrale

Reihenentwicklung gut für periodisch fortgesetzte Funktionen und die diskrete Fouriertransformation (DFT) \longrightarrow numerische Mathematik

Allgemeine Summierung \longrightarrow Integrale (Schrittweite zwischen Summanden $\rightarrow 0$)

$$F(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \cdot e^{(-2\pi i u x)} dx$$

entspricht Koeffizienten

Ausgangsfunktion

harmonische Funktionen (komplexe Schreibweise)

Als Fourieroperator:

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u)$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(u)$$

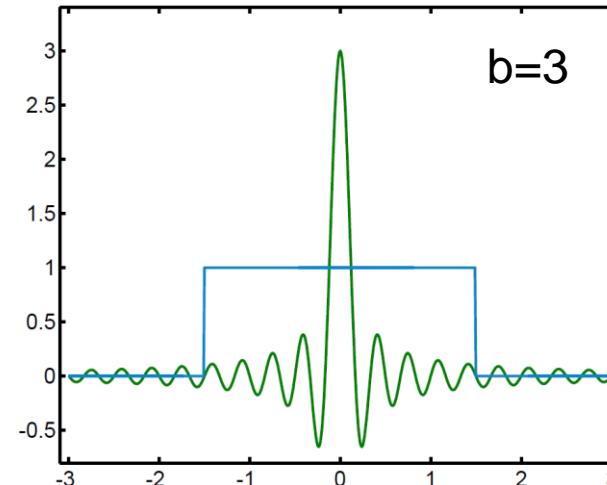
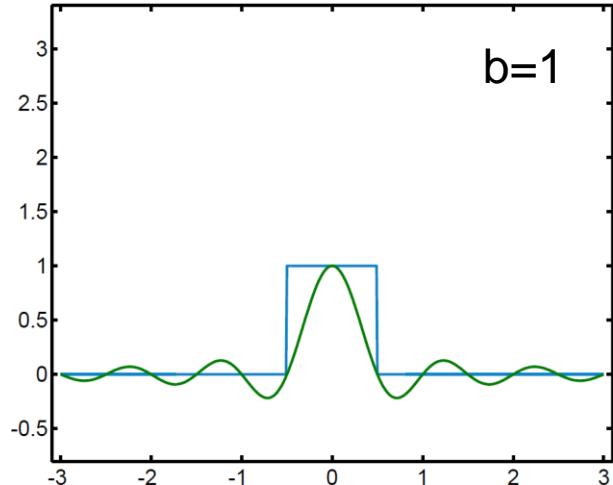
Eigenschaften der Fouriertransformation

Verschiebung der Ausgangsfunktion:

$$\mathcal{F}\{f(x-a)\} = e^{(-2\pi i au)} F(u)$$

Skalierung der Ausgangsfunktion (Breite):

$$\mathcal{F}\left\{f\left(\frac{x}{b}\right)\right\} = |b| F(bu)$$



Eigenschaften der Fouriertransformation

Inverser Fourieroperator:

$$f(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(u) \quad \Rightarrow \quad F(u) \xrightarrow{\mathcal{F}^{-1}} f(x)$$

$$\mathcal{F}\{f(x)\} = F(u) \quad \Rightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}\{F(u)\} = f(x)$$

Mehrfache Fouriertransformation:

$f()$ ist gerade: $\mathcal{F}\{F(x)\} = f(u) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}\{f(u)\} = F(x)$

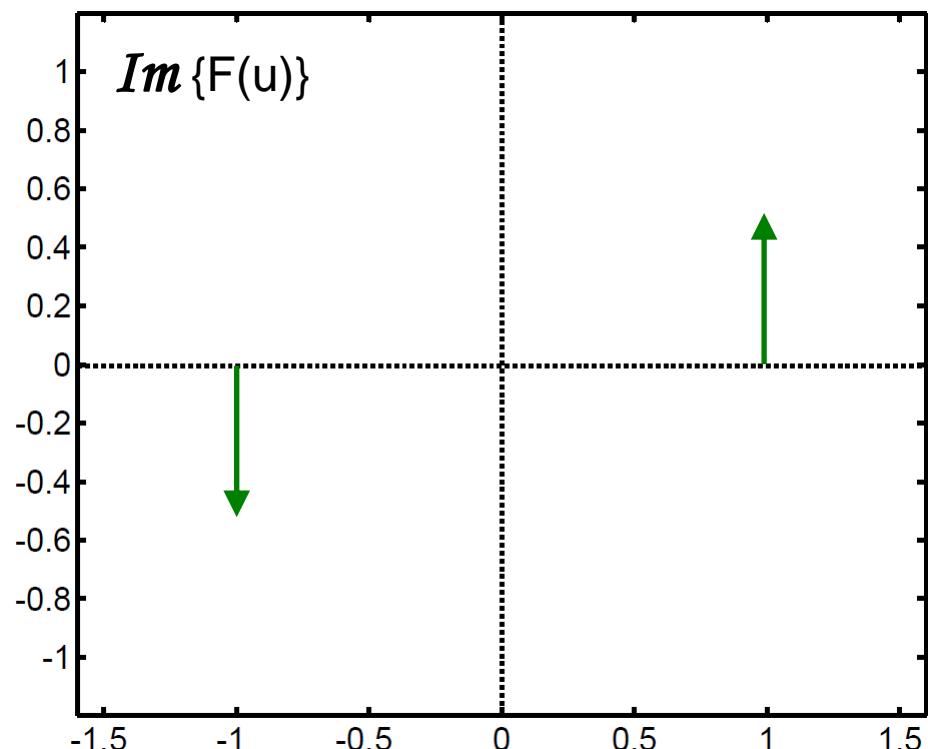
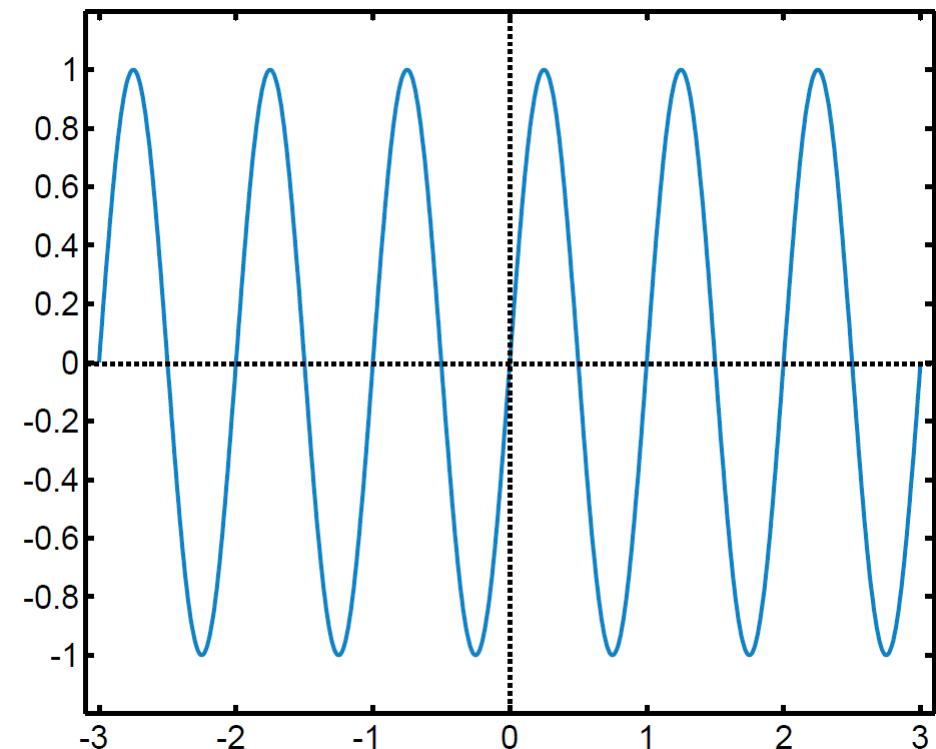
$f()$ ist ungerade: $\mathcal{F}\{F(x)\} = -f(u) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{F}^{-1}\{f(u)\} = -F(x)$

Wichtige Fouriertransformierte

Sinus - Funktion:

$$f(x) = \sin(2\pi\nu x)$$

$$F(u) = \frac{i}{2} [\delta(u + \nu) - \delta(u - \nu)]$$

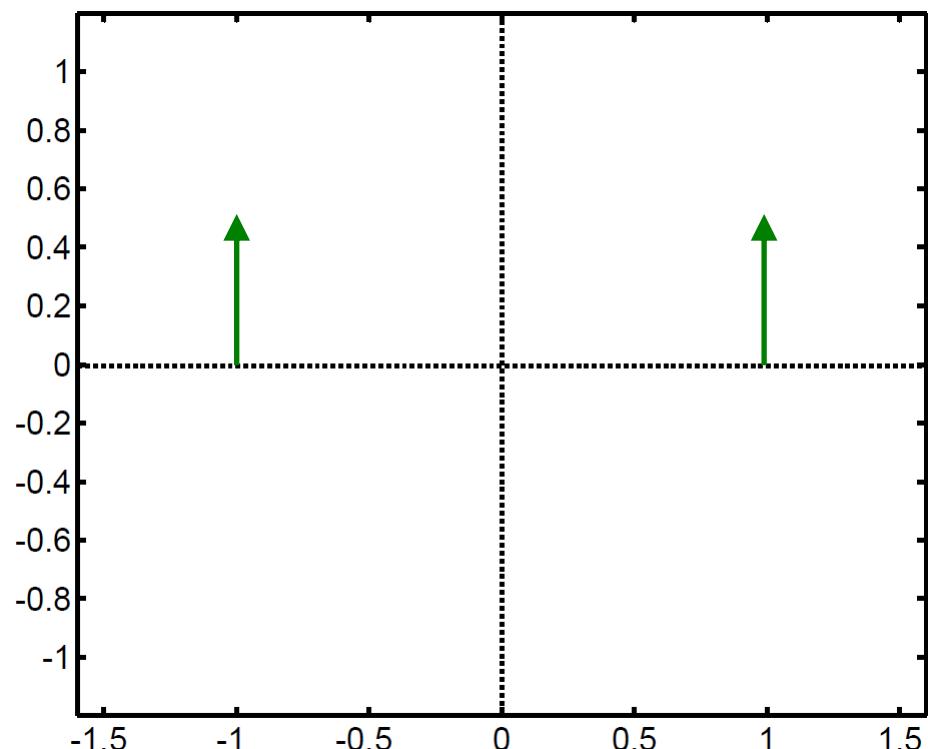
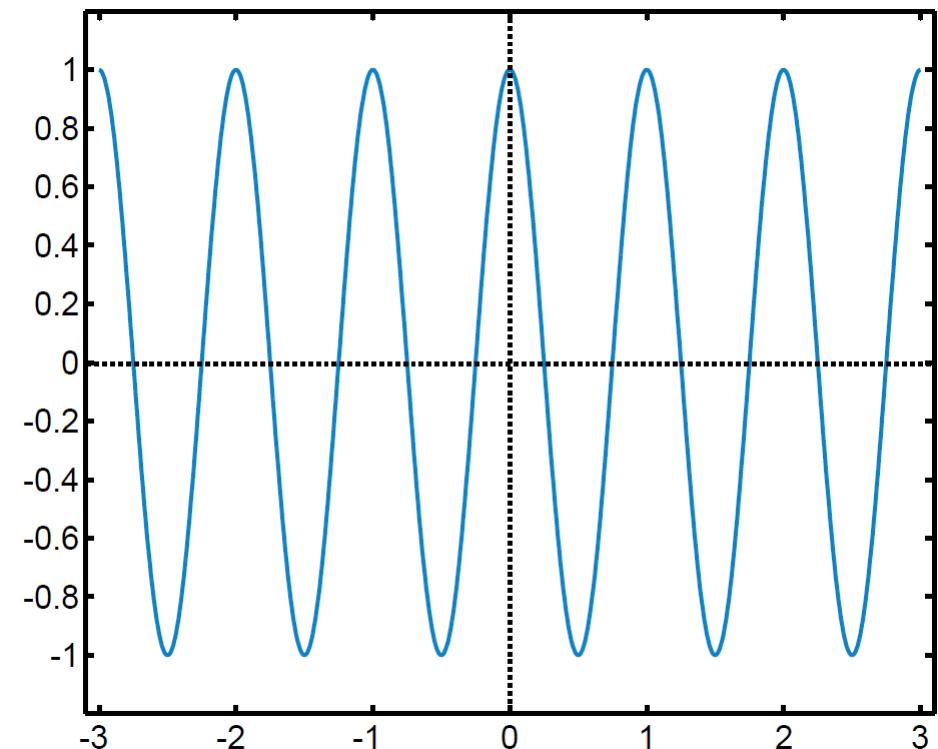


Wichtige Fouriertransformierte

Cosinus - Funktion:

$$f(x) = \cos(2\pi\nu x)$$

$$F(u) = \frac{1}{2} [\delta(u + \nu) + \delta(u - \nu)]$$

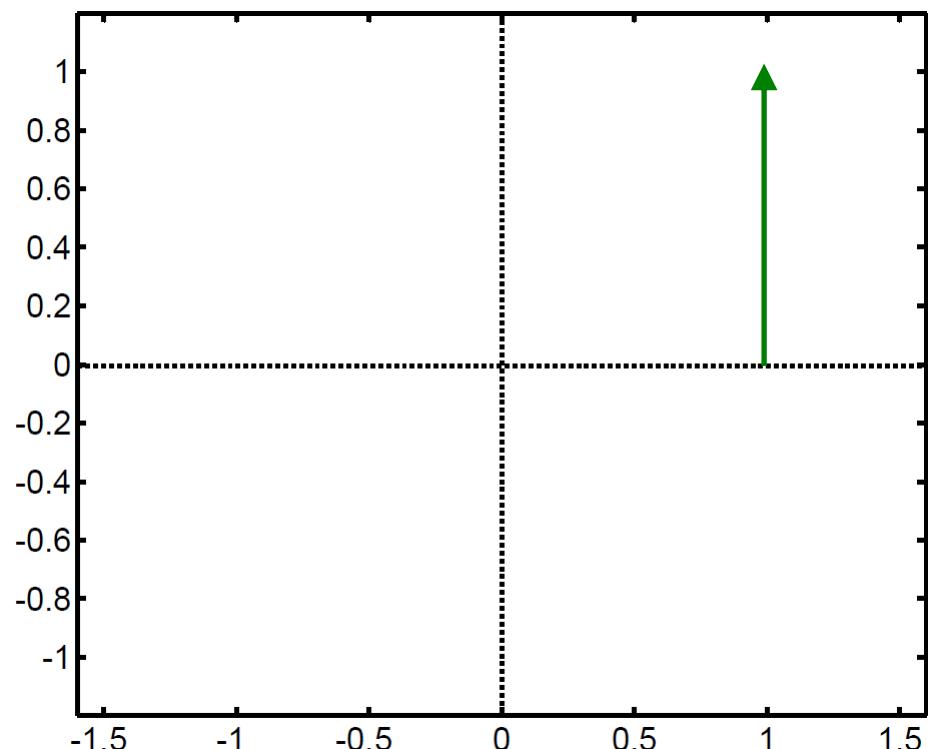
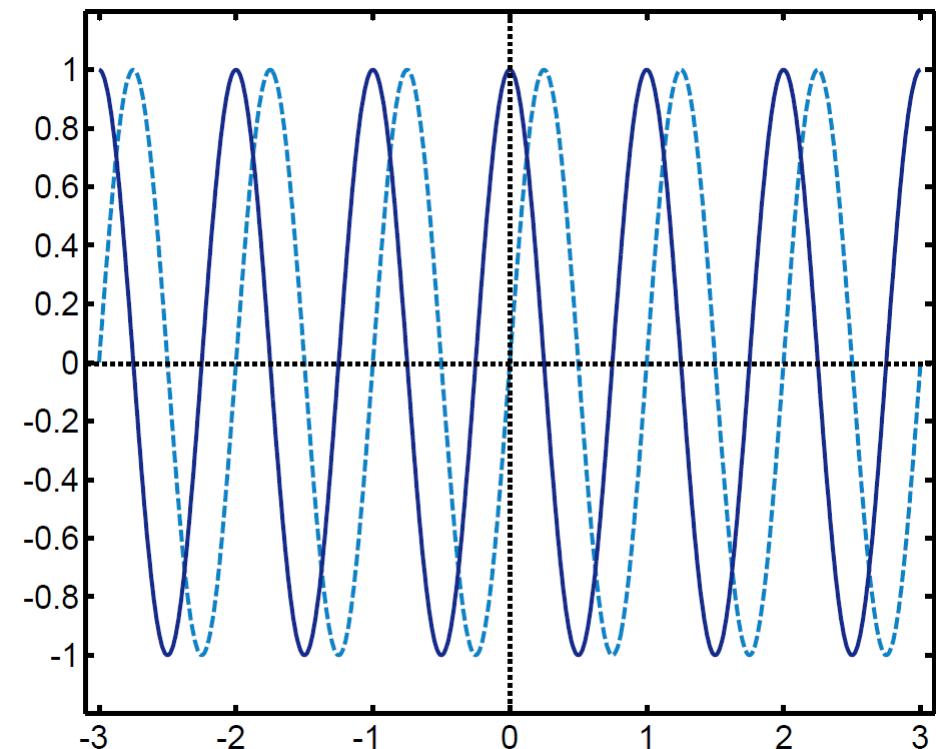


