

**Numerical Methods in  
Electromagnetic Field Theory I (NFT I)  
Numerische Methoden in der  
Elektromagnetischen Feldtheorie I (NFT I) /**

**1st Lecture / 1. Vorlesung**

**Dr.-Ing. René Marklein**

[marklein@uni-kassel.de](mailto:marklein@uni-kassel.de)

<http://www.tet.e-technik.uni-kassel.de>

<http://www.uni-kassel.de/fb16/tet/marklein/index.html>

Universität Kassel

Fachbereich Elektrotechnik / Informatik  
(FB 16)

Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik  
(FG TET)

Wilhelmshöher Allee 71  
Büro: Raum 2113 / 2115  
D-34121 Kassel

University of Kassel

Dept. Electrical Engineering / Computer  
Science (FB 16)

Electromagnetic Field Theory  
(FG TET)

Wilhelmshöher Allee 71  
Office: Room 2113 / 2115  
D-34121 Kassel

# Contents – Numerical Methods I – Direct Numerical Methods in the Time Domain or Static Problem /

Inhalt – Numerische Methoden I – Direkte Numerische Methoden im Zeitbereich und statische Probleme

- # Finite Difference (FD) Method / Finite Differenzen (FD) Methode
- # Finite Difference Time Domain (FDTD) Method / Methode der Finiten Differenzen im Zeitbereich (FDZB)
- # Finite Integration Technique (FIT) / Finite Integrationstechnik (FIT)
- # Finite Element (FE) Method / Finite Elemente (FE) Methode
- # Finite Volume (FV) Method / Finite Volumen (FV) Methode
- # Method of Moments (MOM) / Momenten-Methode (MOM)

## Contents – Numerical Methods II – Direct Numerical Methods in the Frequency Domain /

### Inhalt – Numerische Methoden II – Direkte Numerische Methoden im Frequenzbereich

- # Scalar and Electromagnetic Huygens' Principle /  
Skalares und elektromagnetisches Huygenssches Prinzip
- # Scalar Integral Equations of the 1. and 2. Kind /  
Skalare Integralgleichungen der 1. und 2. Art
- # Electromagnetic Integral Equations (EFIE, MFIE, CFIE) /  
Elektromagnetische Integralgleichungen (EFIE, MFIE, CFIE)
- # Method of Moments (MOM) / Momenten–Methode (MOM)
- # Conjugate Gradient (CG) Method / Konjugierte Gradientenmethode

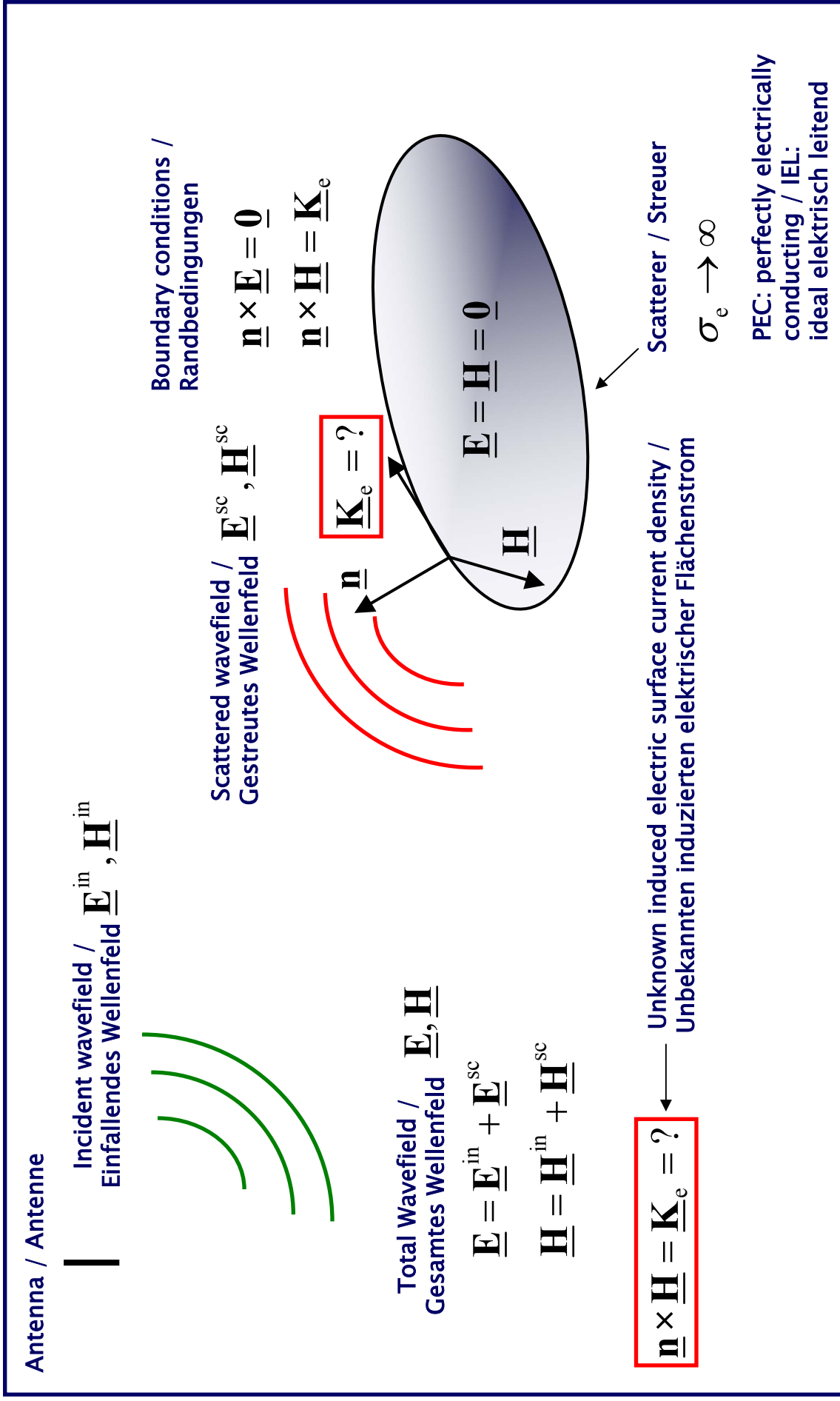
# Introduction / Einleitung

- ⚡ **Why Numerical Methods? / Warum numerische Methoden?**
  - ⚡ “Simple” Canonical Problems / “Einfache” Kanonische Probleme
  - ⚡ “Simple” Materials and Geometries / “Einfache” Materialien und Geometrien
  - ⚡ “Complex” Real-Life Problems / “Komplexe” realitätsnahe Probleme
  - ⚡ Complex Materials and Geometries / Komplexe Materialien und Geometrien

