

4 Verschiebungsmethode

Die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen mechanischen Gleichungen und Variablen sollen anhand des TONTI-Diagramms visualisiert werden.

4.1 TONTI-Diagramm für das dreidimensionale Kontinuum

Aus der folgenden Anordnung der mechanischen Größen im TONTI-Diagramm ergeben sich deren Beziehungen zueinander.

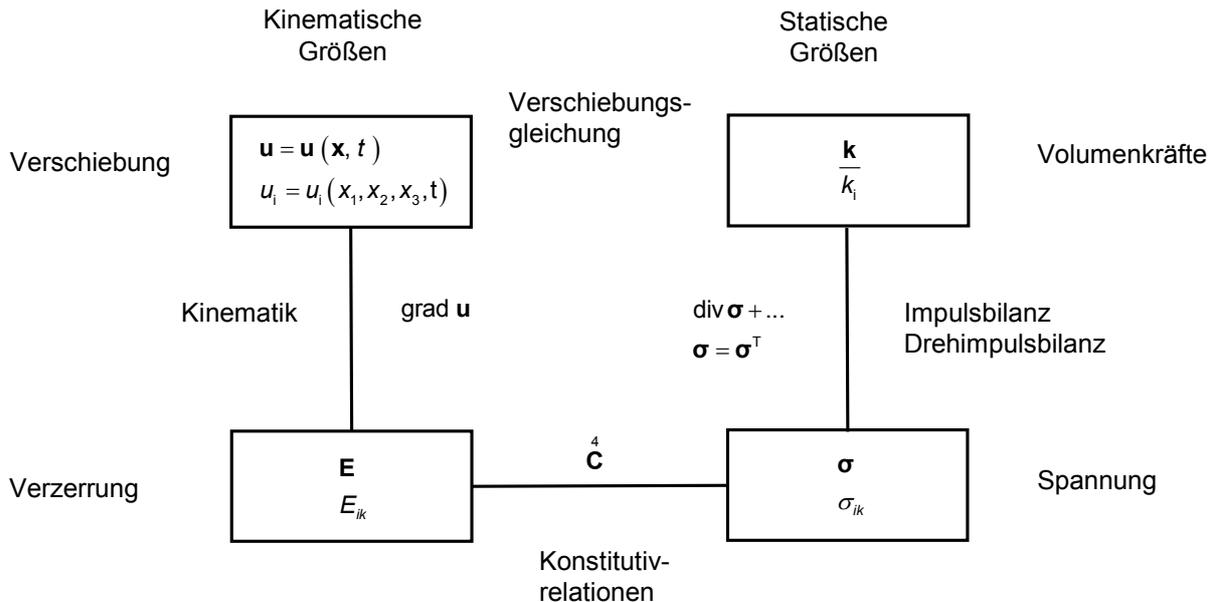


Abb. 4.1-1: TONTI-Diagramm für das dreidimensionale Kontinuum

Verschiebungs-/Bewegungsgleichung für den ein- (1-D) und dreidimensionalen (3-D) Fall:

	<u>1-D</u>	<u>3-D</u>
Impulsbilanz:	$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho k = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{k} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$
Kinematik:	$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T]$
Elastizitätsgl.:	$\sigma = E \varepsilon$	$\boldsymbol{\sigma} = 2G \left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{Sp } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \right]$
Verschiebungs-/ Bewegungsgleichung:	$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho k$	Herleitung untenstehend

Nach Elimination von Spannung σ bzw. $\boldsymbol{\sigma}$ und Dehnung ε bzw. $\boldsymbol{\varepsilon}$ entsteht aus der Impulsbilanzgleichung die Verschiebungs- oder Bewegungsgleichung

4.2 Verschiebungsgleichungen von Navier-Cauchy-Lamé

Die Bewegungsgleichungen der dreidimensionalen Elastodynamik für kontinuierliche Körper können explizit als Verschiebungsgleichungen im Sonderfall der linearen Elastizitätstheorie mit kleinen Deformationen hergeleitet werden.

Verschiebungsfeld: $u_i = \hat{u}_i(x_1, x_2, x_3, t)$

i. Impulsbilanz: $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho k_i$, Drehimpulsbilanz: $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$

ii. Kinematik: $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right]$

iii. elastische Materialsteifigkeitsbeziehung $\sigma_{ik} = 2G \left[\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right]$

Durch Elimination der Spannungen σ_{ik} und Dehnungen ε_{ik} zugunsten der Komponenten des Verschiebungsfeldes $u_i = \hat{u}_i(x_1, x_2, x_3, t)$ folgt aus der

Elastizitätsgleichung: $\sigma_{ik} = 2G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right]$

Spannungsdivergenz: $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = G \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right]$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_l} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}_{\left(1 + \frac{2\nu}{1-2\nu}\right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = G \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$$

In symbolischer Notation gilt:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = G \left[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) \right],$$

wobei sich der LAPLACE-Operator Δ vor dem Verschiebungsfeld \mathbf{u} formal aus dem Skalarprodukt des NABLA-Operators ∇ mit sich selbst ergibt.

$$\Delta \mathbf{u} := \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Hinweis: Die Divergenz div des Gradienten grad des Verschiebungsfeldes $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ führt dann zum LAPLACE-Operator Δ .

In ausführlicher Komponentenschreibweise lautet der LAPLACE-Operator Δ wie folgt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Die Verschiebungsgleichungen nach NAVIER-CAUCHY-LAMÉ oder die Bewegungsgleichung ergibt sich dann in Indexnotation zu:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = G \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] + \rho k_i$$

beziehungsweise in symbolischer Notation:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = G \left[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad} (\text{div} \mathbf{u}) \right] + \rho \mathbf{k}$$

Die Verschiebungsgleichungen sind drei lineare, partielle Differentialgleichungen für die drei Komponenten $u_i = \hat{u}_i(x_1, x_2, x_3, t)$ mit $i = 1, 2, 3$ des Verschiebungsfelds.

Ausgeschrieben lauten sie:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= G \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \rho k_1 \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= G \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \rho k_2 \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= G \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \rho k_3 \end{aligned}$$

Verschiebungsgleichung für den Dehnstab (1-D Fall):

Eindimensionaler Fall: $\mathbf{u} = \{u_1(x_1, t)\} = \{u(x, t)\}$

Impulsbilanz: $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho k$

Kinematik: $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$

Elastizitätsgleichung: $\sigma = E\varepsilon$

Verschiebungsgleichung: $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho k$

$$\rho \ddot{u} = E u'' + \rho k$$

Dieses System von drei partiellen Differentialgleichungen für das allgemeine elastische Kontinuum muss durch Anfangs- und Randbedingungen ergänzt werden, damit eine eindeutige Lösung vorliegt.