Wichtige Fouriertransformierte

e^{ix} - Funktion:

$$f(x) = e^{2\pi i ax}$$

$$F(u) = \delta(u - a)$$

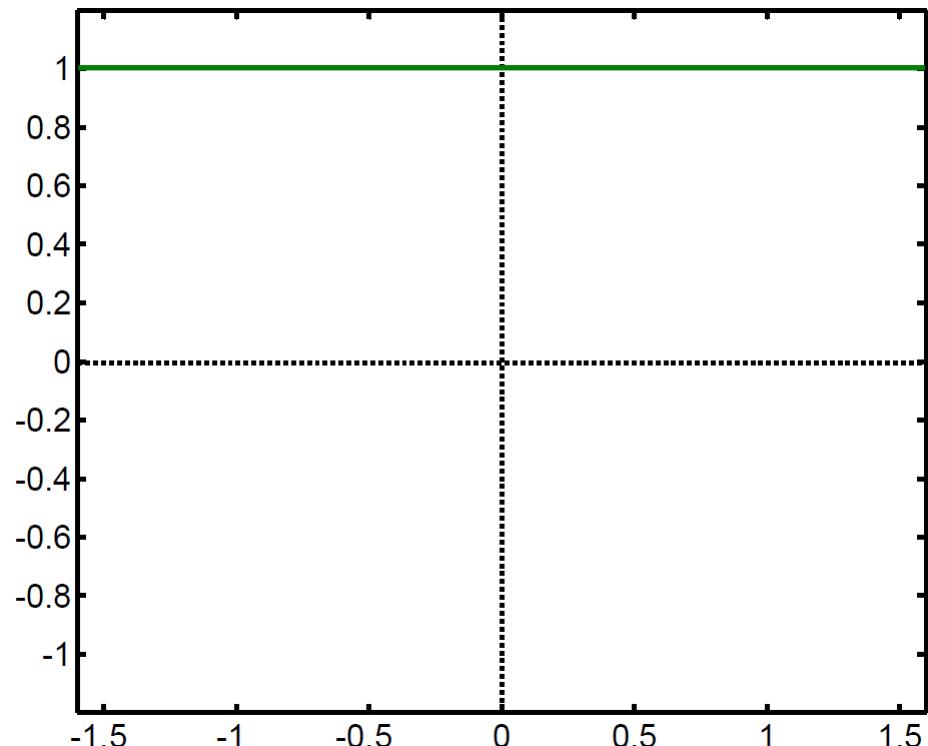
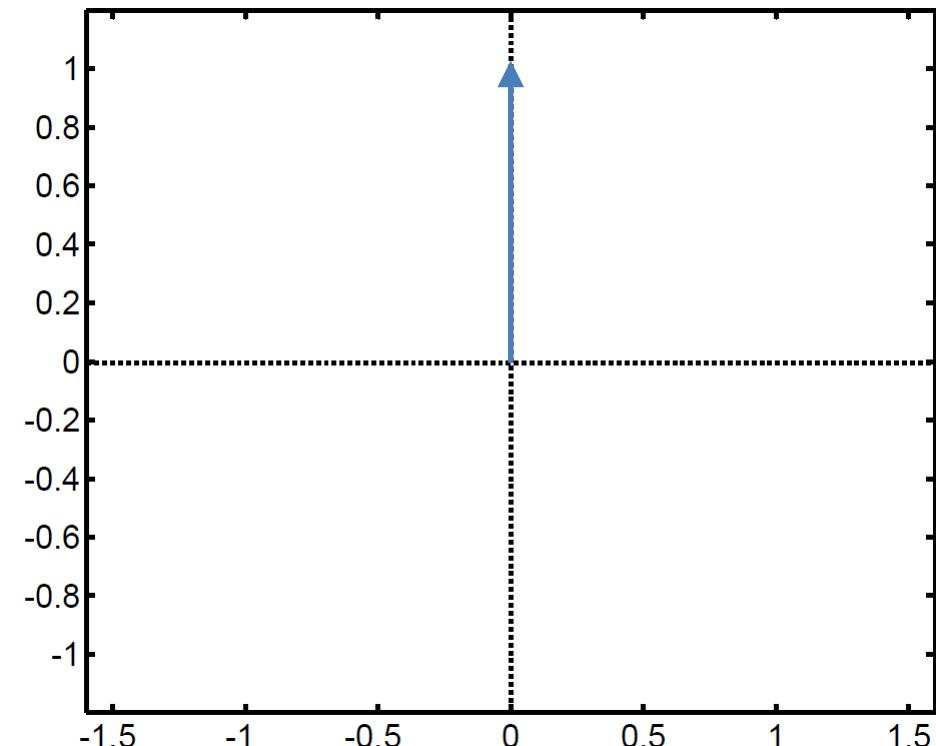


Wichtige Fouriertransformierte

δ - Funktion:

$$f(x) = \delta(x)$$

$$F(u) = 1$$

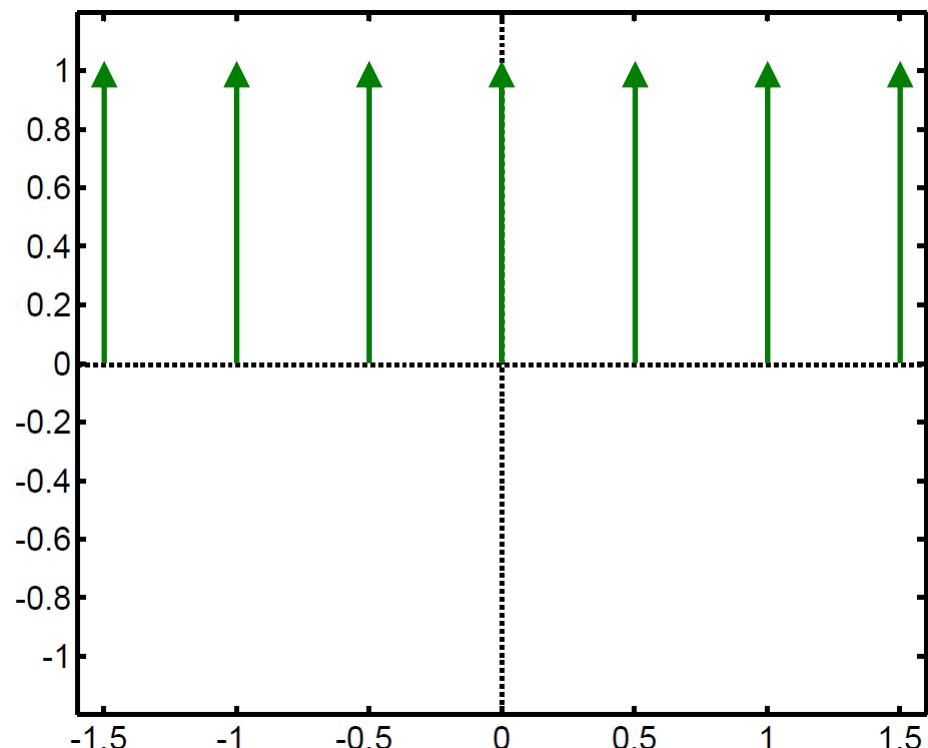
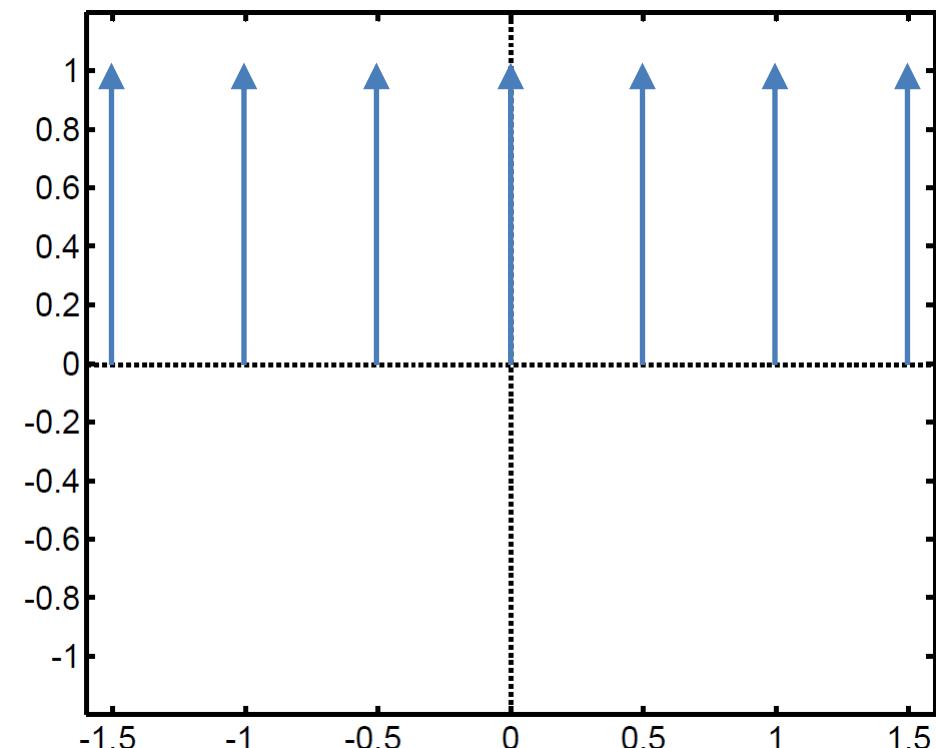


Wichtige Fouriertransformierte

Kamm - Funktion:

$$f(x) = \text{comb}(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(x - k)$$

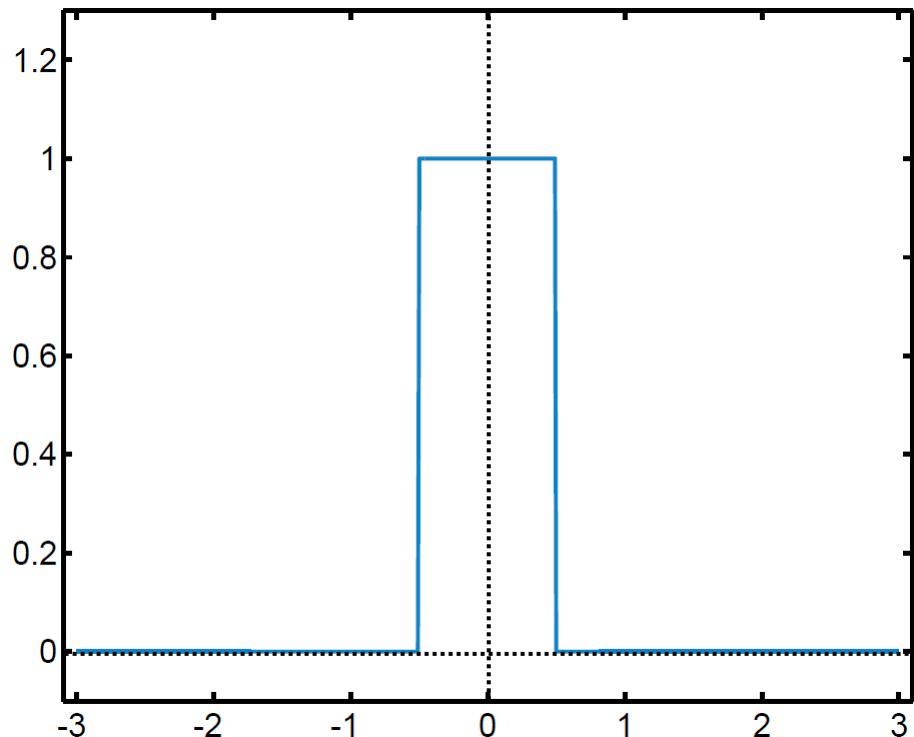
$$F(u) = \text{comb}(u)$$



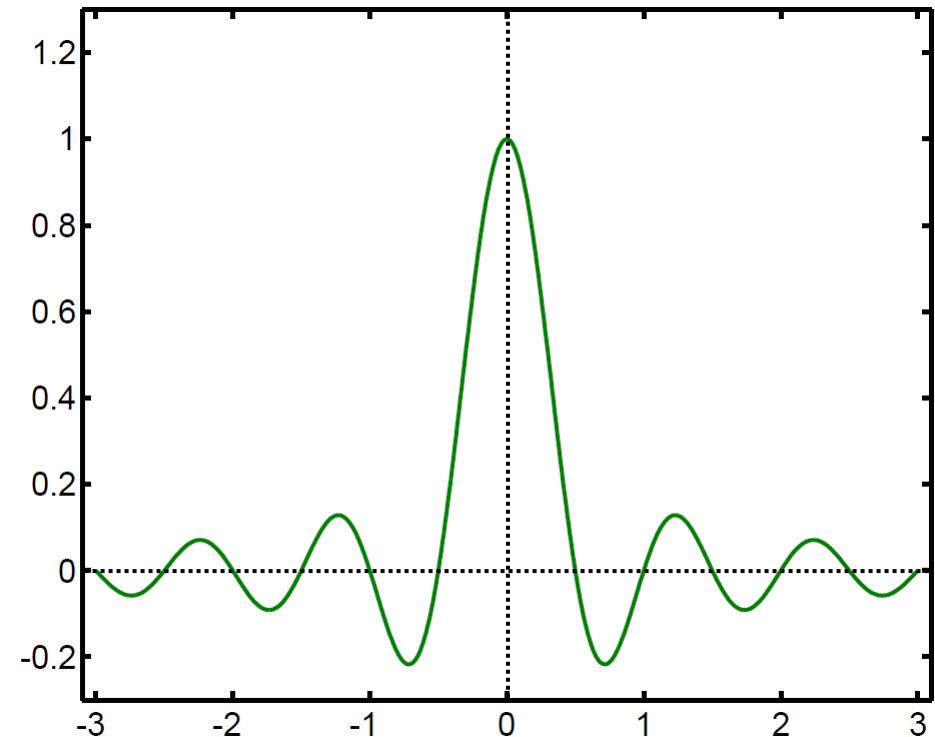
Wichtige Fouriertransformierte

Rechteck-Funktion:

$$f(x) = \text{rect}(x)$$



$$F(u) = \text{sinc}(u)$$

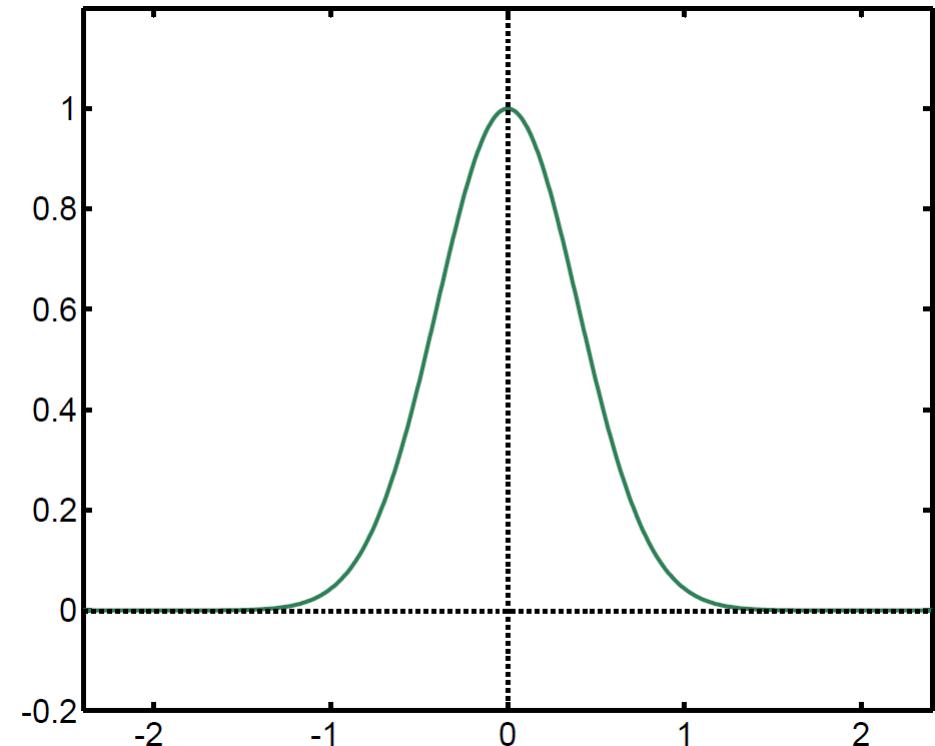
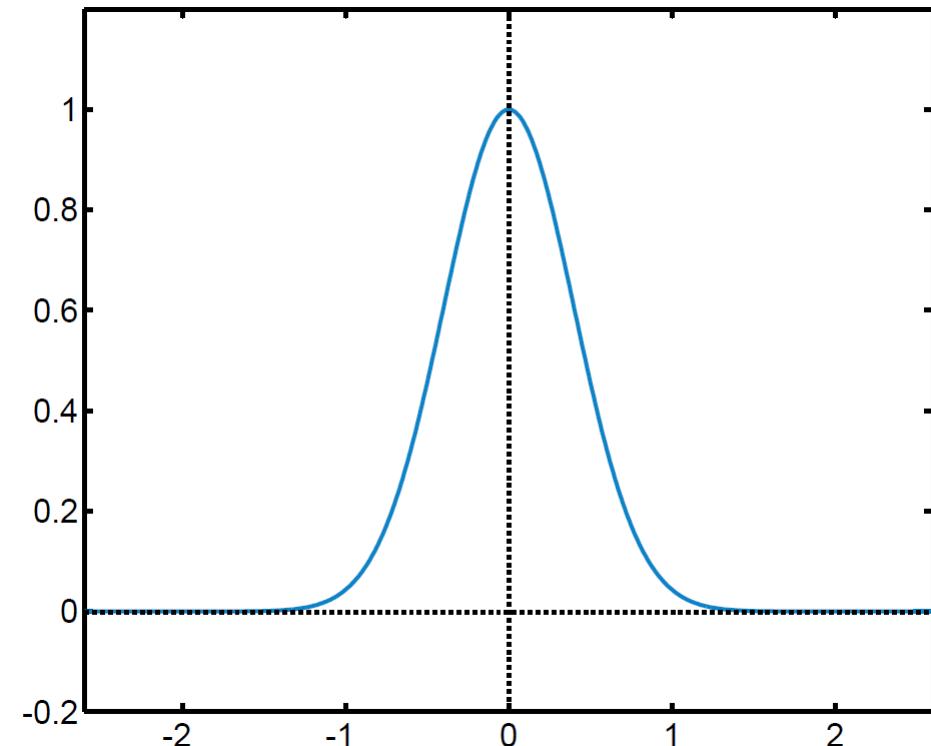


