

7 Viskoelastizitätstheorie

In vielen Bauteilen – insbesondere in jenen aus Polymeren – unter dem Einfluss von Kräften und Momenten vergrößern sich die Verformungen mit der Zeit, selbst wenn die Belastungen unverändert beibehalten werden. Dieses zeitliche Phänomen ist eine Folge der viskosen Eigenschaften der Werkstoffe, die den elastischen Eigenschaften überlagert sind.

7.1 Rheologische Modelle

Netzwerke aus masselosen Federn (Elastizität) und Dämpfern (Viskosität) werden in der Modellrheologie untersucht (Rheologie = Fließlehre), um viskoelastische Materialgleichungen herzuleiten und nicht, um das Fließphänomen aus dem Aufbau der Materie zu erklären.

Für die Modellbildung der Festkörper ist das 3-Parametermodell das Paradigma eines rheologischen Elements

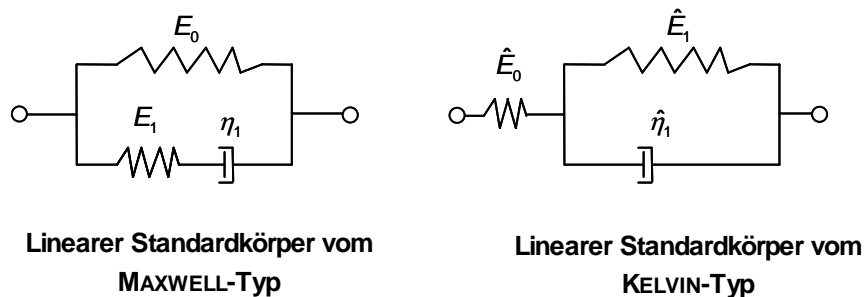


Abb. 7.1-1: Mögliche Netzwerke zur Darstellung des linearen Standard-Festkörpers

Beide Modelle sind zueinander äquivalent und die Materialparameter für die Elastizität und Viskosität können ineinander umgerechnet werden.

Der 3-Parameter-Festkörper vom MAXWELL-Typ wird zunächst näher untersucht, da er sich zum N-stufigen MAXWELL-Modell einfach verallgemeinern lässt und den FE-Programmen fast ausschließlich zur quasistatischen Berechnung zugrunde liegt.

Linearer Nonstandardkörper¹

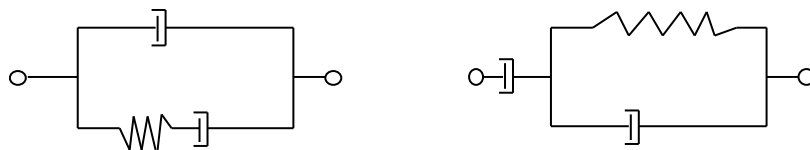


Abb. 7.1-2: Lineares Nonstandard-Fluid

¹ Siehe E. Tschögl

7.2 Materialgleichung des Standardfestkörpers vom MAXWELL-Typ

Kinematische Annahmen für die Dehnung

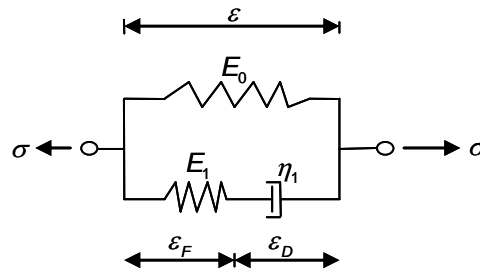


Abb. 7.1-3: Zerlegung der Dehnung des Standard-Festkörpers

Freischneiden und statische Gleichungen

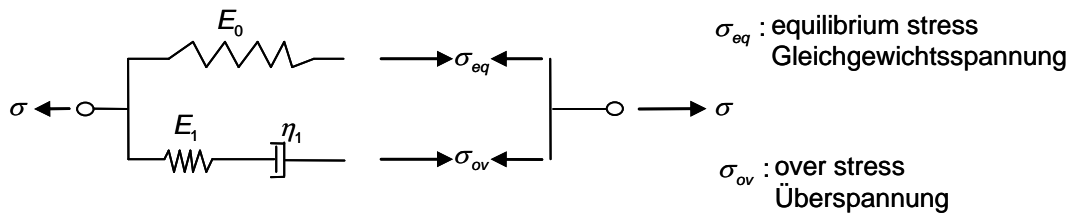


Abb. 7.1-4: Spannungen im Standard-Festkörper

Gleichgewichtsbedingung:	$\sigma = \sigma_{eq} + \sigma_{ov}$	(1)
Kinematik:	$\varepsilon = \varepsilon_F + \varepsilon_D$	(2)
Konstitutive Bedingungen: Elastizität	$\sigma_{eq} = E_0 \varepsilon$	(3)
(Federn)	$\sigma_{ov} = E_1 \varepsilon_F$	(4)
Viskosität	$\sigma_{ov} = \eta_1 \dot{\varepsilon}_D$	(5)
(Dämpfer)		

Elimination der Hilfsgrößen ε_F und ε_D .

Einsetzen der Zeitableitung von (4) und (5) in die Zeitableitung von (2) liefert:

$$\frac{\dot{\sigma}_{ov}}{E_1} + \frac{\sigma_{ov}}{\eta} = \dot{\varepsilon} \quad (6)$$

Aus (3) folgt:
$$\frac{\sigma_{eq}}{\eta} = \frac{E_0}{\eta} \varepsilon \quad (7)$$

Aus Zeitableitung von (3)
$$\frac{\dot{\sigma}_{eq}}{E_1} = \frac{E_0}{E_1} \dot{\varepsilon} \quad (8)$$

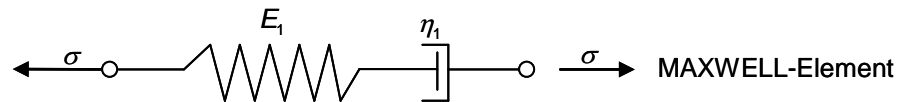
Addieren von (6) bis (8):
$$\frac{\dot{\sigma}_{eq} + \dot{\sigma}_{ov}}{E_1} + \frac{\dot{\sigma}_{eq} + \dot{\sigma}_{ov}}{\eta_1} = \frac{E_0}{\eta_1} \varepsilon + \dot{\varepsilon} + \frac{E_0}{E_1} \dot{\varepsilon} \quad (9)$$

Mit (1) folgt:
$$\dot{\sigma}(t) + \frac{E_1}{\eta_1} \sigma(t) = (E_0 + E_1) \dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_1 E_0}{\eta_1} \varepsilon(t) \quad (10)$$

Gl. (10) ist eine gewöhnliche Differentialgleichung erster Ordnung für das zeitabhängige Materialverhalten des standard linearen Festkörpers vom MAXWELL-Typ.

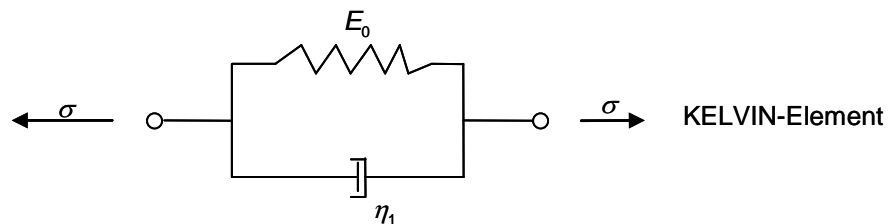
Sonderfälle

1) $E_0 = 0$



$$\sigma(t) + \frac{\eta_1}{E_1} \dot{\sigma}(t) = \eta_1 \dot{\varepsilon}(t)$$

2) $E_1 \rightarrow \infty$:



$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \eta \dot{\varepsilon}(t)$$

(Modell der geschwindigkeitsproportionalen Dämpfung in der Dynamik)

Eigenschaften des standard linearen Festkörpers:

1) langsame Prozesse:

$$\dot{\sigma}, \dot{\varepsilon} \text{ klein } (\approx 0)$$

$$\Rightarrow \frac{E_1}{\eta} \sigma(t) = \frac{E_1 E_0}{\eta} \varepsilon(t) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) = \sigma_{eq}$$

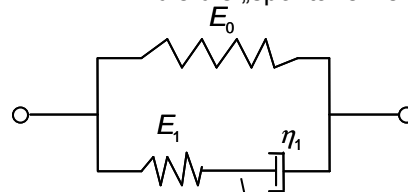
ist die Menge der „statischen Gleichgewichts-zustände“, die die „statische Kennlinie“ beschreiben.