Anfangsbedingungen:

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ Anfangsort bzw. Ausgangslage $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$

$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ in der Ausgangslage

Randbedingungen:

Auf dem Rand (der Oberfläche) des Körpers wird entweder der (eingeprägte) Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_e(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in A_u}$ oder die Last (eingepprägter Spannungsvektor) $\mathbf{t}_a(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in A_\sigma}$ vorgegeben.

$$A = A_\sigma \cup A_u$$

$$A_\sigma \cap A_u = \emptyset$$

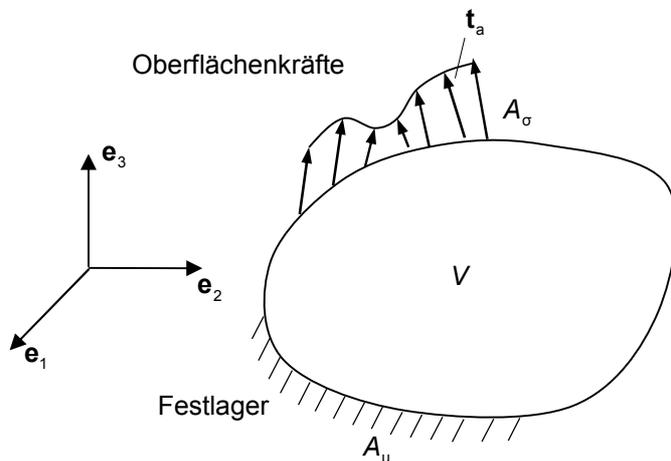


Abb. 4.2-1: Kräfte- und Verschiebungsrand des Körpers

A_σ : Kräfterand mit eingepprägter Oberflächenkraft

$$\mathbf{t}_a|_{A_\sigma} = t_{ai} \mathbf{e}_i$$

(Randkräfte sind vorgeschrieben)

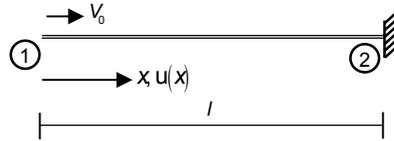
A_u : Verschiebungsrand mit vorgeschriebenem Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}_e|_{A_u} = u_{ei} \mathbf{e}_i$$

(Randverschiebungen sind vorgeschrieben)

4.3 Qualitative Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

Am Beispiel der Stoßwelle im Dehnstab soll die Lösung der obenstehenden Wellengleichung diskutiert werden. Dazu wird eine Welle über die Geschwindigkeitsrandbedingung $v(x=0, t=0) = v_0$ am freien Ende in den Dehnstab eingeleitet, der am rechten Ende unverschieblich gelagert ist.



Angaben: $E = \text{Modul}$
 $l = \text{Stablänge}$
 $\rho = \text{Massendichte}$

Abb. 4.3-1: Dehnstab mit Randbedingungen (Lagerung und Anfangsgeschwindigkeit)

Stab am Anfang ohne Verschiebung und in Ruhe

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ \dot{u}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Anfangsbedingungen}$$

Randbedingungen:

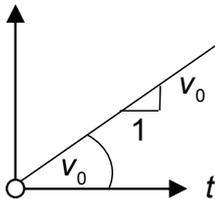
am Knoten $u_1(t) = u(0, t) = v_0 \cdot t$

am Knoten $u_2(t) = u(l, t) = 0$

Verschiebung mit gleichförmiger Geschwindigkeit am Stabanfang bei $x = 0$

Festhalterung am Stabende bei $x = l$

$$u_1(t) = u(0, t)$$



Die Randbedingung am Knoten ① ist inhomogen, d. h. $\neq 0$. Daher sind zusätzliche Überlegungen zur Lösung der DGL durch Separationsansatz notwendig.

Abb. 4.3-2: Verlauf der Verschiebung am Stabanfang über der Zeit t

Deshalb ist die Lösung (ohne Herleitung) aus dem Ansatz nach d'ALEMBERT einfacher. Der Verschiebungsverlauf im Dehnstab ist in der Abbildung 4.3-3 zu drei verschiedenen Zeitpunkten für eine Longitudinalwelle als Kurvenschar grafisch dargestellt. Zu beachten ist, dass sich die Welle mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, das Dehnstabende sich aber nur mit der Geschwindigkeit v_0 nach rechts bewegt.

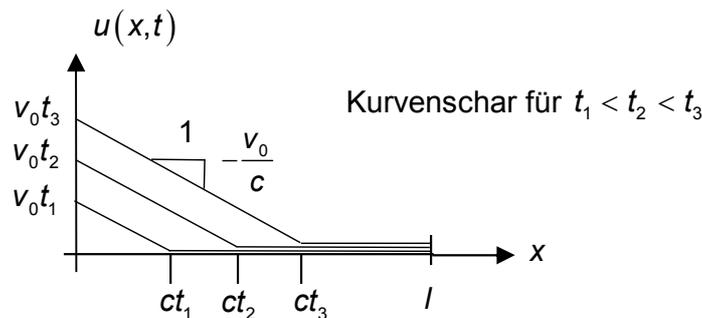


Abb. 4.3-3: Verschiebungsverlauf im Dehnstab zu drei festen Zeitpunkten $t_1 < t_2 < t_3$

In der folgenden Abbildung ist die Verschiebung $u(x, t)$ über der Orts-Zeitebene dargestellt. Dazu wird die charakteristische Kurve $x = ct$ in die Zeichnung eingetragen, die die Ausbreitung der Wellenfront kennzeichnet.

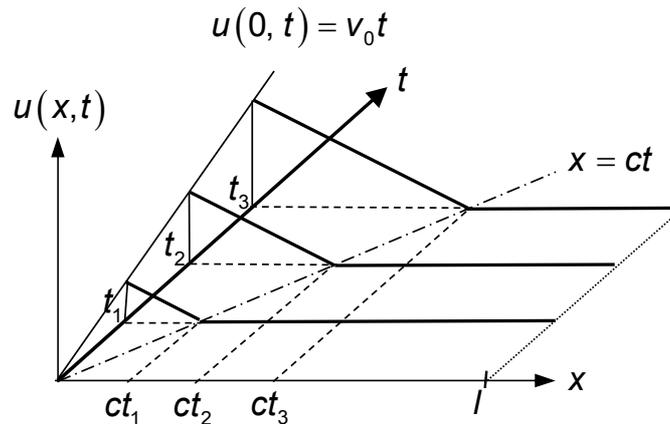


Abb. 4.3-4: Verschiebungsverlauf über der x -Koordinate und der Zeitachse t

Die Funktionsgleichung für den Verschiebungsverlauf lautet mit der Fallunterscheidung für die beiden Fälle:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{v_0}{c}(ct - x) & \text{für } x \leq ct \\ 0 & \text{für } x > ct \end{cases}$$

Die Dehnung ergibt sich als Ortsableitung aus der Verschiebung.

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{v_0}{c} & \text{für } x \leq ct \\ 0 & \text{für } x > ct \end{cases}$$

Die Spannung geht aus dem Elastizitätsmodell hervor.

$$\sigma = E\varepsilon = \begin{cases} -E\frac{v_0}{c} & \text{für } x \leq ct \\ 0 & \text{für } x > ct \end{cases}$$

Die Verschiebungsdarstellung kann mit Hilfe der FÖPPL-Klammer wie folgt in Kurzschreibweise geschrieben werden:

$$u(x, t) = \frac{v_0}{c} \langle ct - x \rangle \quad (\text{FÖPPL-Klammer}) \quad \langle ct - x \rangle := \begin{cases} ct - x & \text{für } ct - x \geq 0 \\ 0 & \text{für } ct - x < 0 \end{cases}$$

Die Ableitung der FÖPPL-Klammer $\langle x \rangle = \langle x \rangle^1$ führt auf die HEAVISIDE-Funktion $H(x)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle x \rangle = H(x) = \langle x \rangle^0$$

Zur Darstellung des Dehnungsverlaufs wird von der HEAVISIDE-Funktion Gebrauch gemacht.

