

4 Verschiebungsmethode

Die Zusammenhänge zwischen den verschiedenen mechanischen Gleichungen und Variablen sollen anhand des TONTI-Diagramms visualisiert werden.

4.1 TONTI-Diagramm für das dreidimensionale Kontinuum

Aus der folgenden Anordnung der mechanischen Größen im TONTI-Diagramm ergeben sich deren Beziehungen zueinander.

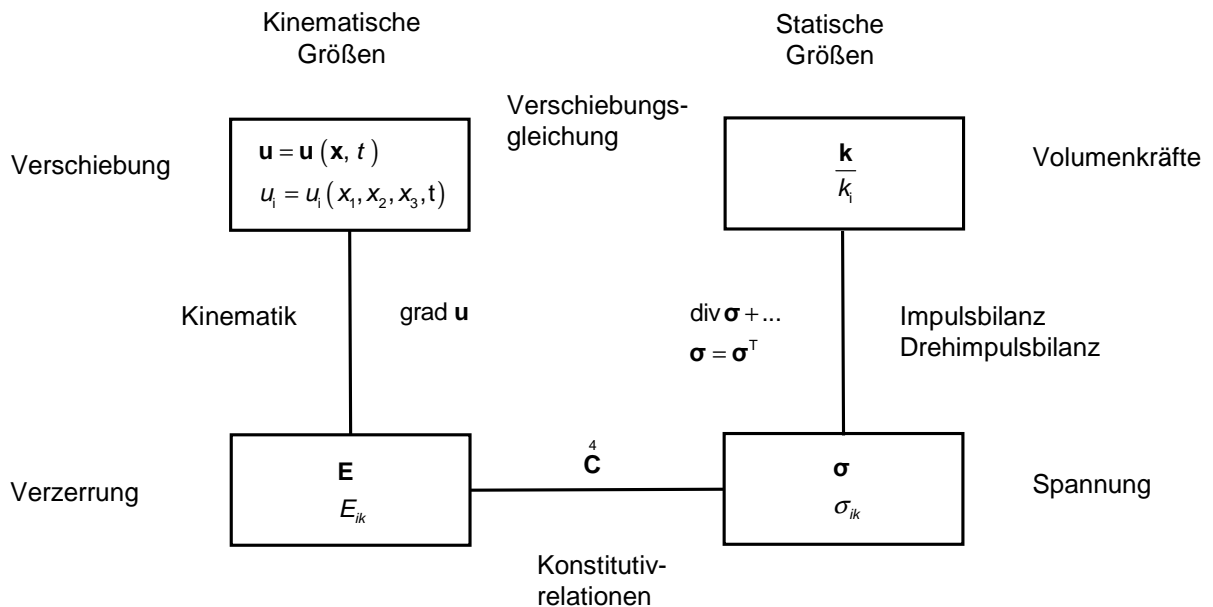


Abb. 4.1-1: TONTI-Diagramm für das dreidimensionale Kontinuum

Verschiebungs-/Bewegungsgleichung für den ein- (1-D) und dreidimensionalen (3-D) Fall:

	<u>1-D</u>	<u>3-D</u>
Impulsbilanz:	$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho k = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$	$\text{div } \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{k} = \rho \ddot{\mathbf{u}}$
Kinematik:	$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$	$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} [\text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T]$
Elastizitätsgl.:	$\sigma = E \varepsilon$	$\boldsymbol{\sigma} = 2G \left[\boldsymbol{\varepsilon} + \frac{\nu}{1-\nu} (\text{Sp } \boldsymbol{\varepsilon}) \mathbf{1} \right]$
Verschiebungs-/ Bewegungsgleichung:	$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho k$	Herleitung untenstehend

Nach Elimination von Spannung σ bzw. $\boldsymbol{\sigma}$ und Dehnung ε bzw. $\boldsymbol{\varepsilon}$ entsteht aus der Impulsbilanzgleichung die Verschiebungs- oder Bewegungsgleichung

4.2 Verschiebungsgleichungen von Navier-Cauchy-Lamé

Die Bewegungsgleichungen der dreidimensionalen Elastodynamik für kontinuierliche Körper können explizit als Verschiebungsgleichungen im Sonderfall der linearen Elastizitätstheorie mit kleinen Deformationen hergeleitet werden.

