Lehrveranstaltung: Computational Mechanics
Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller
Sekretariat: Raum Nr. 2519, Mönchebergstr. 7
Abgabetermin:

Nachname:.................................... Matrikelnummer:..................................

Vorname:.......................................

Hausübung 5

Aufgabe 1: Indexschreibweise

Beweisen Sie, dass folgende Rechenregel gilt:

$$A_{\mathrm{ik}}\delta_{\mathrm{ij}} = A_{\mathrm{jk}}$$

Aufgabe 2: Wellengleichung

Leiten Sie die 1-dimensionale Wellengleichung $\ddot{u} - \frac{E}{\rho}u'' = k$ als Sonderfall aus den NAVIER-CAUCHY-LAMÉschen Bewegungsgleichungen der Elastodynamik für kontinuierliche, dreidimensionale elastische Körper her.

Stellen Sie die 1-d-Wellengleichung mit Hilfe der Impulsbilanz am Dehnstabelement der Länge Δx und der Grenzwertbildung $\Delta x \to 0$ auf.

Aufgabe 3: BERNOULLI-Lösung der Wellenausbreitungsgleichung für den Dehnstab

Gegeben sei die Anfangsrandwertaufgabe für die Längsverschiebung $u(x,t)$ eines Dehnstabs der Länge l und der Wellenausbreitungsgeschwindigkeit c:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial t^2}{\partial x^2}$$

Anfangsbedingung:

$$u(x,0) = \frac{u_0}{l}x$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$$

Randbedingungen:

$$u(0,t) = 0 \qquad \text{(Einspannung)}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0 \qquad \text{(freies Ende)}$$

a) Berechnen Sie die Lösung $u(x,t)$ mit Hilfe des Produktansatzes nach BERNOULLI und leiten Sie daraus die Spannung $\sigma(x,t)$ her.

b) Zeichnen Sie den Verschiebungsverlauf $u(x,t)$ und den Spannungsverlauf $\sigma(x,t)$ für eine, drei und fünf harmonische Reihenterme an ausgewählten Zeitpunkten $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq \frac{l}{c}$.

Aufgabe 4: D'ALEMBERTsche Lösung für die Gleichung der Wellenausbreitung im Dehnstab

Für den Sonderfall $\mathbf{u}(\mathbf{x},t) = u(x,t)\mathbf{e}_1$ und $\mathbf{k} = \mathbf{0}$ lautet die einzige Komponente der Verschiebungsgleichungen

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \qquad \text{mit} \qquad c^2 = \frac{2G(1-\nu)}{\rho(1-2\nu)} \qquad (*)$$

Für die Longitudinalverschiebung eines Zugstabs würde man $c^2 = \dfrac{E}{\rho}$ mit $E = 2G(1+\nu)$ erhalten.

a) Zeigen Sie, dass $u(x,t) = f(x-ct)$ eine Lösung von (*) ist und interpretieren Sie diese Lösung für die beiden Fälle.

b) Lösen Sie die Bewegungsgleichungen für einen beidseitig freien Stab der Länge l mit den Anfangs-(AB) und den Randbedingungen (RB):

AB: $u(x,0) = \dfrac{2u_0}{l}x; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0; \quad -\dfrac{l}{2} \leq x \leq \dfrac{l}{2}$

RB: $\dfrac{\partial u}{\partial t}(-\dfrac{l}{2},t) = 0; \quad \dfrac{\partial u}{\partial t}(\dfrac{l}{2},t) = 0 \qquad$ (freie Enden)