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{v_0}{c} H(ct - x) = \begin{cases} -\frac{v_0}{c} & \text{für } x \leq ct \\ 0 & \text{für } x > ct \end{cases}$$

Die Veranschaulichung des Dehnungsverlaufs $\varepsilon(x,t)$ erfolgt als Kurvenschar mit dem Parameter Zeit $t = t_1 < t_2 < t_3$.

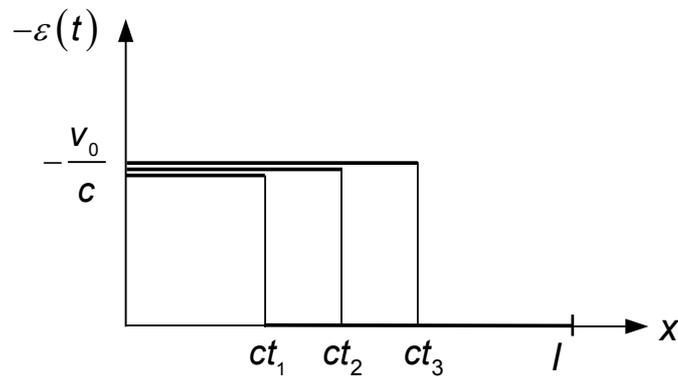


Abb. 4.3-5: Dehnungsverlauf im Dehnstab zu drei festen Zeitpunkten $t_1 < t_2 < t_3$

Daraus ergeben sich die unten dargestellten Verläufe der Spannung über der $x-t$ -Ebene zu den genannten drei Zeitpunkten.

$$\sigma(x,t) = E\varepsilon(x,t) = -E \frac{V_0}{c} H(ct-x) = \begin{cases} -E \frac{V_0}{c} & \text{für } x \leq ct \\ 0 & \text{für } x > ct \end{cases}$$

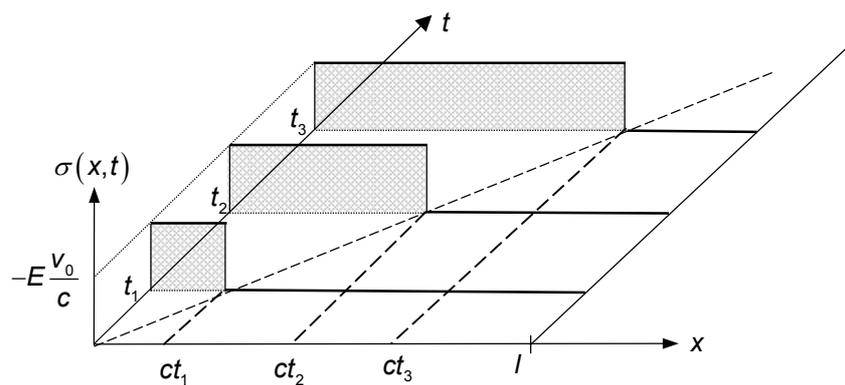


Abb. 4.3-6: Spannungsverlauf im Dehnstab zu drei festen Zeitpunkten $t_1 < t_2 < t_3$ über der $x-t$ -Ebene

Fazit:

Die Abbildungen zeigen die Ausbreitung der Welle im Dehnstab über der Zeit t .

4.4 Analytische Lösung der Wellengleichung nach der Methode von d'ALEMBERT

Die eindimensionale, homogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.4-1)$$

wobei $c^2 = \frac{E}{\rho}$ die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ist, soll nach der Methode von d'ALEMBERT durch Koordinatentransformation gemäß

$$\xi = x - ct \quad (4.4-2 \text{ a})$$

und

$$\eta = x + ct \quad (4.4-2 \text{ b})$$

gelöst werden, um einen Überblick über die Lösungen zu verschaffen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad u(x, t) &= \bar{u}(\xi, \eta) \\ u(x, t) &= \bar{u}(\xi(x, t), \eta(x, t)) \end{aligned}$$

Ableitung nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.4-3)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Aus:} & \xi = x - ct & \text{folgt:} & \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; & \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \\ & \eta = x + ct & \text{folgt:} & \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; & \frac{\partial \eta}{\partial t} = +c \end{array}$$

Einsetzen in (4.4-3) ergibt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \quad (4.4-4)$$

Die zweite Ableitung erfolgt mit Hilfe von Gl. (4.4-4):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta \partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1}$$

Einsetzen der partiellen Ableitung für ξ und η nach der Ortskoordinate x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \quad (4.4-5 \text{ a})$$

Ableitung von Gl. (4.4-4) nach der Zeit t ergibt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$\underset{=-c}{\frac{\partial \xi}{\partial t}}$ $\underset{=+c}{\frac{\partial \eta}{\partial t}}$

Einsetzen der partiellen Ableitung für ξ und η nach der Zeit t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left[-\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right]$$

Die zweite Ableitung nach der Zeit t erfolgt mit Hilfe der vorigen Beziehung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \left[-\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]$$

$\underset{=-c}{\frac{\partial \xi}{\partial t}}$ $\underset{=+c}{\frac{\partial \eta}{\partial t}}$ $\underset{=-c}{\frac{\partial \xi}{\partial t}}$ $\underset{=+c}{\frac{\partial \eta}{\partial t}}$

Einsetzen der partiellen Ableitung für ξ und η nach der Zeit t :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right] \quad (4.4-5 \text{ b})$$

Gleichung (4.4-5 a) und (4.4-6 b) in die Wellengleichung (4.4-1) einsetzen:

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{c^2} c^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right]$$

ergibt die gemischte Ableitung der Verschiebung \bar{u} nach ξ und η

$$\Leftrightarrow 4 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Die Normalform obiger Wellengleichung lautet:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Sie ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung und geht aus der Koordinatentransformation gemäß Gleichung (4.4-2 a) und (4.4-2 b) hervor. Sie kann durch zwei Integrations Schritte gelöst werden.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = \int \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} d\eta = \tilde{r}(\xi)$$

↑ Integrations- „Konstante“ ist freie Funktion von ξ

$$\bar{u} = \int \tilde{r}(\xi) d\xi + s(\eta)$$

↑ Integrations- „Konstante“ ist eine freie Funktion von η

$$\bar{u}(\xi, \eta) = r(\xi) + s(\eta)$$

Die Umrechnung in die Ausgangsvariablen x und t gemäß Gleichung (4.4-2 a) und (4.4-2 b) liefert die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = r(x - ct) + s(x + ct)$$

(4.4-6)

der Wellengleichung. Sie erlaubt folgende Deutung:

Die allgemeine Lösung stellt die Überlagerung einer rück- und vorläufigen Welle dar. $r(x - ct)$ breitet sich mit der Geschwindigkeit c in positiver x -Richtung aus, während $s(x + ct)$ in negativer x -Richtung fortschreitet.

Die Form der Welle bleibt jeweils erhalten! Zur Zeit $t_1 > 0$ ergeben sich die folgenden Verschiebungen entlang der x -Achse der beiden Funktionen r und s in Abbildung (4.4-1).

