Numerical Methods of Electromagnetic Field Theory II (NFT II) Numerische Methoden der Elektromagnetischen Feldtheorie II (NFT II) /

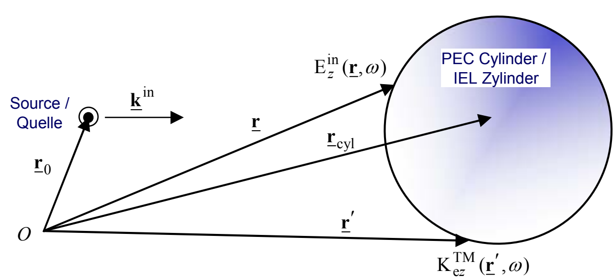
4th Lecture / 4. Vorlesung

Dr.-Ing. René Marklein
marklein@uni-kassel.de
http://www.tet.e-technik.uni-kassel.de
http://www.uni-kassel.de/fb16/tet/marklein/index.html

Universität Kassel
Fachbereich Elektrotechnik / Informatik
(FB 16)
Fachgebiet Theoretische Elektrotechnik
(FG TET)
Wilhelmshöher Allee 71
Büro: Raum 2113 / 2115
D-34121 Kassel

University of Kassel
Dept. Electrical Engineering / Computer Science
(FB 16)
Electromagnetic Field Theory
(FG TET)
Wilhelmshöher Allee 71
Office: Room 2113 / 2115
D-34121 Kassel

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen



2-D Case /
2-D-Fall

$$\underline{\mathbf{R}} = \underbrace{r\underline{\mathbf{e}}_r(\varphi)}_{=\underline{\mathbf{r}}} + \underbrace{z\underline{\mathbf{e}}_r(\varphi)}_{=\underline{\mathbf{0}}} = \underline{\mathbf{r}}$$

2-D PEC TM EFIE / 2D-IEL-TM-EFIE

$$-\mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}'\in C_{\mathrm{sc}}=\partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right) \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}' = \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \quad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

This is a *Fredholm integral equation of the 1. kind* in form of a *closed line integral* for the *unknown* electric surface current density for a *known* incident field. /
Dies ist eine *Fredholmsche Integralgleichung 1. Art* in Form eines *geschlossenen Linienintegrals* für die *unbekannte* elektrische Flächenladungsdichte für ein *bekanntes* einfallendes Feld.

$$G(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega) = \frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}\left(k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'\right|\right)$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

2-D PEC TM EFIE / 2D-IEL-TM-EFIE

$$-\mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}' \in C_{\mathrm{sc}} = \partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}', \omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}', \omega\right) \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}' = \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega), \quad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

⇩ Discretization via MoM / Diskretisierung durch MoM

Matrix Equation / Matrixgleichung

$$\underbrace{[Z]}_{=\mathrm{V/A}}(\omega)\underbrace{\left\{\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}\right\}}_{=\mathrm{A/m}}(\omega) = \underbrace{\left\{\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}\right\}}_{=\mathrm{V/m}}(\omega)$$

Impedance Matrix / Impedanzmatrix

Electric Surface Current Density Vector / Elektrischer Flächenstromdichtevektor

Electric Field Strength Vector / Elektrischer Feldstärkevektor

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

2-D PEC TM EFIE / 2D-IEL-TM-EFIE

$$-\mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}' \in C_{\mathrm{sc}} = \partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}', \omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}', \omega\right) \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}' = \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega), \quad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

⇩ Discretization via MoM / Diskretisierung durch MoM

Matrix Equation / Matrixgleichung

$$\underbrace{[Z]}_{=\mathrm{V/A}}(\omega)\underbrace{\left\{\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}\right\}}_{=\mathrm{A/m}}(\omega) = \underbrace{\left\{\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}\right\}}_{=\mathrm{V/m}}(\omega)$$

Problem: Large Impedance Matrix / Problem: Große Impedanzmatrix **!**

⇩ Iterative Solution via Conjugate Gradient (CG) Method / Iterative Lösung durch Konjugierte Gradienten (KG) Methode

Solution of the Matrix Equation / Lösung der Matrixgleichung

$$\underbrace{\left\{\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}\right\}}_{=\mathrm{A/m}}(\omega) = \underbrace{[Z]^{-1}}_{=\mathrm{A/V}}(\omega)\underbrace{\left\{\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}\right\}}_{=\mathrm{V/m}}(\omega)$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

2-D PEC TM EFIE / 2D-IEL-TM-EFIE

$$-\mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}'\in C_{\mathrm{sc}}=\partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right) \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}' = \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \quad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

Discretization via MoM /
Diskretisierung durch MoM

Matrix Equation / Matrixgleichung

$$[Z](\omega)\left\{\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}\right\}(\omega) = \left\{\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}\right\}(\omega)$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \dots & Z_{1N}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) & \dots & Z_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(\omega) & Z_{N2}(\omega) & \dots & Z_{NN}(\omega) \end{bmatrix}_{N\times N} \begin{Bmatrix} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z1}^{\mathrm{TM}}(\omega) \\ \mathrm{K}_{\mathrm{e}z2}^{\mathrm{TM}}(\omega) \\ \vdots \\ \mathrm{K}_{\mathrm{e}zN}^{\mathrm{TM}}(\omega) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \mathrm{E}_{z1}^{\mathrm{in}}(\omega) \\ \mathrm{E}_{z2}^{\mathrm{in}}(\omega) \\ \vdots \\ \mathrm{E}_{zN}^{\mathrm{in}}(\omega) \end{Bmatrix}_N$$