Verschiebungsfeld: $u_i = \hat{u}_i(x_1, x_2, x_3, t)$

i. Impulsbilanz: $\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} + \rho k_i$, Drehimpulsbilanz: $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$

ii. Kinematik: $\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right]$

iii. elastische Materialsteifigkeitsbeziehung $\sigma_{ik} = 2G \left[\varepsilon_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{ll} \delta_{ik} \right]$

Durch Elimination der Spannungen σ_{ik} und Dehnungen ε_{ik} zugunsten der Komponenten des Verschiebungsfeldes $u_i = \hat{u}_i(x_1, x_2, x_3, t)$ folgt aus der

Elastizitätsgleichung: $\sigma_{ik} = 2G \left[\frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + \frac{\nu}{1-2\nu} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right]$

Spannungsdivergenz: $\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = G \left[\frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_k}{\partial x_i} + \frac{2\nu}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\partial u_l}{\partial x_l} \delta_{ik} \right]$

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_l}{\partial x_l}}_{\left(1 + \frac{2\nu}{1-2\nu}\right) \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_i \partial x_k}}$$

$$\frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = G \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right]$$

In symbolischer Notation gilt:

$$\operatorname{div} \boldsymbol{\sigma} = \frac{\partial \sigma_{ik}}{\partial x_k} = G \left[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \operatorname{grad}(\operatorname{div} \mathbf{u}) \right],$$

wobei sich der LAPLACE-Operator Δ vor dem Verschiebungsfeld \mathbf{u} formal aus dem Skalarprodukt des NABLA-Operators ∇ mit sich selbst ergibt.

$$\Delta \mathbf{u} := \nabla \cdot \nabla \mathbf{u} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$$

Hinweis: Die Divergenz div des Gradienten grad des Verschiebungsfeldes $\operatorname{div}(\operatorname{grad} \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u})$ führt dann zum LAPLACE-Operator Δ .

In ausführlicher Komponentenschreibweise lautet der LAPLACE-Operator Δ wie folgt:

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}$$

Die Verschiebungsgleichungen nach NAVIER-CAUCHY-LAMÉ oder die Bewegungsgleichung ergibt sich dann in Indexnotation zu:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} = G \left[\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right] + \rho k_i$$

beziehungsweise in symbolischer Notation:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} = G \left[\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1-2\nu} \text{grad} (\text{div} \mathbf{u}) \right] + \rho \mathbf{k}$$

Die Verschiebungsgleichungen sind drei lineare, partielle Differentialgleichungen für die drei Komponenten $u_i = \hat{u}_i(x_1, x_2, x_3, t)$ mit $i = 1, 2, 3$ des Verschiebungsfelds.

Ausgeschrieben lauten sie:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 u_1}{\partial t^2} &= G \left[\frac{\partial^2 u_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \rho k_1 \\ \rho \frac{\partial^2 u_2}{\partial t^2} &= G \left[\frac{\partial^2 u_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \rho k_2 \\ \rho \frac{\partial^2 u_3}{\partial t^2} &= G \left[\frac{\partial^2 u_3}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u_3}{\partial x_3^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial u_2}{\partial x_2} + \frac{\partial u_3}{\partial x_3} \right) \right] + \rho k_3 \end{aligned}$$

Verschiebungsgleichung für den Dehnstab (1-D Fall):

Eindimensionaler Fall: $\mathbf{u} = \{u_1(x_1, t)\} = \{u(x, t)\}$

Impulsbilanz: $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x} + \rho k$

Kinematik: $\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}$

Elastizitätsgleichung: $\sigma = E\varepsilon$

Verschiebungsgleichung: $\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = E \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \rho k$

$$\rho \ddot{u} = E u'' + \rho k$$

Dieses System von drei partiellen Differentialgleichungen für das allgemeine elastische Kontinuum muss durch Anfangs- und Randbedingungen ergänzt werden, damit eine eindeutige Lösung vorliegt.

Anfangsbedingungen:

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ Anfangsort bzw. Ausgangslage $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$

$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ Anfangsgeschwindigkeit $\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$ in der Ausgangslage

Randbedingungen:

Auf dem Rand (der Oberfläche) des Körpers wird entweder der (eingeprägte) Verschiebungsvektor $\mathbf{u}_e(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in A_u}$ oder die Last (eingepprägter Spannungsvektor) $\mathbf{t}_a(\mathbf{x}, t)|_{\mathbf{x} \in A_\sigma}$ vorgegeben.

$$A = A_\sigma \cup A_u$$

$$A_\sigma \cap A_u = \emptyset$$

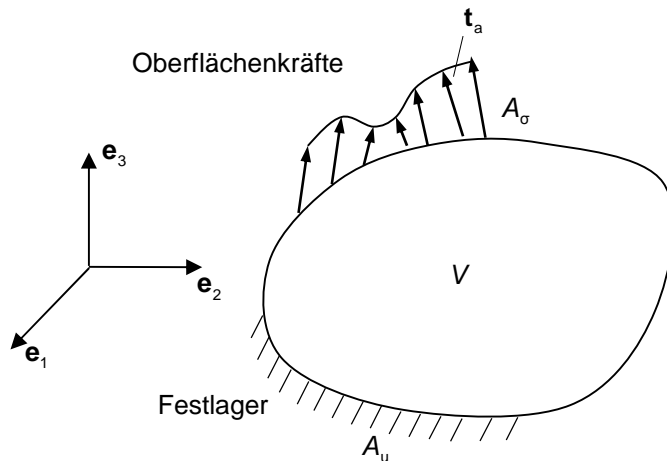


Abb. 4.2-1: Kräfte- und Verschiebungsrand des Körpers

A_σ : Kräfterand mit eingepprägter Oberflächenkraft

$$\mathbf{t}_a|_{A_\sigma} = t_{ai} \mathbf{e}_i$$

(Randkräfte sind vorgeschrieben)