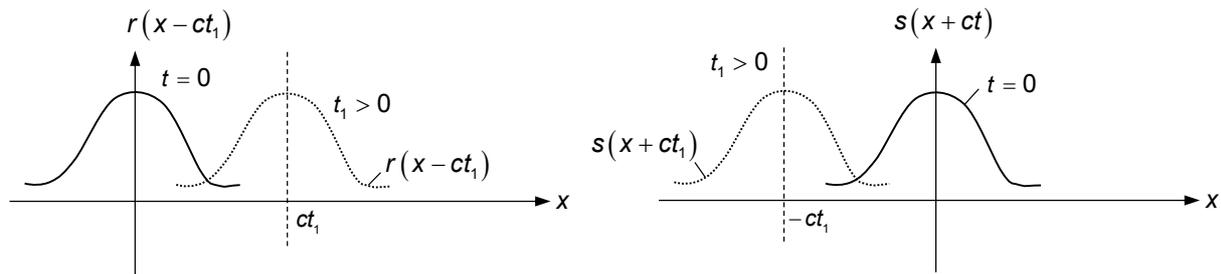


Abb. 4.4-1: Vor- und rückläufige Welle

Die Wellengleichung (4.4-6) muss an die Anfangs- und Randbedingungen angepasst werden.

Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$:

$$u(x, 0) = u_0(x) = f(x) \quad \text{Anfangsauslenkung}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) = 0 \quad \text{Anfangsgeschwindigkeit}$$

Mit Hilfe der allgemeinen Lösung lautet die Auslenkung u zur Zeit $t = 0$.

$$u(x, 0) = r(x) + s(x) = f(x) \quad (4.4-7)$$

und die Anfangsgeschwindigkeit:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{dr}{d(x-ct)} \underbrace{\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}}_{=-c} \Big|_{t=0} + \frac{ds}{d(x+ct)} \underbrace{\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}}_{=+c} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow = \frac{dr}{dx}(-c) + \frac{ds}{dx}c = 0 \quad (4.4-8)$$

Durch Ableitung nach der Ortskoordinate x folgt

$$\text{aus Gl. (4.4-7):} \quad \left. \frac{dr}{dx}(x) + \frac{ds}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x) \right\} \quad (4.4-9)$$

$$\text{Aus Gl. (4.4-8):} \quad \left. -\frac{dr}{dx}(x) + \frac{ds}{dx}(x) = 0 \right\} \quad (4.4-10)$$

$$\text{Gleichung (4.4-9) - Gleichung (4.4-10):} \quad 2 \frac{dr}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

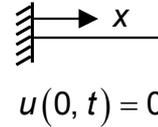
Gleichung (4.4-9) + Gleichung (4.4-10): $2 \frac{ds}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x)$

Integrieren: $r(x) - r(0) = \frac{1}{2}(f(x) - f(0))$ (4.4-11)

$$s(x) - s(0) = \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) \quad (4.4-12)$$

Die Rand-/Lagerbedingung $u(0, 0) = f(0)$ ergibt

$$u(0, 0) = r(0) + s(0) = f(0)$$



Addition von Gleichung (4.4-11) und (4.4-12):

$$u(x, t) = r(x, t) + s(x, t) \underbrace{- r(0) - s(0)}_{= -f(0)} = \frac{1}{2} f(x - ct) + \frac{1}{2} f(x + ct) - f(0)$$

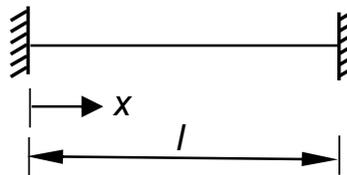
Die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe lautet dann:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)]$$

(4.4-13)

Mit voranschreitender Zeit t durchlaufen die Argumente $(x - ct)$ und $(x + ct)$ alle Werte auf dem Zahlenstrahl des offenen Intervalls $(-\infty, +\infty)$. Die Auslenkung $u(x, t)$ ist bislang nur auf dem Intervall $[0, l]$ erklärt und wird im Folgenden an die Randbedingungen angepasst.

Beispiel: Beidseitig eingespannter Dehnstab



Randbedingungen:

$$u(0, t) = 0$$

$$u(l, t) = 0$$

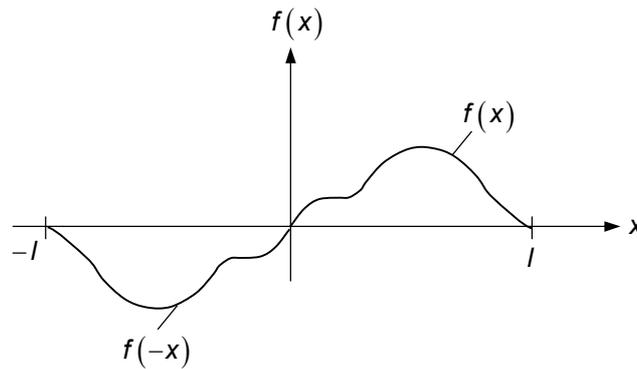
Abb. 4.4-2: Beidseitig gelagerter Dehnstab

Aus der Lösung und Gleichung (4.4-13) folgt für das linke Stabende $x = 0$:

$$u(0, t) = \frac{1}{2} f(-ct) + \frac{1}{2} f(+ct) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow f(-ct) = -f(ct)$$

Obige Bedingung verlangt für alle $t \geq 0$, dass $f(x)$ als ungerade Funktion $-f(-x)$ in der linken Koordinatenhalbebene fortgesetzt wird.

Abb. 4.4-3: Ungerade Fortsetzung der Funktion $-f(-x)$

Am rechten Stabende $x = l$ gilt mit der Lösung aus Gleichung (4.4-13):

$$u(l, t) = \frac{1}{2} [f(l+ct) + f(l-ct)] \stackrel{!}{=} 0$$

Wird die Lösung periodisch in der Zeit mit $\frac{2l}{c}$ fortgesetzt, so ergibt sich:

$$u\left(x, t + \frac{2l}{c}\right) = u(x, t)$$

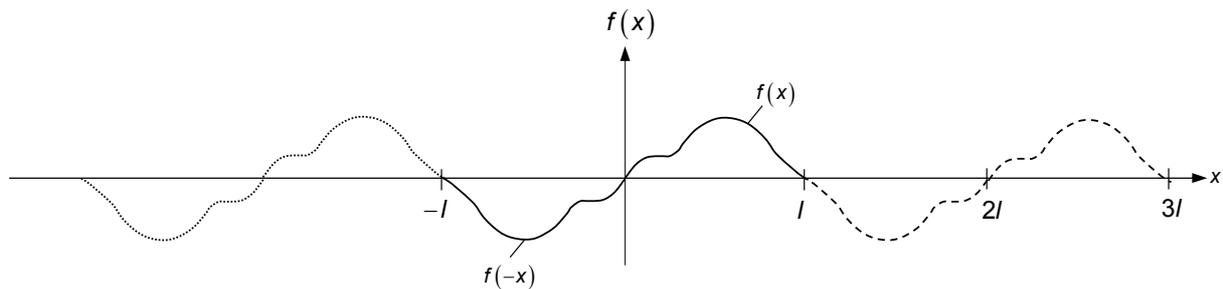


Abb. 4.4-4: Periodische Fortsetzung

Am rechten Rand: $x = l$ gilt mit der Lösung aus Gleichung (4.4-13):

$$u\left(l, t + 2\frac{l}{c}\right) = \frac{1}{2} f\left(l - c\left(t + 2\frac{l}{c}\right)\right) + \frac{1}{2} f\left(l + c\left(t + 2\frac{l}{c}\right)\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \frac{1}{2} f(-l - ct) + \frac{1}{2} \underbrace{f(l + ct + 2l)}_{= f(l+ct)} \stackrel{!}{=} 0$$

wegen $2\frac{l}{c}$ Periodizität

$$\Leftrightarrow f(-l - ct) = -f(l + ct)$$

Es zeigt sich, dass die Anfangsauslenkung $f(x)$ ungerade und $\frac{2l}{c}$ -periodisch über die x -Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ fortgesetzt werden muss, damit die Randbedingungen des beidseitig eingespannten Dehnstabs erfüllt werden.