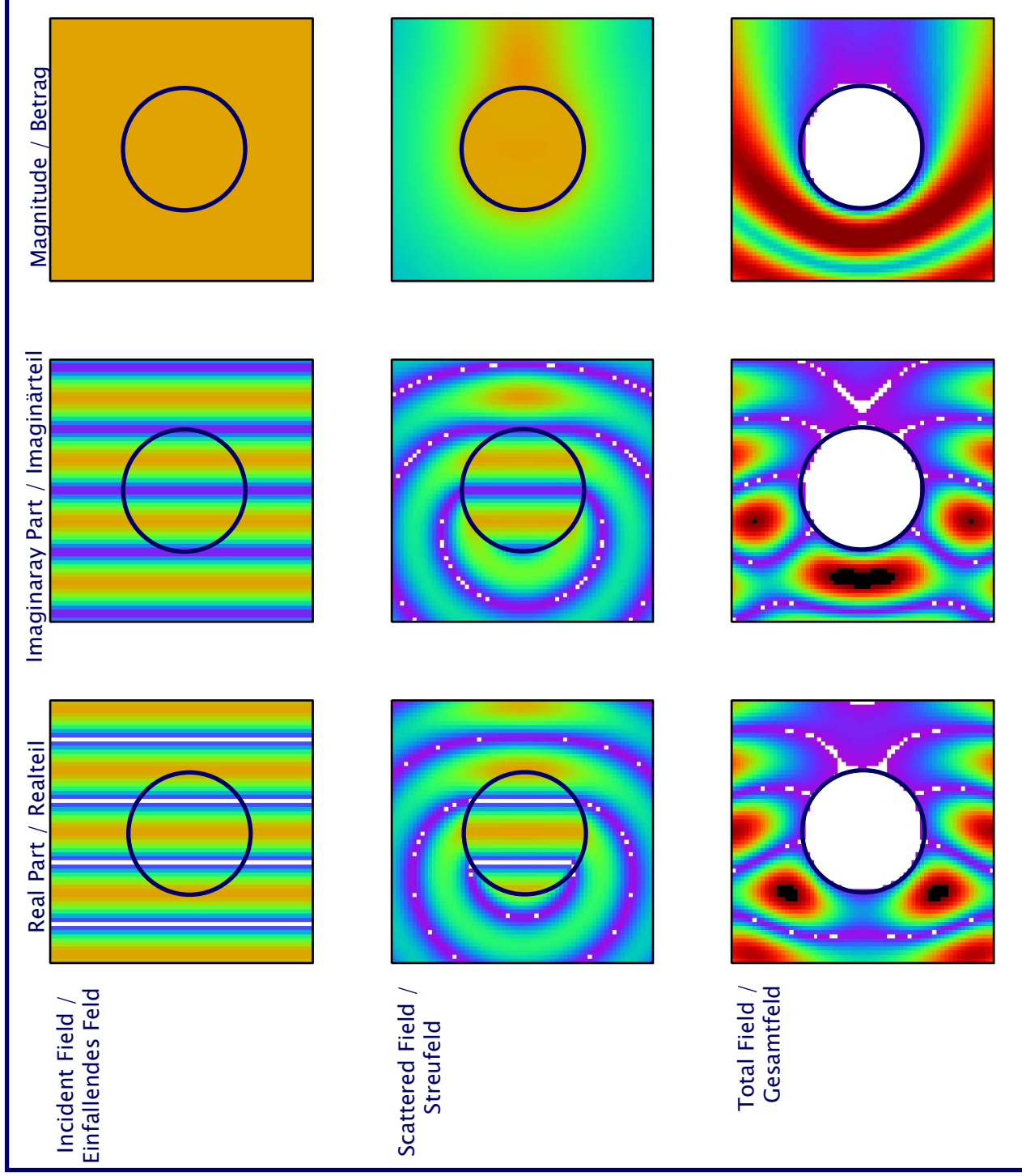
} Analytic Solutions / Analytische Lösung

} Numerical Solutions / Numerische Lösung
- ⚡ **Applications in Electromagnetics / Anwendungen in der Elektromagnetik**
  - ⚡ Design of Antennas and Circuits / Entwurf von Antennen und Bauteilen
  - ⚡ Simulation of Electromagnetic Scattering and Diffraction Problems / Simulation von elektromagnetischen Streu- und Beugungsproblemen
  - ⚡ Simulation of Biological Effects (SAR: Specific Absorption Rate) / Simulation von biologischen Effekten (SAR: spezifische Absorptionsrate)
  - ⚡ Physical Understanding and Education / Physikalisches Verständnis und Ausbildung
  - ⚡ etc.
- ⚡ **Computer Implementation / Computer-Implementierung ...**

# Diffraction of an EM Plane Wave on a Circular PEC Cylinder – TM Case / Beugung einer EM Ebenen Welle an einem kreisrunden IEL-Zylinder – TM-Fall



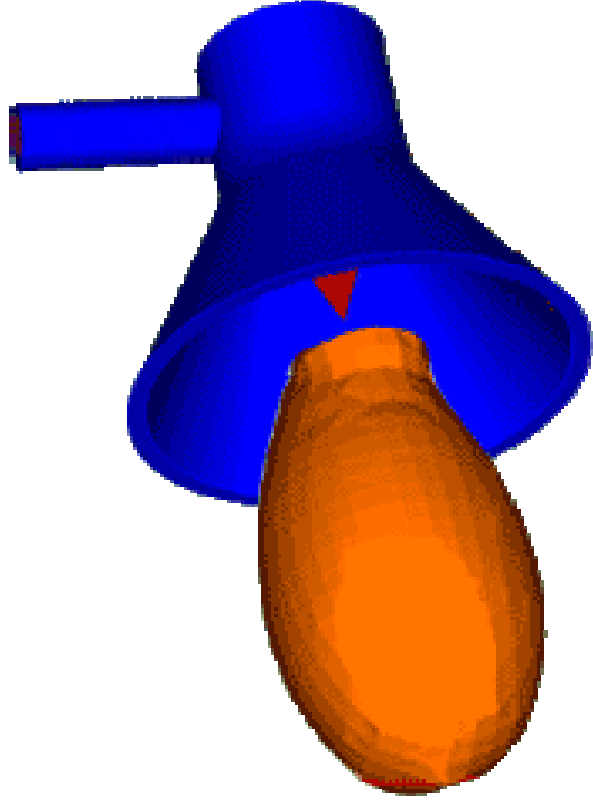
# Diffraction of an EM Plane Wave on a Circular PEC Cylinder – TM Case / Beugung einer EM Ebenen Welle an einem kreisrunden IEL-Zylinder – TM-Fall