Complex Symmetric N X N Matrix /
Komplexe symmetrische N X N Matrix

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

2-D PEC TM EFIE / 2D-IEL-TM-EFIE

$$-\mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}'\in C_{\mathrm{sc}}=\partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right) \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}' = \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \quad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \dots & Z_{1N}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) & \dots & Z_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(\omega) & Z_{N2}(\omega) & \dots & Z_{NN}(\omega) \end{bmatrix}_{N\times N} \begin{Bmatrix} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z1}^{\mathrm{TM}}(\omega) \\ \mathrm{K}_{\mathrm{e}z2}^{\mathrm{TM}}(\omega) \\ \vdots \\ \mathrm{K}_{\mathrm{e}zN}^{\mathrm{TM}}(\omega) \end{Bmatrix}_N = \begin{Bmatrix} \mathrm{E}_{z1}^{\mathrm{in}}(\omega) \\ \mathrm{E}_{z2}^{\mathrm{in}}(\omega) \\ \vdots \\ \mathrm{E}_{zN}^{\mathrm{in}}(\omega) \end{Bmatrix}_N$$

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) && \Rightarrow \quad \mathrm{E}_{zm}^{\mathrm{in}}(\omega) && m=1,\dots,N \\ &\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega) && \Rightarrow \quad \mathrm{K}_{\mathrm{e}zn}^{\mathrm{TM}}(\omega) && n=1,\dots,N \\ -\mathrm{j}\omega\mu_0 &\oint_{\underline{\mathbf{r}}'\in C_{\mathrm{sc}}=\partial S_{\mathrm{sc}}} (\bullet)\, G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right)\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}' && \Rightarrow \quad Z_{mn}(\omega) && m,n=1,\dots,N \end{aligned}$$

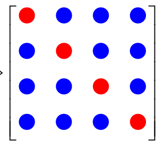
EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

2-D PEC TM EFIE / 2D-IEL-TM-EFIE

$$-\mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}' \in C_{\mathrm{sc}} = \partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}', \omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}', \omega\right) \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}' = \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega), \quad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

We have to Consider Two Different Cases for the Elements of the Impedance Matrix /
Man unterscheidet zwei Verschiedene Fälle für die Elemente der Impedanzmatrix

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \ldots & Z_{1N}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) & \ldots & Z_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(\omega) & Z_{N2}(\omega) & \ldots & Z_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$



Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente

For / Für: $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}'$ (Self Cell / Eigenzelle)

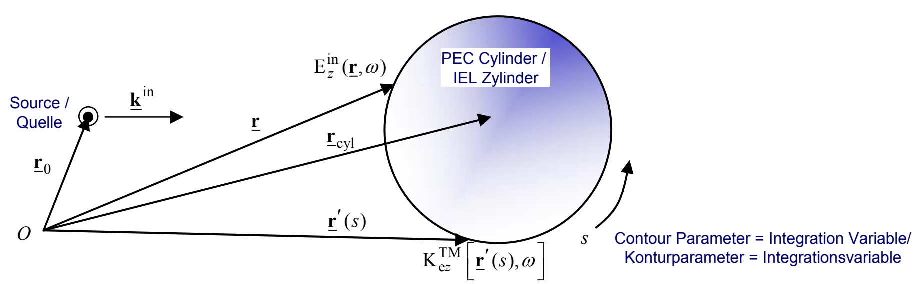
Off Diagonal Elements / Nebendiagonalelemente

For / Für $\underline{\mathbf{r}} \neq \underline{\mathbf{r}}'$

Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente
1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
2. Power Series Expansion of the Hankel Function for Small Arguments / Potenzreihen-Approximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente

Off Diagonal Elements / Nebendiagonalelemente
1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
2. Application of the Midpoint Rule / Anwendung der Mittelpunktsregel

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen



$$\underline{\mathbf{r}}' \to \underline{\mathbf{r}}'(s)$$

$$\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}', \omega) \to \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s), \omega\right] \qquad \underline{\mathbf{r}}'(s) \in C_{\mathrm{sc}} \qquad C_{\mathrm{sc}} : s_b \le s \le s_e$$

$$G\left(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}', \omega\right) \to G\left(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'(s), \omega\right)$$

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}}, \omega) = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \int_{s=s_b}^{s_e} G\left[\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}'(s), \omega\right] \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s), \omega\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \qquad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

$s_{b(eginn)} =$ Begin of Contour / Anfang der Kontur

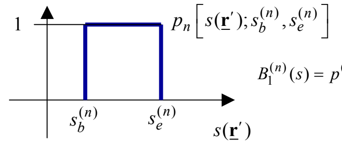
$s_{e(nd)} =$ End of Contour / Ende der Kontur

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Rectangular Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Rechteckimpuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

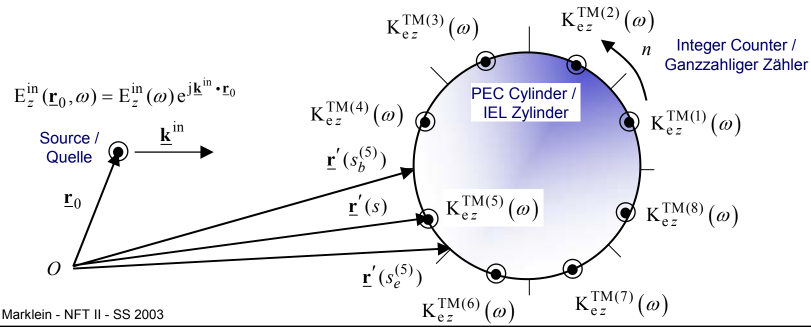
$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \int_{s=s_b}^{s_e} G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right]\mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \qquad \underline{\mathbf{r}}\in C_{\mathrm{sc}}$$