2) schnelle Prozesse:

$\dot{\sigma}, \dot{\varepsilon}$ groß gegenüber σ, ε

$$\Rightarrow \dot{\sigma}(t) = (E_0 + E_1) \dot{\varepsilon}(t) \quad \Leftrightarrow \quad \sigma(t) = (E_0 + E_1) \varepsilon(t)$$

ist die Menge der Lösungen der schnellen Prozesse, die die „spontane Kennlinie“ beschreiben



Dämpfer bewegt sich nicht, wenn $\dot{\varepsilon}$ groß ist!

Abb. 7.2-3: Standard-Festkörper

bei langsamen Prozessen: $\sigma_{ov} = 0$

bei schnellen Prozessen: $\sigma_{ov} = E_1 \varepsilon$

7.3 Lösung der Materialgleichung (Integration der DGL) des standard linearen Festkörpers vom MAXWELL-Typ

Zwei Methoden zur Lösung der inhomogenen DGL können unterschieden werden:

- 1.) mittels integrierendem Faktor
- 2.) mittels „Variation der Konstanten“ (siehe Skriptum: Mathematik III, R. Jeltsch-Fricker)

Methode 1: Ansatz für die linke Seite der DGL:

$$e^{-\frac{E_1}{\eta}t} \left[e^{+\frac{E_1}{\eta}t} \sigma(t) \right]' = e^{-\frac{E_1}{\eta}t} \left[e^{+\frac{E_1}{\eta}t} \dot{\sigma}(t) + \frac{E_1}{\eta} e^{+\frac{E_1}{\eta}t} \sigma(t) \right]$$

/

$$= \dot{\sigma}(t) + \frac{E_1}{\eta} \sigma(t)$$

integrierender Faktor

$$\text{DGL: } \left[e^{+\frac{E_1}{\eta}t} \sigma(t) \right]' = e^{\frac{E_1}{\eta}t} \left(\underbrace{(E_0 + E_1) \dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_1 E_0}{\eta} \varepsilon(t)}_{\text{rechte Seite}} \right)$$

Integrieren ab dem Zeitpunkt $t \geq 0$, denn zuvor ist die Dehnung

$\varepsilon(t) = 0$ und deshalb $\dot{\varepsilon}(t) = 0$

$$e^{\frac{E_1 t}{\eta}} \sigma(t) = \int_0^t e^{\frac{E_1 \tau}{\eta}} \left[(E_0 + E_1) \varepsilon'(\tau) + \frac{E_1 E_0}{\eta} \varepsilon(\tau) \right] d\tau$$

$$\varepsilon'(\tau) := \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau}$$

$$\sigma(t) = \int_0^t e^{-\frac{E_1(t-\tau)}{\eta}} \left[\frac{E_1 E_0}{\eta} \varepsilon(\tau) + (E_0 + E_1) \varepsilon'(\tau) \right] d\tau$$

partielle Integration

$$\sigma(t) = \left[\frac{\eta}{E_1} e^{-\frac{E_1(t-\tau)}{\eta}} \frac{E_1 E_0}{\eta} \varepsilon(\tau) \right]_0^t - \int_0^t \frac{\eta}{E_1} e^{-\frac{E_1(t-\tau)}{\eta}} \left[\frac{E_1 E_0}{\eta} \varepsilon'(\tau) - (E_0 + E_1) \varepsilon'(\tau) \right] d\tau$$

$$= E_0 \varepsilon(t) - E_0 e^{-\frac{E_1 t}{\eta}} \varepsilon(0) + \int_0^t E_1 e^{-\frac{E_1(t-\tau)}{\eta}} \varepsilon'(\tau) d\tau$$

$\varepsilon(0) = 0$ ist die Anfangsbedingung

Bis zum Zeitpunkt $t = 0$ ist der Dehnungsverlauf $\varepsilon(t) = 0$.

Darstellungsgleichung der konstitutiven Relation für die lineare Viskoelastizität des 3-Parametermodells vom Relaxationstyp

$$\sigma(t) = \int_0^t \left(E_0 + E_1 e^{-\frac{E_1(t-\tau)}{\eta}} \right) \varepsilon'(\tau) d\tau \quad \text{Es gilt: } \varepsilon(t) = \int_0^t \frac{d\varepsilon}{d\tau} d\tau = \varepsilon'$$

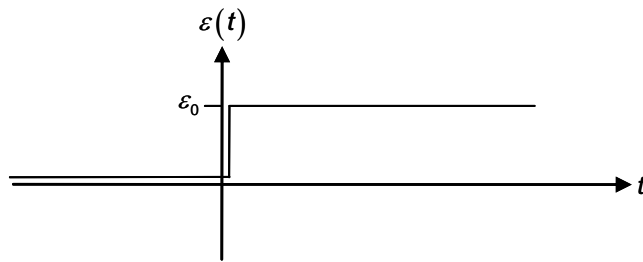
Das Relaxationsintegral ist ein Faltungsintegral.

Die Spannung $\sigma(t)$ zum Zeitpunkt t ist ein lineares Funktional $\mathfrak{F}[\varepsilon(\tau)]_{\tau \geq 0}^{\tau=t}$ der Verzerrungsgeschichte $\varepsilon(\tau)|_{\tau \leq t}$.

Die Funktion $R(t) := E_0 + E_1 e^{-\frac{E_1 t}{\eta}}$

heißt Relaxationsfunktion. Sie ist gleich der Spannungsantwort $\sigma(t)$ des standard linearen Festkörpers auf einen Verzerrungssprung.

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \varepsilon_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases} \quad \text{ist die Prozessgeschichte}$$



HEAVYSIDE – Funktion $H(t)$

$$\varepsilon(t) = H(t) \cdot \varepsilon_0$$

Abb. 7.3-1: Dehnungszeitverlauf mit Sprung zur Zeit $t = 0$

$$\varepsilon'(\tau) = \frac{d\varepsilon(\tau)}{d\tau} = \delta(0) \cdot \varepsilon_0$$

DIRAC-Delta-Funktion

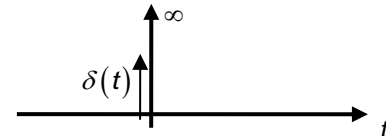


Abb. 7.3-2: DIRAC-Delta-Funktion $\delta(0)$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau = 1$$

7.3.1 Spannungsantwort im Relaxationsversuch:

Die Spannungsrelaxation wird in der experimentellen Mechanik systematisch durch Einprägen eines zeitlich unveränderlich bleibenden Dehnungssprungs in einem Probekörper untersucht.

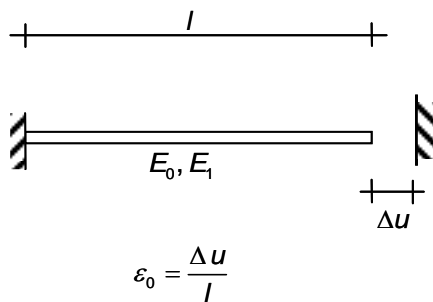


Abb. 7.3-3: Dehnstab mit Verlängerung und Randbedingungen

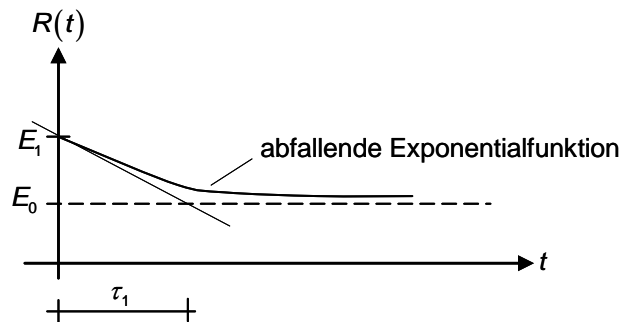


Abb. 7.3-4: Verlauf der Relaxationsfunktion

$$\tau_1 := \frac{\eta}{E_1} \text{ ist die Relaxationszeit.}$$

Der Verschiebungssprung Δu wird zur Zeit $t = 0$ dem Dehnstab eingepreßt. $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \varepsilon_0, & t \geq 0 \end{cases}$

Dann ergibt sich für die Spannung: $\sigma(t) = R(t) \cdot \varepsilon_0 = \left(E_0 + E_1 e^{-\frac{E_1 t}{\eta}} \right) \varepsilon_0$ für die Zeit $t \geq 0$