# Numerical Modeling of a Horn Antenna with FIT / Numerische Modellierung einer Hornantenne mit FIT

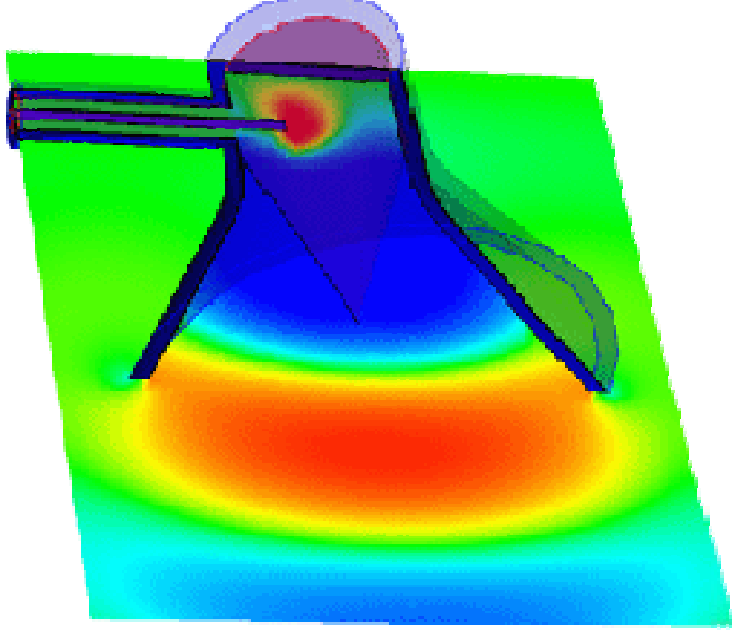
A horn antenna with a dielectric cone, driven by a coaxial cable. Both the far-field pattern and the near-field pattern can be calculated at different frequencies inside the broadband simulation range. / Eine Hornantenne mit dielektrischem Kegel (Konus), die über ein Koaxialkabel gespeist wird. Beides, die Fernfeld- und Nahfeld-Richtcharakteristik, kann für jede Frequenz des Anregungsspektrums berechnet werden.

3D Structure with Far-Field Pattern /  
3D-Struktur mit Fernfeld-Richtcharakteristik



(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

Contour Plot of Electric Field Strength Vector ( $E_y$  Component) / Konturdarstellung des elektrischen Feldstärkevektors ( $E_y$  Component)

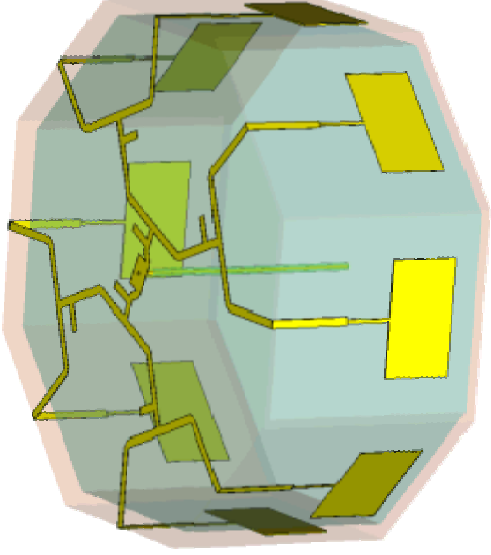


(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

# Numerical Modeling of an Octagon Antenna with FIT / Numerische Modellierung einer Oktagon-Antenne mit FIT

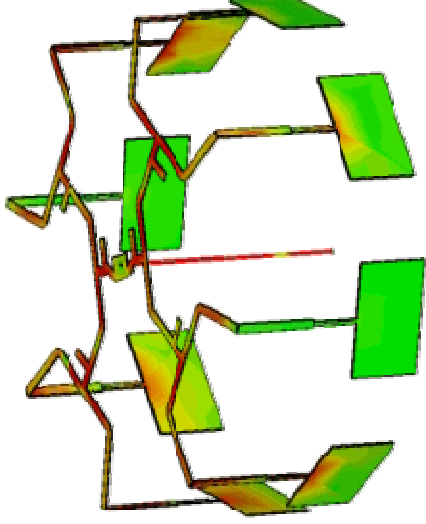
The pictures below show an octagon antenna array consisting of eight patch antennas, which are fed by a microstrip circuit connected to a coaxial line. / Die Bilder zeigen eine Oktagon-Antenne bestehend aus acht Patch-Antennen, die über eine Mikrostreifenschaltung und Koaxialleitung gespeist werden.

Patch Array and Microstrip Circuit are Supported by a Dielectric Substrate with a Permittivity of 3.5. / Patch-Array und Mikrostreifen-Schaltung auf einem dielektrischen Substrat mit einer Permittivität von 3.5.



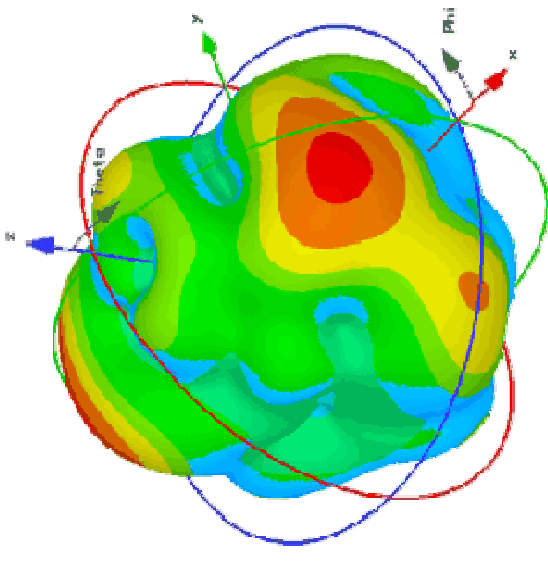
(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

Electric Current Distribution at 10.5 GHz / Verteilung der elektrischen Stromdichte bei 10,5 GHz