Basis Function Expansion using Rectangular Pulse Basis / Basisfunktionsentwicklung mit Rechteckimpulsfunktionen

Rectangular Pulse
(or Piecewise-Constant) Function /
Rechteckimpuls-Funktion
(oder stückweise konstante Funktion)



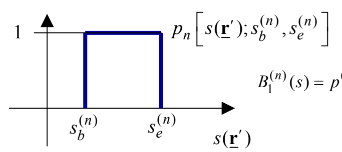
$$B_1^{(n)}(s) = p^{(n)}\left[s(\underline{\mathbf{r}}'); s_b^{(n)}, s_e^{(n)}\right] = \begin{cases} 1 & s_b^{(n)} \le s \le s_e^{(n)} \\ 0 & \text{otherwise / sonst} \end{cases}$$



EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Rectangular Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Rechteckimpuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

Basis Function Expansion using Rectangular Pulse Basis / Basisfunktionsentwicklung mit Rechteckimpulsfunktionen

Rectangular Pulse
(or Piecewise-Constant) Function /
Rechteckimpuls-Funktion
(oder stückweise konstante Funktion)



$$B_1^{(n)}(s) = p^{(n)}\left[s(\underline{\mathbf{r}}'); s_b^{(n)}, s_e^{(n)}\right] = \begin{cases} 1 & s_b^{(n)} \le s \le s_e^{(n)} \\ 0 & \text{otherwise / sonst} \end{cases}$$

Pulse Basis Expansion of / Pulsbasisentwicklung von $\mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right]$ $\Rightarrow$ $\mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] \approx \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega)\, p^{(n)}\left[s(\underline{\mathbf{r}}'); s_b^{(n)}, s_e^{(n)}\right]$

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = -\mathrm{j}\omega\mu_0 \int_{s=s_b}^{s_e} G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right]\mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \qquad \underline{\mathbf{r}}\in C_{\mathrm{sc}}$$

$$\approx -\mathrm{j}\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b}^{s_e} G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] p^{(n)}\left[s(\underline{\mathbf{r}}'); s_b^{(n)}, s_e^{(n)}\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \qquad \underline{\mathbf{r}}\in C_{\mathrm{sc}}$$

$$\approx -\mathrm{j}\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

The Rectangular Pulse Function Works
like a Filter Function /
Die Rechteckimpuls-Funktion arbeitet
wie eine Filterfunktion

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) \approx -\mathrm{j}\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

$$G\left[\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] = \frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right]$$

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) \approx -\mathrm{j}\omega\mu_0 \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \frac{\mathrm{j}}{4}\mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

$$\approx \frac{\omega\mu_0}{4} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) \approx \frac{\omega\mu_0}{4} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

Testing Procedure with Delta Testing Functions / Testprozedur mit Delta-Testfunktionen

$$\left\langle w_m, \mathcal{L}\{f\}\right\rangle = \left\langle w_m, g\right\rangle$$

$$w_m(\underline{\mathbf{r}}) = \delta(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}^{(m)})$$

$$\left\langle w_m, \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega)\right\rangle = \left\langle w_m, \frac{\omega\mu_0}{4} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)\right\rangle$$

$$\left\langle \delta(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}^{(m)}), \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega)\right\rangle = \left\langle \delta(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}^{(m)}), \frac{\omega\mu_0}{4} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)\right\rangle$$

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}}^{(m)},\omega) = \frac{\omega\mu_0}{4} \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}}^{(m)},\omega)=\frac{\omega\mu_0}{4}\sum_{n=1}^{N}\mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega)\int\limits_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}}\mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

$$\mathrm{E}_{zm}^{\mathrm{in}}(\omega)\quad\Rightarrow\quad\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega)=\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}}^{(m)},\omega)\qquad m=1,\dots,N\qquad\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$\mathrm{K}_{\mathrm{e}\,zn}^{\mathrm{TM}}(\omega)\quad\Rightarrow\quad\mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega)=\mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega)\qquad n=1,\dots,N\qquad\left[\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}}\right]$$

$$Z_{mn}(\omega)\quad\Rightarrow\quad Z\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right)=\underbrace{\frac{\omega\mu_0}{4}\int\limits_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}}\mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)}\qquad m,n=1,\dots,N\qquad\left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{A}}\right]$$

*n*th Element – *n*th Cell /
n-tes Element – *n*-te Zelle

$$\begin{bmatrix}Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \dots & Z_{1N}(\omega)\\ Z_{m1}(\omega) & Z_{mn}(\omega) & \dots & Z_{mN}(\omega)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Z_{N1}(\omega) & Z_{N2}(\omega) & \dots & Z_{NN}(\omega)\end{bmatrix}_{N\times N}\begin{Bmatrix}\mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z1}^{\mathrm{TM}}(\omega)\\ \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,zn}^{\mathrm{TM}}(\omega)\\ \vdots\\ \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,zN}^{\mathrm{TM}}(\omega)\end{Bmatrix}_N=\begin{Bmatrix}\mathrm{E}_{z1}^{\mathrm{in}}(\omega)\\ \mathrm{E}_{zm}^{\mathrm{in}}(\omega)\\ \vdots\\ \mathrm{E}_{zN}^{\mathrm{in}}(\omega)\end{Bmatrix}_N$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