Wichtige Fouriertransformierte

Gauß-Funktion:

$$f(x) = e^{-\pi x^2}$$

$$F(u) = e^{-\pi u^2}$$

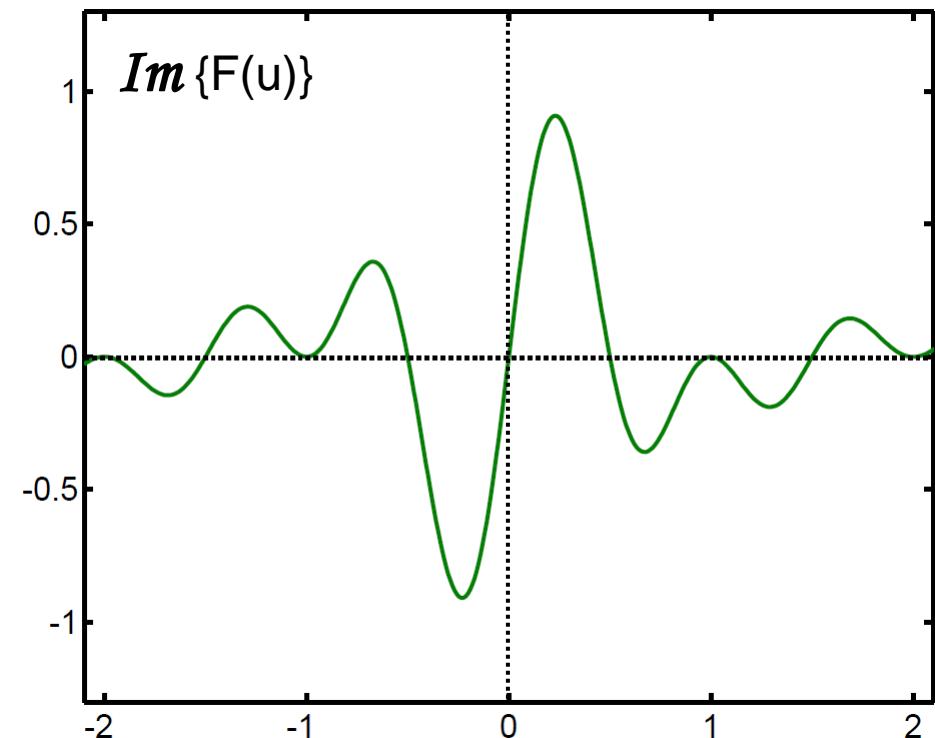
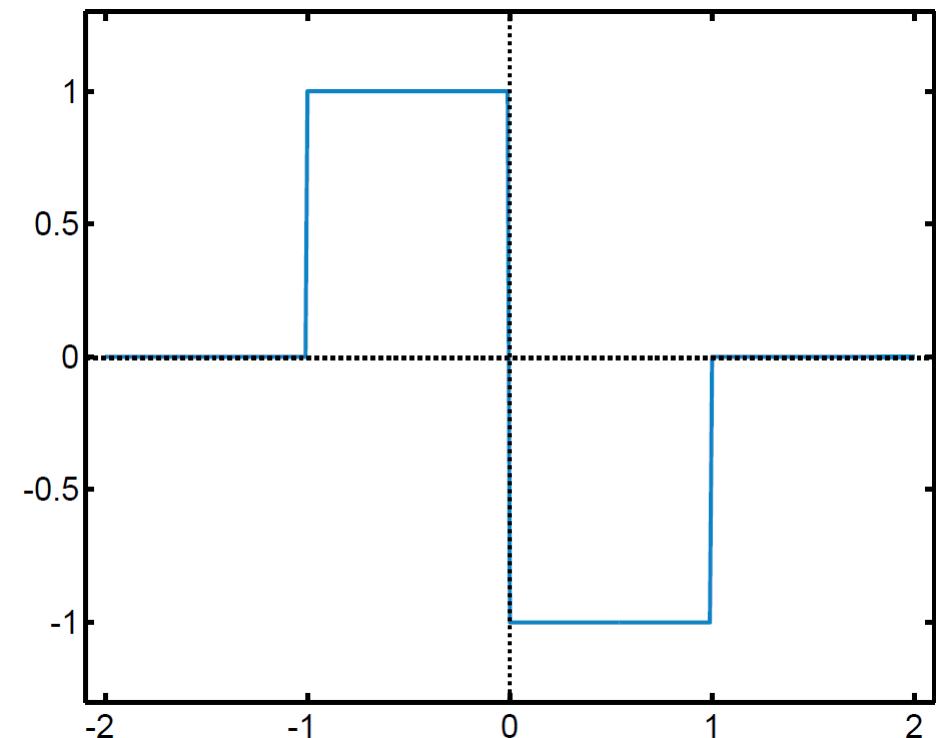


Zusammengesetzte Funktionen

Kombination zweier Rechteckfunktionen:

$$f(x) = \text{rect}(x+a) - \text{rect}(x-a)$$

$$F(u) = 2i \cdot \sin(2\pi au) \text{sinc}(u)$$

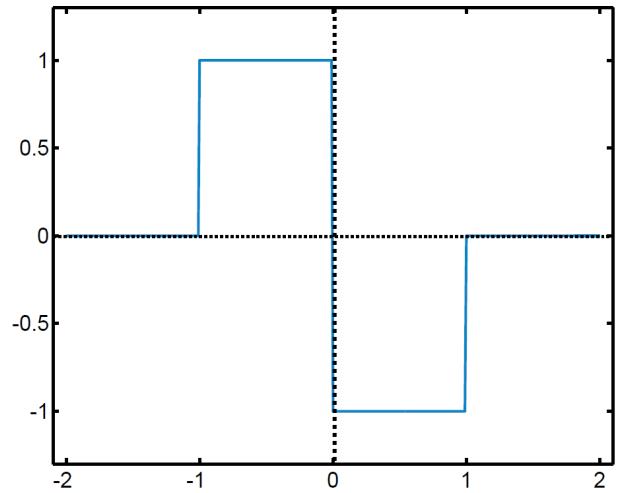


Zusammengesetzte Funktionen



Kombination zweier Rechteckfunktionen:

$$f(x) = \text{rect}(x+a) - \text{rect}(x-a)$$

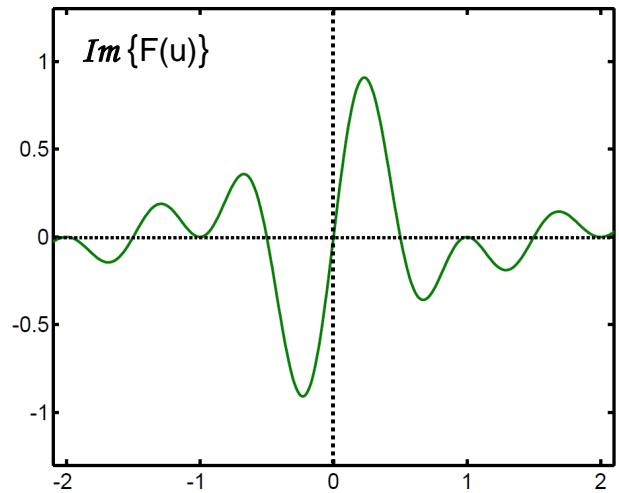


$$\mathcal{F}\{\text{rect}(x+a) - \text{rect}(x-a)\} =$$

$$= \left[e^{2\pi iau} - e^{-2\pi iau} \right] \text{sinc}(u)$$

mit $\sinh(x) = \frac{1}{2} \left[e^x - e^{-x} \right] = -i \cdot \sin(ix)$
 $(x = 2\pi iau)$

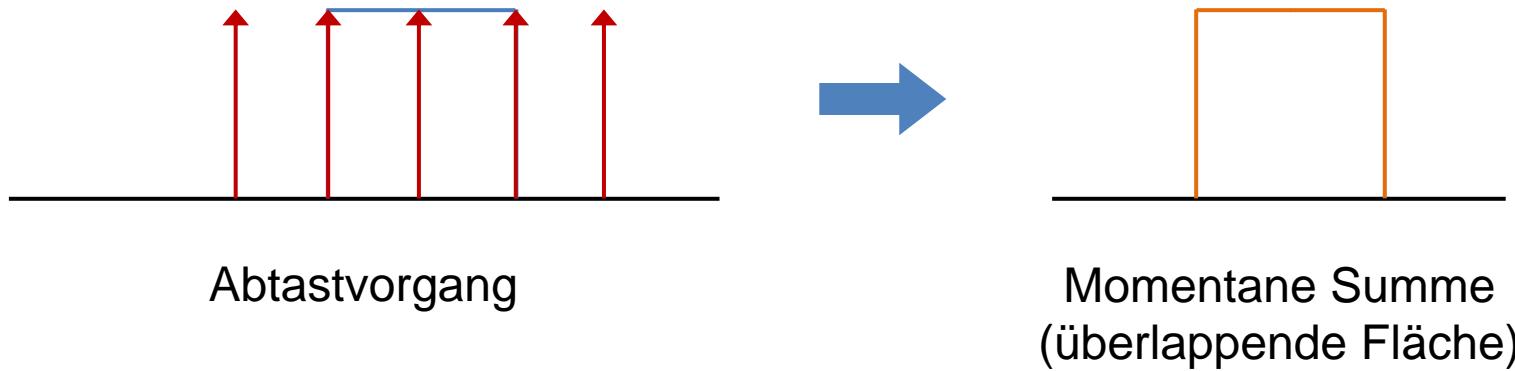
$$\longrightarrow F(u) = 2i \cdot \sin(2\pi au) \text{sinc}(u) \longrightarrow$$



Faltung

Abtasten einer Funktion durch eine zweite Funktion

Beispiel: $\text{rect}(x)$ wird mit $\delta(x)$ abgetastet



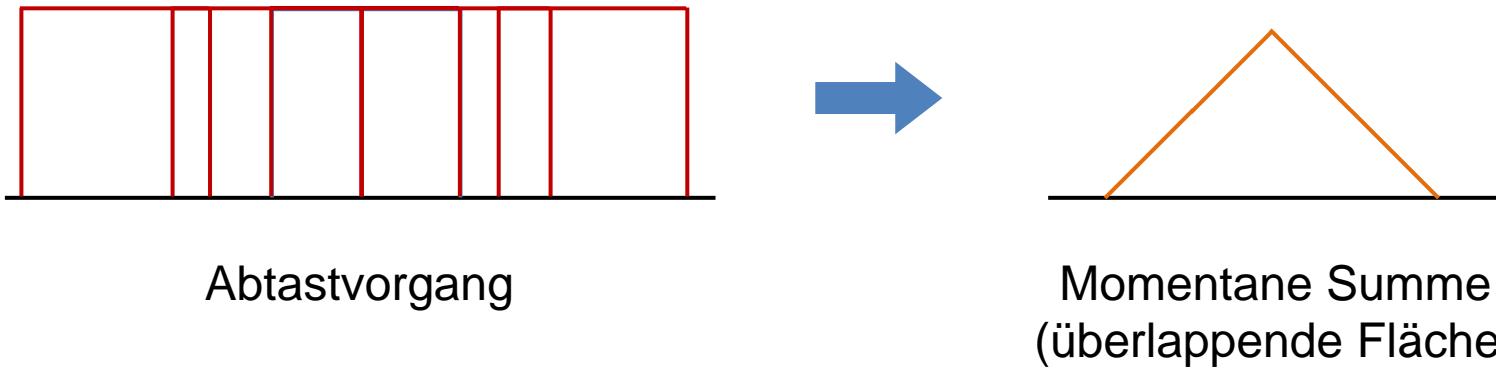
Mathematisch:

$$f(x) * g(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau) \cdot g(x - \tau) d\tau$$

mit Fouriertransformation $\longrightarrow \mathcal{F}\{f(x) * g(x)\} = F(u) \cdot G(u)$

Faltung und Fouriertransformation

Faltung ist wichtig für abtastende Verfahren, Messtechnik und allgemein Übertragungsfunktionen. Die Fouriertransformation ist hierbei hilfreich.



Einfache Lösung für: $\mathcal{F}\{\text{tri}(x)\} = ?$

$$\text{tri}(x) = \text{rect}(x) * \text{rect}(x)$$

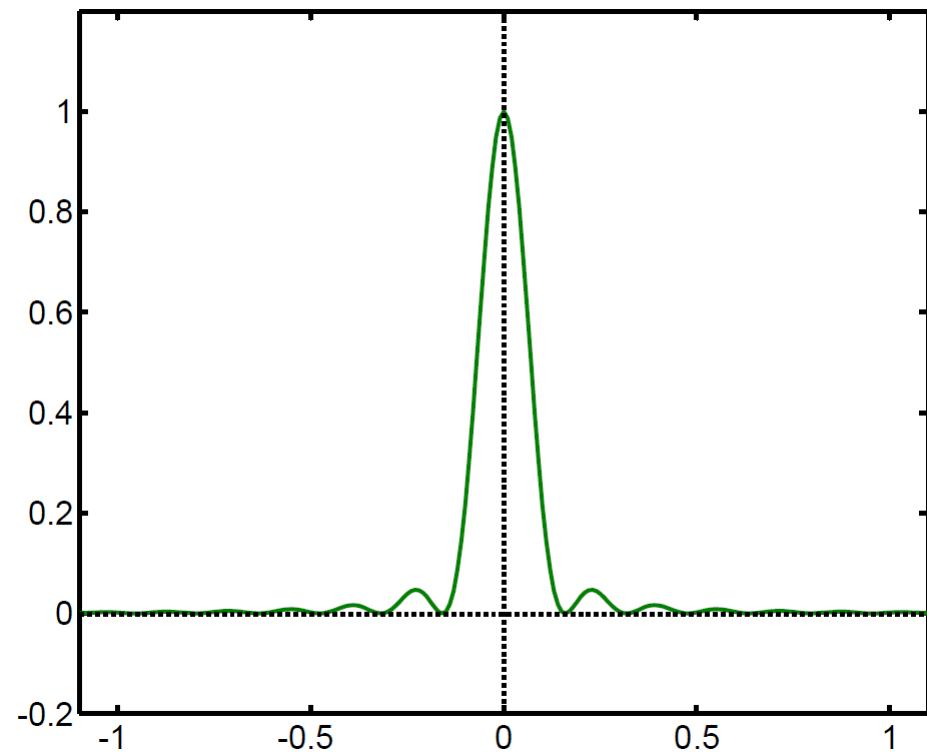
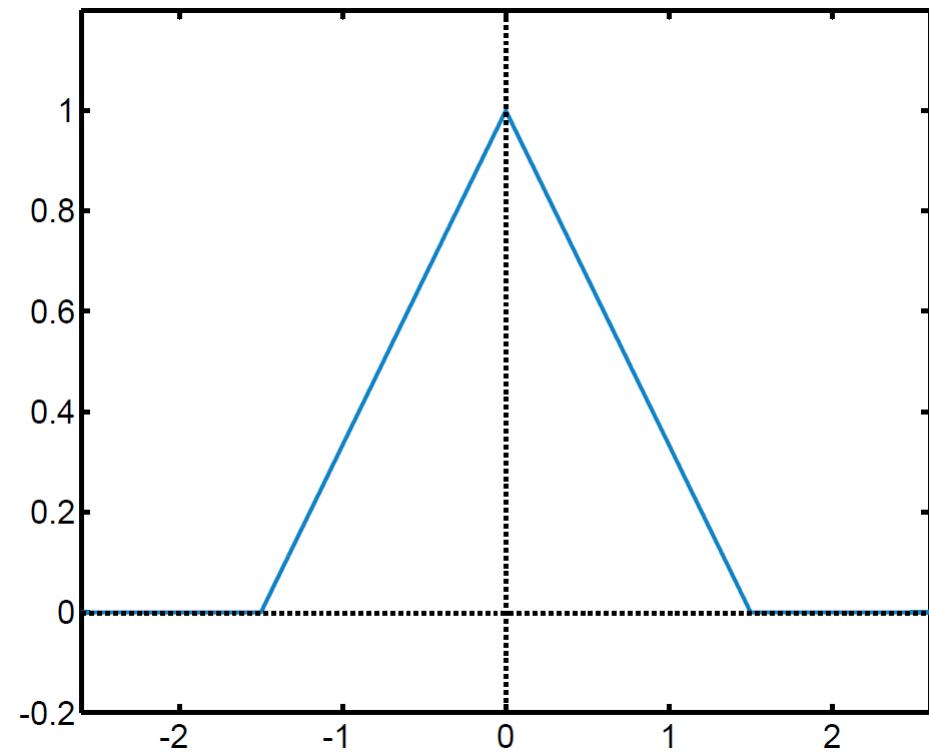
$$\mathcal{F}\{\text{tri}(x)\} = \mathcal{F}\{\text{rect}(x) * \text{rect}(x)\} = \text{sinc}(u) \cdot \text{sinc}(u) = \text{sinc}^2(u)$$