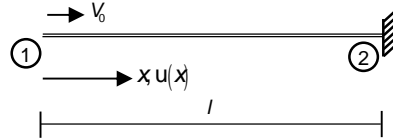
A_u : Verschiebungsrand mit vorgeschriebenem Verschiebungsvektor

$$\mathbf{u}_e|_{A_u} = u_{ei} \mathbf{e}_i$$

(Randverschiebungen sind vorgeschrieben)

4.3 Qualitative Lösung der eindimensionalen Wellengleichung

Am Beispiel der Stoßwelle im Dehnstab soll die Lösung der obenstehenden Wellengleichung diskutiert werden. Dazu wird eine Welle über die Geschwindigkeitsrandbedingung $v(x=0, t=0) = v_0$ am freien Ende in den Dehnstab eingeleitet, der am rechten Ende unverschieblich gelagert ist.



Angaben: $E = \text{Modul}$
 $l = \text{Stablänge}$
 $\rho = \text{Massendichte}$

Abb. 4.3-1: Dehnstab mit Randbedingungen (Lagerung und Anfangsgeschwindigkeit)

Stab am Anfang ohne Verschiebung und in Ruhe

$$\left. \begin{aligned} u(x, 0) &= 0 \\ \dot{u}(x, 0) &= 0 \end{aligned} \right\} \text{Anfangsbedingungen}$$

Randbedingungen:

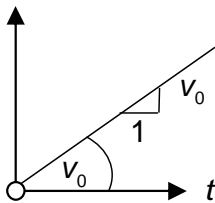
am Knoten $u_1(t) = u(0, t) = v_0 \cdot t$

am Knoten $u_2(t) = u(l, t) = 0$

Verschiebung mit gleichförmiger Geschwindigkeit am Stabanfang bei $x=0$

Festhalterung am Stabende bei $x=l$

$$u_1(t) = u(0, t)$$



Die Randbedingung am Knoten ① ist inhomogen, d. h. $\neq 0$. Daher sind zusätzliche Überlegungen zur Lösung der DGL durch Separationsansatz notwendig.

Abb. 4.3-2: Verlauf der Verschiebung am Stabanfang über der Zeit t

Deshalb ist die Lösung (ohne Herleitung) aus dem Ansatz nach d'ALEMBERT einfacher. Der Verschiebungsverlauf im Dehnstab ist in der Abbildung 4.3-3 zu drei verschiedenen Zeitpunkten für eine Longitudinalwelle als Kurvenschar grafisch dargestellt. Zu beachten ist, dass sich die Welle mit der Geschwindigkeit c ausbreitet, das Dehnstabende sich aber nur mit der Geschwindigkeit v_0 nach rechts bewegt.

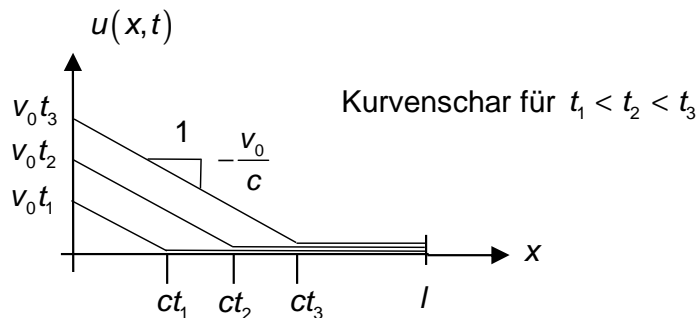


Abb. 4.3-3: Verschiebungsverlauf im Dehnstab zu drei festen Zeitpunkten $t_1 < t_2 < t_3$

In der folgenden Abbildung ist die Verschiebung $u(x, t)$ über der Orts-Zeitebene dargestellt. Dazu wird die charakteristische Kurve $x = ct$ in die Zeichnung eingetragen, die die Ausbreitung der Wellenfront kennzeichnet.