$$\begin{bmatrix}Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \dots & Z_{1N}(\omega)\\ Z_{m1}(\omega) & Z_{mn}(\omega) & \dots & Z_{mN}(\omega)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ Z_{N1}(\omega) & Z_{N2}(\omega) & \dots & Z_{NN}(\omega)\end{bmatrix}_{N\times N}\begin{Bmatrix}\mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z1}^{\mathrm{TM}}(\omega)\\ \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,zn}^{\mathrm{TM}}(\omega)\\ \vdots\\ \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,zN}^{\mathrm{TM}}(\omega)\end{Bmatrix}_N=\begin{Bmatrix}\mathrm{E}_{z1}^{\mathrm{in}}(\omega)\\ \mathrm{E}_{zm}^{\mathrm{in}}(\omega)\\ \vdots\\ \mathrm{E}_{zN}^{\mathrm{in}}(\omega)\end{Bmatrix}_N$$

$$Z_{mn}(\omega)=\frac{\omega\mu_0}{4}\int\limits_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}}\mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\underbrace{\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|}\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)\qquad m,n=1,\dots,N$$

where the Phase of the Hankel Function is given by /
wobei die Phase der Hankel-Funktion geben ist über

$$\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|=\sqrt{\left[x^{(m)}-x'(s)\right]^2+\left[y^{(m)}-y'(s)\right]^2}$$

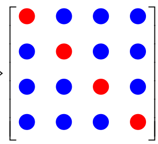
where / wobei $\underline{\mathbf{r}}^{(m)}$ determines the Phase center / das Phasenzentrum angibt

The Solution of this Contour Integral cannot Formulated in a Closed Form. We have to Introduce some further Approximations. /
Die Lösung dieses Konturintegrals kann nicht in einer geschlossenen Form angegeben werden. Wir müssen weitere Approximationen einführen.

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

$$Z_{mn}(\omega) = \underbrace{\frac{\omega\mu_0}{4} \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0 \left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)} - \underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)}_{=?} \qquad m,n = 1,\ldots,N$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \cdots & Z_{1N}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) & \cdots & Z_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(\omega) & Z_{N2}(\omega) & \cdots & Z_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$



● Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente

For / Für: $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}'$ Self Cell / Eigenzelle

● Off Diagonal Elements / Nebendiagonalelemente

For / Für $\underline{\mathbf{r}} \neq \underline{\mathbf{r}}'$

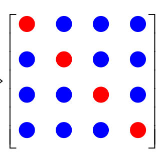
● **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
2. Power Series Expansion of the Hankel Function for Small Arguments / Potenzreihen-Approximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente

● **Off Diagonal Elements / Nebendiagonalelemente**
1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
2. Application of the Midpoint Rule / Anwendung der Mittelpunktsregel

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

$$Z_{mn}(\omega) = \underbrace{\frac{\omega\mu_0}{4} \int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0 \left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)} - \underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)}_{=?} \qquad m,n = 1,\ldots,N$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \cdots & Z_{1N}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) & \cdots & Z_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(\omega) & Z_{N2}(\omega) & \cdots & Z_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$



● Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente

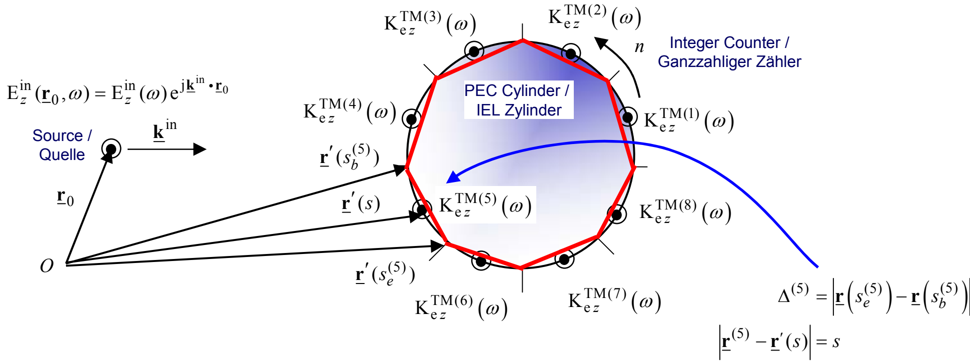
For / Für: $\underline{\mathbf{r}} = \underline{\mathbf{r}}'$ Self Cell / Eigenzelle

● **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
2. Power Series Expansion of the Hankel Function for Small Arguments / Potenzreihen-Approximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

- **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
  1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation

$$Z_{mm}(\omega) = \frac{\omega\mu_0}{4} \int_{s=s_b^{(m)}}^{s_e^{(m)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)} - \underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \qquad m = 1,\dots,N$$



EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

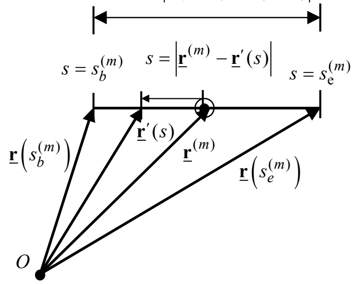
- **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
  1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation

$$\int_{s=s_b^{(m)}}^{s_e^{(m)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)} - \underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \approx \int_{s=s_b^{(m)}}^{s_e^{(m)}} \mathrm{H}_0^{(1)}[k_0 s]\,\mathrm{d}s$$

$$= 2\int_{s=0}^{\frac{\Delta^{(m)}}{2}} \mathrm{H}_0^{(1)}[k_0 s]\,\mathrm{d}s$$

$$\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)} - \underline{\mathbf{r}}'(s)\right| = s$$

$$\Delta^{(m)} = \left|\underline{\mathbf{r}}\left(s_e^{(m)}\right) - \underline{\mathbf{r}}\left(s_b^{(m)}\right)\right|$$