Anfangsspannung:

$$\sigma(0) = (E_0 + E_1) \varepsilon_0$$

Asymptotischer Grenzwert:

$$\sigma(t \rightarrow \infty) = E_0 \varepsilon_0$$

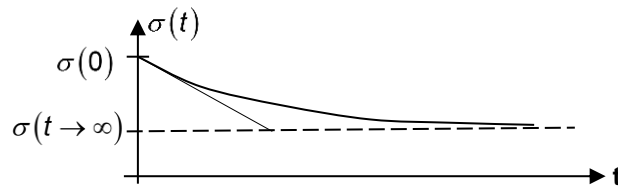


Abb. 7.3-5: Spannungs-Zeitverlauf

7.3.2 Anmerkungen zum Relaxationsintegral der Integralgleichungsmethode für die lineare Viskoelastizitätstheorie

i) Relaxationsversuch als Grundlage für die Verschiebungsmethode

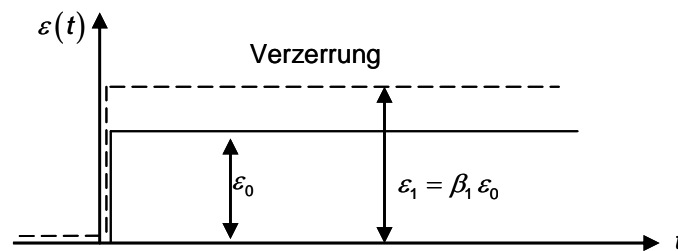


Abb. 7.3-6: Vorgegebene Verzerrungs-Zeitverläufe

Demonstration der Linearität der viskoelastischen Materialgleichung (*)

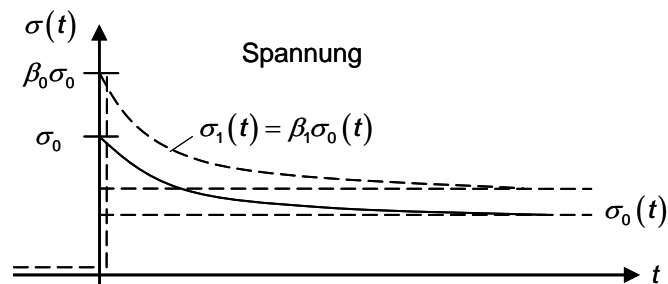


Abb. 7.3-7: Spannungsrelaxation

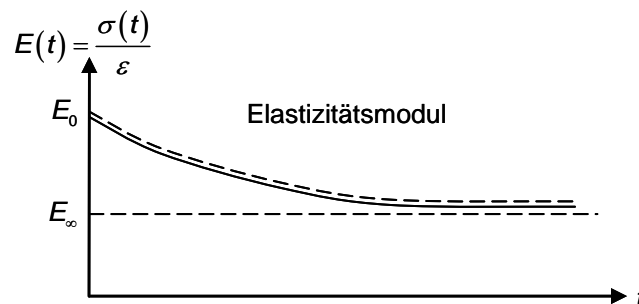


Abb. 7.3-8: Relaxation des Elastizitätsmoduls

ii) Relaxationsintegral
Superposition zweier Belastungen

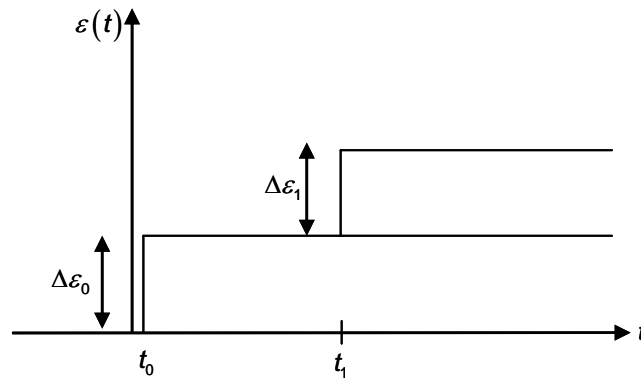


Abb. 7.3-9: Vorgegebener Verzerrungsverlauf mit Sprungstellen

BOLTZMANN'SCHES Superpositionsprinzip

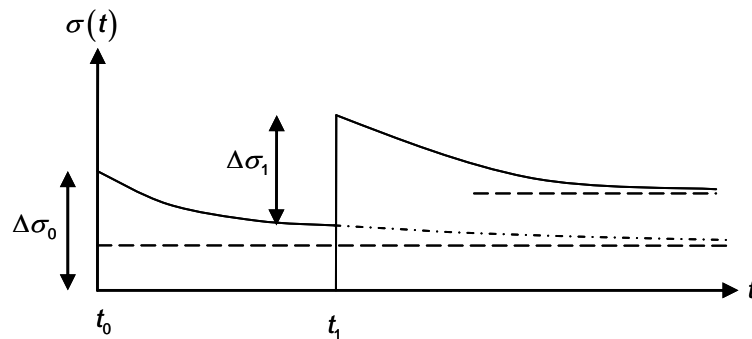


Abb. 7.3-10: Spannungsrelaxation für den Verzerrungsverlauf gemäß Abb. 7.3-9

$$\sigma(t) = E(t-t_0)\Delta\varepsilon_0 + E(t-t_1)\Delta\varepsilon_1$$

Spannungsantwort infolge der beiden Dehnungsdiskontinuitäten addieren sich.

iii) Allgemeiner Verzerrungsverlauf

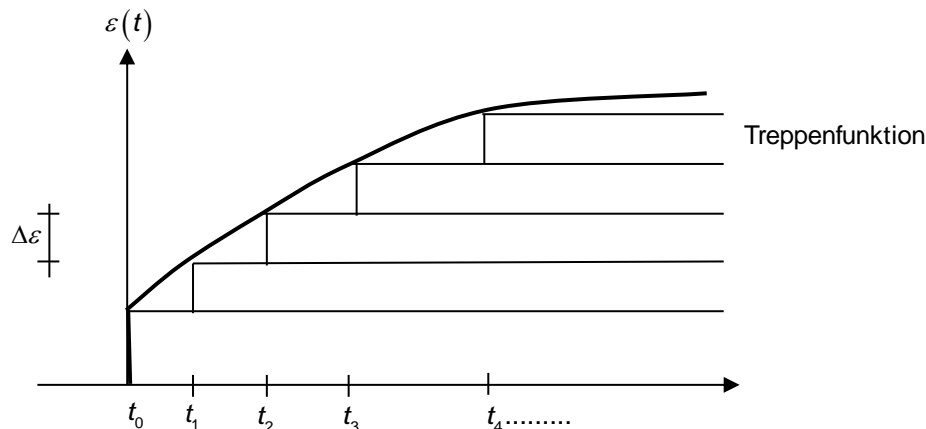
Unterteilung des Dehnungsverlaufs $\varepsilon(t)$ in Dehnungssprünge $\Delta\varepsilon$:

Abb. 7.3-11: Darstellung des Dehnungsverlaufs als „Treppenfunktion“

$$\sigma(t) = \sum_{i=0}^{\infty} E(t-t_i) \Delta\varepsilon_i$$

Die Verringerung auf differentiell kleine Stufenhöhen $d\varepsilon = \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} d\tau$ und der Grenzübergang von der Summe zum Integral ergibt:

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \frac{\partial\varepsilon}{\partial\tau} d\tau$$

Relaxationsfunktion

$$E(t) = E_0 + E_1 e^{-\frac{E_1 t}{\eta}}$$

Relaxationsintegral (Konvolutionsintegral) ergibt sich als Summe der Spannungsantworten auf differentiell kleine Stufenhöhen

Sonderfälle:

1) MAXWELL – Körper: $E_0 = 0$: $R(t) = E_1 e^{-\frac{E_1 t}{\eta}}$

Relaxationsversuch: $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ \varepsilon_0, & t \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ E_1 e^{-\frac{E_1 t}{\eta}} \varepsilon_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$

$$\sigma(t) = E_1 e^{-\frac{E_1 t}{\eta}} \varepsilon_0 = \sigma_0 e^{-\frac{E_1 t}{\eta}}$$

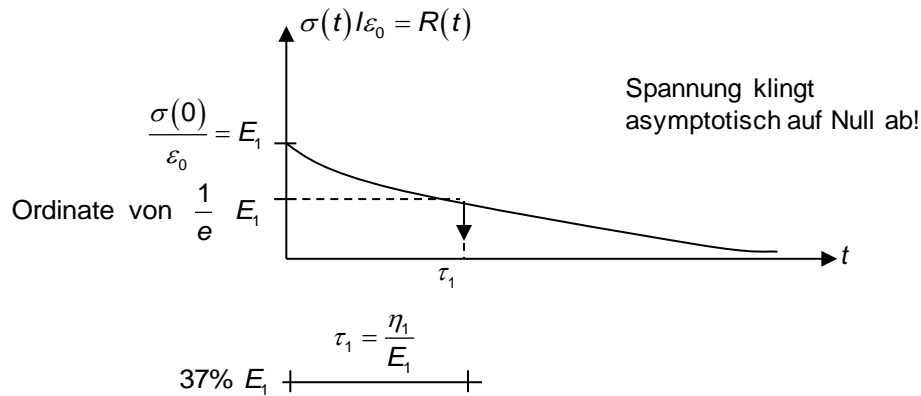


Abb. 7.3-12: Relaxationsfunktion des MAXWELL-Körpers

Zum Zeitpunkt $t = \tau_1 := \frac{\eta}{E_1}$ ist die Spannung zu $\approx 37\% \approx \frac{1}{e}$ abgeklungen.