4.5 Analytische Lösung der Wellengleichung im Dehnstab nach der Methode von BERNOULLI

Bewegungsgleichung des Dehnstabs:

$$\rho \ddot{u} - E u'' = \rho k \quad \text{mit} \quad u = u(x, t)$$

Randbedingung (RB): $u(0, t) = u(l, t) = 0$ (DIRICHLET-Randbedingung)

Anfangsbedingung (AB): $u(x, 0) = u_0(x)$ beidseitig unverschieblich
 $\dot{u}(x, 0) = v_0(x)$

$$\ddot{u} - c^2 u'' = \rho k \tag{4.5-1}$$

\uparrow
 $c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$

Wellenausbreitungsgeschwindigkeit im Dehnstab

Lösungsmethode nach BERNOULLI: Trennung der Variablen x und t mittels Produktansatz in eine Ortsfunktion $X(x)$ und eine Zeitfunktion $T(t)$:

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{u} &= X(x) \cdot \ddot{T}(t) \\ u'' &= X''(x) \cdot T(t) \end{aligned}$$

Einsetzen in homogene PDGL

$$X(x) \cdot \ddot{T}(t) - c^2 X''(x) \cdot T(t) = 0 \quad | : (X(x) \cdot T(t))$$

und Division durch $(X(x) \cdot T(t))$ führt auf 2 gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach Trennung in Gleichungen für die Variablen $T(t)$ und $X(x)$:

$$\frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = \text{Konstant} = -\omega^2$$

Trennung in zwei homogene, gewöhnliche Differentialgleichungen für die Orts- und Zeitfunktion

$$\Rightarrow \quad \ddot{T}(t) + \omega^2 T(t) = 0; \tag{4.5-2}$$

$$\Rightarrow \quad X(x) + \frac{\omega^2}{c^2} X(x) = 0 \tag{4.5-3}$$

Hinweis: Die Gleichung (4.5-3) definiert eine Eigenwertgleichung.

Allgemeine Lösung von Gl. (4.5-2):

$$T(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega(t)$$

Lösung von Gl. (4.5-3):

$$X(x) = C \cos \frac{\omega}{c} x + D \sin \frac{\omega}{c} x \tag{4.5-4}$$

Zuerst Anpassung der Ortsfunktion $X(x)$ an die Rand- (Lager-) –Bedingungen

Für DIRICHLET-Randbedingungen folgt dann:

$$u(0, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(0) = 0 = C \cdot 1 + D \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad C = 0$$

$$u(l, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(l) = 0 = 0 + D \sin \frac{\omega}{c} l$$

$$\Leftrightarrow D = 0 \quad \text{triviale Lösung}$$

Die notwendige Bedingung für eine nicht triviale Lösung ist hier die **Eigenwertgleichung**:

$$\sin \frac{\omega}{c} l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\omega}{c} l = n\pi,$$

denn die Nullstellen der Sinusfunktion sind π -periodisch

$$\omega_n = n\pi \frac{c}{l} \quad \text{für} \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Die Lösung (es gibt unendlich viele) sind die

$$\text{Eigenwerte bzw. Eigenfrequenzen} \quad n \rightarrow \omega_n = n\pi \frac{c}{l}; \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

$$\text{und die Eigenfunktionen (Eigenformen)} \quad n \rightarrow X_n(x) = \sin \frac{\omega}{c} x = \sin \left(n\pi \frac{x}{l} \right)$$

Hinweis: Die Eigenfunktionen $X_n(x)$ sind bis auf einen konstanten Vorfaktor D bestimmt.

Bemerkung: Die Lösung für die Ortsfunktion $X(x) = D \sin \frac{\omega}{c} l$ ist die Eigenfunktion und führt zusammen mit ihrer zweiten Ableitung

$$X''(x) = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2 D \sin \frac{\omega}{c} l$$

auf eine Eigenwertaufgabe mit der Differentialgleichung:

$$X''(x) = -\underbrace{\left(\frac{\omega}{c}\right)^2}_{\lambda} X(x) \quad \text{siehe Gl. (4.5-3)}$$

$$\text{Der Eigenwert lautet:} \quad \lambda = -\left(\frac{\omega}{c}\right)^2$$

Die Differentialgleichungen zu jedem einzelnen Eigenwert ω_n

$$\ddot{T}_n(t) + \omega_n^2 T_n(t) = 0$$

für die Zeitfunktion $T_n(t)$ liefern jeweils die Lösungsfunktion:

$$T_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der Wellengleichung für den beidseitig eingespannten Stab:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t)$$

Die durch Superposition der einzelnen Lösungsfunktionen entsteht.

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \left[A_n \cos\left(n\pi \frac{c}{l} t\right) + B_n \sin\left(n\pi \frac{c}{l} t\right) \right]$$

Die allgemeine Lösung $u(x, t)$ entsteht durch Überlagerung (Superposition) der Eigenschwingungen $u_n(x, t)$:

$$u_n(x, t) = \left[A_n \cos\left(n\pi \frac{c}{l} t\right) + B_n \sin\left(n\pi \frac{c}{l} t\right) \right] \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right)$$

Wegen der sinusförmigen Ortsfunktion $X(x)$ ist die Lösung $\frac{2l}{c}$ -periodisch. Für den beidseitig eingespannten Dehnstab muss deshalb die Anfangsbedingung als ungerade Funktion in negativer x-Richtung fortgesetzt werden.

Beispiel: Anfangsauslenkung $u_0(x)$ des Dehnstabs

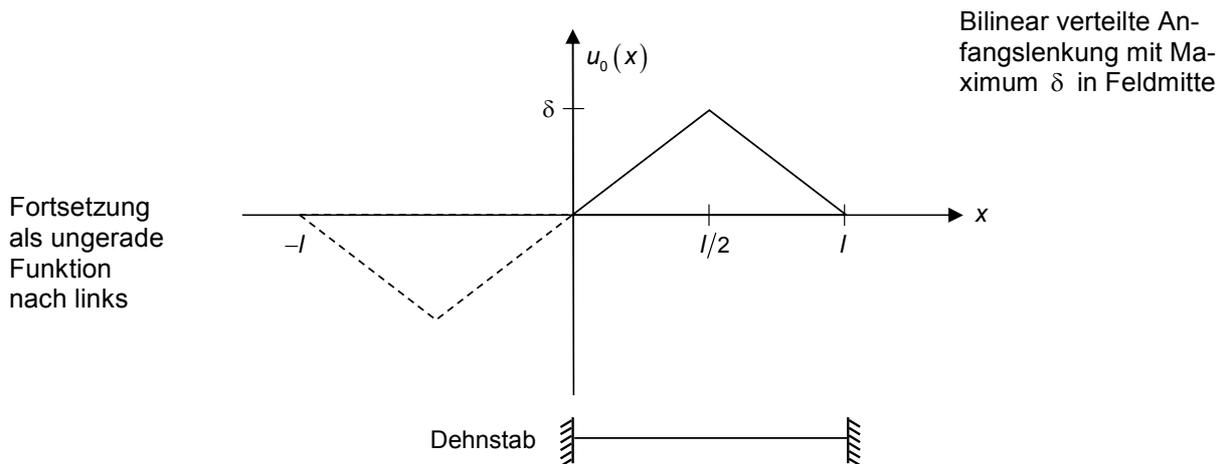


Abb. 4.5-1: Fortsetzung der Auslenkung $u_0(x)$ in den negativen Bereich

Die Anfangsbedingung sei für die Verschiebung:

$$u(x, 0) = u_0(x) = f(x) = 2\delta = \begin{cases} \frac{x}{l} & \text{für } 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ 1 - \frac{x}{l} & \text{für } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

und für die Geschwindigkeit:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0 \equiv 0$$

Die Zeitableitung der allgemeinen Lösung ist:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \left[-A_n \sin\left(n\pi \frac{c}{l} t\right) + B_n \cos\left(n\pi \frac{c}{l} t\right) \right] n\pi \frac{c}{l}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) n\pi \frac{c}{l} B_n = v_0 \equiv 0$$

Somit ergibt sich für die Koeffizienten B_n

$$B_n = 0 \quad \text{für } \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Anpassung der allgemeinen Lösung an die Anfangsverschiebung u_0 :

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) A_n = u_0(x) = f(x)$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right)$ und Integration über die Stablänge ergibt:

$$\underbrace{\int_0^l f(x) \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) dx}_{\text{linkes Integral}} = \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \int_0^l A_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \cdot \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) dx}_{\text{rechtes Integral}}$$

linkes Integral = $J_{l,m}$

rechtes Integral = $J_{r,mn}$

Es gilt somit die Funktion $f(x)$ für die Anfangsverschiebung $u_0(x)$ in eine Sinusreihe zu entwickeln.

$$\frac{1}{2\delta} J_{l,m} := \int_0^{l/2} \frac{x}{l} \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) dx + \int_{l/2}^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) dx$$

$$\frac{1}{2\delta} J_{l,m} = \left[\frac{\sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right)}{l \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} - \frac{x \cos\left(m\pi \frac{x}{l}\right)}{l \frac{m\pi}{l}} \right]_0^{l/2} + \left[\frac{-\cos\left(m\pi \frac{x}{l}\right)}{\frac{m\pi}{l}} - \frac{\sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right)}{l \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} + \frac{x \cos\left(m\pi \frac{x}{l}\right)}{l \frac{m\pi}{l}} \right]_{l/2}^l$$

$$= \frac{\sin(m\pi/2)}{l \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} - \frac{\frac{l}{2} \cos(m\pi/2)}{l \frac{m\pi}{l}} - \frac{\cos(m\pi)}{\frac{m\pi}{l}} - 0 + \frac{l \cos(m\pi)}{l \frac{m\pi}{l}} + \frac{\cos(m\pi/2)}{\frac{m\pi}{l}} + \frac{\sin(m\pi/2)}{l \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} - \frac{\frac{l}{2} \cos(m\pi/2)}{l \frac{m\pi}{l}}$$

Das dritte und fünfte Reihenglied ergeben zusammen null. Ebenso heben sich die Reihenglieder zwei, sechs und acht gegenseitig auf.

$$\frac{1}{2\delta} J_{l,m} = 2l \frac{\sin(m\pi/2)}{(m\pi)^2} = \frac{2}{\pi^2} l \frac{\sin(m\pi/2)}{m^2} \quad \text{für } m = 1, 2, 3, \dots$$

Berechnung der ersten Reihenglieder bis $m = 11$:

$$\frac{1}{2\delta} J_{l,m} = \frac{2l}{\pi^2} \begin{matrix} m = 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & 7, & 8, & 9, & 10, & 11, & \dots \\ \left[\frac{1}{1^2}, & 0, & \frac{-1}{3^2}, & 0, & \frac{1}{5^2}, & 0, & \frac{-1}{7^2}, & 0, & \frac{-1}{9^2}, & 0, & \frac{-1}{11^2}, & \dots \right] \end{matrix}$$

Bildungsgesetz

$$J_{l,m} = \frac{2l}{\pi^2} \frac{(-1)^m}{(2m+1)^2} 2\delta \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Die Integrale mit geradem m ($= 2, 4, 6, \dots$) sind null.

Indexverschiebung:

$$J_{l,m} = 2\delta \frac{2l}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} \quad m = 1, 2, 3, \dots$$

Das rechte Integral lautet:

$$J_{r, nm} = \int_0^l \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) dx$$

Fall $m \neq n$: Integral 305 im Bronstein/Semendjajew-Formelsammlung:

$$\begin{aligned} J_{r, nm} &= \left[\frac{\sin\left[(m-n)\frac{\pi x}{l}\right]}{2(m-n)} - \frac{\sin\left[(m+n)\frac{\pi x}{l}\right]}{2(m+n)} \right]_0^l \\ &= \frac{\sin(m-n)\pi}{2(m-n)} - \frac{\sin(m+n)\pi}{2(m+n)} \\ &= \underline{\underline{0}} \quad \text{für alle } m \neq n \end{aligned}$$

Das Ergebnis war wegen der Orthogonalitätsrelation zu erwarten.

Fall $m = 2$: Integral 275 im Bronstein/Semendjajew-Formelsammlung

$$\begin{aligned} J_{r, nm} &= \int_0^l \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right)^2 dx \\ &= \left[\frac{1}{2}x - \frac{1}{4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \sin\left(2\frac{n\pi}{l}\right)x \right]_0^l \\ &= \frac{l}{2} - \frac{1}{4\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2} \sin 2n\pi \\ &= \underline{\underline{\frac{l}{2}}} \quad \text{für } n = m \end{aligned}$$

Damit lautet die Reihengleichung:

$$J_{l,m} = \sum_{n=1}^{\infty} A_n J_{r,nm} = A_n J_{r,nm}^{m=n}$$

$$J_{l,m} = \frac{2l}{\pi^2} \frac{(-1)^{m-1}}{(2m-1)^2} 2\delta = A_m \frac{l}{2}$$

Alle anderen Reihenglieder $J_{r,mn}$ verschwinden:

$$J_{r,nm} = 0 \quad \text{für } m \neq n$$

Ersetze m durch n : $\Leftrightarrow \underline{\underline{A_n = \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} 2\delta}} \quad \text{für } n = 1, 2, 3 \dots$

A_n sind die Koeffizienten der Sinusreihe der Anfangsverschiebung

$$u_0(x) = f(x) = \begin{cases} 2\delta \frac{x}{l} & \text{für } 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ 2\delta \left(1 - \frac{x}{l}\right) & \text{für } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

Einsetzen der Koeffizienten A_n und B_n in die allgemeine Lösung $u(x, t)$ der Wellengleichung:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} 2\delta \frac{4}{\pi^2} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \cos\left(n\pi \frac{c}{l} t\right)$$

ergibt die Lösung für obiges Beispiel mit der Anfangsauslenkung $u_0 = f(x)$ in Abb. (4,5-1).