(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

Far-Field at 14 GHz / Fernfeld bei 14 GHz



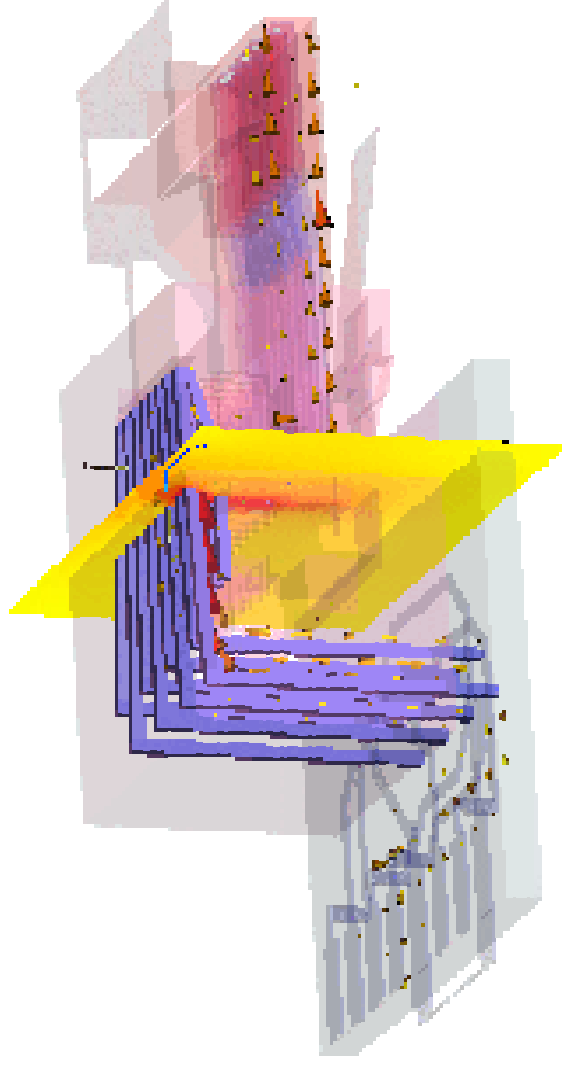
(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))



## Numerical Modeling of an RJ45 Connector with FIT / Numerische Modellierung eines RJ45-Steckers mit FIT

Connector designers are facing progressively higher frequency ranges, and so considerations such as cross talk, run time and signal integrity are becoming increasingly relevant. Complicated CAD models are commonly used and customers often require a connector's description by means of a SPICE replacement circuit. / Die Designer von Steckern erreichen immer höhere Frequenzbereiche, damit gewinnen Effekte wie Übersprechen, Laufzeit und Signalerhaltung immer mehr an Bedeutung. Komplizierte CAD-Modelle werden gewöhnlich verwendet und Kunden benötigen oftmals eine Beschreibung in Form einer SPICE-Ersatzschaltung.

RJ45 Connector / RJ45-Stecker



(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

# Numerical Modeling of a Coaxial Connector with FIT / Numerische Modellierung einer Koaxialverbindung mit FIT

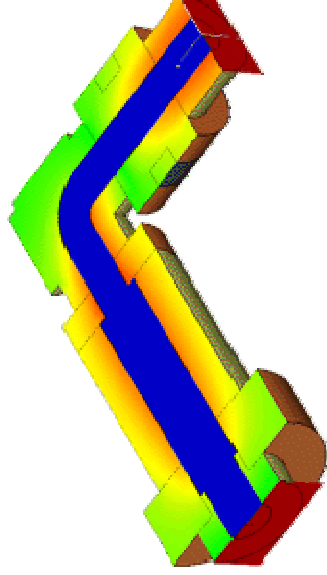
The connector consists of a male and a female end with four different materials: metal, teflon, rubber and air. All geometric dimensions have been parameterized, so that a fully automatic optimization can be done. / Die Verbindung besteht aus einem Stecker und einer Buchse, die aus vier unterschiedlichen Materialien bestehen: Metall, Teflon, Gummi und Luft. Alle geometrischen Dimensionen wurden parametrisiert, sodass eine voll automatische Optimierung durchgeführt werden kann.

Geometry of the Coaxial Connector /  
Geometrie des Koaxialsteckers



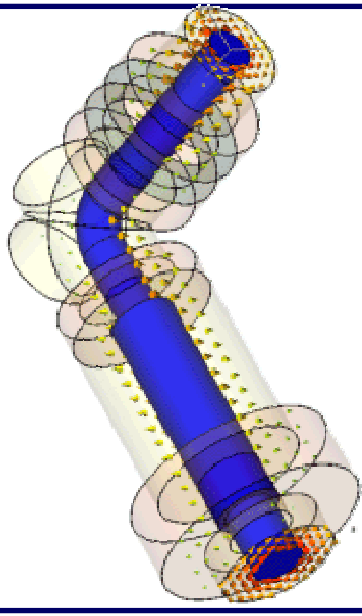
(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

2-D Contour Plot of one Field  
Component / 2D-Konturdarstellung  
einer Feldkomponente



(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

3-D Field Distribution as a Vector Plot  
Calculation Time: Four Seconds. /  
3D-Feldverteilung als Vektorgrafik.  
Berechnungszeit: vier Sekunden

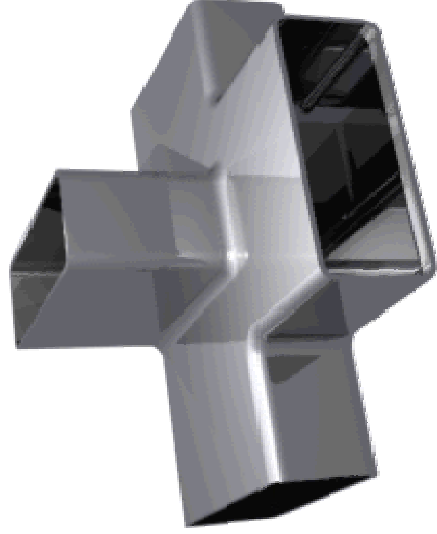


(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

# Numerical FIT Modeling of a Magic-T / Numerische FIT-Modellierung eines „Magischen T“

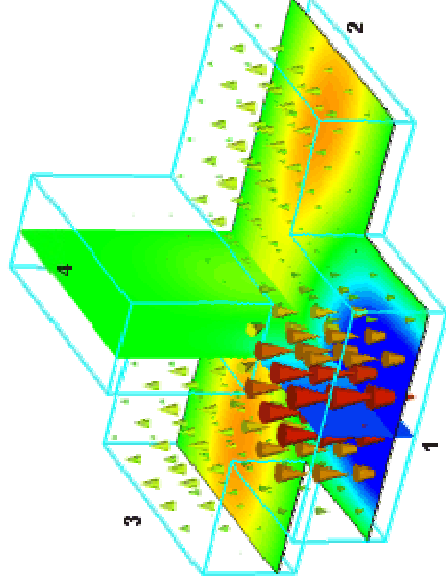
The main idea behind the "magic T" is to combine a TE and a TM waveguide splitter. In this particular case the port 1 and the port 4 are de-coupled, so one can expect  $S_{14}$  and  $S_{41}$  to have very low values. Viewing the electric fields gives a better understanding how the "magic T" works. / Dieses Beispiel zeigt ein wohlbekanntes und vieleingesetztes Bauteil der Hochfrequenztechnik. Die wesentliche Idee, die hinter dem "Magischen T" steckt, ist die Kombination eines TE- und TM-Wellenteilers. In diesem speziellen Fall ist das Tor 1 und Tor 4 entkoppelt, sodass die S-Parameter  $S_{14}$  und  $S_{41}$  sehr kleine Werte besitzen dürfen. Die Darstellung des elektrischen Feldes ermöglicht ein besseres Verständnis für die Funktion des "Magischen T".