- 2) **KELVIN – Körper** $E_1 \rightarrow \infty$: $R(t) \rightarrow \infty \Rightarrow$ Für den KELVIN – Körper existiert keine Relationsfunktion

Der KELVIN – Körper ist ein Beispiel für ein nicht invertierbares Materialmodell.

7.3.3 Spannungsantwort im gleichmäßigen, dehnungskontrollierten Zug- / Druckversuch

(lineare Geschwindigkeitsabhängigkeit)

linearer Dehnungsprozess:

$$\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \dot{\varepsilon}_0 t & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\frac{d\varepsilon(t)}{dt} = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \dot{\varepsilon}_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

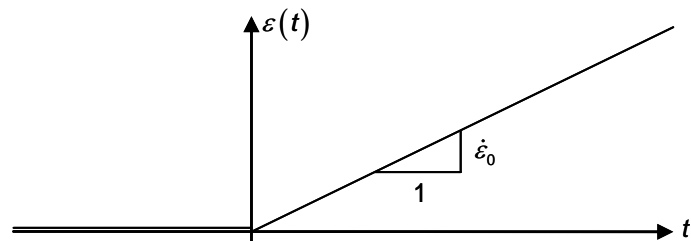


Abb. 7.3-13: Zügiger linearer Dehnungsprozess

$$\sigma(t) = \int_0^t \left(E_0 + E_1 e^{-\frac{E_1}{\eta}(t-\tau)} \right) \dot{\varepsilon}_0 d\tau = \left[\left(E_0 t + E_1 \frac{\eta}{E_1} e^{-\frac{E_1}{\eta}(t-\tau)} \right) \dot{\varepsilon}_0 \right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

$$= E_0 \dot{\varepsilon}_0 t + \eta \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta} t} \right) \dot{\varepsilon}_0$$

mit $\varepsilon(t) \dot{\varepsilon}_0 \cdot t$ folgt:

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \eta \left(1 - e^{-\frac{E_1}{\eta} \frac{\varepsilon(t)}{\dot{\varepsilon}_0}} \right) \dot{\varepsilon}_0$$

⏟ ⏟

lineare
Funktion
in $\varepsilon(t)$

- abklingende Funktion in $\dot{\varepsilon}_0$, da linear in $\dot{\varepsilon}_0$.
- ist der ratenabhängige Anteil der Spannungsantwort

$$\text{Anfangssteigung: } \left. \frac{d\sigma}{d\varepsilon} \right|_{\varepsilon=0} = \left[E_0 + \eta \left(0 - \left(-\frac{E_1}{\eta \dot{\varepsilon}_0} \right) e^{-\frac{E_1}{\eta} \frac{\varepsilon(t)}{\dot{\varepsilon}_0}} \right) \dot{\varepsilon}_0 \right] \Big|_{\varepsilon=0} = E_0 + E_1$$

$$\text{Asymptote: } \lim_{\varepsilon \rightarrow \infty} \sigma(t) = E_0 \varepsilon + \eta \dot{\varepsilon}_0$$

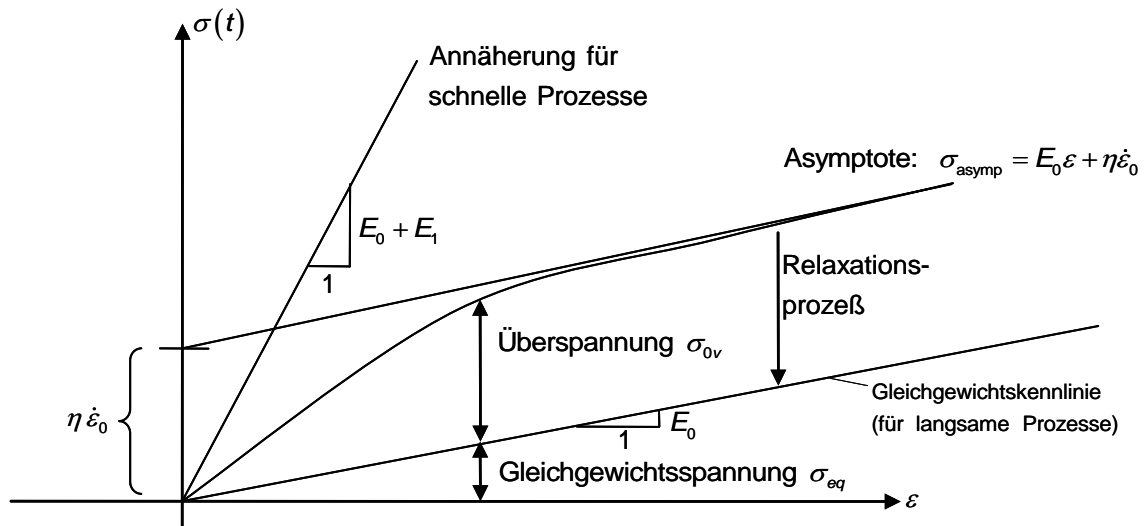


Abb. 7.3-14: Dehnungsspannungsverlauf

Statische Fortsetzung (isothermal static continuation), d.h. die Prozessgeschichte wird angehalten:
 $\varepsilon(t) = \text{konstant} = \varepsilon_0$

$$\dot{\varepsilon}_0 = 0$$

7.4 Gedächtnisfunktion

Umformung des Relaxationsintegrals durch partielle Integration. Es soll $\varepsilon(-\infty) = 0$ sein.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= \int_{-\infty}^t \underbrace{\left(E_0 + E_1 e^{-\frac{E_1}{\eta}(t-\tau)} \right)}_{\text{Gedächtnisfunktion}} \underbrace{\varepsilon'(\tau)}_{\text{Dehnungsgeschwindigkeit}} d\tau \\ &= \left[\left(E_0 + E_1 e^{-\frac{E_1}{\eta}(t-\tau)} \right) \varepsilon(\tau) \right]_{\tau=-\infty}^{\tau=t} - \int_{-\infty}^t \left(0 + E_1 \left(-\frac{E_1}{\eta} \right) (-1) e^{-\frac{E_1}{\eta}(t-\tau)} \right) \varepsilon(\tau) d\tau \end{aligned}$$

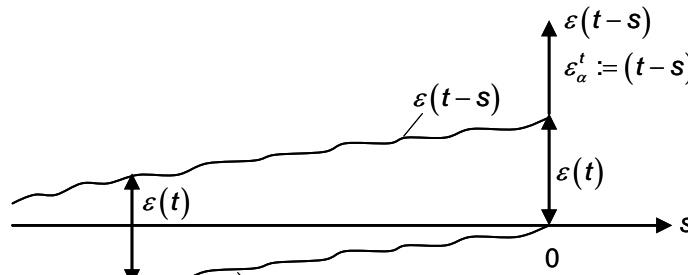
$$\begin{aligned} \text{Substitution: } s = t - \tau &\Rightarrow \text{Integrationsgrenzen: } \tau = -\infty \Rightarrow s = \infty \\ &\Leftrightarrow ds = -d\tau \qquad \qquad \qquad \tau = t \Rightarrow s = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (E_0 + E_1 \cdot 1) \varepsilon(t) - 0 - \int_{\infty}^0 \frac{E_1^2}{\eta} e^{-\frac{E_1}{\eta}s} \varepsilon(t-s) (-ds) \\ &\text{da } \uparrow \varepsilon(\tau = -\infty) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= (E_0 + E_1)\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^0 -\frac{E_1^2}{\eta} e^{-\frac{E_1}{\eta}s} \underbrace{(\varepsilon(t-s) - \varepsilon(t))}_{=: \varepsilon_\alpha^t(s)} ds + \int_{-\infty}^0 -\frac{E_1^2}{\eta} e^{-\frac{E_1}{\eta}s} \varepsilon(t) ds \\ &= (E_0 + E_1)\varepsilon(t) + \int_{-\infty}^0 -\frac{E_1^2}{\eta} e^{-\frac{E_1}{\eta}s} \varepsilon_\alpha^t(s) ds + \underbrace{\varepsilon(t) \left[-(-E_1) e^{-\frac{E_1}{\eta}s} \right]_{s=0}^{s=-\infty}}_{= \varepsilon(t)(+E_1 \cdot 0) - \varepsilon(t)(+E_1 \cdot 1)} \end{aligned}$$

Differenzgeschichte

$$\varepsilon_\alpha^t := \varepsilon(t-s) - \varepsilon(t)$$



$\varepsilon_\alpha^t = \varepsilon(t-s) - \varepsilon(t)$ ist die Differenzgeschichte, die aus dem vergangenem Dehnungsverlauf $\varepsilon(t-s)$ und der aktuellen Dehnung $\varepsilon(t)$ gebildet wird.

$$\begin{aligned} \sigma(t) &= E_0 \varepsilon(t) + \int_0^\infty -\frac{E_1^2}{\eta} e^{-\frac{E_1}{\eta}s} \varepsilon_\alpha^t(s) ds \\ &=: \mathbf{g(s) = \text{Gedächtnisfunktion} = \frac{dR(s)}{ds}} \end{aligned}$$

für das 3-Parametermodell

$$\sigma(t) = E\varepsilon(t) + \int_0^\infty g(s) \varepsilon_d^t ds$$

momentaner Spannungszustand = Gleichgewichtsanteil + Gedächtnisanteil

ist eine lineare Funktion der Dehnung $\varepsilon(t)$

Der momentane Spannungszustand $\sigma(t)$ besteht aus einem Gleichgewichtsanteil und einem Gedächtnisanteil.