Faltung und Fouriertransformation

Dreieck - Funktion:

$$f(x) = \text{tri}(x)$$

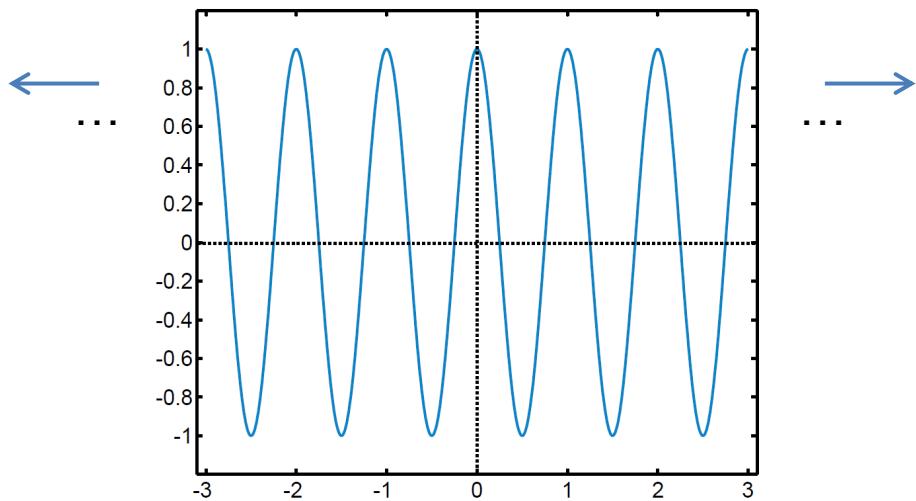
$$F(u) = \text{sinc}^2(u)$$



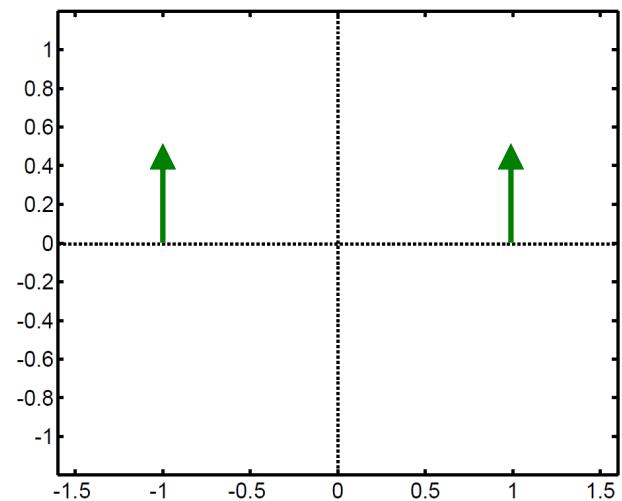
Fourieroptik – Zeit/Frequenzbereich

Idealisierter Laser \longrightarrow monochromatisch, nur ein λ

Würde perfekter harmonischer Welle entsprechen



$$f(x) = \cos(2\pi\nu x)$$



$$F(u) = \frac{1}{2} [\delta(u+\nu) + \delta(u-\nu)]$$

Für eine solche Welle würde $t \rightarrow \pm\infty$ und $E \rightarrow \infty$

\longrightarrow Reale Wellen sind zeitlich begrenzt (Ein-/Ausschalten, Pulse, ...)

Fourieroptik – Zeit/Frequenzbereich

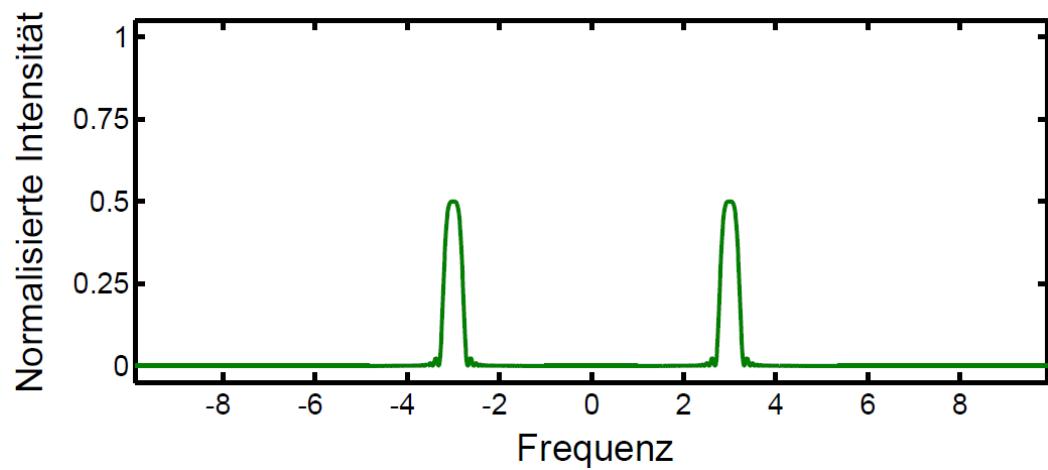
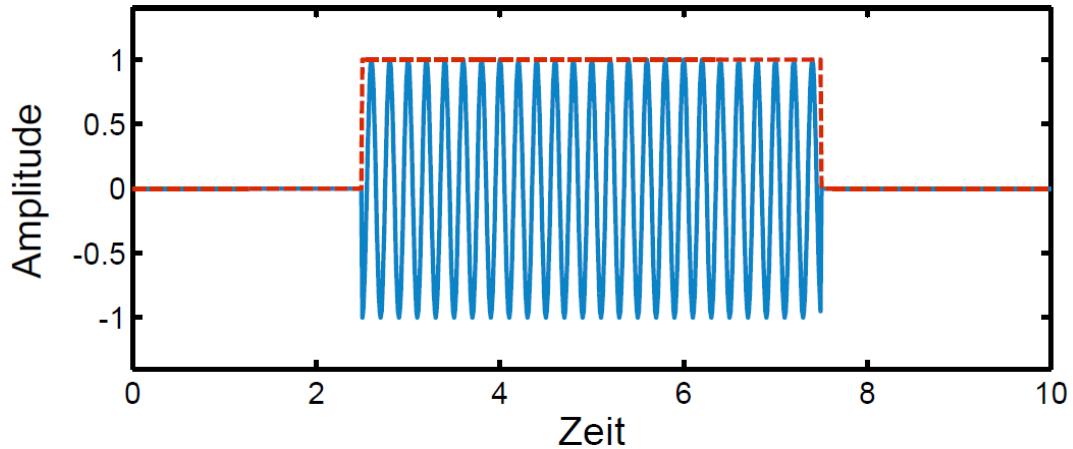
„Hartes“ Ein- und Aus-
schalten der Welle

$$\rightarrow \cos(2\pi\nu t) \cdot \text{rect}\left(\frac{t}{b}\right)$$

$$\downarrow \mathcal{F}$$

Faltung im
Frequenzbereich

$$\frac{1}{2} [\delta(u + \nu) + \delta(u - \nu)] * |b| \text{sinc}(bu)$$



Fourieroptik – Zeit/Frequenzbereich

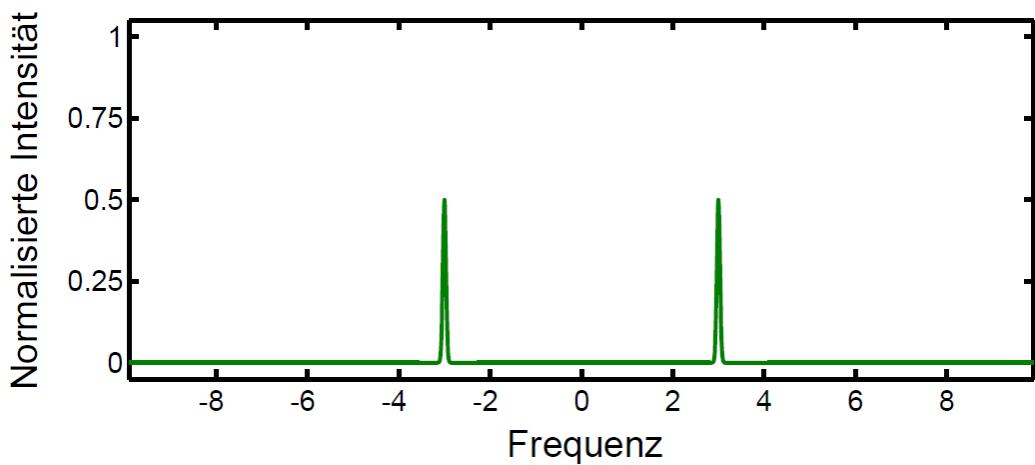
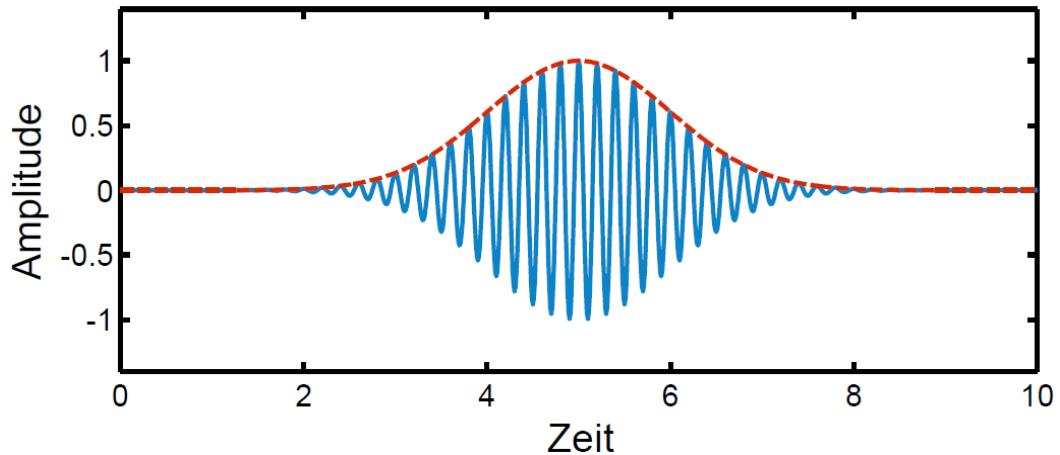
„Weiches“ Ein- und Aus-schalten der Welle

$$\rightarrow \cos(2\pi\nu t) \cdot e^{-\pi\left(\frac{t}{b}\right)^2}$$

$$\downarrow \mathcal{F}$$

Faltung im Frequenzbereich

$$\frac{1}{2} [\delta(u+\nu) + \delta(u-\nu)] * |b| \cdot e^{-\pi(bt)^2}$$



Fourieroptik – Zeit/Frequenzbereich

- Lichtquellen geben Licht als Wellenpakete mit endlicher Länge ab
- Reale Lichtquellen haben immer ein spektrale Breite $\Delta\nu > 0$
- Ein zeitlich endliches Wellenpaket entsteht durch die Überlagerung von harmonischen Wellen mit unterschiedlichen Frequenzen
- kurze Wellenpakete → breite spektrale Verteilung
- lange Wellenpakete → schmale spektrale Verteilung
- aus dem Spektrum einer Lichtquelle kann auf den Emissionsvorgang geschlossen werden

Fourieroptik

(Kohärenz und weitere spezielle Themen
der Optik)

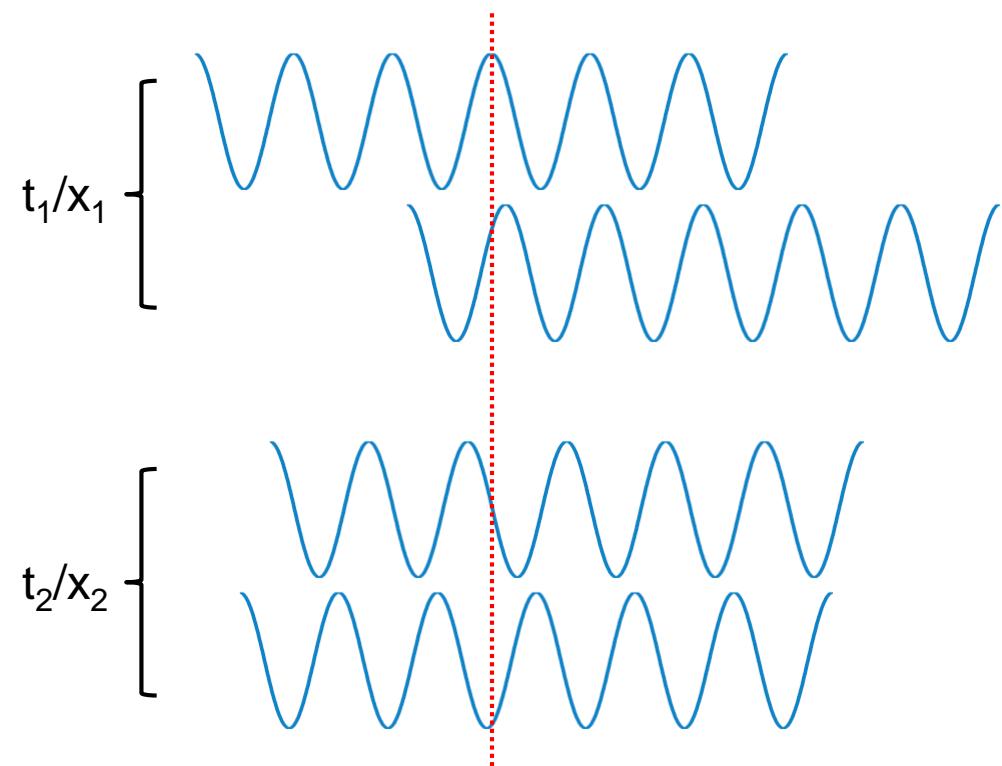
Kohärenz

Kohärenz ist das Maß für eine
feste Phasenbeziehung zwischen
Wellenfronten

Der Emissionsvorgang von Licht
ist hierbei ein wichtiger Aspekt

Kohärenz wird aber auch nach
der Emission beeinflusst

→ Kohärenz ist Eigenschaft
von Wellenfeldern



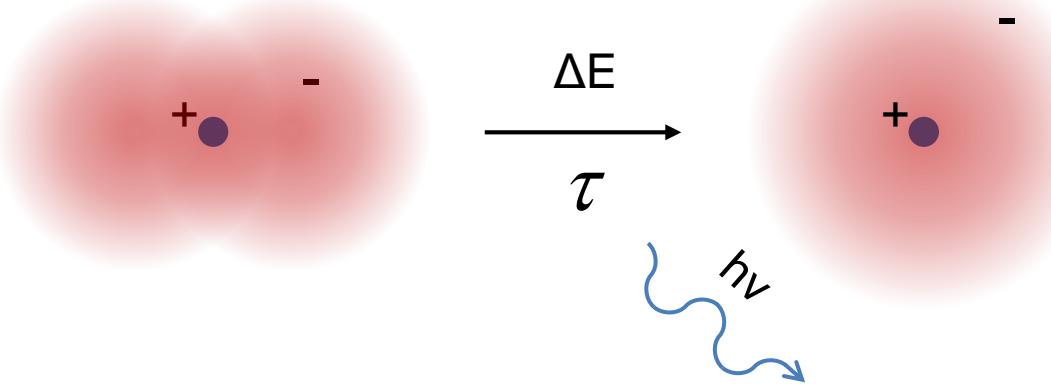
Untersuchung der Korrelation von Emissionsvorgängen in Lichtquellen