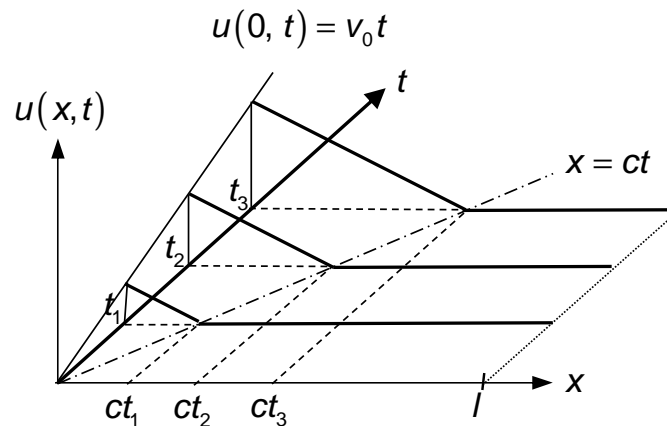


Abb. 4.3-4: Verschiebungsverlauf über der x -Koordinate und der Zeitachse t

Die Funktionsgleichung für den Verschiebungsverlauf lautet mit der Fallunterscheidung für die beiden Fälle:

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{v_0}{c}(ct - x) & \text{für } x \leq ct \\ 0 & \text{für } x > ct \end{cases}$$

Die Dehnung ergibt sich als Ortsableitung aus der Verschiebung.

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = \begin{cases} -\frac{v_0}{c} & \text{für } x \leq ct \\ 0 & \text{für } x > ct \end{cases}$$

Die Spannung geht aus dem Elastizitätsmodell hervor.

$$\sigma = E\varepsilon = \begin{cases} -E\frac{v_0}{c} & \text{für } x \leq ct \\ 0 & \text{für } x > ct \end{cases}$$

Die Verschiebungsdarstellung kann mit Hilfe der FÖPPL-Klammer wie folgt in Kurzschreibweise geschrieben werden:

$$u(x, t) = \frac{v_0}{c} \langle ct - x \rangle \quad (\text{FÖPPL-Klammer}) \quad \langle ct - x \rangle := \begin{cases} ct - x & \text{für } ct - x \geq 0 \\ 0 & \text{für } ct - x < 0 \end{cases}$$

Die Ableitung der FÖPPL-Klammer $\langle x \rangle = \langle x \rangle^1$ führt auf die HEAVISIDE-Funktion $H(x)$.

$$\frac{\partial}{\partial x} \langle x \rangle = H(x) = \langle x \rangle^0$$

Zur Darstellung des Dehnungsverlaufs wird von der HEAVISIDE-Funktion Gebrauch gemacht.

$$\varepsilon(x, t) = -\frac{v_0}{c} H(ct - x) = \begin{cases} -\frac{v_0}{c} & \text{für } x \leq ct \\ 0 & \text{für } x > ct \end{cases}$$

Die Veranschaulichung des Dehnungsverlaufs $\varepsilon(x, t)$ erfolgt als Kurvenschar mit dem Parameter Zeit $t = t_1 < t_2 < t_3$.

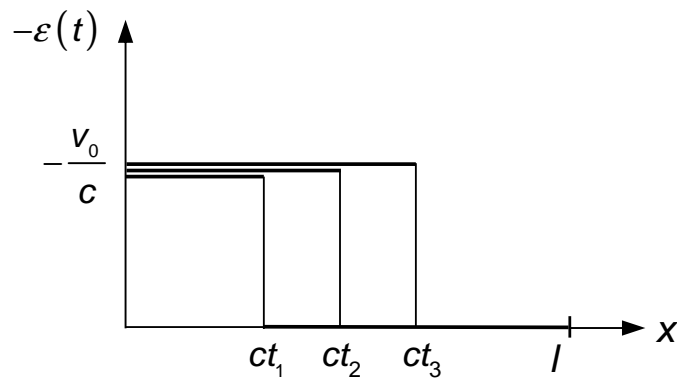


Abb. 4.3-5: Dehnungsverlauf im Dehnstab zu drei festen Zeitpunkten $t_1 < t_2 < t_3$

Daraus ergeben sich die unten dargestellten Verläufe der Spannung über der $x-t$ -Ebene zu den genannten drei Zeitpunkten.

$$\sigma(x, t) = E\varepsilon(x, t) = -E \frac{V_0}{c} H(ct - x) = \begin{cases} -E \frac{V_0}{c} & \text{für } x \leq ct \\ 0 & \text{für } x > ct \end{cases}$$

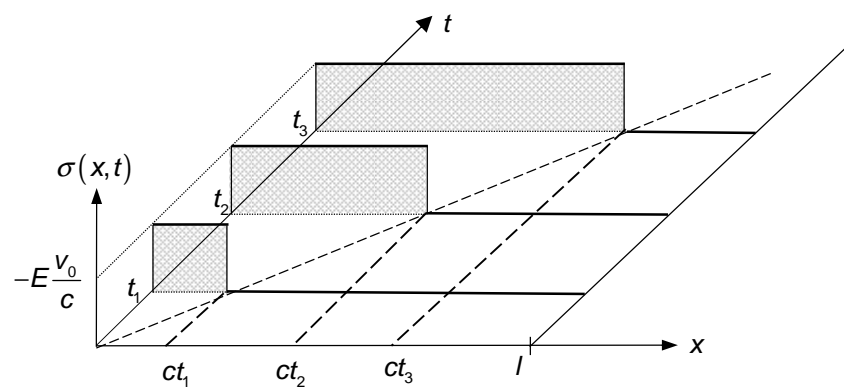


Abb. 4.3-6: Spannungsverlauf im Dehnstab zu drei festen Zeitpunkten $t_1 < t_2 < t_3$ über der $x-t$ -Ebene

Fazit:

Die Abbildungen zeigen die Ausbreitung der Welle im Dehnstab über der Zeit t .