Der Gedächtnisanteil ist ein lineares Funktional $F[\varepsilon_d^t(s)]_{s=0}^{s=\infty}$ der

Differenzgeschichte $\varepsilon_\alpha^t(s)$. Die Gedächtnisfunktion $g(s)$ versieht die vergangenen Deformationsereignisse mit Gewichts-faktoren, die mit zunehmender vergangener Zeit abklingen („nachlassendes Gedächtnis“ = fading memory)

7.5 Verallgemeinerung des standard linearen Festkörpers vom MAXWELL-Typ

N-MAXWELL-Ketten werden parallel zur Feder E_0 geschaltet.

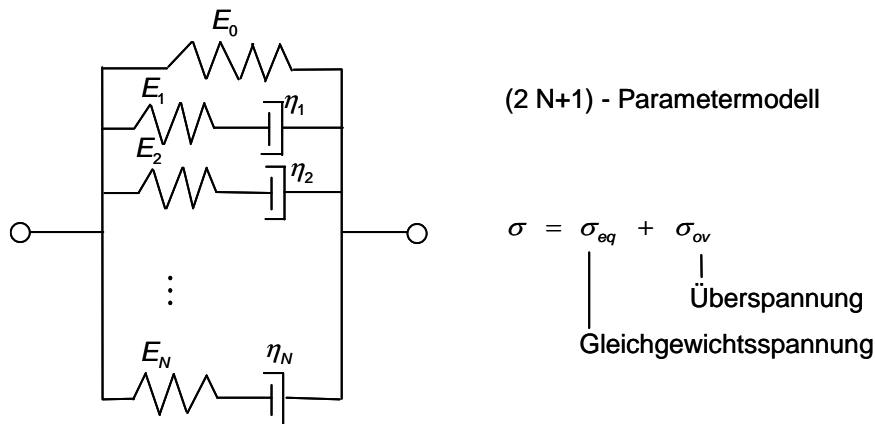


Abb. 7.5-1: Verallgemeinerter MAXWELL-Körper

Addition der Spannungen in den parallel geschalteten Ketten:

$$\sigma_{ov} = \sum_{k=1}^N \sigma_k \quad \text{mit } \sigma_k = \text{Teilüberspannung}$$

σ_k wird als Lösung der k-ten MAXWELL-Kette mit der Viskosität η_k im Dämpfer und E_k in der Feder gewählt (σ_k aus Kap. 7.3 mit $E_0 = 0$).

$$\sigma_k = \int_0^t \left(E_k e^{-\frac{E_k}{\eta_k}(t-\tau)} \right) \varepsilon'(\tau) d\tau$$

Die Teilüberspannungen σ_k in allen parallel geschalteten MAXWELL-Ketten werden zur Überspannung σ_{ov} addiert.

Darstellungsgleichung des verallgemeinerten MAXWELL-Elements mit N Ketten:

$$\sigma(t) = \int_0^t \left[E_0 + \sum_{k=1}^N E_k e^{-\frac{E_k}{\eta_k}(t-\tau)} \right] \varepsilon'(\tau) d\tau$$

Kernfunktion

ist ein Faltungsintegral (Konvolutionsintegral)
Allgemeine Materialgleichung vom Relaxationstyp der linearen Viskoelastizitätstheorie

Relaxationszeiten: $\tau_k = \frac{\eta_k}{E_k}$

Relaxationsstärken E_k

τ_k, E_k bilden das viskoelastische Spektrum $\{E_k, \tau_k; k = 1, \dots, N\}$

7.6 Schrittweise numerische Zeitintegration zur Lösung des Relaxationsintegrals

Siehe: Vortrag TAYLOR, Berkeley

Veröffentlichung TAYLER, PISTER und GOUDREAU

CADFEM-Kurs „Nonlin 4“, Viskoelastizität und Viskoplastizität

Übung:

Kriechen des dickwandigen Rohrs unter Innendruck – Projekt !

Beispiel: Dickwandiger Zylinder unter Innendruck

Analytische Lösung

Relaxationsfunktion des verallgemeinerten MAXWELL-Körpers

$$E(t) = E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\lambda_i} \quad (1)$$

λ_i = Relaxationszeit des i-ten MAXWELL-Körpers

ANSYS: $N \leq 10$

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \dots < \lambda_N$$

Numerische Zeitintegration

Körper spannungsfrei vor $t < 0$:

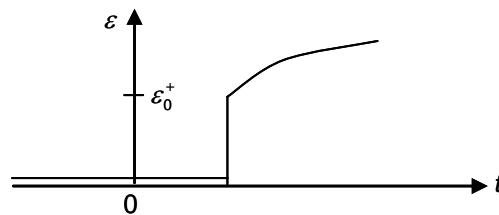


Abb. 7.6-1: Vorgegebener Dehnungszeitverlauf

$$\sigma(t) = E(t) \varepsilon_0^+ + \int_{0^+}^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \quad (2)$$

(1) in (2) einsetzen:

$$\sigma(t) = \left(E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-t/\lambda_i} \right) \varepsilon_0^+ + \int_{0^+}^t \left[E_\infty + \sum_{i=1}^N E_i e^{-\frac{t-\tau}{\lambda_i}} \right] \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau$$

Zeitliche Diskretisierung: $t_{n+1} = t_n + \Delta t$

$$\mathbf{N = 1:} \quad \sigma(t_n) = E_\infty \varepsilon_0^+ + E_\infty (\varepsilon(t_n) - \varepsilon_0^+) + E_1 e^{-\frac{t_n}{\lambda_1}} \varepsilon_0^+ + \int_{0^+}^{t_n} E_1 e^{-\frac{(t_n-\tau)}{\lambda_1}} \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (3)$$

$$\begin{aligned} \sigma(t_{n+1}) &= E_\infty \varepsilon_0^+ + E_\infty (\varepsilon(t_{n+1}) - \varepsilon_0^+) + E_1 e^{-\frac{t_{n+1}}{\lambda_1}} \varepsilon_0^+ + \int_{0^+}^{t_{n+1}} E_1 e^{-\frac{(t_{n+1}-\tau)}{\lambda_1}} \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \quad (4) \\ &= E_\infty \varepsilon(t_{n+1}) + E_1 e^{-\frac{t_n + \Delta t}{\lambda_1}} \varepsilon_0^+ + \int_{0^+}^{t_{n+1}} E_1 e^{-\frac{(t_{n+1}-\tau)}{\lambda_1}} \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau \end{aligned}$$

Mit Hilfe von $e^{-\frac{t_{n+1}}{\lambda_i}} = e^{-\frac{t_n}{\lambda_i}} \cdot e^{-\frac{\Delta t}{\lambda_i}}$ folgt für den standard linearen Festkörper mit $N = 1$:

$$\sigma(t_{n+1}) = E_\infty \varepsilon(t_{n+1}) + e^{-\frac{\Delta t}{\lambda_1}} \left[E_1 e^{-\frac{t_n}{\lambda_1}} \varepsilon_0 + \int_0^{t_n} E_1 e^{-\frac{t_n-\tau}{\lambda_1}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \right] + \int_{t_n}^{t_{n+1}} E_1 e^{-\frac{t_{n+1}-\tau}{\lambda_1}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau$$

$$=: H_1(t_n)$$

$$\sigma(t_n) = E_\infty \varepsilon(t_n) + \left[E_1 e^{-\frac{t_n}{\lambda_1}} \varepsilon_0 + \int_0^{t_n} E_1 e^{-\frac{t_n-\tau}{\lambda_1}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \right]$$

$$=: H_1(t_n)$$

$$\sigma(t_n) = E_\infty \varepsilon(t_n) + H_1(t_n)$$

$$\sigma(t_{n+1}) = E_\infty \varepsilon(t_{n+1}) + H_1(t_{n+1})$$

$$H_1(t_{n+1}) = e^{-\frac{\Delta t}{\lambda_1}} H_1(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} E_1 e^{-\frac{t_{n+1}-\tau}{\lambda_1}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau$$