Hilfreiche Beschreibung (Aufteilung) als zeitliche bzw. räumliche Kohärenz

Kohärent, Teilkohärent, Inkohärent → Kohärenzgrad von Licht

Kohärenz

Vereinfachte Darstellung des Emissionsvorgangs



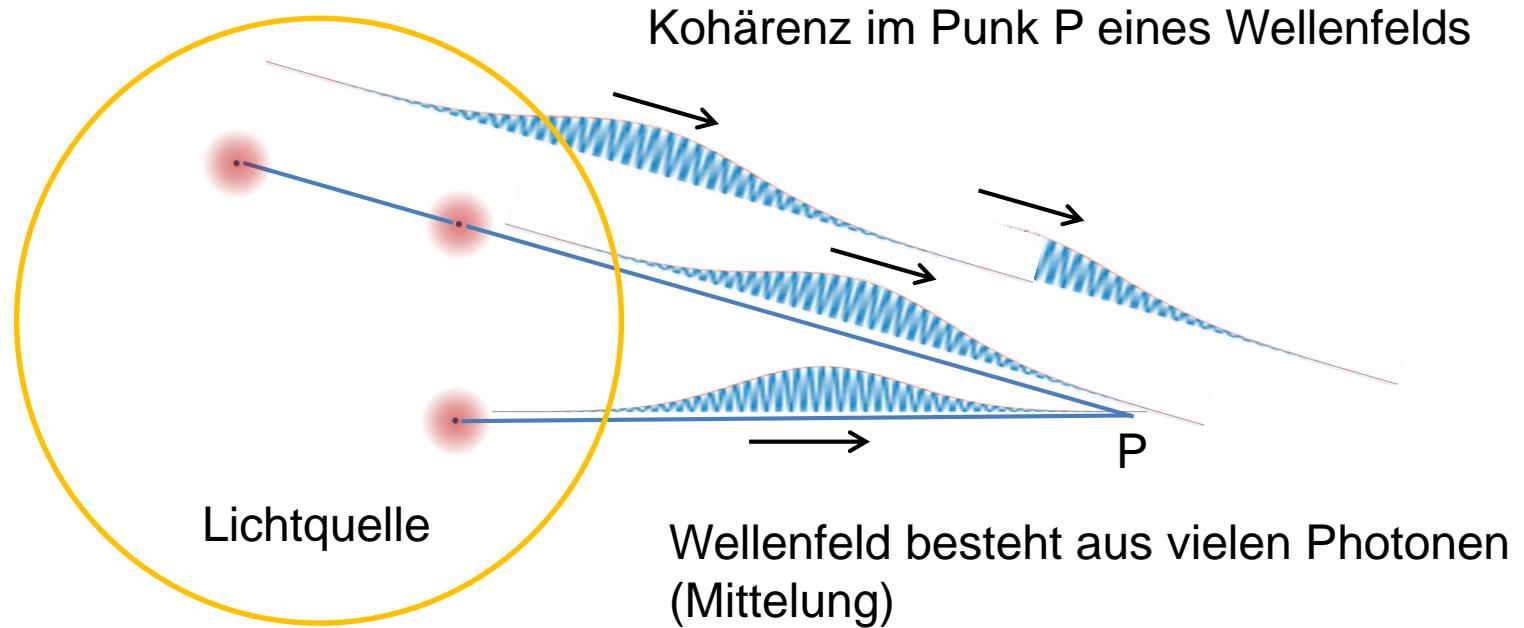
ΔE → emittierte Frequenz

τ → Lebensdauer des angeregten Zustands
→ zeitliche Länge des Emissionsvorgangs
→ Länge des emittierten Wellenpakets WP (Photon)

Emission ist statistischer Vorgang (spontan) → niedrige Korrelation

Phasenlage zwischen verschiedenen Emittoren ist zufällig (ebenso
Polarisation, Richtung, zusätzlich kann Wellenlänge ebenfalls variieren)

Kohärenz



Zeitliche Kohärenz: Korrelation zwischen WP eines Emitters zu t_1 und t_2

oder: Korrelation von WP der Emitter auf einer Sichtlinie zu P

Räumliche Kohärenz: Korrelation zwischen WP von Emittoren unter einem Sichtwinkel $> 0^\circ$

Zeitliche Kohärenz

Zeitliche Dauer des Emissionsvorgangs ist mit Länge des WP verknüpft:

$$l_c = t_c \cdot c$$

Messung mittels Zweistrahlinterferenz möglich

Kontrast des Interferenzmusters ist von Kohärenzgrad abhängig

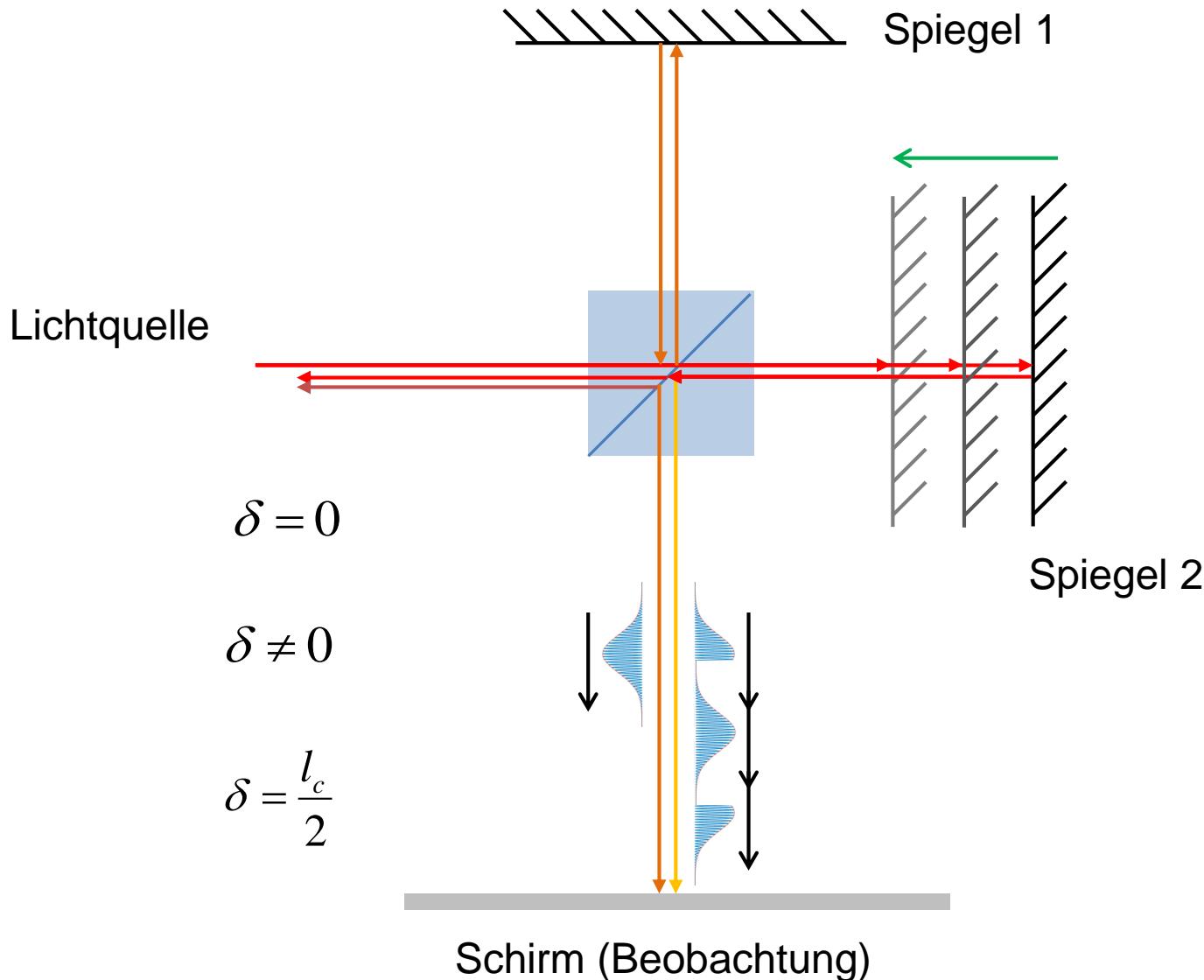
Im Michelson Interferometer wird eine Welle aufgeteilt (Kohärent zu sich selbst)

Gangunterschied ist abgeglichen \rightarrow maximaler Kontrast

Für Gangunterschied $\delta \neq 0$ \rightarrow WP überlagern sich nur teilweise kohärent
 \rightarrow verringelter Kontrast

Für Gangunterschied $\delta \geq \frac{l_c}{2}$ \rightarrow WP überlagern sich nicht mehr kohärent
 \rightarrow kein Kontrast, reine Addition $I_1 + I_2$

Zeitliche Kohärenz



Zeitliche Kohärenz

Spektrum einer Lichtquelle ist mit der zeitlichen Länge eine WP verknüpft

$$f(t_{wp}) \xrightarrow{\mathcal{F}} F(\nu_{wp})$$

→ Zusammenhang von spektraler Breite einer Lichtquelle mit Lebensdauer und Kohärenzlänge

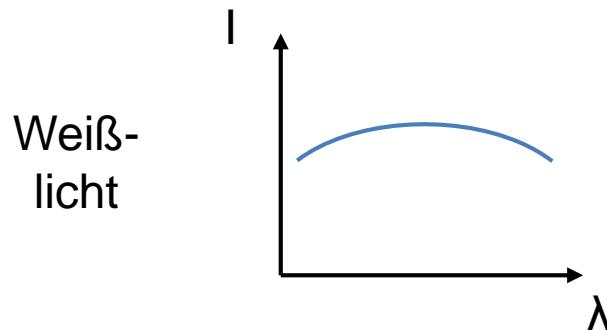
$$l_c \approx \frac{\lambda_0^2}{\Delta\lambda}$$

→ aus Verlauf der Kontrastfunktion $M(\delta)$ einer Interferenz ist der Rückschluss auf die spektrale Verteilung möglich

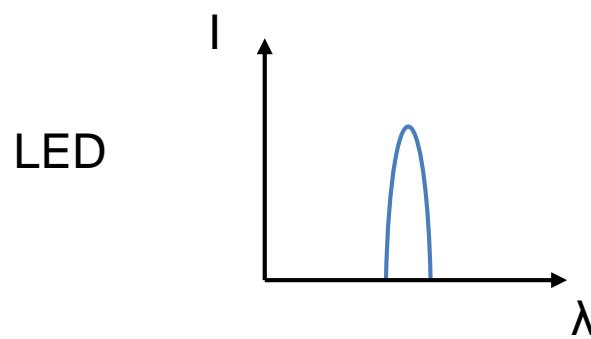
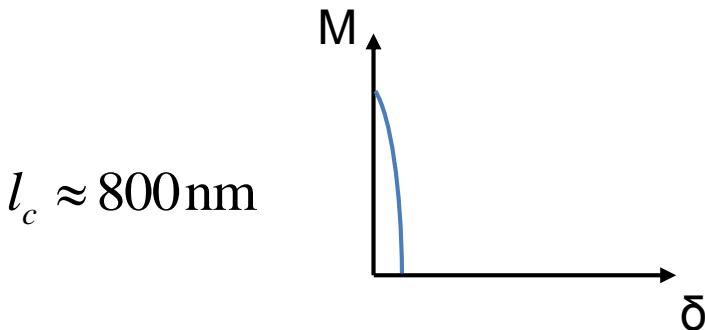
→ Fourierspektroskopie (Fouriertransform Spectroscopy)

Zeitliche Kohärenz

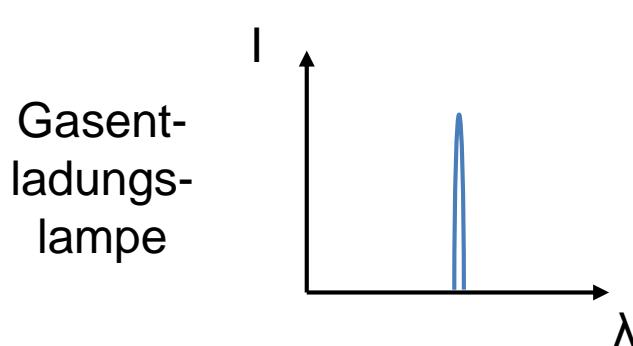
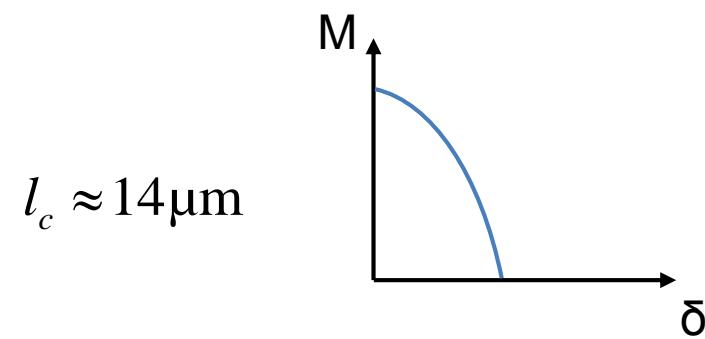
Typische Beispielwerte:



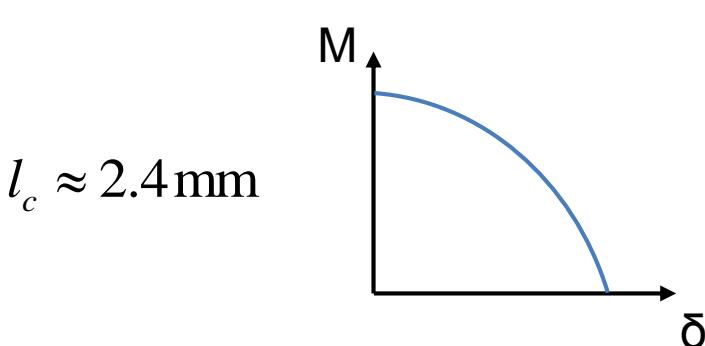
$$\Delta\lambda = 380 \text{ nm}$$
$$\lambda_0 = 550 \text{ nm}$$



$$\Delta\lambda = 30 \text{ nm}$$
$$\lambda_0 = 650 \text{ nm}$$



$$\Delta\lambda = 0.1 \text{ nm}$$
$$\lambda_0 = 486 \text{ nm}$$

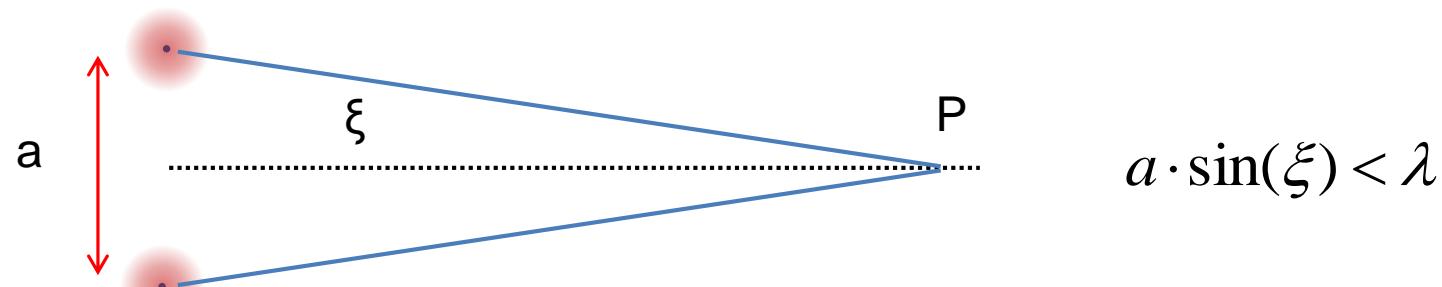


$$l_c \approx 800 \text{ nm}$$

$$l_c \approx 14 \mu\text{m}$$

$$l_c \approx 2.4 \text{ mm}$$

Räumliche Kohärenz



Korrelation der WP von seitlich versetzten Emittern

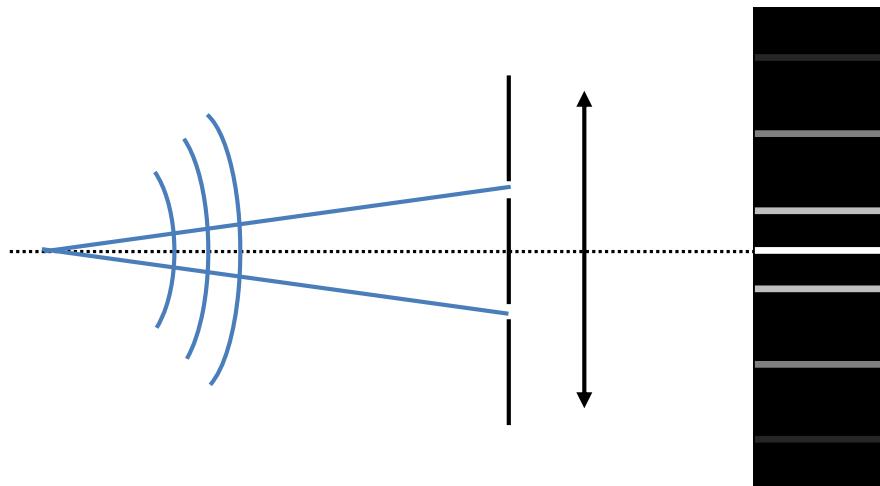
Bestimmend ist hierbei der Winkel ξ (a ist klein und/oder Abstand ist groß)