4.4 Analytische Lösung der Wellengleichung nach der Methode von d'ALEMBERT

Die eindimensionale, homogene Wellengleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0, \quad (4.4-1)$$

wobei $c^2 = \frac{E}{\rho}$ die Wellenausbreitungsgeschwindigkeit ist, soll nach der Methode von d'ALEMBERT durch Koordinatentransformation gemäß

$$\xi = x - ct \quad (4.4-2 \text{ a})$$

und

$$\eta = x + ct \quad (4.4-2 \text{ b})$$

gelöst werden, um einen Überblick über die Lösungen zu verschaffen.

$$\begin{aligned} \Rightarrow \quad u(x, t) &= \bar{u}(\xi, \eta) \\ u(x, t) &= \bar{u}(\xi(x, t), \eta(x, t)) \end{aligned}$$

Ableitung nach der Kettenregel:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x} \quad (4.4-3)$$

$$\begin{array}{ll} \text{Aus:} & \xi = x - ct & \text{folgt:} & \frac{\partial \xi}{\partial x} = 1; & \frac{\partial \xi}{\partial t} = -c \\ & \eta = x + ct & \text{folgt:} & \frac{\partial \eta}{\partial x} = 1; & \frac{\partial \eta}{\partial t} = +c \end{array}$$

Einsetzen in (4.4-3) ergibt:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \quad (4.4-4)$$

Die zweite Ableitung erfolgt mit Hilfe von Gl. (4.4-4):

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta \partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=1}$$

Einsetzen der partiellen Ableitung für ξ und η nach der Ortskoordinate x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \quad (4.4-5 \text{ a})$$

Ableitung von Gl. (4.4-4) nach der Zeit t ergibt:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t}$$

$\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-c}$ $\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{=+c}$

Einsetzen der partiellen Ableitung für ξ und η nach der Zeit t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c \left[-\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} + \frac{\partial \bar{u}}{\partial \eta} \right]$$

Die zweite Ableitung nach der Zeit t erfolgt mit Hilfe der vorigen Beziehung:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c \left[-\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial t} - \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta \partial \xi} \frac{\partial \eta}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial t} \right]$$

$\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial t}}_{=-c}$ $\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial \xi}}_{=+c}$ $\underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial \eta}}_{=-c}$ $\underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial t}}_{=+c}$

Einsetzen der partiellen Ableitung für ξ und η nach der Zeit t :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right] \quad (4.4-5 \text{ b})$$

Gleichung (4.4-5 a) und (4.4-6 b) in die Wellengleichung (4.4-1) einsetzen:

$$0 = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} - \frac{1}{c^2} c^2 \left[\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi^2} - 2 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \eta^2} \right]$$

ergibt die gemischte Ableitung der Verschiebung \bar{u} nach ξ und η

$$\Leftrightarrow 4 \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Die Normalform obiger Wellengleichung lautet:

$$\frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

Sie ist eine partielle Differentialgleichung zweiter Ordnung und geht aus der Koordinatentransformation gemäß Gleichung (4.4-2 a) und (4.4-2 b) hervor. Sie kann durch zwei Integrations Schritte gelöst werden.

$$\frac{\partial \bar{u}}{\partial \xi} = \int \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial \xi \partial \eta} d\eta = \tilde{r}(\xi)$$

↑
Integrations- „Konstante“ ist freie Funktion von ξ

$$\bar{u} = \int \tilde{r}(\xi) d\xi + s(\eta)$$

↑
Integrations- „Konstante“ ist eine freie Funktion von η

$$\bar{u}(\xi, \eta) = r(\xi) + s(\eta)$$

Die Umrechnung in die Ausgangsvariablen x und t gemäß Gleichung (4.4-2 a) und (4.4-2 b) liefert die allgemeine Lösung

$$u(x, t) = r(x - ct) + s(x + ct)$$

(4.4-6)

der Wellengleichung. Sie erlaubt folgende Deutung:

Die allgemeine Lösung stellt die Überlagerung einer rück- und vorläufigen Welle dar. $r(x - ct)$ breitet sich mit der Geschwindigkeit c in positiver x -Richtung aus, während $s(x + ct)$ in negativer x -Richtung fortschreitet.

Die Form der Welle bleibt jeweils erhalten! Zur Zeit $t_1 > 0$ ergeben sich die folgenden Verschiebungen entlang der x -Achse der beiden Funktionen r und s in Abbildung (4.4-1).