Geometry of the Magic-T / Geometrie des „Magischen T“



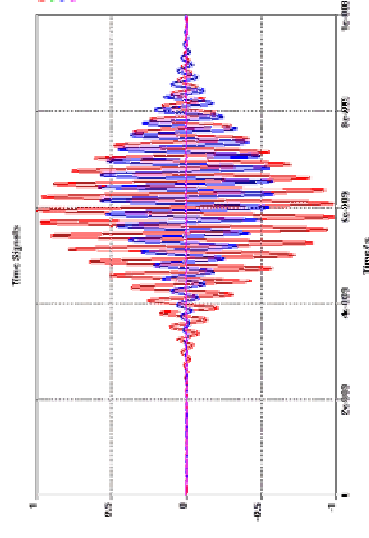
(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Overlay 3-D Vector Plot and 2-D Contour Plot Representation of the Electric Field Strength / Überlagerte 3D-Vektor- und 2D-Kontur-Darstellung der elektrischen Feldstärke



(CST Microwave Studio, www.cst.de)

Excitation pulse (red) at port 1 and transmission into port 2 (green, covered by blue line), port 3 (blue) and port 4 (purple). The Gaussian pulse covers the range  $f \approx 3.4\text{--}4\text{ GHz}$ . / Anregungsimpuls (rot) am Tor 1 und Transmission am Tor 2 (grün, überdeckt durch die blaue Linie), Tor 3 (blau) und Tor 4 (lila). Der Gauß-Impuls besitzt einen Frequenzbereich von  $f \approx 3.4\text{--}4\text{ GHz}$ .

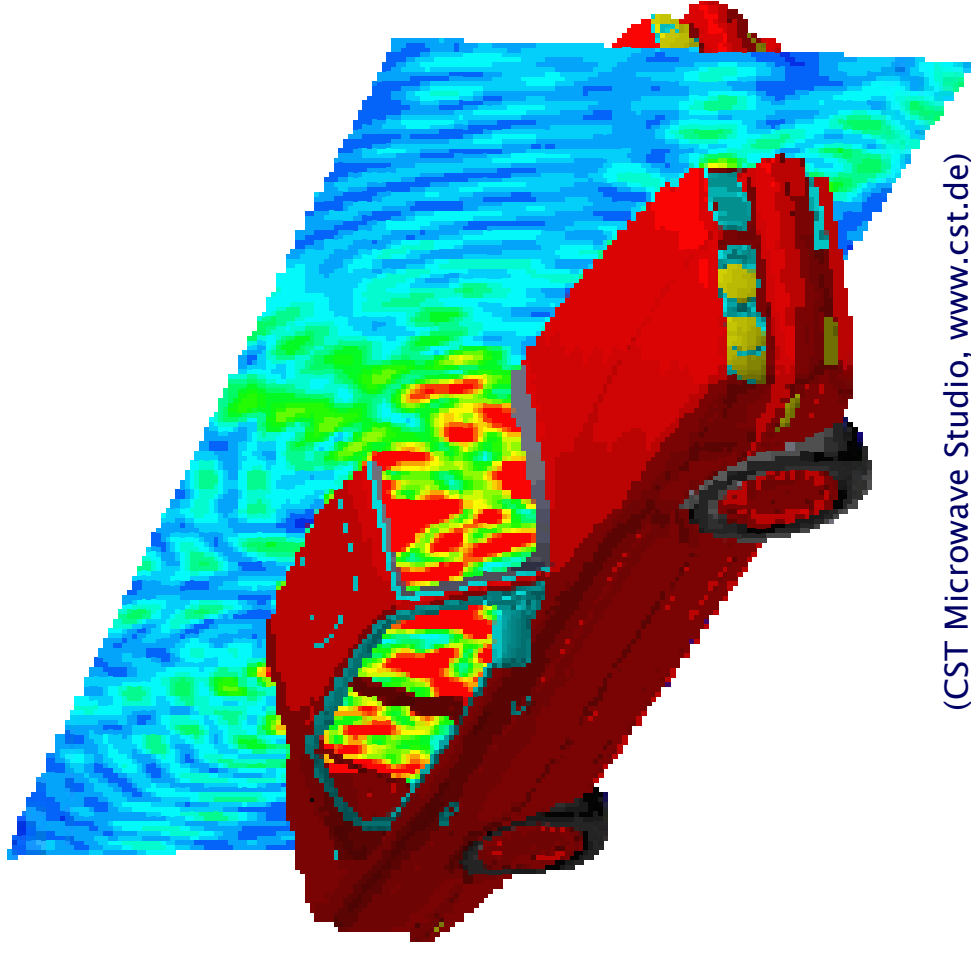


(CST Microwave Studio, www.cst.de)

# Numerical FIT Modeling – Electromagnetic Compatibility (EMC) / Numerische FIT-Modellierung – Elektromagnetische Verträglichkeit

Today's design engineer has to not only ensure a device works properly, but also take any possible side effects into consideration and fulfill numerous international norms, e.g. a device allowed electromagnetic radiation. Cross talk effects can disturb the functionality of the system. / Heutzutage müssen Ingenieure nicht nur die Funktionalität eines Gerätes gewährleisten, sondern Sie müssen auch alle möglichen Nebeneffekte beachten und unzählige internationale Normen erfüllen, wie z. B. die Grenzwerte für die elektromagnetische Abstrahlung eines Gerätes. Weiterhin kann das Überschreiten die Funktionalität eines Gerätes stören.

Near-Field Plot of the Electric Field Strength Radiated by a Mobile Phone Inside a Car / Nahfeld-Darstellung der elektrischen Feldstärke abgestrahlt von einem Mobiltelefon in einem Auto