Rekursionsformel zu Ermittlung des Faltungsintegrals H_1

Auswertung von:

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} E_1 e^{-\frac{t_{n+1}-\tau}{\lambda_1}} \frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} d\tau \approx E_1 \int_{t_n}^{t_{n+1}} e^{-\frac{t_{n+1}-\tau}{\lambda_1}} d\tau \frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\Delta t}$$

Differenzenquotient:

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial \tau} \approx \frac{\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n}{\Delta t}$$

$$\approx E_1 \frac{1 - e^{-\frac{\Delta t}{\lambda_1}}}{\frac{\Delta t}{\lambda_1}} (\varepsilon_{n+1} - \varepsilon_n)$$

→ 1 für $\Delta t \rightarrow 0$

Beteiligungsfaktoren im FE-Programm ANSYS für die Relaxationsfunktion der linearen Viskoelastizitätstheorie

$$E(t) = E_\infty + \sum_i^N E_i e^{-\frac{t}{\lambda_i}}$$

Definition: $E_0 := E_\infty + \sum_i^N E_i$

$$E(t) = \left[\frac{E_\infty}{E_0} + \sum_i^N \frac{E_i}{E_0} e^{-\frac{t}{\lambda_i}} \right] E_0$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=: \nu_\infty} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=: \nu_i}$

$$\nu_0 = \nu_\infty + \sum_i^N \nu_i$$

$$\nu(t) = \frac{E(t)}{E_0} \left[\nu_\infty + \sum_i^N \nu_i e^{-t/\lambda_i} \right]$$

mit den Einschränkungen:

$$\nu_\infty + \sum_i^N \nu_i = 1$$

$$\nu_i \geq 0$$

$$0 \leq v_0 \leq 1$$

$$\sum_i^N v_i \leq 1$$

v_i = **Beteiligungsfaktoren der einzelnen MAXWELL-Elemente zum Beispiel im Programm ANSYS:**

$v_i \equiv C_{smi}$ **für Schubmodulrelaxation**

$\equiv C_{bmi}$ **für Kompressionsmodulrelaxation**

7.7 Materialgleichung des Standard linearen Festkörpers vom KELVIN-Typ

Das zeitabhängige Verhalten von festen Körpern wird i.d.R. dadurch experimentell untersucht, dass Totlasten auf diesen Probekörper oder eine Struktur aufgebracht werden. Dabei werden die Verschiebungen bzw. Dehnungen über die Belastungszeit gemessen und aus den Messdaten die Kriechfunktion $J(t)$ bestimmt.

Die Differentialgleichung (*) in Kapitel 7.2 des Standard linearen Festkörpers vom MAXWELL-Typ kann für einen gegebenen Spannungs-Zeitverlauf $\sigma(t)$ (Belastungsgeschichte am einaxialen Dehnstab) zugunsten der Dehnung $\varepsilon(t)$ gelöst werden.

Im Hinblick auf die Verallgemeinerung des 3-Parametermodells ist es physikalisch und mathematisch jedoch einfacher vom standard linearen Festkörper des KELVIN-Typs auszugehen.

Reihenschaltung einer Feder mit einem KELVIN-Körper

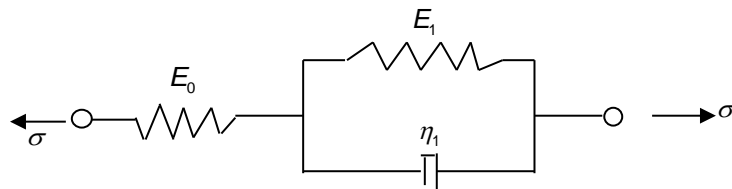


Abb. 7.7-1.: Standard linearer Festkörper (3-Parameter-Festkörper) vom KELVIN-Typ

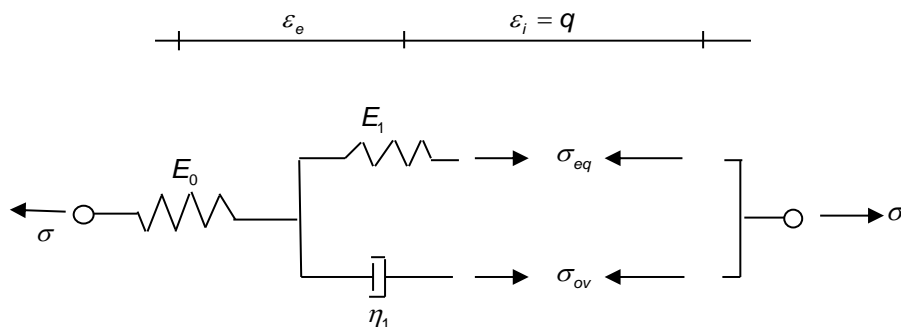


Abb. 7.7-2: Freischneiden des 3-Parameter-Festkörpers

Kompatibilität: $\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_i$ (1)

Gleichgewicht: $\sigma = \sigma_{eq} + \sigma_{ov}$ (2)

Konstitutive Gl.: $\sigma = E_0 \varepsilon_e$ (3)

$\sigma_{eq} = E_1 \varepsilon_i$ (4)

$\sigma_{ov} = \eta_1 \cdot \dot{\varepsilon}_i$ (5)

Elimination der Hilfsgrößen σ_{eq} und σ_{ov} in (2) mit (4) und (5):

$$\sigma = E_1 \varepsilon_i + \eta_1 \dot{\varepsilon}_i$$

umstellen: $\dot{q} = \dot{\varepsilon}_i = \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_1}{\eta} \varepsilon_i = f(\sigma, \varepsilon_i)$ (6)

ist eine Evolutionsgleichung für die zeitliche Entwicklung der internen Variablen $q \equiv \varepsilon_i$, die den inelastischen Dehnungsanteil repräsentiert.

(1) und (3) nach der Zeit ableiten und zusammen mit (6) einsetzen:

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \dot{\varepsilon}_e + \dot{\varepsilon}_i \\ &= \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_1}{\eta} \varepsilon_i\end{aligned}\quad (7)$$

Aus (1) und (3) folgt:

$$\varepsilon_i = \varepsilon - \frac{\sigma}{E_0} \quad (8)$$

(7) in (8):

$$\begin{aligned}\dot{\varepsilon} &= \frac{\dot{\sigma}}{E_0} + \frac{\sigma}{\eta} - \frac{E_1}{\eta} \left(\varepsilon - \frac{\sigma}{E_0} \right) \\ \dot{\sigma}(t) + \frac{E_0 + E_1}{\eta} \sigma(t) &= E_0 \dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_0 E_1}{\eta} \varepsilon(t)\end{aligned}\quad (9)$$

Hinweise:

- Gleichung (9) ist eine gewöhnliche, lineare DGL erster Ordnung, die bis auf die Konstanten mit der DGL für den standard linearen Festkörper vom MAXWELL-Typ übereinstimmt.
- Die Elastizitäts- und Dämpfungskonstanten können ineinander umgerechnet werden:
Koeffizientenvergleich der Differentialgleichungen für das 3-Parametermodell von KELVIN-Typ $(\dots)^K$ und vom MAXWELL-Typ $(\dots)^M$:

$$\begin{aligned}\frac{E_0^k + E_1^k}{\eta^k} &= \frac{E_1^M}{\eta^M} \\ E_0^k &= E_0^M + E_1^M \\ \frac{E_0^k E_1^k}{\eta^k} &= \frac{E_0^M E_1^M}{\eta^M}\end{aligned}$$

7.8 Lösung für den 3P-Festkörper bei vorgegebenen Lasten

Obige DGL (9) kann durch Variationen der Konstanten oder mit der Methode des integrierenden Faktors gelöst werden.