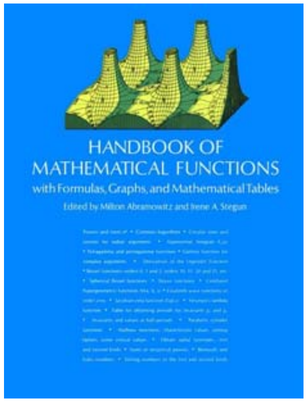


Power Series Approximation of the Hankel Function for Small Arguments z / Potenzreihenapproximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente z

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

- **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
  2. Power Series Expansion of the Hankel Function for Small Arguments / Potenzreihen-Approximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente

$$\mathrm{H}_0^{(1)}(z) = \mathrm{J}_0(z) + \mathrm{j}\mathrm{N}_0(z)?$$



Milton Abramowitz, Irene A. Stegun (Editors):
Handbook of Mathematical Functions,
with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables.
p. 1046, Dover Publications, New York, 1972.

www.amazon.de

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

- **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
  2. Power Series Expansion of the Hankel Function for Small Arguments / Potenzreihen-Approximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente

$$\mathrm{H}_0^{(1)}(z) = \mathrm{J}_0(z) + \mathrm{j}\mathrm{N}_0(z)?$$

$$\mathrm{J}_0(z) = 1 - \frac{1}{4}z^2 + \mathcal{O}(z^4)$$ **[*Abramowitz* & *Stegun*, p. 360, Eq. 9.1.12]**

$$\mathrm{N}_0(z) = \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma\right]\mathrm{J}_0(z) + \frac{2}{\pi}\frac{1}{4}z^2 + \mathcal{O}(z^4)$$ **[*Abramowitz* & *Stegun*, p. 360, Eq. 9.1.13]**

Euler Constant / Eulersche Konstante

$$\gamma = 0.5772\ 15664\ 90153\ 28606\ 06512$$ **[*Abramowitz* & *Stegun*, p. 3]**

$$\begin{aligned}\gamma_1 &= \mathrm{e}^{\gamma} \\ &= \mathrm{e}^{0.5772\ 15664\ 90153\ 28606\ 06512} \\ &= 1.7810\ 72428\ \ldots\end{aligned}$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

- **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
  2. Power Series Expansion of the Hankel Function for Small Arguments / Potenzreihen-Approximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente

$$\mathrm{H}_0^{(1)}(z) = \mathrm{J}_0(z) + \mathrm{j}\mathrm{N}_0(z)?$$

$$\mathrm{J}_0(z) = 1 - \frac{1}{4}z^2 + \mathcal{O}(z^4)$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{N}_0(z) &= \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma\right]\underbrace{\mathrm{J}_0(z)}_{=1-\frac{1}{4}z^2} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{4}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\\
&= \frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma\right]\left[1 - \frac{1}{4}z^2\right] + \frac{2}{\pi}\frac{1}{4}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma\right]z^2\right\} + \frac{2}{\pi}\frac{1}{4}z^2 + \mathcal{O}(z^4)\\
&= \frac{2}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - 1\right]\right\}z^2 + \mathcal{O}(z^4)
\end{aligned}$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

- **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
  2. Power Series Expansion of the Hankel Function for Small Arguments / Potenzreihen-Approximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente

$$\mathrm{J}_0(z) = 1 - \frac{1}{4}z^2 + \mathcal{O}(z^4)$$

$$\mathrm{N}_0(z) = \frac{2}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - 1\right]\right\}z^2 + \mathcal{O}(z^4)$$

Finally we find for the Power Series Approximation of the Hankel Function for Small Arguments z / Letztendlich finden wir für die Potenzreihenapproximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente z

$$\begin{aligned}
\mathrm{H}_0^{(1)}(z) &= \mathrm{J}_0(z) + \mathrm{j}\mathrm{N}_0(z)\\
&= 1 - \frac{1}{4}z^2 + \mathrm{j}\frac{2}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - 1\right]z^2\right\} + \mathcal{O}(z^4)\\
&\approx 1 - \frac{1}{4}z^2 + \mathrm{j}\frac{2}{\pi}\left\{\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - \frac{1}{4}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - 1\right]z^2\right\}\\
&\approx 1 + \mathrm{j}\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma\right] - \left\{\frac{1}{4} - \mathrm{j}\frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right) + \gamma - 1\right]\right\}z^2
\end{aligned}$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

- **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
  1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
  2. Power Series Expansion of the Hankel Function for Small Arguments / Potenzreihen-Approximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente

$$\int_{s=s_b^{(m)}}^{s_e^{(m)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)$$

$$\approx 2\int_{s=0}^{\frac{\Delta^{(m)}}{2}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0 s\right]\mathrm{d}s$$

$$= 2\int_{s=0}^{\frac{\Delta^{(m)}}{2}} \left\{1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma\right]\right\}\mathrm{d}s$$

$$= 2\left\{\int_{s=0}^{\frac{\Delta^{(m)}}{2}}\left(1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\gamma\right)\mathrm{d}s+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\int_{s=0}^{\frac{\Delta^{(m)}}{2}}\ln\left(\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}s\right\}$$

$$\mathrm{H}_0^{(1)}(z) \approx 1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma\right]-\cancel{\left\{\frac{1}{4}-\mathrm{j}\frac{1}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma-1\right]\right\}z^2}$$

$$\approx 1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{z}{2}\right)+\gamma\right]$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