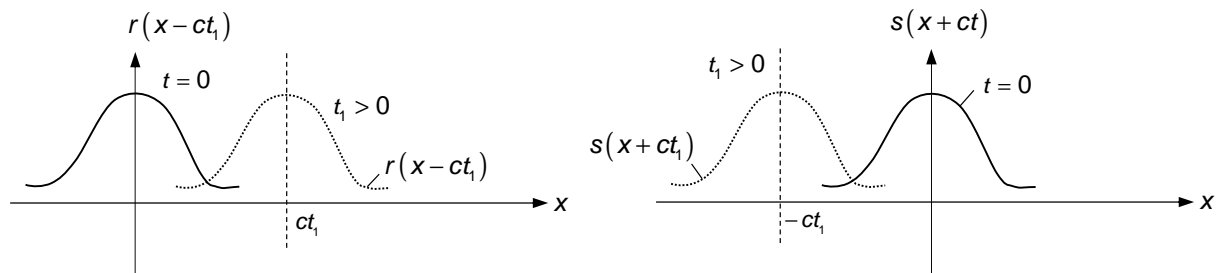


Abb. 4.4-1: Vor- und rückläufige Welle

Die Wellengleichung (4.4-6) muss an die Anfangs- und Randbedingungen angepasst werden.

Anfangsbedingungen zur Zeit $t = 0$:

$$u(x, 0) = u_0(x) = f(x) \quad \text{Anfangsauslenkung}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = v_0(x) = 0 \quad \text{Anfangsgeschwindigkeit}$$

Mit Hilfe der allgemeinen Lösung lautet die Auslenkung u zur Zeit $t = 0$.

$$u(x, 0) = r(x) + s(x) = f(x) \quad (4.4-7)$$

und die Anfangsgeschwindigkeit:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = \frac{dr}{d(x-ct)} \underbrace{\frac{\partial(x-ct)}{\partial t}}_{=-c} \Big|_{t=0} + \frac{ds}{d(x+ct)} \underbrace{\frac{\partial(x+ct)}{\partial t}}_{=+c} \Big|_{t=0} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad = \frac{dr}{dx}(-c) + \frac{ds}{dx}c = 0 \quad (4.4-8)$$

Durch Ableitung nach der Ortskoordinate x folgt

$$\text{aus Gl. (4.4-7):} \quad \left. \frac{dr}{dx}(x) + \frac{ds}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x) \right\} \quad (4.4-9)$$

$$\text{Aus Gl. (4.4-8):} \quad \left. -\frac{dr}{dx}(x) + \frac{ds}{dx}(x) = 0 \right\} \quad (4.4-10)$$

$$\text{Gleichung (4.4-9) - Gleichung (4.4-10):} \quad 2 \frac{dr}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x)$$

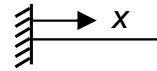
Gleichung (4.4-9) + Gleichung (4.4-10): $2 \frac{ds}{dx}(x) = \frac{df}{dx}(x)$

Integrieren: $r(x) - r(0) = \frac{1}{2}(f(x) - f(0))$ (4.4-11)

$$s(x) - s(0) = \frac{1}{2}(f(x) - f(0)) \quad (4.4-12)$$

Die Rand-/Lagerbedingung $u(0, 0) = f(0)$ ergibt

$$u(0, 0) = r(0) + s(0) = f(0)$$



$$u(0, t) = 0$$

Addition von Gleichung (4.4-11) und (4.4-12):

$$u(x, t) = r(x, t) + s(x, t) \underbrace{-r(0) - s(0)}_{=-f(0)} = \frac{1}{2} f(x - ct) + \frac{1}{2} f(x + ct) - f(0)$$

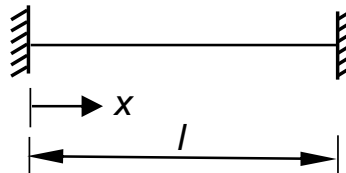
Die Lösung für die Anfangsrandwertaufgabe lautet dann:

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x - ct) + f(x + ct)]$$

(4.4-13)

Mit der voranschreitender Zeit t durchlaufen die Argumente $(x - ct)$ und $(x + ct)$ alle Werte auf dem Zahlenstrahl des offenen Intervalls $(-\infty, +\infty)$. Die Auslenkung $u(x, t)$ ist bislang nur auf dem Intervall $[0, l]$ erklärt und wird im Folgenden an die Randbedingungen angepasst.