Die Verallgemeinerung des standard linearen Festkörpers vom KELVIN-Typ geschieht durch Reihenschaltung einzelner KELVIN-Körper, deren elastische Dehnungen ε_i addiert werden dürfen. Deshalb wird die DGL (6) für die innere Variable g , die der inelastischen Dehnung ε_i entspricht, in Abhängigkeit der Spannungen gelöst.

$$\dot{\varepsilon}_i + \frac{E_1}{\eta} \varepsilon_i = \frac{\sigma}{\eta} \quad (10)$$

1) Integrierender Faktor: $e^{-\frac{t}{\eta/E_1}}$

Probe: $e^{-\frac{t}{\eta/E_1}} \frac{d}{dt} \left(e^{\frac{t}{\eta/E_1}} \varepsilon_i \right) = \frac{\sigma}{\eta}$

2) Variation der Konstanten: Basissystem der homogenen DGL: $\varepsilon_{ih} = C e^{-\frac{t}{\eta/E_1}}$

Aus: $\frac{d\varepsilon_{ih}}{dt} = -\frac{E_1}{\eta} \varepsilon_{ih}$

Separation $\int \frac{d\varepsilon_i}{\varepsilon_i} = -\int \frac{E_1}{\eta} dt$

$$\ln \varepsilon_i = -\frac{E_1}{\eta} t + c \quad \Leftrightarrow \quad \varepsilon_{ih} = C e^{-\frac{t}{\eta/E_1}}$$

Ansatz für die partikuläre Lösung: $\varepsilon_{ip} = c(t) e^{-\frac{t}{\eta/E_1}} \quad (11)$

wobei die Kriechzeit (Retardationszeit) λ definiert wird zu:

$$\lambda = \frac{\eta}{E_1}$$

Die Konstante C wird variiert $c(t)$, siehe: R. Jeltsch-Fricke: Mathematik III, Skriptum, S. 98 ff

Einsetzen von (11) in (10):

$$\underbrace{\dot{c}(t) e^{-\frac{t}{\eta/E_1}} + c(t) \left(-\frac{E_1}{\eta} \right) e^{-\frac{t}{\eta/E_1}}}_{\dot{\varepsilon}_{ip}} + \underbrace{\frac{E_1}{\eta} c(t) e^{-\frac{t}{\eta/E_1}}}_{\dot{\varepsilon}_{ip}} = \frac{\sigma}{\eta}$$

Vereinfachen:

$$\dot{c}(t) e^{-\frac{t}{\eta/E_1}} = \frac{\sigma}{\eta}$$

Berechnung von $c(t)$

$$c(t) = \int_{-\infty}^t e^{\frac{\tau}{\eta/E_1}} \frac{\sigma(\tau)}{\eta} d\tau$$

Allgemeine Lösung für die gesamte inelastische Dehnung:

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{ih} + \varepsilon_{ip}$$

$$\varepsilon_i = c_0 e^{-\frac{t}{\eta/E_1}} + \int_{-\infty}^t e^{\frac{\tau}{\eta/E_1}} \frac{\sigma(\tau)}{\eta} d\tau \cdot e^{-\frac{t}{\eta/E_1}}$$

Anfangsbedingung: $\varepsilon_i(t < 0) \equiv 0$ und $\sigma(t < 0)$

Anpassung an die Anfangsbedingung ergibt:

$$\rightarrow c_0 = 0$$

Partielle Integration:

$$\varepsilon_i = \left[\lambda e^{\frac{\tau}{\lambda}} \frac{\sigma(\tau)}{\eta} \right]_{-\infty}^t e^{-\frac{t}{\lambda}} - \int_0^t \lambda e^{\frac{\tau}{\lambda}} \frac{\sigma'(\tau)}{\eta} d\tau \cdot e^{-\frac{\tau}{\lambda}}$$

$$\varepsilon_i = \left[\frac{1}{E_1} e^{\frac{t}{\lambda}} \sigma(t) - 0 \right] e^{-\frac{t}{\lambda}} - \int_0^t \frac{1}{E_1} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \sigma'(\tau) d\tau$$

$$\varepsilon_i = \frac{\sigma(t)}{E_1} - \int_0^t \frac{1}{E_1} e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \sigma'(\tau) d\tau$$

$$\varepsilon_i = \int_0^t \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \right) \sigma'(\tau) d\tau$$

Gesamtdehnung ε :

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_i$$

$$\downarrow \text{Gl.(3)}$$

$$= \frac{\sigma(t)}{E_0} + \int_0^t \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \right) \sigma'(\tau) d\tau$$

mit Hilfe von der Identität $\sigma(t) = \int_0^t \sigma' d\tau$

ergibt sich die Lösung für die Verzerrung im Kriechprozess zu:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \right) \right] \sigma'(\tau) d\tau$$

Das Kriechintegral ist ein Faltungsintegral und damit ein Funktional der Spannungsgeschichte. Es ist die allgemeine Materialgleichung der eindimensionalen linearen Viskoelastizitätstheorie vom „Kriechtyp“

Die Funktion

$$J_{3p}(t) := \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right)$$

heißt Kriechfunktion.

Sie gibt die Verzerrung $\varepsilon(t)$ infolge eines Spannungssprungs – siehe Kap. 7.7 – an.

Die Verzerrung ist ein lineares Funktional \mathcal{L} der Spannungsgeschichte $\sigma(\tau)|_{\tau \leq t}$

$$\varepsilon(t) = \mathcal{L} \left[\varepsilon(\tau) \right]_{\tau=0}^{\tau=t}$$

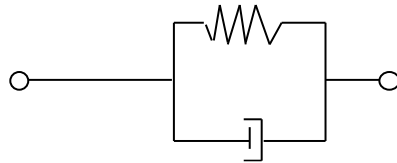
Sonderfälle:

1) $E_1 \rightarrow 0$:



MAXWELL-Element

aus (9): $\dot{\sigma}(t) + \frac{E_0}{\eta} \sigma(t) = E_0 \dot{\varepsilon}(t)$

2) $E_0 \rightarrow \infty$:

KELVIN-Element

aus (9)
$$\frac{1}{\eta} \sigma(t) = \dot{\varepsilon}(t) + \frac{E_1}{\eta} \varepsilon(t)$$

Kriechversuch

Das zeitabhängige mechanische Verhalten wird in der Praxis häufig dadurch untersucht, dass Bauteile oder Werkstoffproben unter konstante Lasten gestellt werden.

Die Spannung σ_0 wird plötzlich zur Zeit $t = 0$ aufgebracht.

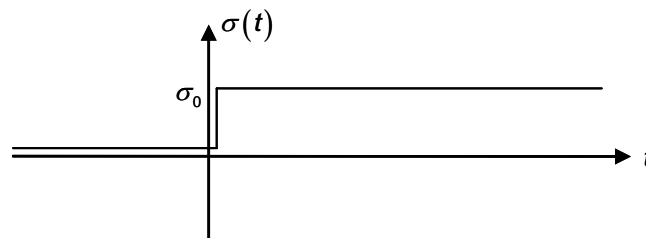


Abb. 7.8-3: Vorgegebener Spannungszeitverlauf

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0 & \text{für } t < 0 \\ \sigma_0 & \text{für } t \geq 0 \end{cases}$$

$$\sigma'(t) = \frac{d\sigma}{dt} = \delta(0) \cdot \sigma_0$$

|
DIRAC-Delta-Funktion

Die Verzerrungsantwort hierzu lautet:

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= J(t) \cdot \sigma_0 = \int_0^t \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t-\tau}{\lambda}} \right) \right] \delta(0) \sigma_0 d\tau \\ &= \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right) \right] \sigma_0 \end{aligned}$$

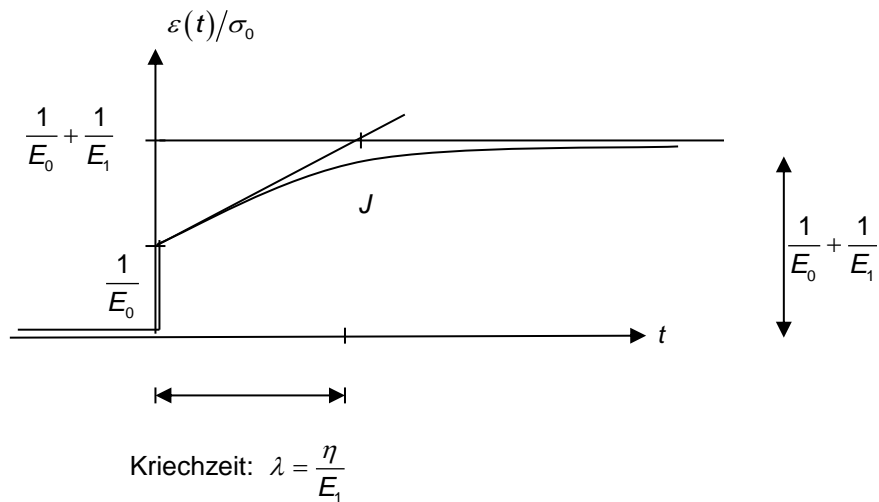


Abb. 7.8-4: Kriechfunktion für den 3-Parameter-Festkörper vom KELVIN-Typ

Sonderfälle des 3P-Festkörpers

1) **KELVIN:** $E_0 \rightarrow \infty$

$$J_{\text{Kelvin}} = \frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \left(1 - e^{-\frac{t}{\lambda}} \right)$$