- **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
  1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
  2. Power Series Expansion of the Hankel Function for Small Arguments / Potenzreihen-Approximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente

$$\int_{s=s_b^{(m)}}^{s_e^{(m)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \approx 2\int_{s=0}^{\frac{\Delta^{(m)}}{2}}\left(1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\gamma\right)\mathrm{d}s+\mathrm{j}\frac{4}{\pi}\int_{s=0}^{\frac{\Delta^{(m)}}{2}}\ln\left(\frac{z}{2}\right)\mathrm{d}s$$

$$2\int_{s=0}^{\frac{\Delta^{(m)}}{2}}\left(1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\gamma\right)\mathrm{d}s = 2\left(1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\gamma\right)s\Big|_{s=0}^{\frac{\Delta^{(m)}}{2}} = \Delta^{(m)}\left(1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\gamma\right)$$

$$\mathrm{j}\frac{4}{\pi}\int_{s=0}^{\frac{\Delta^{(m)}}{2}}\ln\left(\frac{k_0 s}{2}\right)\mathrm{d}s = \mathrm{j}\frac{4}{\pi}\frac{2}{k_0}\int_{\alpha=0}^{\frac{k_0\Delta^{(m)}}{4}}\ln\alpha\,\mathrm{d}\alpha = \mathrm{j}\frac{2}{\pi}\Delta^{(m)}\left[\ln\left(\frac{k_0\Delta^{(m)}}{4}\right)-1\right]$$

$$\int\ln|x|\,\mathrm{d}x = x\left(\ln|x|-1\right) \qquad x\neq 0$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

- **Main Diagonal Elements / Hauptdiagonalelemente**
  1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
  2. Power Series Expansion of the Hankel Function for Small Arguments / Potenzreihen-Approximation der Hankel-Funktion für kleine Argumente

$$\int_{s=s_b^{(m)}}^{s_e^{(m)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \approx \Delta^{(m)}\left(1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\gamma\right)+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\Delta^{(m)}\left[\ln\left(\frac{k_0\Delta^{(m)}}{4}\right)-1\right]$$

$$\approx \Delta^{(m)}\left\{1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{k_0\Delta^{(m)}}{4}\right)+\gamma-1\right]\right\}$$

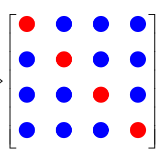
⇨ **Main Diagonal Elements of the Impedance Matrix / Hauptdiagonalelemente der Impedanzmatrix**

$$Z_{mm}(\omega) \approx \frac{\omega\mu_0}{4}\Delta^{(m)}\left\{1+\mathrm{j}\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{k_0\Delta^{(m)}}{4}\right)+\gamma-1\right]\right\} \qquad m=1,\ldots,N$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

$$Z_{mn}(\omega) = \frac{\omega\mu_0}{4}\underbrace{\int_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)}-\underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right]\mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s)}_{=?} \qquad m,n=1,\ldots,N$$

$$\begin{bmatrix} Z_{11}(\omega) & Z_{12}(\omega) & \ldots & Z_{1N}(\omega) \\ Z_{21}(\omega) & Z_{22}(\omega) & \ldots & Z_{2N}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{N1}(\omega) & Z_{N2}(\omega) & \ldots & Z_{NN}(\omega) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$



- Off Diagonal Elements / Nebendiagonalelemente

  For / Für $\underline{\mathbf{r}} \neq \underline{\mathbf{r}}'$

- **Off Diagonal Elements / Nebendiagonalelemente**
  1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
  2. Application of the Midpoint Rule / Anwendung der Mittelpunktsregel

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

- **Off Diagonal Elements / Nebendiagonalelemente**
  1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
  2. Application of the Midpoint Rule / Anwendung der Mittelpunktsregel

$$Z_{mn}(\omega) = \frac{\omega\mu_0}{4} \int\limits_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0 \left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)} - \underline{\mathbf{r}}'(s)\right|\right] \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \qquad m,n = 1,\ldots,N$$

$$\approx \frac{\omega\mu_0}{4} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0 \underbrace{\left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)} - \underline{\mathbf{r}}^{(n)}\right|}_{=r^{(mn)}}\right] \underbrace{\left|\underline{\mathbf{r}}\left(s_e^{(n)}\right) - \underline{\mathbf{r}}\left(s_b^{(n)}\right)\right|}_{=\Delta^{(n)}}$$

$$\approx \frac{\omega\mu_0}{4} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0 r^{(mn)}\right] \Delta^{(n)}$$

$\underline{\mathbf{r}}^{(n)}$ Position Vector Points to the Midpoint of the nth Cell / Ortsvektor zeigt auf den Mittelpunkt der n-ten Zelle

$$\Delta^{(n)} = \left|\underline{\mathbf{r}}\left(s_e^{(n)}\right) - \underline{\mathbf{r}}\left(s_b^{(n)}\right)\right|$$

Approximation of the Arc Length of the nth Cell / Approximation der Bogenlänge der n-ten Zelle

$$r^{(mn)} = \left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)} - \underline{\mathbf{r}}^{(n)}\right| = \sqrt{\left[x^{(m)} - x^{(n)}\right]^2 + \left[y^{(m)} - y^{(n)}\right]^2}$$

$$\int\limits_{s=s_b^{(n)}}^{s_e^{(n)}} \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'(s) \approx \left|\underline{\mathbf{r}}\left(s_e^{(n)}\right) - \underline{\mathbf{r}}\left(s_b^{(n)}\right)\right| \approx \Delta^{(n)}$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