Beispiel: Beidseitig eingespannter Dehnstab



Randbedingungen: $u(0, t) = 0$ $u(l, t) = 0$

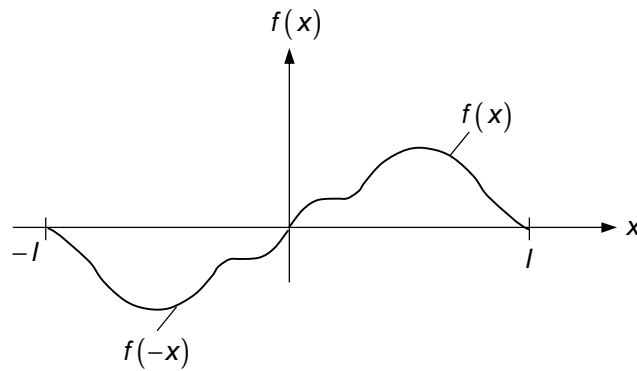
Abb. 4.4-2: Beidseitig gelagerter Dehnstab

Aus der Lösung und Gleichung (4.4-13) folgt für das linke Stabende $x = 0$:

$$u(0, t) = \frac{1}{2} f(-ct) + f(+ct) \stackrel{!}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow f(-ct) = -f(ct)$$

Obige Bedingung verlangt für alle $t \geq 0$, dass $f(x)$ als ungerade Funktion $-f(-x)$ in der linken Koordinatenhalbebene fortgesetzt wird.

Abb. 4.4-3: Ungerade Fortsetzung der Funktion $-f(-x)$

Am rechten Stabende $x = l$ gilt mit der Lösung aus Gleichung (4.4-13):

$$u(l, t) = \frac{1}{2} f(l+ct) + f(l-ct) \stackrel{!}{=} 0$$

Wird die Lösung periodisch in der Zeit mit $\frac{2l}{c}$ fortgesetzt, so ergibt sich:

$$u\left(x, t + \frac{2l}{c}\right) = u(x, t)$$

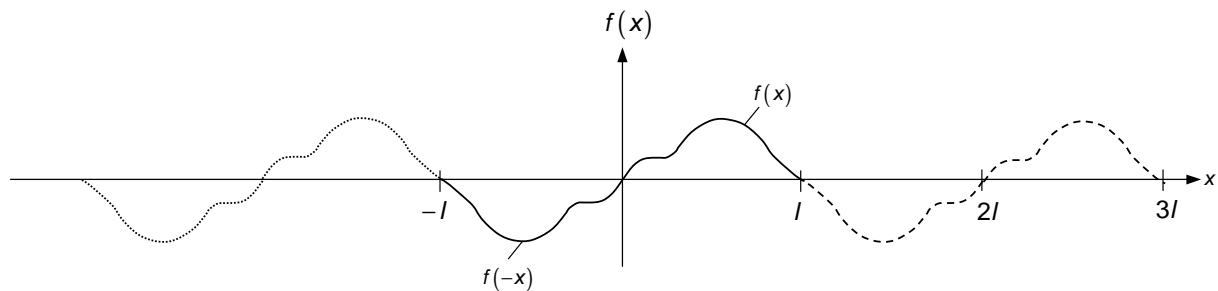


Abb. 4.4-4: Periodische Fortsetzung

Am rechten Rand: $x = l$ gilt mit der Lösung aus Gleichung (4.4-13):

$$u\left(l, t + 2\frac{l}{c}\right) = \frac{1}{2} f\left(l - c\left(t + 2\frac{l}{c}\right)\right) + \frac{1}{2} f\left(l + c\left(t + 2\frac{l}{c}\right)\right) \stackrel{!}{=} 0$$

$$= \frac{1}{2} f(-l-ct) + \frac{1}{2} \underbrace{f(l+ct+2l)}_{=f(l+ct)} \stackrel{!}{=} 0$$

wegen $2\frac{l}{c}$ Periodizität

$$\Leftrightarrow f(-l-ct) = -f(l+ct)$$

Es zeigt sich, dass die Anfangsauslenkung $f(x)$ ungerade und $\frac{2l}{c}$ -periodisch über die x -Achse von $-\infty$ bis $+\infty$ fortgesetzt werden muss, damit die Randbedingungen des beidseitig eingespannten Dehnstabs erfüllt werden.

4.5 Klassifizierung linearer partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung

4.5.1 Beispiele für partielle Differentialgleichungen der Mechanik und Wärmeübertragung

An dieser Stelle soll kurz auf die verschiedenen Typen linearer, partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung eingegangen werden.

- 1) Falls Volumenkräfte: $n(x) = \rho k$ vorhanden sind, ergibt sich für die Differentialgleichung der Wellenausbreitung im Dehnstab:

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{E}{\rho} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \rho k} \quad c^2 := \frac{E}{\rho} \quad \text{mit } c = \text{Wellenausbreitungsgeschwindigkeit} \quad (4.5-1)$$

↑
Bewegungsgleichung ist Ergebnis der Impulsbilanzgleichung

- 2) Die Kräftebilanz der vorgespannten Membran (Vorspannkraft s_0) unter Querlast $q = \hat{q}(x, y)$ ergibt hier die Querverschiebung $w(x, y)$:

$$\boxed{\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{q}{s_0}} \quad (4.5-2)$$

Herleitung siehe Vorlesung „Methode der finiten Elemente“.