Mit Hilfe der Additionstheoreme für das Produkt aus Sinus- und Cosinusfunktion

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} [\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)] \quad (\text{s. Bronstein, S. 157})$$

ergibt sich:

$$u(x, t) = \frac{4\delta}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \left[\sin\left(\frac{n\pi}{l}(x - ct)\right) + \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x + ct)\right) \right]$$

Die Lösung der Wellengleichung setzt sich aus der Summe einer vorläufigen $(ct - x)$ (nach rechts in positiver x-Richtung) und einer rückläufigen Welle $(ct + x)$ (nach links in negativer x-Richtung) zusammen.

Die Summen der unendlichen Reihe sei:

$$\frac{1}{2}f(x-ct) := \frac{4\delta}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x-ct)\right)$$

bzw.:

$$\frac{1}{2}f(x+ct) := \frac{4\delta}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \sin\left(\frac{n\pi}{l}(x+ct)\right)$$

Dann lautet die Lösung für obiges Beispiel:

$$u(x, t) = \frac{1}{2}f(x-ct) + \frac{1}{2}f(x+ct)$$

Fazit: Die Methode der FOURIER-Analyse mit Hilfe des Produktansatzes ergibt dieselbe Lösung wie die Methode nach D'ALEMBERT.

4.6 Klassifizierung linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

4.6.1 Beispiele für partielle Differentialgleichungen der Mechanik und Wärmeübertragung

An dieser Stelle soll kurz auf die verschiedenen Typen linearer, partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung eingegangen werden.

- 1) Falls Volumenkräfte: $n(x) = \rho k$ vorhanden sind, ergibt sich für die Differentialgleichung der Wellenausbreitung im Dehnstab:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho k} \quad c^2 := \frac{E}{\rho} \quad \text{mit } c = \text{Wellenausbreitungsgeschwindigkeit} \quad (4.5-1)$$

↑
Bewegungsgleichung ist Ergebnis der Impulsbilanzgleichung

- 2) Die Kräftebilanz der vorgespannten Membran (Vorspannkraft s_0) unter Querlast $q = \hat{q}(x, y)$ ergibt hier die Querverschiebung $w(x, y)$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{q}{s_0}} \quad (4.5-2)$$

Herleitung siehe Vorlesung „Methode der finiten Elemente“.

Beispiel: Vorgespannte Membran („Trampolin“)

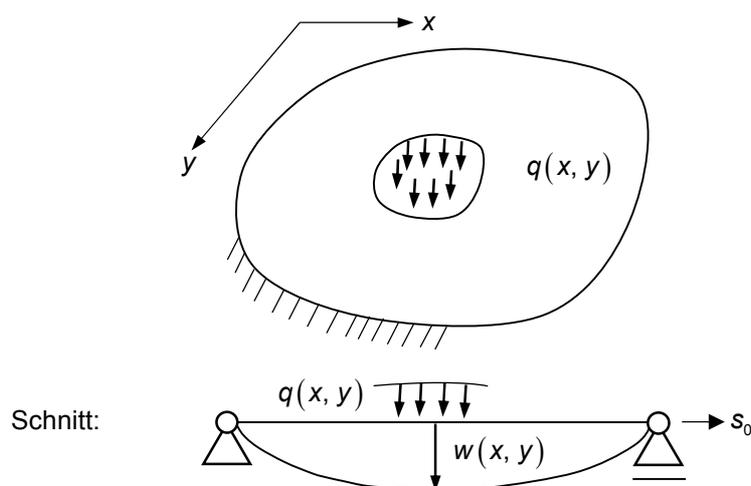


Abb. 4.5-1: Vorgespannte Membran unter Querlast

3) Die Theorie der Wärmeübertragung liefert für den Stab folgendes Ergebnis:

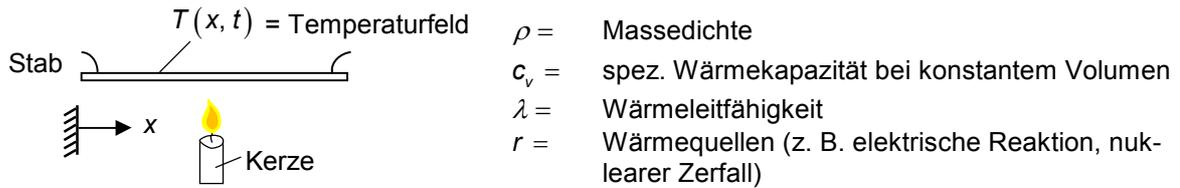


Abb. 4.5-2: Stab mit Wärmequellen

Anhand der Energiebilanz (Zeitableitung innere Energie = Wärmezufuhr):

$$\dot{E} = Q$$

folgt die Wärmeleitungsgleichung:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho r$$

↑
Wärmequellen

Definition: Temperaturleitfähigkeit

$$a_v := \frac{\lambda}{\rho c_v}$$

Die Wärmeleitungsgleichung des Stabs liefert das Temperaturfeld $T(x, t)$ in Abhängigkeit der Zeit t .

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - a_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{r}{c_v}} \quad (4.5-3)$$

4.6.2 Klassifizierung der partiellen Differentialgleichungen:

Alle drei Gleichungen (4.5-1) bis (4.5-3) sind partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die ganz unterschiedliche Prozesse oder Systeme beschreiben. Deren Lösungen verhalten sich vollkommen verschieden. Die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit der allgemeinen Form:

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -F \left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u \right)$$

Hauptteil

werden anhand der Diskriminante $D = b^2 - ac$ des Hauptteils wie folgt klassifiziert:

$$D = b^2 - ac \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ hyperbolisch} \\ = 0 \text{ parabolisch} \\ < 0 \text{ elliptisch} \end{array} \right.$$

Gleichung (4.5-1): Wellenausbreitung im Dehnstab: $D = 0 - (1) \left(-\frac{E}{\rho} \right) = \frac{E}{\rho} > 0 \Rightarrow$ hyperbolisch

Gleichung (4.5-2): POISSON-Gleichung für Membrane: $D = 0 - (1) \cdot (1) = -1 < 0 \Rightarrow$ elliptisch

Gleichung (4.5-3): Wärmeleitungsgleichung: $D = 0 - 0 \cdot (-a_v) = 0 \Rightarrow$ parabolisch

Der Term für die 2. Ableitung $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ fehlt in der Wärmeleitungsgleichung.

Elliptische Differentialgleichungen werden in der Regel mit finiten Elementen gelöst – siehe Vorlesung „Methoden der finiten Elemente“.

Die zeitliche Diskretisierung von parabolischen und hyperbolischen Differentialgleichungen erfolgt üblicherweise mit finiten Differenzen wie z. B. mit dem NEWMARK-Verfahren oder mit der zentralen Differenzenmethode.