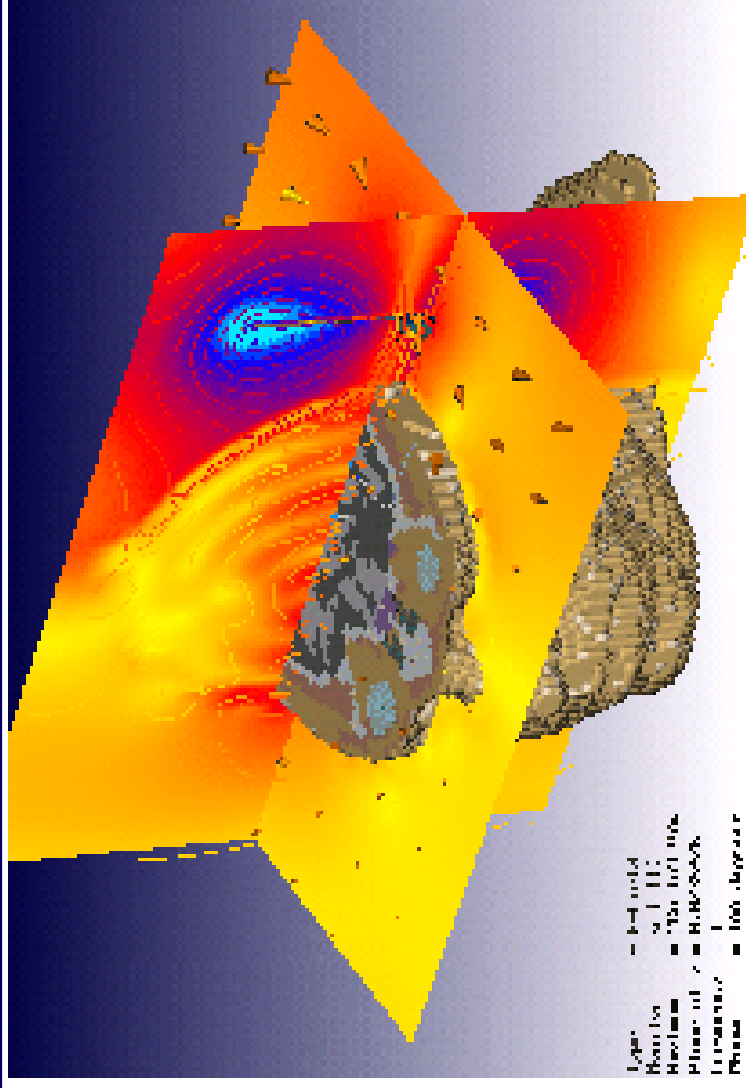


(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

## Numerical FIT Modeling – Mobile Communications / Numerische FIT-Modellierung – Mobilkommunikation

The dramatically fast developing field of mobile communication cannot be driven without powerful simulation tools, which are able to calculate the core quantity of wireless transmission: the electromagnetic fields. The SAR (SAR: specific absorption rate [W/kg]) calculation in a human head or the near-field and the far-field of an antenna in a car are large and demanding problems, which leave almost no alternative to use a powerful time domain solver. / Die dramatisch schnelle Entwicklung der Mobilkommunikation ist ohne leistungsfähige Simulationswerkzeuge nicht denkbar, die die Berechnung des Kerns der drahtlosen Übertragung ermöglichen: die elektromagnetischen Felder. Die Berechnung der spezifischen Absorptionsrate (SAR: spezifische Absorptionsrate [W/kg], [www.elektrosmoginfo.de](http://www.elektrosmoginfo.de)) in einem menschlichen Kopf oder des Nah- und Fernfeldes einer Antenne in einem Auto sind komplexe und anspruchsvolle Probleme, die keine Alternative zu leistungsfähigen Zeitbereichslösern Spielraum überlassen.

Human head model irradiated by the  
electromagnetic field of a mobile  
phone /  
Menschliches Kopfmodell bei  
Bestrahlung durch das  
elektromagnetische Feld eines  
Mobiltelefon

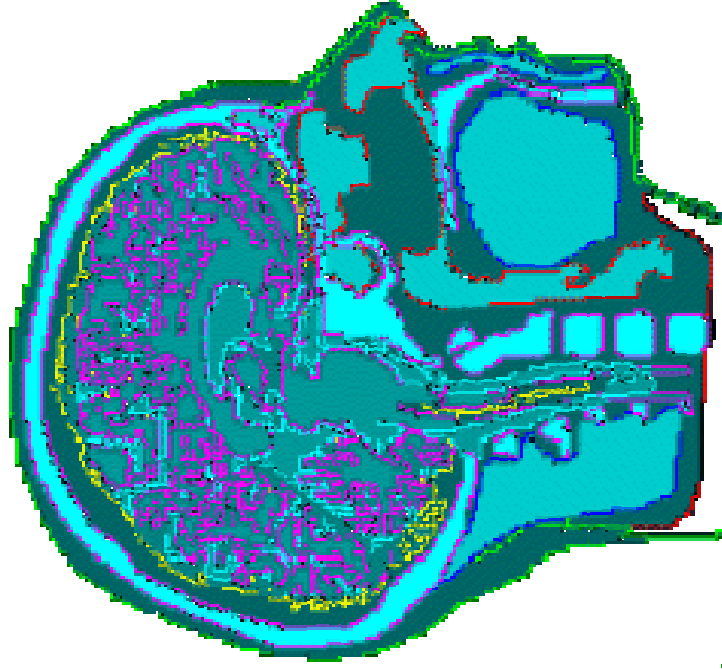


(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

## Numerical Modeling of a Horn Antenna with FIT / Numerische Modellierung einer Hornantenne mit FIT

The left picture at the bottom shows a detailed model of the human head: brain tissue, bone, and skin. On the right, the density of the heat sources when using a mobile telephone is displayed in a vertical slice near the ear. / Das linke Bild unten zeigt ein detailliertes Modell eines menschlichen Kopfes: Hirngewebe, Knochen und Haut. Auf der rechten Seite ist die Dichte der Wärmequellen in einem vertikalen Schnitt gezeigt, die entstehen, wenn man ein Mobiltelefon nah am Ohr verwendet.

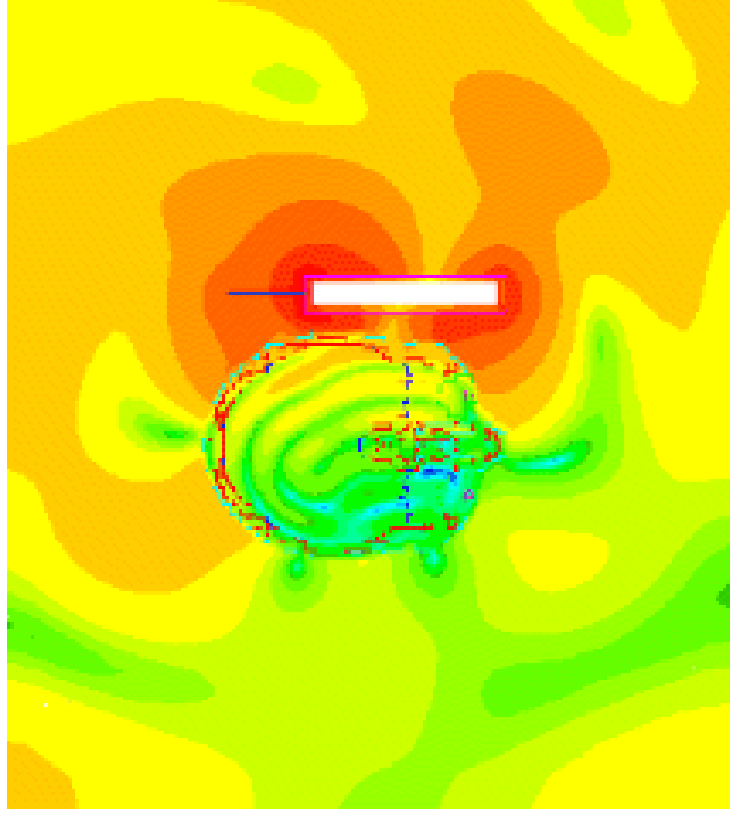
Human 3-D Head Model /  
Menschliches 3D Kopfmodell