Beispiel: Vorgespannte Membran („Trampolin“)

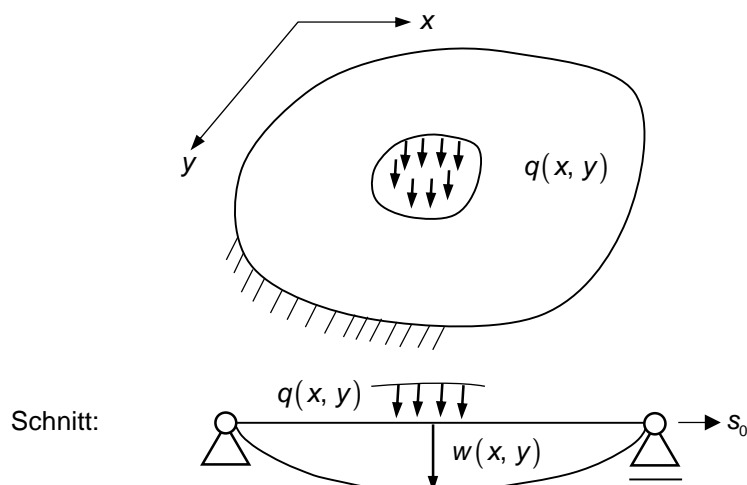


Abb. 4.5-1: Vorgespannte Membran unter Querlast

3) Die Theorie der Wärmeübertragung liefert für den Stab folgendes Ergebnis:

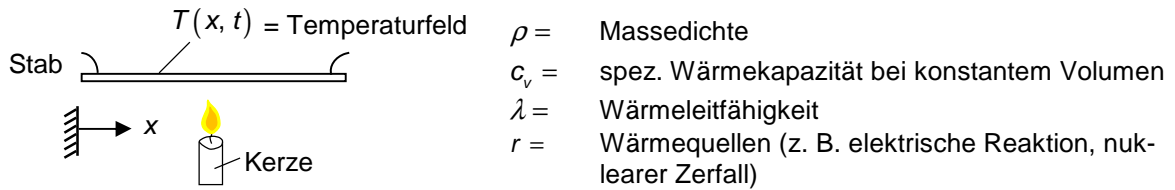


Abb. 4.5-2: Stab mit Wärmequellen

Anhand der Energiebilanz (Zeitableitung innere Energie = Wärmezufuhr):

$$\dot{E} = Q$$

folgt die Wärmeleitungsgleichung:

$$\rho c_v \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \rho r$$

↑
Wärmequellen

Definition: Temperaturleitfähigkeit

$$a_v := \frac{\lambda}{\rho c_v}$$

Die Wärmeleitungsgleichung des Stabs liefert das Temperaturfeld $T(x, t)$ in Abhängigkeit der Zeit t .

$$\boxed{\frac{\partial T}{\partial t} - a_v \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{r}{c_v}} \quad (4.5-3)$$

4.5.2 Klassifizierung der partiellen Differentialgleichungen:

Alle drei Gleichungen (4.5-1) bis (4.5-3) sind partielle Differentialgleichungen zweiter Ordnung, die ganz unterschiedliche Prozesse oder Systeme beschreiben. Deren Lösungen verhalten sich vollkommen verschieden. Die partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit der allgemeinen Form:

$$\underbrace{a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}}_{\text{Hauptteil}} = -F\left(x, y, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, u\right)$$

werden anhand der Diskriminante $D = b^2 - ac$ des Hauptteils wie folgt klassifiziert:

$$D = b^2 - ac \quad \left\{ \begin{array}{l} > 0 \text{ hyperbolisch} \\ = 0 \text{ parabolisch} \\ < 0 \text{ elliptisch} \end{array} \right.$$

Gleichung (4.5-1): Wellenausbreitung im Dehnstab: $D = 0 - (1) \left(-\frac{E}{\rho} \right) = \frac{E}{\rho} > 0 \Rightarrow$ hyperbolisch

Gleichung (4.5-2): POISSON-Gleichung für Membrane: $D = 0 - (1) \cdot (1) = -1 < 0 \Rightarrow$ elliptisch

Gleichung (4.5-3): Wärmeleitungsgleichung: $D = 0 - 0 \cdot (-a_v) = 0 \Rightarrow$ parabolisch

Der Term für die 2. Ableitung $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2}$ fehlt in der Wärmeleitungsgleichung.

Elliptische Differentialgleichungen werden in der Regel mit finiten Elementen gelöst – siehe Vorlesung „Methoden der finiten Elemente“.

Die zeitliche Diskretisierung von parabolischen und hyperbolischen Differentialgleichungen erfolgt üblicherweise mit finiten Differenzen wie z. B. mit dem NEWMARK-Verfahren oder mit der zentralen Differenzenmethode.