

3 Materialmodell für elastische Festkörper

3.1 Grundgleichungen der Mechanik für kleine Verformungen, Kartesische Koordinaten

Nachfolgend werden die Zahl der unbekannt GröÙen und die Anzahl der bisher hergeleiteten und zur Verfügung stehenden mechanischen Gleichungen einander gegenübergestellt.

i. Kinematische Gleichungen:

Verschiebungsvektor:

$$\mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x}, t) \qquad u_i = \hat{u}_i(x_1, x_2, x_3, t) \qquad \text{3 Unbekannte} \quad u_1, u_2, u_3$$

Verzerrungstensor E

6 Unbekannte $\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}$

$\varepsilon_{12}, \varepsilon_{13}, \varepsilon_{23}$

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{\text{lin}} := \frac{1}{2} \left[\text{grad } \mathbf{u} + (\text{grad } \mathbf{u})^T \right] \qquad \varepsilon_{ik} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right] \qquad \text{6 Kinematische Gleichungen}$$

ii. Spannungszustand:

Spannungstensor σ und Spannungsvektoren \mathbf{s}_i

$$\sigma = \mathbf{s}_i \otimes \mathbf{e}_i = (\mathbf{s}_1 \ \mathbf{s}_2 \ \mathbf{s}_3) \qquad \text{9 Unbekannte:} \quad \sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}$$

$$\sigma_{12}, \sigma_{13}, \sigma_{23}$$

$$\sigma_{21}, \sigma_{31}, \sigma_{32}$$

$$\mathbf{S} = \sigma \mathbf{n} \qquad \mathbf{s}_i = \sigma_{ij} \mathbf{n}_j$$

iii. Impulsbilanz:

$$\text{div } \sigma + \rho \mathbf{k} = \rho \ddot{\mathbf{u}} \qquad \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} + \rho k_i = \rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} \qquad \text{3 Kräfte-Gleichungen}$$

Drehimpulsbilanz:

$$\sigma = \sigma^T \qquad \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \qquad \text{3 Momenten-Gleichungen}$$

iv. Zusammenstellung der Anzahl der Unbekannten und Anzahl der Darstellungen

Zahl der Unbekannten:	u_i	3
	ε_{ij}	6
	σ_{ij}	<u>9</u>
		18
Zahl der Gleichungen:	Kinematik	6
	Drall- und Impulsbilanz	<u>6</u>
		12

Fazit:

6 weitere Gleichungen sind notwendig (Materialgleichungen), die die Materialeigenschaften wiedergeben und zwischen den Spannungen und Dehnungen formuliert werden.

v. **Tonti-Diagramm für das räumliche Kontinuum:**

Zwischen den einzelnen statischen und kinematischen Größen gelten die im Tonti-Diagramm veranschaulichten Beziehungen.

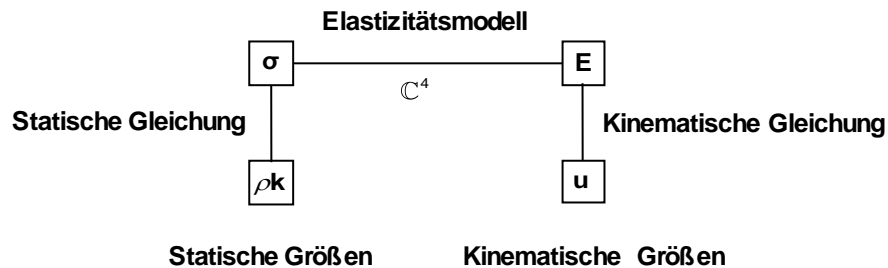


Abb. 3.1.-1: Tonti-Diagramm

vi. **Elastizitätsgleichung**

Die einfachste Materialbeschreibung für einen verformbaren, kontinuierlichen Körper, ist die lineare, isotope Elastizitätsbeziehung

Ansatz für die Elastizitätsbeziehung

- in symbolischer Notation

$$\sigma = 2G \left[\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{Sp } \mathbf{E}) \mathbf{1} \right]$$

- in Indexnotation

$$\sigma_{ik} = 2G \left[E_{ik} + \frac{\nu}{1-2\nu} (E_{jj}) \delta_{ik} \right]$$

- in ausführlicher Komponentenschreibweise

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

3.2 Physikalische Bedeutung der Elastizitätskonstanten

i. **Scherversuch:**

Ein schmaler, langer Streifen ist an einem Längsrand gehalten. Er wird durch eingeprägte Schubspannungen τ am gegenüberliegenden Rand wie abgebildet verformt.