Messung durch Interferenz/Beugung mit ausgedehnten Lichtquellen

Doppelspaltversuch mit ausreichender Kohärenzlänge

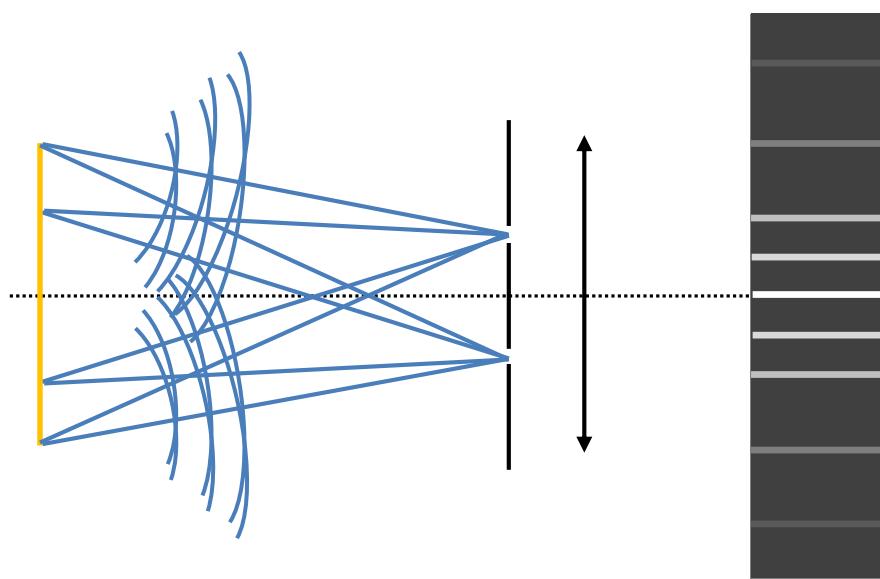
Maß für räumliche Kohärenz → Kontrast des Beugungsbildes

Räumliche Kohärenz



Beugung am Spalt mit Punkquelle

- Wellenfronten sind kohärent
- Beugungsmuster sichtbar
- hoher Kontrast



Beugung am Spalt mit

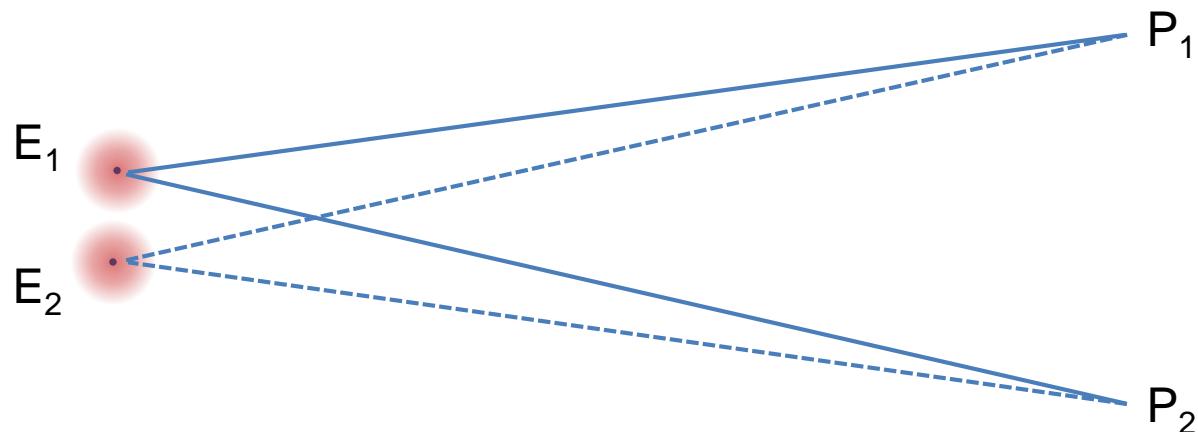
- verschobener Punktquelle
- zwei verschobenen Quellen
- z.B. einer breiten Linienquelle

Verschiedene Emitter sind schwach/nicht korreliert → geringer/kein Kontrast

Räumliche Kohärenz

Bei natürlichen Lichtquellen:

E_1 und E_2 statistisch unabhängig \longrightarrow wie ist räumliche Kohärenz möglich ?



Überlagerung S_1 von E_1 und E_2 in P_1 \longrightarrow keine Korrelation

Überlagerung S_2 von E_1 und E_2 in P_2 \longrightarrow keine Korrelation

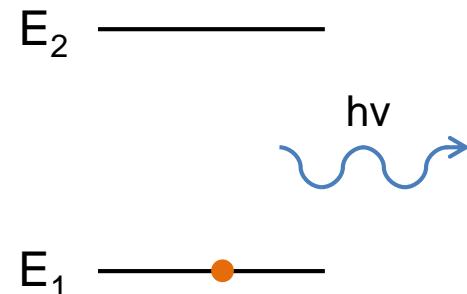
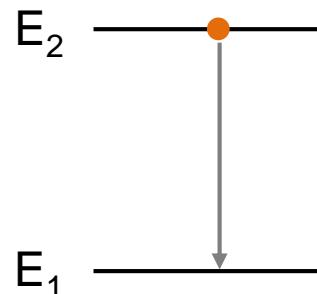
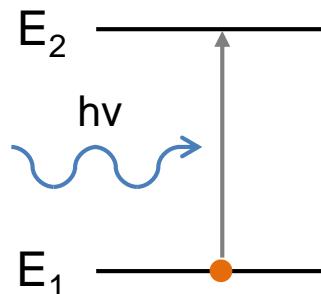
Wenn: $|\overline{E_1 P_1} - \overline{E_1 P_2}| < l_c$ und $|\overline{E_2 P_2} - \overline{E_2 P_1}| < l_c$

\longrightarrow WP jeweils eines Emitters sind kohärent in P_1 und P_2

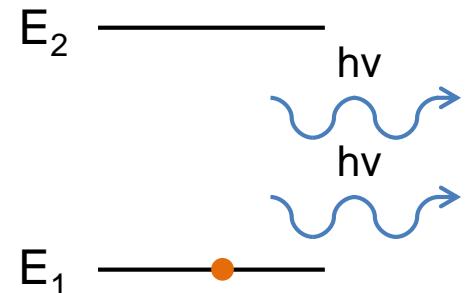
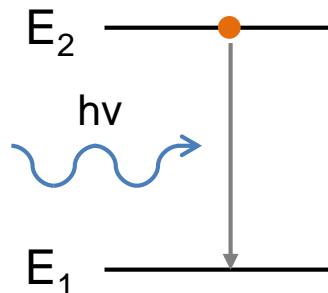
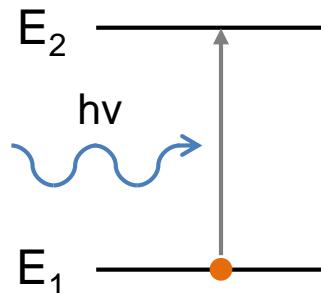
\longrightarrow S_1 ist zu S_2 korreliert !

Kohärenz - Emissionsvorgang

Spontane Emission \longrightarrow geringe/keine Korrelation



Stimulierte Emission \longrightarrow hohe Korrelation



Kohärenz - Laser

Beschreibung der Energieübergänge (als Raten), mittels Einsteinkoeffizienten:

Absorption: $\frac{dN_1}{dt} = -B_{1 \rightarrow 2} N_1 u_\nu$

stim. Emission: $\frac{dN_2}{dt} = -B_{2 \rightarrow 1} N_2 u_\nu$

spon. Emission: $\frac{dN_2}{dt} = -A_{2 \rightarrow 1} N_2$

durch Photon induzierte Vorgänge (u_ν)

Konkurrenz durch:
2 Emissionsvorgänge
2 induzierte Vorgänge

ohne nichtstrahlende Übergänge:

$$B_{1 \rightarrow 2} N_1 u_\nu = B_{2 \rightarrow 1} N_2 u_\nu + A_{2 \rightarrow 1} N_2$$

$\underbrace{\phantom{B_{2 \rightarrow 1} N_2 u_\nu + A_{2 \rightarrow 1} N_2}}$

$$= \frac{N_2}{\tau}$$

für die Koeffizient gilt:

$$B_{1 \rightarrow 2} = B_{2 \rightarrow 1} = B$$

$$A_{2 \rightarrow 1} = \frac{8\pi h \nu^3}{c^3} B$$

→ Besetzung der Energieniveaux bestimmt Verhältnis der induzierten Vorgänge

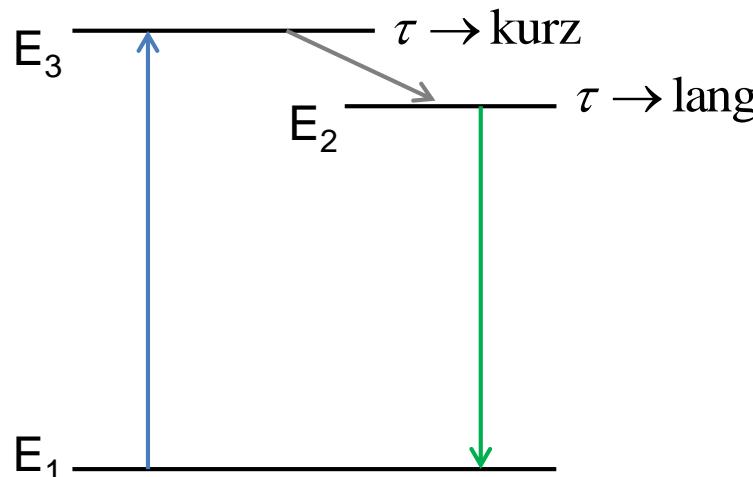
Kohärenz - Laser

Im thermischen Gleichgewicht $\longrightarrow N_i$ gemäß Boltzmann-Verteilung

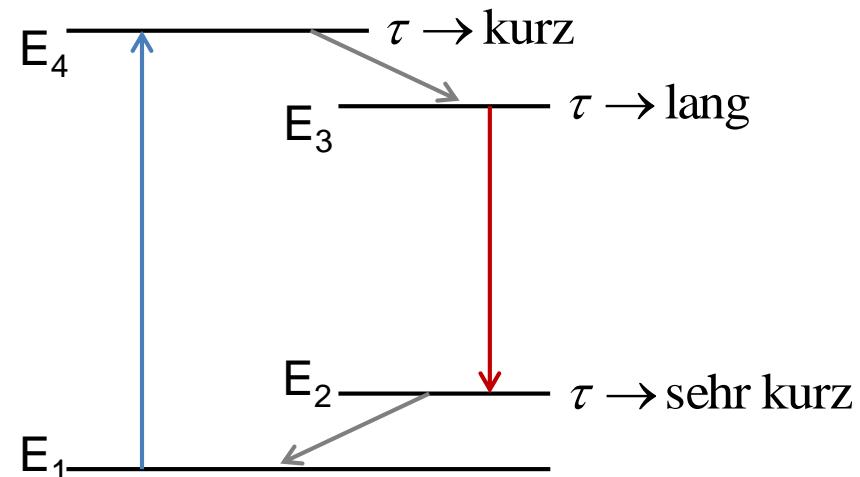
$$N_1 = N_0 e^{-\frac{E}{k_B T}} \longrightarrow \frac{N_1}{N_2} = \frac{N_0 e^{-\frac{E_1}{k_B T}}}{N_0 e^{-\frac{E_2}{k_B T}}} = e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} \longrightarrow \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{N_1}{N_2} = \lim_{T \rightarrow \infty} e^{-\frac{\Delta E}{k_B T}} = 1$$

- \longrightarrow in 2-Niveau Systemen dominiert spontane Emission
- \longrightarrow Besetzungsinversion ($N_2 > N_1$) für stimuliertes Emission nötig

3-Niveau System

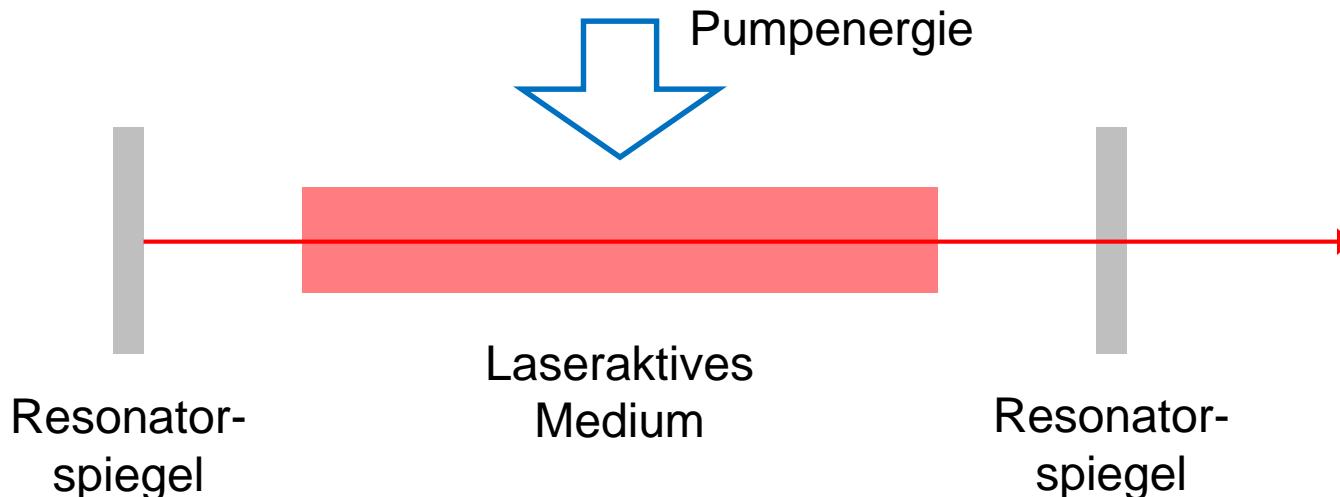


4-Niveau System



Da $\Delta E_{\text{Emis.}} < \Delta E_{\text{Absor.}}$ \longrightarrow keine Re-Absorption des emittierten Lichts.

Kohärenz - Laser



Lichterzeugung durch verstärken von stimulierter Emission

- Photonen werden „kopiert“ (Frequenz, Phase, Polarisation, Richtung)
- Erzeugung identischer Photonen durch „Kettenreaktion“
- Korrelierte Emissionsvorgänge im gesamten Laservolumen
- hohe zeitliche und räumliche Kohärenz

Kohärenzvolumen zur Beschreibung beider Teilspekte

Kohärenz - Laser

Ar⁺ - Laser:

$$\Delta\lambda = 2 \text{ pm}$$

$$\lambda_0 = 514.5 \text{ nm}$$

$$l_c \approx 7.7 \text{ cm}$$

Nd-YAG - Laser:
(2. Harmonische)

$$\Delta\lambda = 10 \text{ fm}$$

$$\lambda_0 = 532 \text{ nm}$$

$$l_c \approx 28 \text{ m}$$

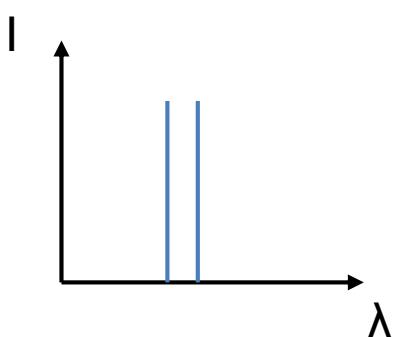
HeNe - Laser:
(stabilisiert)

$$\Delta\lambda = 0.4 \text{ fm}$$

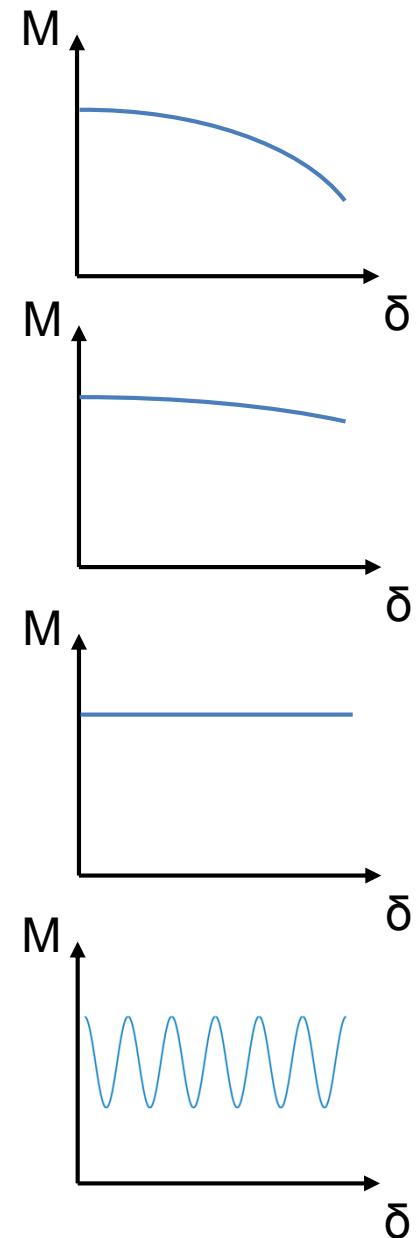
$$\lambda_0 = 632.8 \text{ nm}$$

$$l_c \approx 1 \text{ km}$$

(unstabilisiert $\rightarrow l_c \approx 30 \text{ cm}$)