- **Off Diagonal Elements / Nebendiagonalelemente**
  1. Flat Cell Approximation / Ebene-Zelle-Approximation
  2. Application of the Midpoint Rule / Anwendung der Mittelpunktsregel

⇨ **Off Diagonal Elements of the Impedance Matrix / Nebendiagonalelemente der Impedanzmatrix**

$$Z_{mn}(\omega) \approx \frac{\omega\mu_0}{4} \mathrm{H}_0^{(1)}\left[k_0 r^{(mn)}\right] \Delta^{(n)}$$

$$r^{(mn)} = \left|\underline{\mathbf{r}}^{(m)} - \underline{\mathbf{r}}^{(n)}\right| = \sqrt{\left[x^{(m)} - x^{(n)}\right]^2 + \left[y^{(m)} - y^{(n)}\right]^2}$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

2-D PEC TM EFIE / 2D-IEL-TM-EFIE

$$\underbrace{-\mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}' \in C_{\mathrm{sc}} = \partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}}-\underline{\mathbf{r}}',\omega\right) \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}'}_{=-\mathrm{E}_z^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{r}},\omega)} = \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \quad \underline{\mathbf{r}} \in C_{\mathrm{sc}}$$

Discretization via MoM / Diskretisierung durch MoM

Matrix Equation / Matrixgleichung

$$\left[Z\right](\omega)\left\{\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}\right\}(\omega) = \left\{\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}\right\}(\omega)$$

Elements of the Impedance Matrix / Elemente der Impedanzmatrix

$$Z_{mn}(\omega) = \frac{\omega\mu_0}{4}\Delta^{(n)} \begin{cases} 1 + \mathrm{j}\dfrac{2}{\pi}\left[\ln\left(\dfrac{k}{4}\Delta^{(n)}\right) + \gamma - 1\right] & m = n \\ \mathrm{H}_0^{(1)}(k\, r_{mn}) & m \neq n \end{cases}$$

$$\mathrm{K}_{\mathrm{e}zn}^{\mathrm{TM}}(\omega) \Leftarrow \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega) \Leftarrow \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}\left[\underline{\mathbf{r}}'(s),\omega\right] \approx \sum_{n=1}^{N} \mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}(n)}(\omega)\, p^{(n)}\left[s(\underline{\mathbf{r}}'); s_b^{(n)}, s_e^{(n)}\right]$$

$$\mathrm{E}_{zm}^{\mathrm{in}}(\omega) \Leftarrow \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}}^{(m)},\omega)$$

EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

Elements of the Impedance Matrix / Elemente der Impedanzmatrix

$$Z_{mn}(\omega) = \frac{\omega\mu_0}{4}\Delta^{(n)} \begin{cases} 1 + \mathrm{j}\dfrac{2}{\pi}\left[\ln\left(\dfrac{k}{4}\Delta^{(n)}\right) + \gamma - 1\right] & m = n \\ \mathrm{H}_0^{(1)}(k\, r_{mn}) & m \neq n \end{cases}$$

Matrix Equation / Matrixgleichung

$$\underbrace{\left[Z\right]}_{=\mathrm{V/A}}(\omega)\underbrace{\left\{\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}\right\}}_{=\mathrm{A/m}}(\omega) = \underbrace{\left\{\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}\right\}}_{=\mathrm{V/m}}(\omega)$$

Problem: Large Impedance Matrix / Problem: Große Impedanzmatrix **!**

Iterative Solution via Conjugate Gradient (CG) Method / Iterative Lösung durch Konjugierte Gradienten (KG) Methode

Solution of the Matrix Equation / Lösung der Matrixgleichung

$$\underbrace{\left\{\mathrm{K}_{\mathrm{e}z}^{\mathrm{TM}}\right\}}_{=\mathrm{A/m}}(\omega) = \underbrace{\left[Z\right]^{-1}}_{=\mathrm{A/V}}(\omega)\underbrace{\left\{\mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}\right\}}_{=\mathrm{V/m}}(\omega)$$

Diffraction of an EM Plane Wave on a Circular PEC Cylinder – TM Case / Beugung einer EM Ebenen Welle an einem kreisrunden IEL-Zylinder – TM-Fall

Number of cells N	Magnitude of induced electric surface current density, $\lvert K_z^{TM}(\varphi)\rvert$ for $\varphi = 0$	$\varphi = \pi/2$	$\varphi = \pi$
8	0.00082611	0.00291920	0.00573690
16	0.00077377	0.00299660	0.00613630
32	0.00076747	0.00300135	0.00622450
64	0.00076414	0.00299755	0.00623880
128	0.00076188	0.00299445	0.00623820
Exact	0.00076000	0.00299300	0.00623700
8	0.00084500	0.00298300	0.00639100
16	0.00078400	0.00302000	0.00630200
32	0.00077300	0.00300900	0.00627100
64	0.00076600	0.00300100	0.00625400
128	0.00076300	0.00299700	0.00624500

Table 1: Comparison between ours (top) and published (bottom) results, having circumference of one wavelength, $C = \lambda_0 = 0.3$ m

Diffraction of an EM Plane Wave on a Circular PEC Cylinder – TM Case / Beugung einer EM Ebenen Welle an einem kreisrunden IEL-Zylinder – TM-Fall