(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

Contour Plot of the Electromagnetic Field /

Konturdarstellung des elektromagnetischen Feldes



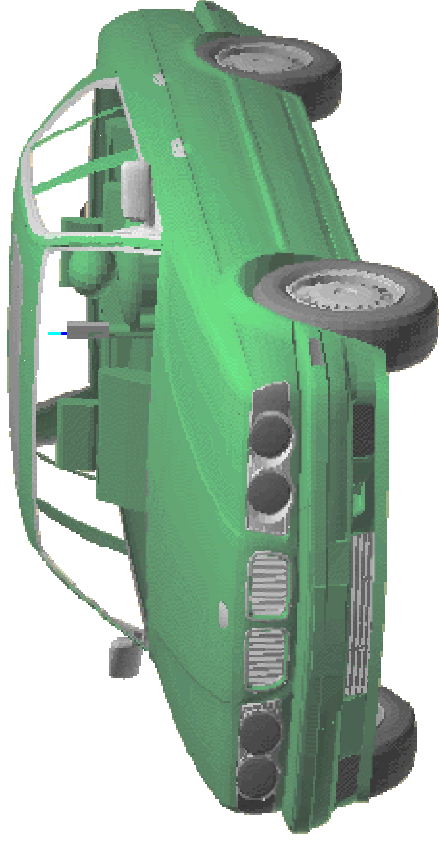
(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))



# Numerical FIT Modeling – Car Model / Numerische FIT–Modellierung – Automodell

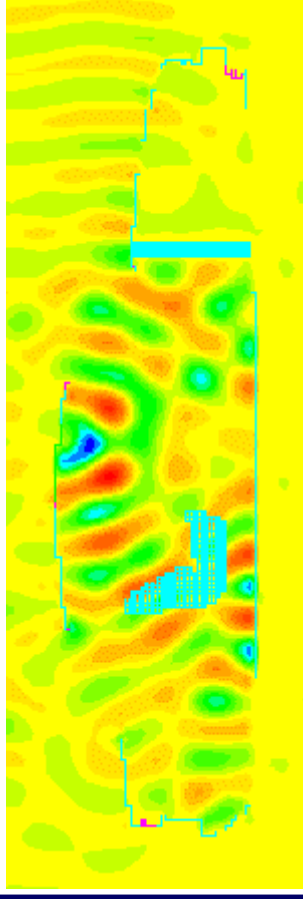
The geometrical data of the vehicle is imported directly from a CAD file. Other objects, such as the driver and the mobile phone, are included in the model by a preprocessor before the simulation. / Das geometrische Modell eines Automodells wird direkt von einer CAD-Datei importiert. Andere Objekte, wie der Fahrer und das Mobiltelefon, werden mit Hilfe eines Eingabemoduls vor der Simulation hinzugefügt.

3-D Geometrical Data of a Car Model /  
3D geometrische Daten eines Automodells



(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

Contour Plot of the Electric Field Strength in a Cross  
Section of the Car Model / Konturdarstellung der  
elektrischen Feldstärke in einem Querschnitt durch das  
Automodell



(CST Microwave Studio, [www.cst.de](http://www.cst.de))

# Introduction / Einleitung

## Computer Implementation / Computer-Implementierung

### Programming Languages / Programmiersprachen

- # C, C++
- # Fortran 90, HPF (High Performance Fortran)
- # etc.

### Libraries / Bibliotheken

- # MPI (Message Passing Interface)
- # PVM (Parallel Virtual Machine)
- # etc.

### Computer Architectures / Computer-Architekturen

- # Laptop and Desktop Computer
- # Vector Computer / Vektorrechner
- # Parallel Computer / Parallelerechner
  - # Shared Memory
  - # Distributed Memory Architecture (Beowulf Cluster)
  - # Virtual Memory

## Simulation Software / Simulationsprogramme ...



# Introduction / Einleitung

## 🚧 Simulation Software / Simulationsprogramme

- 🚧 CST Microwave Studio, CST Design Studio, MAFIA 4, CST Inc. ([www.cst.de](http://www.cst.de))
- 🚧 HFSS, FE-Method, ANSOFT ([www.ansoft.com](http://www.ansoft.com))
- 🚧 XFDTD, FDTD Method, REMCOM Inc. ([www.remcom.com](http://www.remcom.com))
- 🚧 etc.

## 🚧 Other Tools / Andere Werkzeuge

- 🚧 Matlab ([www.mathworks.com](http://www.mathworks.com), [www.mathworks.de](http://www.mathworks.de))
- 🚧 Mathematica ([www.wolfram.com](http://www.wolfram.com))
- 🚧 Mathcad ([www.maplesoft.com](http://www.maplesoft.com))
- 🚧 etc.

# Partial Differential Equation (PDE) / Partielle Differentialgleichung (PDG)

Two-dimensional second-order partial differential equation (PDE) /  
Zweidimensionale Partielle Differentialgleichung (PDG) zweiter Ordnung

$$A \frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, t) + B \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) + C \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, t) + D \frac{\partial}{\partial x} \Phi(x, t) + E \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) + F \Phi(x, t) + G = 0$$

✚  $B^2 - 4AC < 0$       Elliptic / Elliptisch

✚  $B^2 - 4AC = 0$       Parabolic / Parabolisch

✚  $B^2 - 4AC > 0$       Hyperbolic / Hyperbolisch

# Partial Differential Equation (PDE) – Examples / Partielle Differentialgleichung (PDG) – Beispiele

Partial Differential Equation (PDE) /  
Partielle Differentialgleichung (PDG)

- ✚ Elliptic / Elliptisch
  - Poisson Equation / Poisson–Gleichung

- ✚ Parabolic / Parabolisch
  - Diffusion Equation / Diffusionsgleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, t) - \mu \sigma \frac{\partial}{\partial t} \Phi(x, t) = -s(x, t)$$

- ✚ Hyperbolic / Hyperbolisch
  - Wave equation / Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \Phi(x, t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \Phi(x, t) = -s(x, t)$$

## Operators / Operatoren

- ✚ 1. Derivative spatial and/or temporal /  
1. Ableitung räumlich und/oder zeitlich

$$\frac{d}{dx}, \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial t}$$

- ✚ 2. Derivative spatial and/or temporal /  
2. Ableitung räumlich und/oder zeitlich

$$\frac{d^2}{dx^2}, \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{d^2}{dt^2}, \frac{\partial^2}{\partial t^2}$$