Kontrastfunktion der Interferenz für Schwebung (zwei Wellenlängen)



Kohärenz

Kohärenz ist nicht nur durch Emissionsvorgang festgelegt:

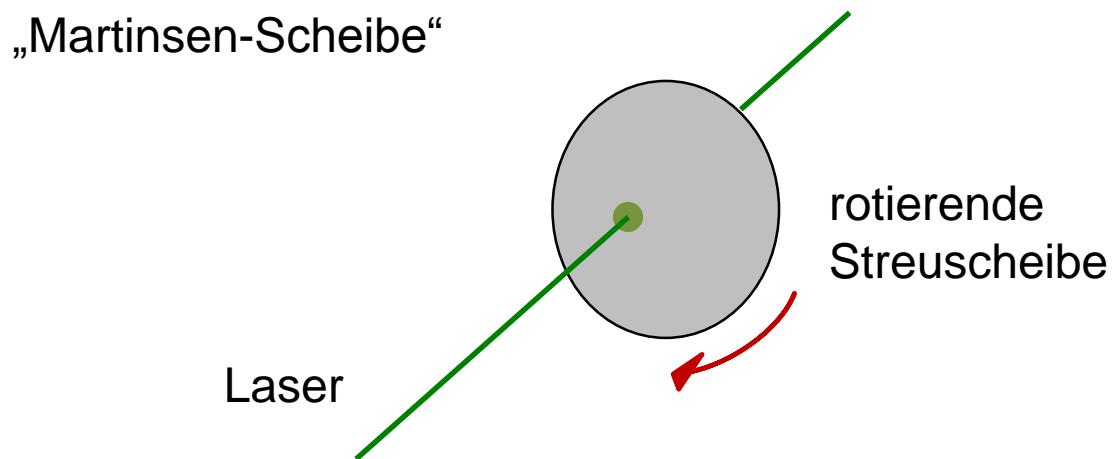
- Zeitliche Kohärenz kann mit spektral schmalbandigen Bauelementen beeinflusst werden (z.B. Etalon)
- Dies kann z.B. auch am Ausgang eines Interferometers geschehen (Überlagerungen finden immer statt, aber zeitliche Mittelung)
- Räumliche Kohärenz kann durch Änderung des Sichtwinkels beeinflusst werden (z.B. Blende)
- Erhöhung des Kohärenzgrads → deutlicher Verlust von Intensität
- Kohärenz ist eine Eigenschaft von Wellenfeldern, nicht (nur) von Lichtquellen

Zeitlicher Verlauf von Laserpulsen kann durch Manipulation im Frequenz-spektrum bestimmt werden (weitere Anwendung der Fourieroptik)

Kohärenz

Kohärenz kann auch störend sein → gezielte Verringerung ist möglich
(z.B. Laser-Speckle, ...)

(z.B. durch Modulation eines Lasers)



Streuung in Scheibe (schwach) ist ein statistischer Vorgang:

- Räumlicher Kohärenzgrad wird durch Spotgröße eingestellt
- Zeitliche Kohärenz wird durch Rotationsgeschwindigkeit eingestellt

Wellenausbreitung

Ausbreitungsgeschwindigkeit von EM Wellen

Aus Maxwell Gleichungen bzw. Wellengleichung:

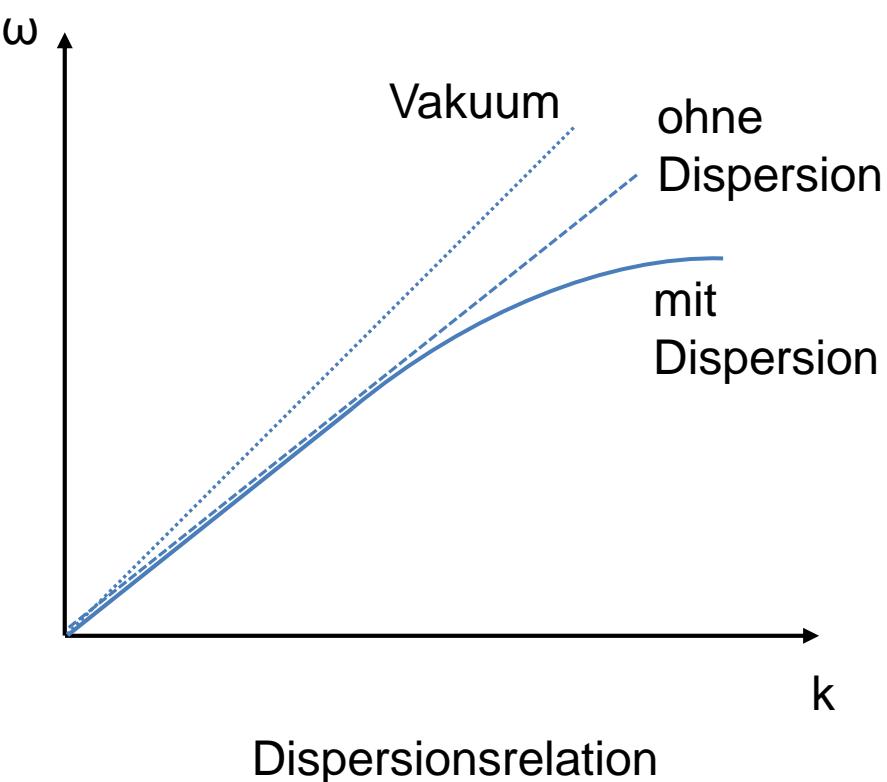
$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$$

In Materie:

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \epsilon_r \mu_0 \mu_r}} = \frac{c_0}{\bar{n}}$$

Darstellung der Dispersion:

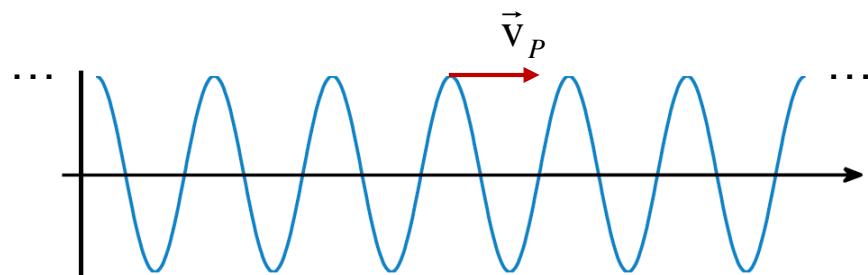
$$c = \lambda \nu = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot \omega = \frac{\omega}{k} = \frac{c_0}{\bar{n}}$$



Wellenausbreitung

Phasengeschwindigkeit

Ausbreitung von Phasenflächen einer ideal harmonischen Welle

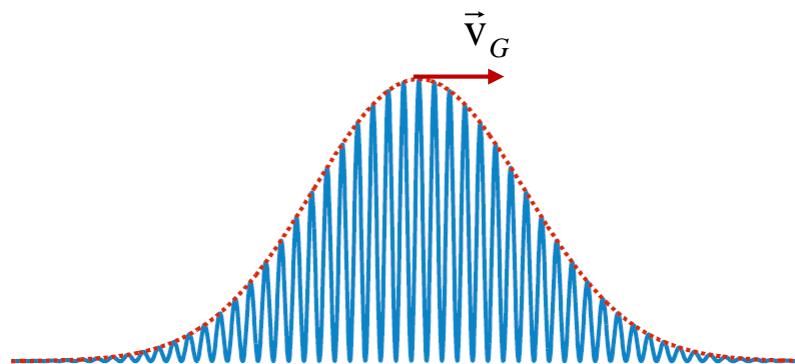


$$\vec{v}_P = \frac{\omega}{\vec{k}} \quad \text{aus} \quad (\vec{k}\vec{r} - \omega t) = 0$$

Reale Wellenpakete sind zeitlich begrenzt und daher spektral breit $\Delta\nu \neq 0$

Für diese überlagerten Wellen wird die Gruppengeschwindigkeit definiert

→ Ausbreitung der Einhüllenden des Wellenpaket

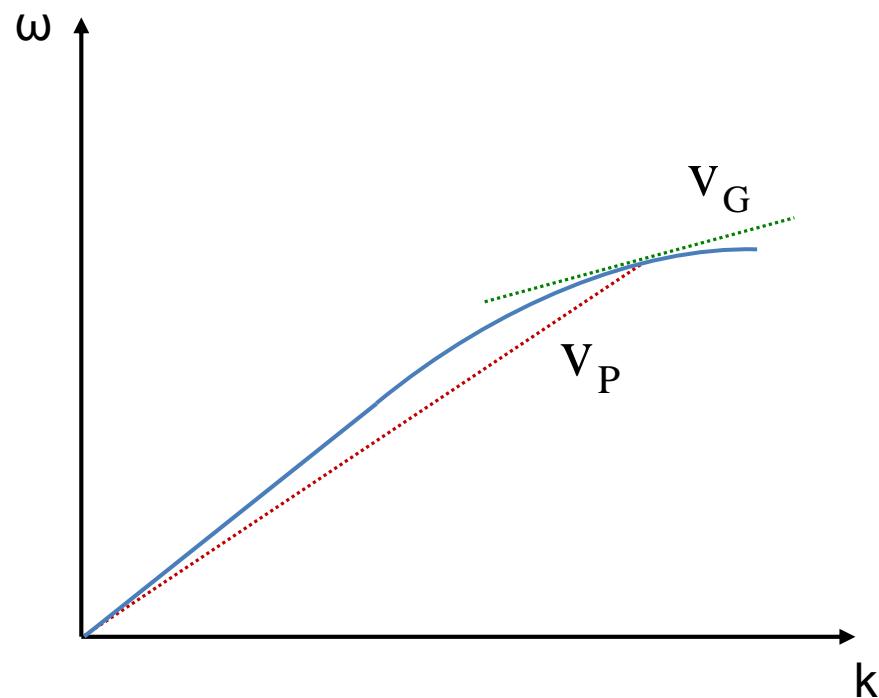


Wellenausbreitung

wenn: $\Delta\nu \rightarrow \text{klein}$, $\vec{k} \rightarrow \text{real}$ und $\bar{n} \rightarrow \text{isotrop}$

$$\longrightarrow v_G = \frac{d\omega(k)}{dk} \quad \text{oder} \quad \vec{v}_G = \text{grad}_k \omega(\vec{k})$$

Ausbreitung in \vec{k} -Richtung



Wellenausbreitung

Für $\vec{k} \rightarrow$ komplex und/oder $\Delta\nu \rightarrow$ groß

Genauere Definition von \vec{v}_G durch Bestimmung des Sattelpunkts der Einhüllenden \longrightarrow Deformation wird berücksichtigt

Allgemeingültige Definition der Ausbreitungsgeschwindigkeit:

$$\vec{v}_E = \frac{\phi}{\rho} = 2 \frac{\varepsilon c^2 (\vec{E} \times \vec{B})}{\varepsilon (\vec{E}^2 + c^2 \vec{B}^2)}$$

Geschwindigkeit der Energie

wenn $\vec{k} \rightarrow$ real $\longrightarrow v_G = v_E$

im Vakuum $\longrightarrow v_P = v_G = v_E = c_0$

Phasengeschwindigkeit hat keine Bedeutung im Anwendungsbereich

Ausbreitung von Signalen erfolgt immer mit $v \leq c_0$ (Einstein)
Signale sind an endliche Wellenpakete gekoppelt

\longrightarrow hierfür muss die passende Geschwindigkeit verwendet werden !

Fourieroptik – Ortsfrequenz-/Ortsbereich

Zusammenhang Beugung: Strukturgröße \longleftrightarrow Winkelspektrum, Beobachtungsort

$$\sin(\alpha) = \frac{\lambda}{g}$$

Fraunhofer Beugung mit
Fourieroptik: Ortsfrequenz- $\xrightarrow{\mathcal{F}}$ Ortsbereich
bereich

Beispiel: Beugung an Spalt $f(x) = \text{rect}(x)$

$$\mathcal{F}\{\text{rect}(x)\} = \text{sinc}(u)$$

ebene Welle $g(x) = 1$ (Fraunhofer-Beugung)

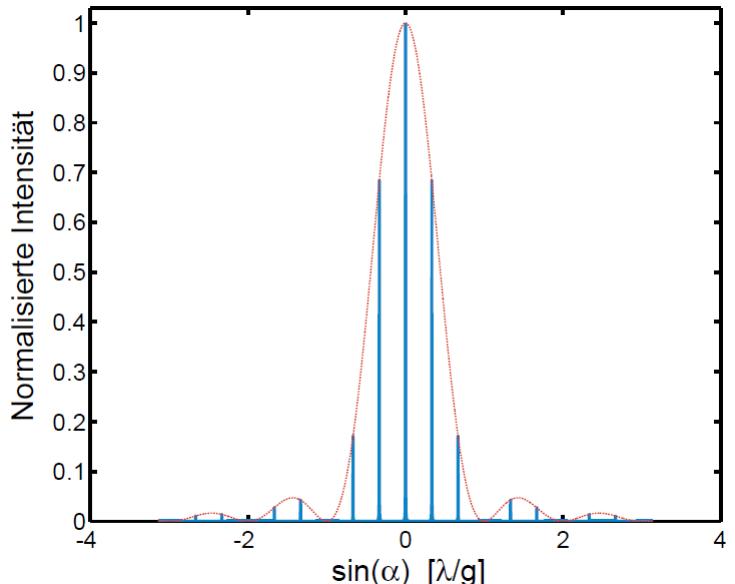
\longrightarrow Faltung mit $\delta(x)$ \longrightarrow sinc(u)

(für andere Wellenfronten ergeben sich Unterschiede)

Fourieroptik – Ortsfrequenz-/Ortsbereich

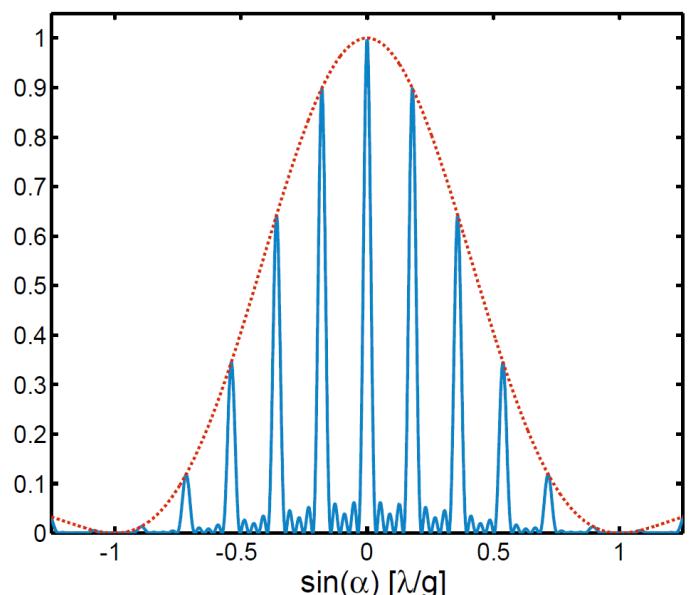
Beugung am Gitter (Faltung mit $\text{comb}(x)$)

$$\mathcal{F}\{\text{rect}(x) * \text{comb}(x)\} = \text{sinc}(u) \cdot \text{comb}(u)$$



Beugung am endlichen Gitter (Breite b)