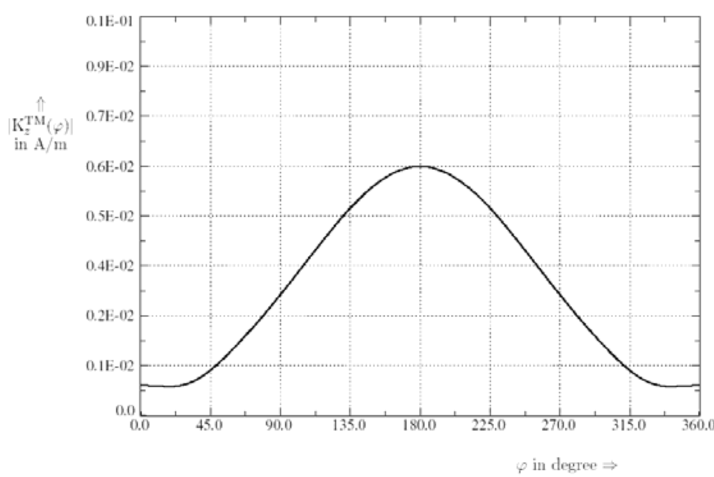


Figure 1: Magnitude of the induced electric surface current density, $\lvert K_z^{TM}(\varphi)\rvert$, as a function of the polar angle (φ), for 128 cells of equal size ($N = 128$)

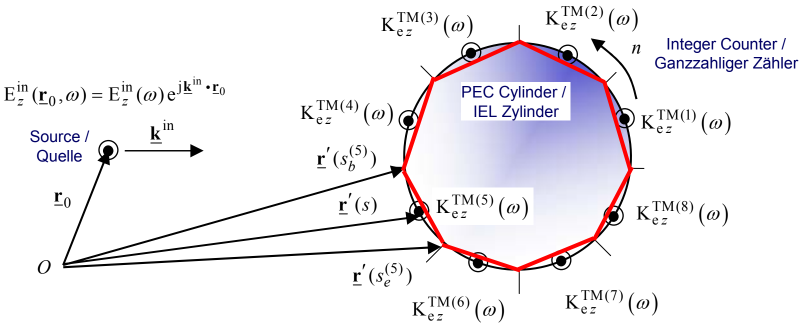
EM Scattering by a Perfectly Electrically Conducting Cylinder: EFIE Discretized in the 2-D TM Case with Pulse Basis and Delta Testing Functions / EM-Streuung an einem ideal elektrisch leitendem Zylinder: EFIE diskretisiert im 2D-TM-Fall mit Impuls-Basisfunktionen und Delta-Testfunktionen

Calculation of the Scattered Field / Berechnung des Streufeldes

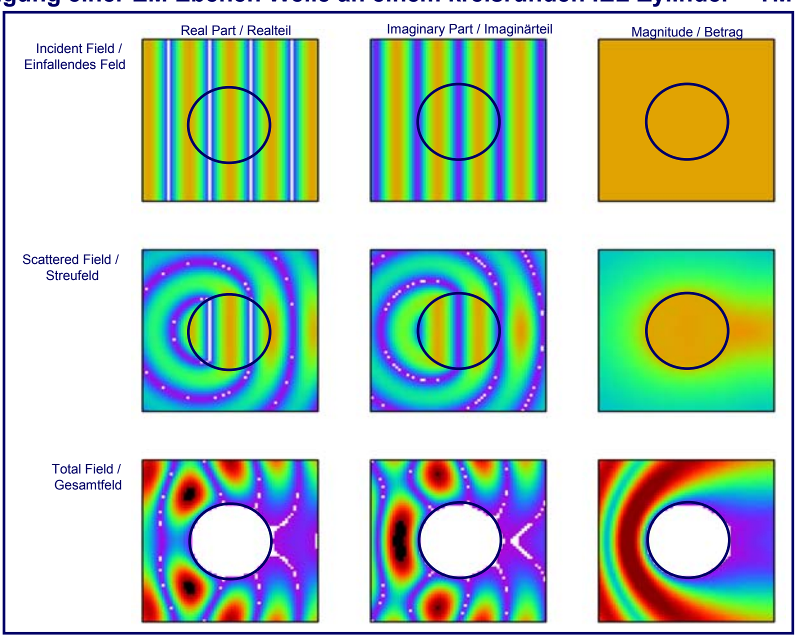
$$\mathrm{E}_z^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) = \mathrm{j}\omega\mu_0 \oint_{\underline{\mathbf{r}}' \in C_{\mathrm{sc}} = \partial S_{\mathrm{sc}}} \mathrm{K}_{\mathrm{e}\,z}^{\mathrm{TM}}(\underline{\mathbf{r}}',\omega)\, G\left(\underline{\mathbf{r}} - \underline{\mathbf{r}}',\omega\right) \mathrm{d}\underline{\mathbf{r}}', \qquad \underline{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{C}_{\mathrm{sc}}$$

Calculation of the Total Field / Berechnung des Gesamtfeldes

$$\mathrm{E}_z(\underline{\mathbf{r}},\omega) = \mathrm{E}_z^{\mathrm{in}}(\underline{\mathbf{r}},\omega) + \mathrm{E}_z^{\mathrm{sc}}(\underline{\mathbf{r}},\omega), \qquad \underline{\mathbf{r}} \in \mathbb{R}^3 \setminus \overline{C}_{\mathrm{sc}}$$



Diffraction of an EM Plane Wave on a Circular PEC Cylinder – TM Case / Beugung einer EM Ebenen Welle an einem kreisrunden IEL-Zylinder – TM-Fall



End of 4th Lecture / Ende der 4. Vorlesung