# Electromagnetic Field Equations in Differential Form / Elektromagnetische Feldgleichungen in Differentialform

Maxwell's Equations are: /  
Die ersten beiden Maxwell'schen Gleichungen lauten:

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) + \underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \rho_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \rho_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

Continuity equations /  
Kontinuitätsgleichungen

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\nabla \cdot \underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \rho_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

Constitutive equations for vacuum /  
Konstituierende Gleichungen (Materialgleichungen) für  
Vakuum

$$\underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \mu_0 \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

# Electromagnetic Field Equations in Differential Form / Elektromagnetische Feldgleichungen in Differentialform (2)

Transition conditions for a source-free interface /  
Übergangsbedingungen für eine quellenfreie  
Trennfläche

$$\underline{n} \times [\underline{E}^{(2)}(\underline{R}, t) - \underline{E}^{(1)}(\underline{R}, t)] = \underline{0}$$

$$\underline{n} \cdot [\underline{B}^{(2)}(\underline{R}, t) - \underline{B}^{(1)}(\underline{R}, t)] = 0$$

Boundary conditions /  
Randbedingungen

PEC material /  $\underline{n} \times \underline{E}(\underline{R}, t) = \underline{0} \rightarrow E_{\text{tan}} = 0$

IEL-Material  $\underline{n} \cdot \underline{B}(\underline{R}, t) = 0 \rightarrow B_n = 0$

Propagation of the energy flux density (Poynting Vector)  
/

Ausbreitung der Energiefussdichte (Poynting-Vektor)

$$\underline{S}_{\text{em}}(\underline{R}, t) = \underline{E}(\underline{R}, t) \times \underline{H}(\underline{R}, t)$$

# Electromagnetic Field Equations in Differential Form / Elektromagnetische Feldgleichungen in Differentialform (3)

$$\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) + \underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

Spatial derivative of  
 first order /  
 Räumliche  
 Ableitungen  
 erster Ordnung

Temporal derivative of  
 first order /  
 Zeitliche Ableitungen  
 erster Ordnung

Source terms /  
 Quellterme

# One-Dimensional Electromagnetic Wave Propagation / Eindimensionale elektromagnetische Wellenausbreitung

The first two Maxwell's equations are: /  
Die ersten beiden Maxwell'schen Gleichungen lauten:

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$



Constitutive equations for vacuum /  
Konstituierende Gleichungen  
(Materialgleichungen) für Vakuum

$$\underline{\mathbf{B}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \mu_0 \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\underline{\mathbf{D}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

We assume that / Wir nehmen an

$$\underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = E_x(z, t) \underline{\mathbf{e}}_x$$

$$\underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = H_y(z, t) \underline{\mathbf{e}}_y$$



$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = -\nabla \times \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_m(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 \underline{\mathbf{E}}(\underline{\mathbf{R}}, t) = \nabla \times \underline{\mathbf{H}}(\underline{\mathbf{R}}, t) - \underline{\mathbf{J}}_e(\underline{\mathbf{R}}, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \mu_0 H_y(z, t) = -\frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t) - J_{my}(z, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \varepsilon_0 E_x(z, t) = -\frac{\partial}{\partial z} H_y(z, t) - J_{ex}(z, t)$$



$$\frac{\partial}{\partial t} H_y(z, t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z, t) - \frac{1}{\mu_0} J_{my}(z, t)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x(z, t) = -\frac{1}{\varepsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} H_y(z, t) - \frac{1}{\varepsilon_0} J_{ex}(z, t)$$

# One-Dimensional Electromagnetic Wave Propagation / Eindimensionale elektromagnetische Wellenausbreitung

$$\frac{\partial}{\partial t} H_y(z,t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} E_x(z,t) - \frac{1}{\mu_0} J_{my}(z,t) \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} E_x(z,t) = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} H_y(z,t) - \frac{1}{\epsilon_0} J_{ex}(z,t) \quad (2)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{ of (1) / von (1)} \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z,t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} E_x(z,t) - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} J_{my}(z,t) \quad (3)$$

Insert the right-hand side of  
(2) in (4) / Setze die rechte  
Seite von (2) in (4) ein

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z,t) = -\frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial z} \left[ -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} H_y(z,t) - \frac{1}{\epsilon_0} J_{ex}(z,t) \right] - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} J_{my}(z,t) \quad (4)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z,t) = \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y(z,t) + \frac{1}{\epsilon_0 \mu_0} \frac{\partial}{\partial z} J_{ex}(z,t) - \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial}{\partial t} J_{my}(z,t) \quad (5)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y(z,t) - \underbrace{\epsilon_0 \mu_0}_{=1/c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z,t) = -\frac{\partial}{\partial z} J_{ex}(z,t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{my}(z,t) \quad (6)$$

$$c_0 = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (7)$$

Propagation velocity of an electromagnetic wave (light) in Vacuum /  
Ausbreitungsgeschwindigkeit einer elektromagnetischen Welle (Licht) in Vakuum



# One-Dimensional Electromagnetic Wave Propagation / Eindimensionale elektromagnetische Wellenausbreitung

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z,t) = -\frac{\partial}{\partial z} J_{\text{ex}}(z,t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{\text{my}}(z,t)$$

Inhomogeneity /  
Inhomogenität

(Inhomogeneous) 1-D wave equation for  $H_y(z,t)$  /  
Inhomogene 1D-Wellengleichung für  $H_y(z,t)$

Inhomogeneous and homogeneous 1-D wave equation for  $H_y(z,t)$  and  $E_x(z,t)$  /  
Inhomogene und homogene 1D-Wellengleichung für  $H_y(z,t)$  und  $E_x(z,t)$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} H_y(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} H_y(z,t) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} J_{\text{ex}}(z,t) + \epsilon_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{\text{my}}(z,t) & \text{Inhomogeneous 1-D Wave Equation /} \\ 0 & \text{Inhomogene 1-D Wellengleichung} \end{cases}$$

Inhomogeneous 1-D Wave Equation /  
Inhomogene 1-D Wellengleichung  
Homogeneous 1-D Wave Equation /  
Homogene 1-D Wellengleichung

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} E_x(z,t) - \frac{1}{c_0^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} E_x(z,t) = \begin{cases} -\frac{\partial}{\partial z} J_{\text{my}}(z,t) + \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} J_{\text{ex}}(z,t) & \text{Inhomogeneous 1-D Wave Equation /} \\ 0 & \text{Inhomogene 1-D Wellengleichung} \end{cases}$$

Inhomogeneous 1-D Wave Equation /  
Inhomogene 1-D Wellengleichung  
Homogeneous 1-D Wave Equation /  
Homogene 1-D Wellengleichung

**End of Lecture 1 /  
Ende der 1. Vorlesung**