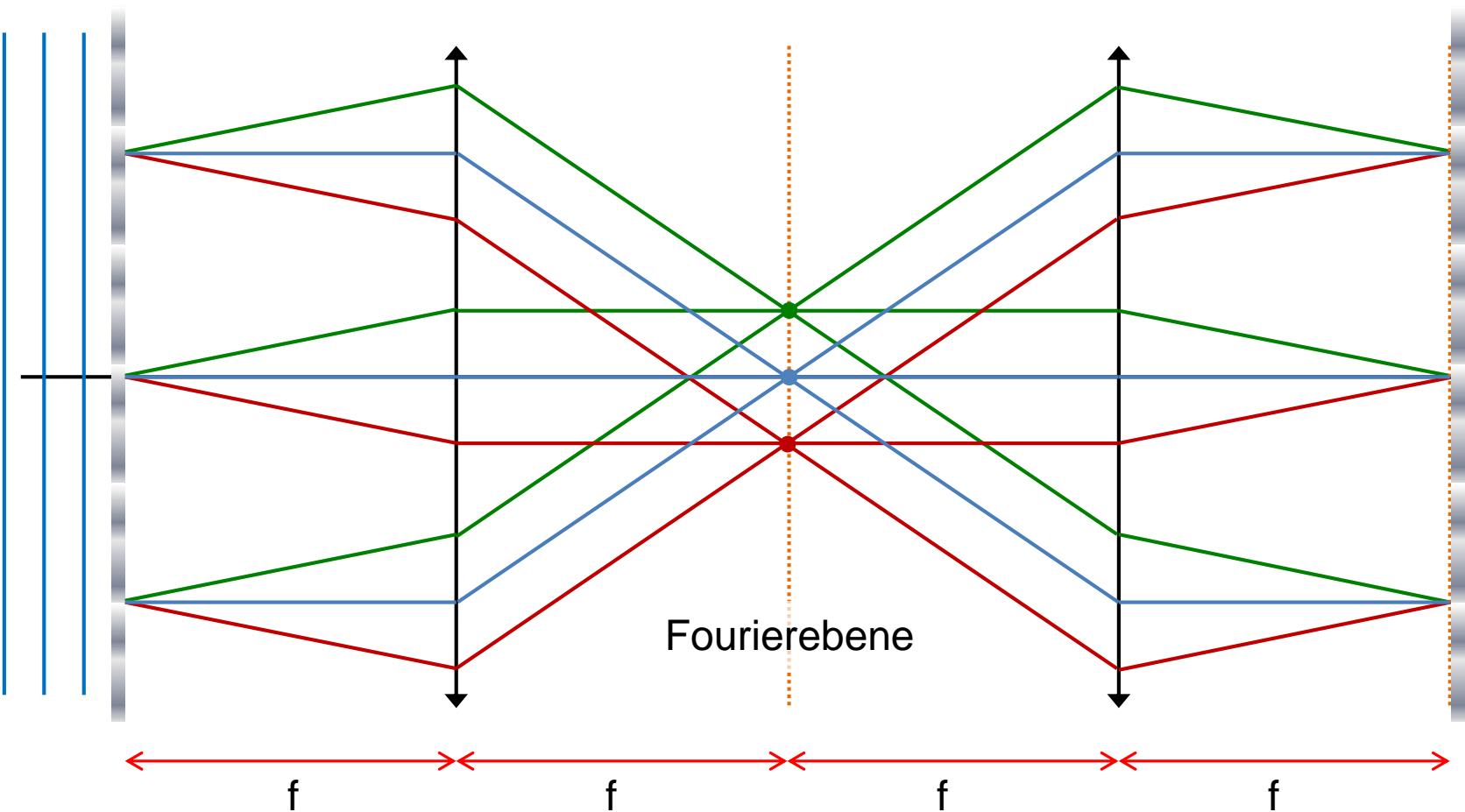
$$\begin{aligned} \mathcal{F}\left\{\text{rect}\left(\frac{x}{b}\right) \cdot (\text{rect}(x) * \text{comb}(x))\right\} = \\ = (\text{sinc}(u) \cdot \text{comb}(u)) * (|b| \cdot \text{sinc}(bu)) \end{aligned}$$



Fourieroptik – 4f Aufbau

Bildentstehung (Beispielobjekt: harmonisches Gitter) mittels Fourieroptik

Manipulation des Bildes in Fourierebene möglich (z.B. durch Blende)



Fourieroptik – 4f Aufbau

Gitter mit harmonischer Funktion sollte nur zwei Beugungsordnungen haben

Aber: Gitter mit der Funktion $\cos(x)$ müsste negative Absorption bzw. Brechungsindizes aufweisen

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \bar{n}(x) = \bar{n}_0 \cdot (1 + g_{\text{mod}} \cdot \cos(x))$$
$$\alpha(x) = \alpha_0 \cdot (1 + g_{\text{mod}} \cdot \cos(x))$$

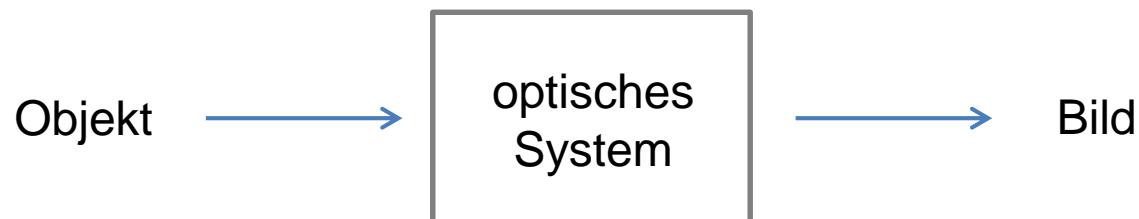
Die realen Gitterfunktionen beinhalten also einen konstanten Offset

$$\xrightarrow{\hspace{1cm}} \mathcal{F}\{1\} = \delta(0) \xrightarrow{\hspace{1cm}} 0. \text{ Beugungsordnung}$$

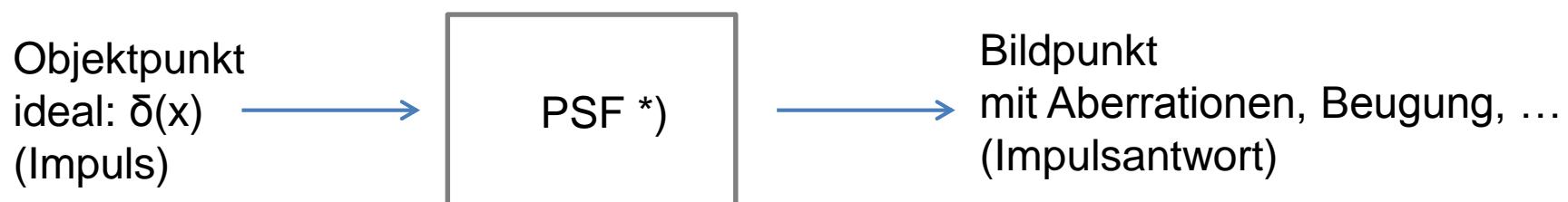
Ebenso lassen sich die Eigenschaften von anderen Gittern ableiten

Fourieroptik – OTF/MTF

Schematische Darstellung eines optischen Abbildungssystems:



Beschreibung der Abbildungsqualität als lineares System:



Beliebige Objekte können aus vielen Punkten zusammengesetzt werden
(die Funktion $\delta(x)$ enthält alle Ortsfrequenzen)

*) PSF: Point Spread Function (dt. Punktbild-Verwaschungsfunktion)

Fourieroptik – OTF/MTF

Mathematischer Zusammenhang zwischen Abbildung und PSF

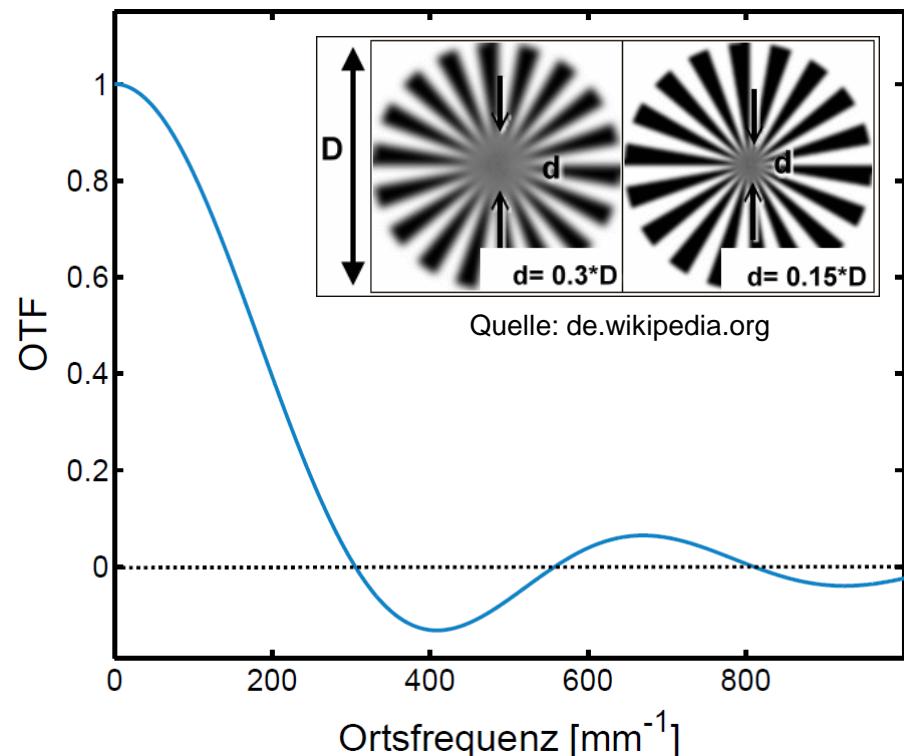
$$b(x') = PSF * \delta(x)$$

Ermittlung der Übertragungsfunktion

$$\mathcal{F}\{PSF\} = OTF$$

In Anwendung Phaseninformation
oft nicht wichtig:

$$MTF = |OTF| = \frac{M'}{M} = \frac{\frac{I'_{max} - I'_{min}}{I'_{max} + I'_{min}}}{\frac{I_{max} - I_{min}}{I_{max} + I_{min}}}$$



PSF wird ermittelt → Berechnung OTF/MTF
Messung von OTF/MTF → Berechnung von PSF

Abbildung mit Gaußstrahlen

Wellenfronten in Lasern und Wellenleitern entsprechen im allgemeinen einer Gaußverteilung

→ Optik mit Gaußstrahlen

Definition der Strahltaille (Spotdurchmesser):

$$|\vec{E}| = \frac{1}{e} \approx 37\%$$

$$I = \frac{1}{e^2} \approx 13.5\%$$

(keine Minima → Definition über Abfall)

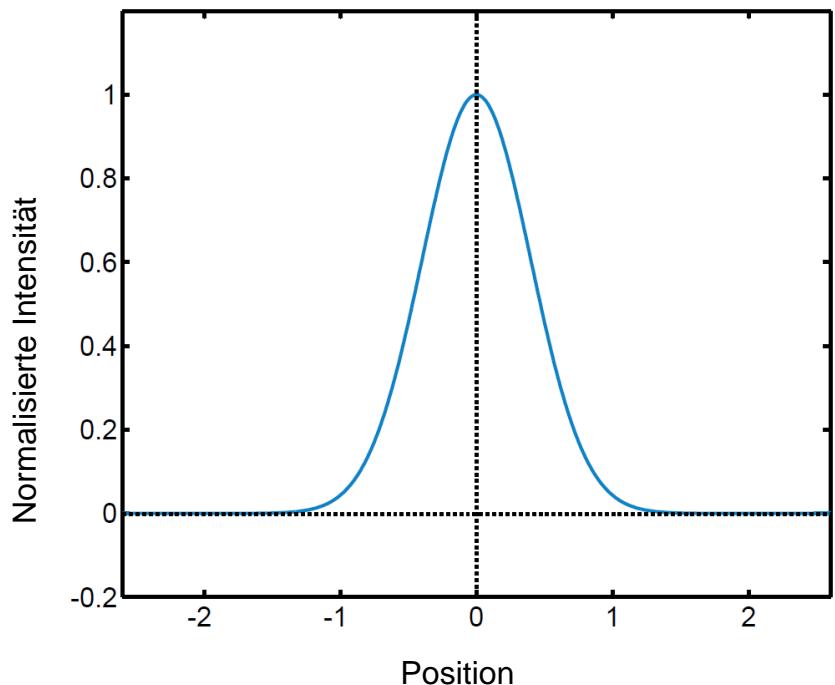
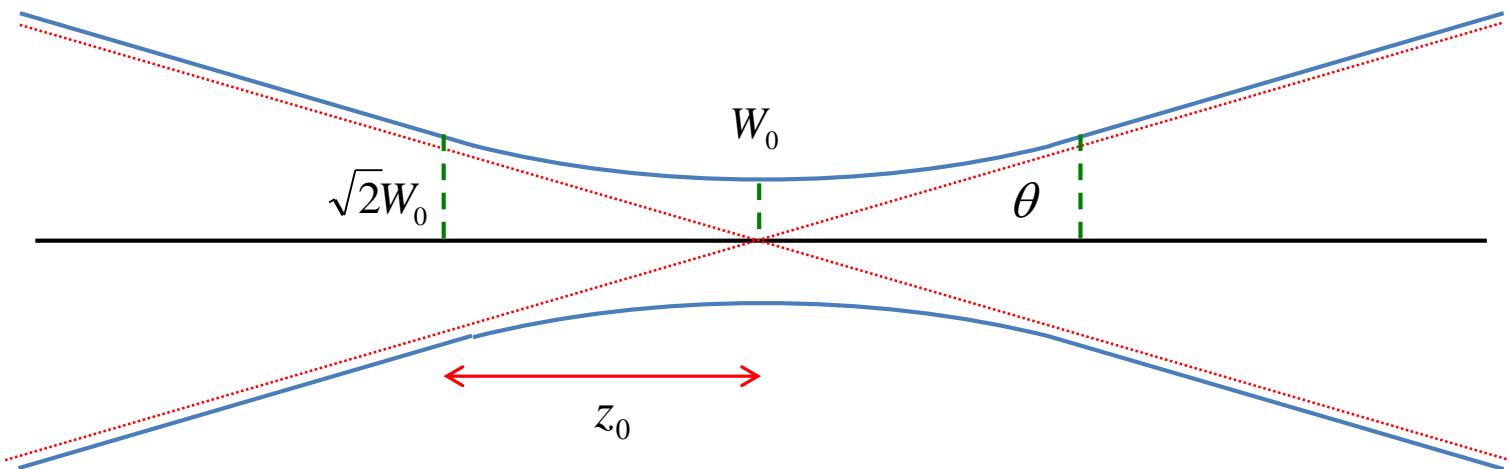


Abbildung mit Gauß-Strahlen

Definition der wichtigsten Strahlparameter:



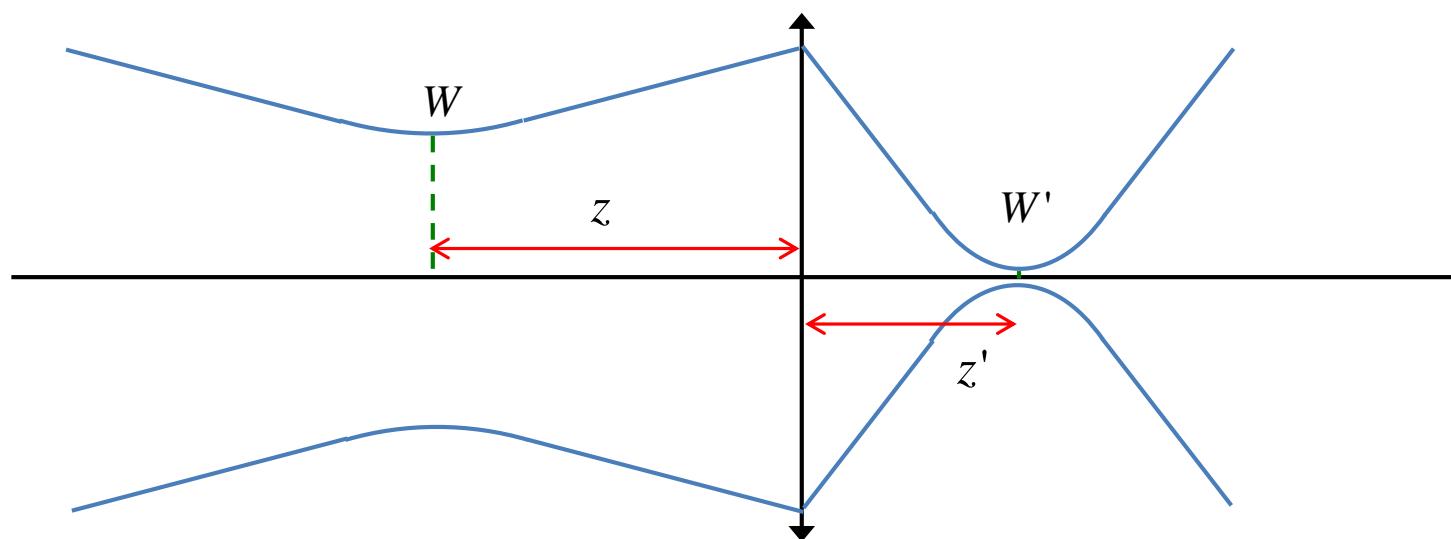
$$\text{Divergenz: } \theta = \frac{1}{\pi} \frac{\lambda}{W_0}$$

$$\text{Rayleighlänge: } z_0 = \frac{\pi W_0^2}{\lambda}$$

Abbildungseigenschaften weichen teilweise sehr von der geometrischen Optik ab

- Abbildung auch durch Fourieroptik mit Gaußfunktionen darstellbar (Unschärferelation)

Abbildung mit Gauß-Strahlen



$$r = \frac{z_0}{z - f'} \quad \text{und} \quad M_{Gau\beta} = \frac{M_{geo}}{\sqrt{1 + r^2}} \quad \text{mit} \quad M_{geo} = \left| \frac{f}{z - f} \right|$$

Divergenz: $\theta' = \frac{M_{Gau\beta}}{\theta}$

Strahltaille: $W_0' = M_{Gau\beta} \cdot W_0$

Rayleighlänge: $z_0' = M_{Gau\beta}^2 \cdot z_0$

Ort: $z' - f = M_{Gau\beta}^2 \cdot (z - f)$

Wichtige Fachbegriffe: Deutsch - Englisch

Ortsfrequenz / -bereich

spatial frequency / domain

Faltung

convolution

Kohärenzlänge / -volumen

coherence length / volume

zeitliche Kohärenz

temporal coherence

räumliche Kohärenz

spatial coherence

teilkohärent

partially coherent

spontane Emission

spontaneous emission

stimmulierte Emission

stimulated emission

Phasengeschwindigkeit

phase velocity

Gruppengeschwindigkeit

group velocity

Energiegeschwindigkeit

energy velocity

OTF/MTF

optical/moudulation trans. funct.

Strahltaille

beam waist