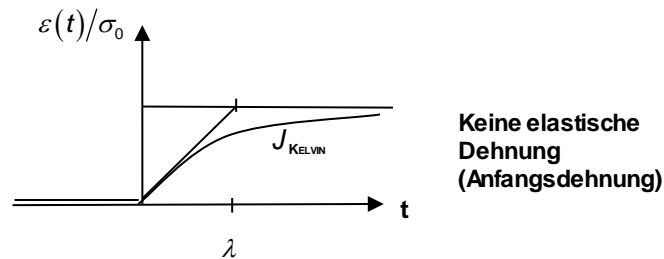


Abb 7.8-5: Kriechfunktion des KELVIN-Elements

2) **MAXWELL:** $E_1 = 0$; $\lambda = \frac{\eta}{E_1} \rightarrow \infty$

$$\varepsilon(t) = \lim_{E_1 \rightarrow 0} \left[\frac{1}{E_0} + \frac{1}{E_1} \underbrace{\left(1 - e^{-\frac{E_1 t}{\eta}} \right)}_{\rightarrow 1} \right] \sigma_0$$

unbestimmter Ausdruck "0/0"

Regel von de l' Hôpital

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \lim_{E_1 \rightarrow 0} \frac{\frac{d}{dE_1} \left(1 - e^{-\frac{E_1 t}{\eta}} \right)}{\frac{d}{dE_1} E_1} \right] \sigma_0$$

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \lim_{E_1 \rightarrow 0} \frac{0 - \left(-\frac{t}{\eta}\right) e^{-\frac{E_1}{\eta} t}}{1} \right] \sigma_0$$

$$\varepsilon(t) = \left[\frac{1}{E_0} + \frac{t}{\eta} \right] \sigma_0$$

Die Kriechfunktion für den MAXWELL-Körper ist eine Gerade (siehe Abb. 7.8-6). Die Kriechzeit λ ist unendlich.

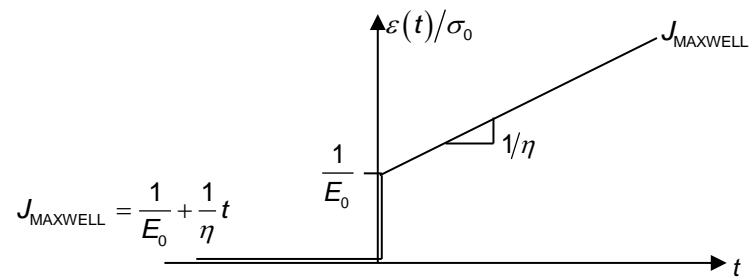


Abb. 7.8-6: Kriechfunktion für den MAXWELL-Körper

7.9 Verallgemeinerung des standard linearen Festkörpers vom Kelvin-Typ

Um die Daten von Kriechversuchen besser approximieren zu können, müssen mehrere KELVIN-Elemente in Reihe geschaltet werden.

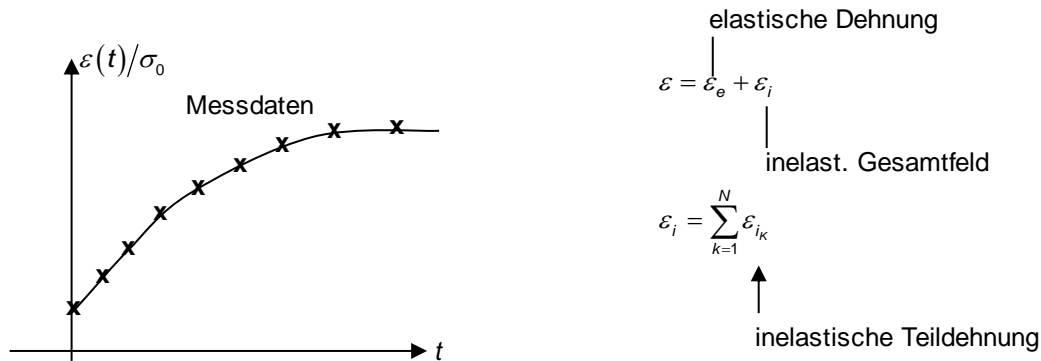


Abb. 7.9-1: Messdaten für den Dehnungszeitverlauf

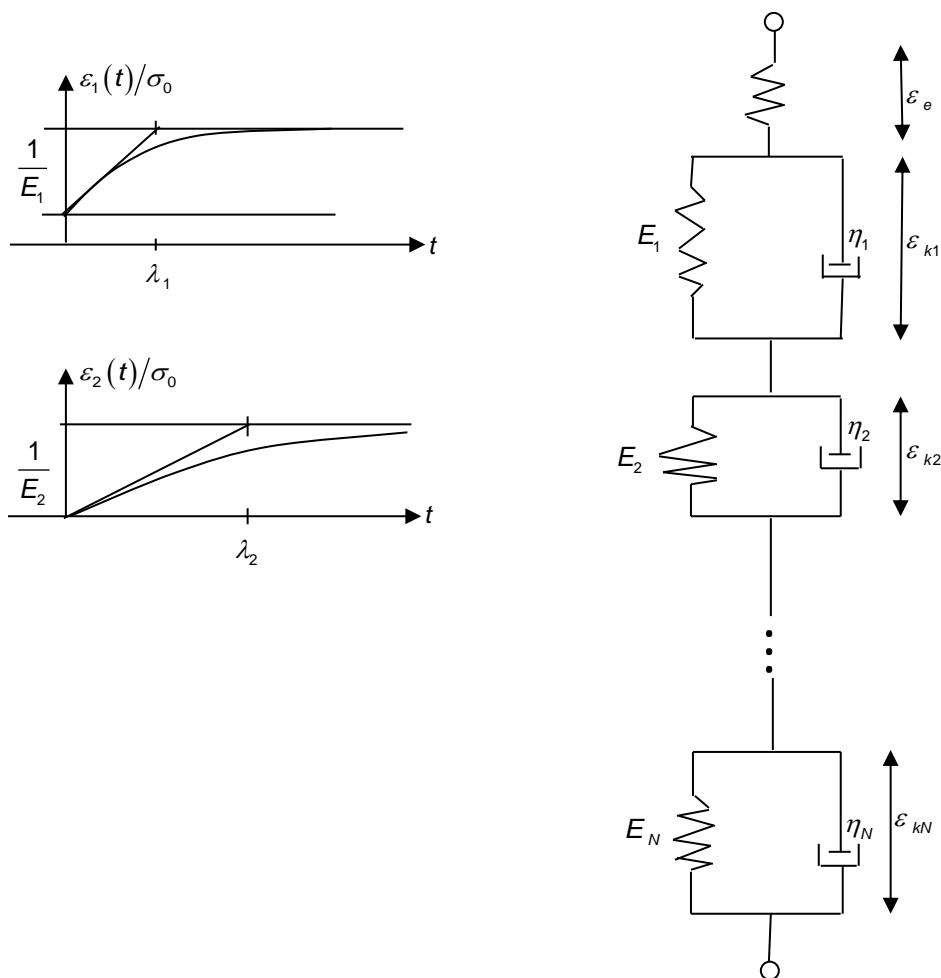


Abb. 7.9-2: Die Kriechfunktionen der einzelnen KELVIN-Elemente

Abb. 7.9-3: Verallgemeinerter KELVIN-Körper

Jedes zusätzliche KELVIN-Elemente liefert eine weitere Nachgiebigkeit $J_k = \frac{1}{E_k}$ und eine weitere Kriechzeit λ_k für die neu hinzugekommene Exponentialfunktion. $\frac{1}{E_k}(1 - e^{-t/\lambda_k})$.

Die Kriechfunktion $J(t)$ setzt sich aus der Summe $\sum_{k=1}^N \frac{1}{E_k}(1 - e^{-t/\lambda_k})$ von N Exponentialfunktionen zusammen.

$$J(t) = \frac{1}{E_0} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{E_k}(1 - e^{-t/\lambda_k})$$

Das Kriechintegral zur Berechnung der gesamten Dehnung ergibt sich aus dem Spannungszeitverlauf wie folgt:

$$\varepsilon(t) = \int_0^t \left[\frac{1}{E_0} + \sum_{k=1}^N \frac{1}{E_k} \left(1 - e^{-\frac{E_k}{\eta_k}(t-\tau)} \right) \right] \sigma'(\tau) d\tau$$