UNIKASSEL VERSITÄT

Nachname:...................................... Matrikelnummer:.....................................

Vorname:..

Hausübung 1

Aufgabe 1:

Weisen Sie nach, dass die Invarianten durch die Beziehungen

i) $II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}[(\text{Sp }\mathbf{A})^2 - \text{Sp}(\mathbf{A}^2)]$

ii) $III_{\mathbf{A}} = \det\mathbf{A}$

berechnet werden können.

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Invarianten $I_{\mathbf{A}}$, $II_{\mathbf{A}}$ und $III_{\mathbf{A}}$ des Tensors **A** in Abhängigkeit seiner Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3.

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^{\mathsf{T}}$. Beweisen Sie, dass

a) alle Eigenwerte reell sind,

b) die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind und

c) es immer drei paarweise orthogonale normierte Eigenvektoren gibt.

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine symmetrische, positiv definite Matrix **A**. Zeigen Sie, dass die Wurzel $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}}$ mit $\mathbf{B} = (\mathbf{A} + II_{\mathbf{B}}\mathbf{1})^{-1}(I_{\mathbf{B}}\mathbf{A} + III_{\mathbf{B}}\mathbf{1})$ berechenbar ist. Wie können die Invarianten der Matrix **B** aus den Eigenwerten der Matrix **A** ermittelt werden?

Aufgabe 5:

Für Determinanten gilt der „Multiplikationssatz“:

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B})$$

Beweisen Sie auf dieser Grundlage die Formel

$$(\mathbf{Au} \times \mathbf{Av}) \cdot (\mathbf{Aw}) = (\det\mathbf{A})\,[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}] \quad ,$$

die für beliebige $3\text{x}3$ - Matrizen und Vektoren **u**, **v**, **w** gilt.