4.7 Analytische Lösung der Wellengleichung im Dehnstab nach der Methode von BERNOULLI

Bewegungsgleichung des Dehnstabs $\rho \ddot{u} - E u'' = \rho k$ mit $u = \hat{u}(x)$

RB: $u(0, t) = u(l, t) = 0$ („Dirichlet“)

$$\ddot{u} - c^2 u = \rho k$$

AB: $u(x, 0) = u_0(x)$  beidseitig
unverschieblich

$c = \sqrt{E/\rho}$ Wellenausbreitungsgeschwindigkeit im Dehnstab

Lösungsmethode nach BERNOULLI: Trennung der Variablen mittels Produktansatz in eine Ortsfunktion $X(x)$ und eine Zeitfunktion $T(t)$

$$u(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} \ddot{u} &= X(x) \cdot \ddot{T}(t) \\ u'' &= X''(x) \cdot T(t) \end{aligned}$$

Einsetzen in homogene PDGL

$$X(x) \cdot \ddot{T}(t) - c^2 X''(x) \cdot T(t) = 0 \quad | : (X(x) \cdot T(t))$$

führt auf 2 gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung nach Trennung in Gleichungen für die Variablen

$$T(t) \text{ und } X(x): \quad \frac{\ddot{T}}{T} = c^2 \frac{X''}{X} = \text{konstant} = -w^2$$

Trennung in zwei gewöhnliche Differentialgleichungen für die Orts- und Zeitfunktion

$$\Rightarrow \quad \ddot{T}(t) + w^2 T(t) = 0 \quad X''(x) + \frac{w^2}{c^2} X(x) = 0$$

Die Gleichung (x) definiert eine Eigenwertgleichung

$$\text{Lösung: } T(t) = A \cos wt + B \sin wt \quad X''(x) = C \cos \frac{w}{c} x + D \sin \frac{w}{c} x$$

Zuerst Anpassung der Ortsfunktion $X(x)$ an die Rand-(Lager-)Bedingungen

Für DIRICHLET- Randbedingungen:

$$u(0, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(0) = 0 = C \cdot 1 + D \cdot 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{C = 0}$$

$$u(l, t) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad X(l) = 0 = 0 + D \sin \frac{w}{c} l$$

Die notwendige Bedingung für eine nicht triviale Lösung ist hier die Eigenwertgleichung

$$\Leftrightarrow \quad D = 0 \text{ triviale Lösung}$$

$$\sin \frac{w}{c} l = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{w}{c} l =$$

Die Nullstellen der Sinusfunktion

$$w_n = n\pi \frac{c}{l} \quad \pi = \text{periodisch}$$

Die Lösungen (es gibt unendlich viele) sind die Eigenwerte bzw. Eigenfrequenzen $n \rightarrow w_n = n\pi \frac{c}{l}$; $n = 1, 2, 3, \dots$ und die Eigenfunktionen (Eigenformen) $n \rightarrow X_n(x) = \sin \frac{w}{c} x = \sin \left(n\pi \frac{x}{l} \right)$

Hinweis: Die Eigenfunktion ist bis auf einen konstanten Vorfaktor D bestimmt.

Bemerkung: Die Lösung für die Ortsfunktion

$$X(x) = D \sin \frac{w}{c} l$$

ist die Eigenfunktion und führt zusammen mit ihrer zweiten Ableitung

$$X''(x) = -\left(\frac{w}{c}\right)^2 D \sin \frac{w}{c} l$$

auf eine Eigenwertaufgabe mit der Differentialgleichung:

$$X''(x) = \underbrace{-\left(\frac{w}{c}\right)^2}_{\lambda} X(x) \quad \text{siehe Gleichung (*)}$$

$\lambda = -\left(\frac{w}{c}\right)^2$ ist der Eigenwert

Die Differentialgleichungen zu jedem einzelnen Eigenwert w_n

$$\ddot{T}_n(t) + w_n^2 T_n(t) = 0$$

für die Zeitfunktion $T_n(t)$ liefern jeweils die Lösungsfunktion:

$$T_n(t) = A_n \cos w_{nt} + B_n \sin w_{nt}$$

Somit lautet die allgemeine Lösung der Wellengleichung für den beidseitig eingespannten Stab:

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n(x) \cdot T_n(t) \quad (\text{Superposition der Lösungsfunktionen})$$

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(n\pi \frac{x}{l} \right) \left[A_n \cos \left(n\pi \frac{c}{l} t \right) + B_n \sin \left(n\pi \frac{c}{l} t \right) \right]$$

Die allgemeine Lösung entsteht durch Überlagerung (Superposition) der Eigenschwingungen:

$$u_n(x, t) = \left[A_n \cos \left(n\pi \frac{c}{l} t \right) + B_n \sin \left(n\pi \frac{c}{l} t \right) \right] \sin \left(n\pi \frac{x}{l} \right)$$

Wegen der sinusförmigen Ortsfunktion $X(x)$ ist die Lösung $\frac{2l}{c}$ -periodisch. Für den beidseitig eingespannten Dehnstab muss deshalb die Anfangsbedingung als ungerade Funktion in negativer x-Richtung fortgesetzt werden.

Beispiel:

Bilinear verteilte Auslenkung mit Maximum δ in Feldmitte

Die Anfangsbedingung sei für die Verschiebung:

$$u(x, 0) = u_0(x) = f(x) = 2\delta \begin{cases} \frac{x}{l} & \text{für } 0 \leq x < \frac{l}{2} \\ 1 - \frac{x}{l} & \text{für } \frac{l}{2} \leq x \leq l \end{cases}$$

und für die Geschwindigkeit

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = V_0 \equiv 0$$

Die Zeitableitung der allgemeinen Lösung ist:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \left[-A_n \sin\left(n\pi \frac{c}{l} t\right) + B_n \cos\left(n\pi \frac{c}{l} t\right) \right] n\pi \frac{c}{l}$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) n\pi \frac{c}{l} B_n = V_0 \equiv 0$$

$$B_n = 0 \quad \text{für } \forall n = 1, 2, 3, \dots$$

Anpassung an der allgemeinen Lösung an die Anfangsverschiebung u_0

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) A_n = u_0(x) = f(x)$$

Multiplikation dieser Gleichung mit $\sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right)$ und Integration über die Stablänge ergibt:

$$\underbrace{\int_0^l f(x) \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) dx}_{\text{linkes Integral} = J_{l,m}} = \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\int_0^l A_n \sin\left(n\pi \frac{x}{l}\right) \cdot \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) dx}_{\text{rechts Integral} = J_{r,mn}}$$

Es gilt somit, die Funktion $f(x)$ für die Anfangsverschiebung $u_0(x)$ in eine Sinusreihe zu entwickeln.

$$\frac{1}{2\delta} J_{l,m} := \int_0^{\frac{l}{2}} \frac{x}{l} \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) dx + \int_{\frac{l}{2}}^l \left(1 - \frac{x}{l}\right) \sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right) dx$$

$$= \left[\frac{\sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right)}{l \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} - \frac{x \cos\left(m\pi \frac{x}{l}\right)}{l \frac{m\pi}{l}} \right]_0^{\frac{l}{2}} + \left[\frac{-\cos\left(m\pi \frac{x}{l}\right)}{\frac{m\pi}{l}} - \frac{\sin\left(m\pi \frac{x}{l}\right)}{l \left(\frac{m\pi}{l}\right)^2} + \frac{x \cos\left(m\pi \frac{x}{l}\right)}{l \frac{m\pi}{l}} \right]_{\frac{l}{2}}^l$$