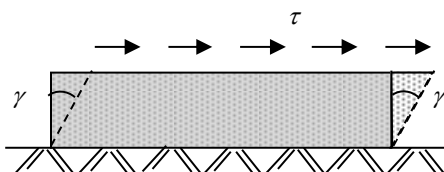


Abb. 3.2.-1: Einfache Schubbelastung

$$\sigma_{12} = \tau$$

alle anderen $\sigma_{ij} = 0$

$$\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \frac{1}{2} \gamma$$

alle anderen $\varepsilon_{ij} = 0$

γ = Ingenieurgleitung

τ = Schubspannung

Einsetzen in die Elastizitätsgleichung (3.1.1)

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} 0 & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2G \overbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{\gamma}{2} & 0 \\ \frac{\gamma}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}^{\mathbf{E}} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (0+0+0) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.1)$$

wobei die Spur des Verzerrungstensors verschwindet: $\text{Sp}E = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33} = 0$

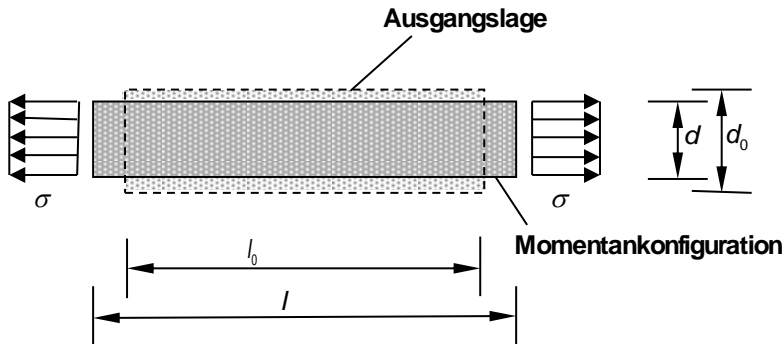
Das Hooke'sche Modell in verallgemeinerter Form lautet für die Scherbeanspruchung:

$$\tau = G \gamma$$

wobei G den Schubmodul bezeichnet.

ii. Zugversuch:

Ein rechteckiger Streifen der Länge l_0 und Breite d_0 wird unter der Längsspannung σ auf die neue Länge l und um die Dehnung ε verlängert.



$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \sigma \\ \sigma_{22} &= \sigma_{33} = 0 \\ \sigma_{ij} &= 0 \text{ für } i \neq j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \varepsilon \\ \varepsilon_{22} &= \varepsilon_{33} = \varepsilon_Q \\ \varepsilon_{ij} &= 0 \text{ für } i \neq j \end{aligned}$$

Abb. 3.2.-2: Einachsige Zugbelastung

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_Q & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_Q \end{bmatrix} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} (\varepsilon + 2\varepsilon_Q) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Längsdehnung:

$$\varepsilon = \frac{l - l_0}{l_0}$$

Querdehnung:

$$\varepsilon_Q = \frac{d - d_0}{d_0}$$

Die Spannungs-Dehnungsbeziehung reduziert sich auf zwei nichttriviale, skalare Gleichungen:

$$\sigma = 2G \left[\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon + 2\varepsilon_Q) \right] \quad (3.2.2)$$

$$0 = 2G \left[\varepsilon_Q + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon + 2\varepsilon_Q) \right] \quad (3.2.3)$$

Aus Gleichung (3.2.3) folgt:

$$(1-2\nu) \varepsilon_Q + \nu(\varepsilon + 2\varepsilon_Q) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varepsilon_Q = -\nu\varepsilon} \quad (3.2.4)$$

Die Gleichung (3.2.4) beschreibt die Querdehnung ε_Q in Abhängigkeit der Längsdehnung ε (Querdehneffekt) und der POISSON-Zahl ν . Einsetzen von Gleichung (3.2.4) in (3.2.2):

$$\sigma = 2G \left[\varepsilon + \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon - 2\nu\varepsilon) \right]$$

$$\Leftrightarrow \sigma = 2G (1+\nu) \varepsilon \quad (3.2.5)$$

Gleichung (3.2.5) beschreibt die Längsspannung σ als Funktion (3.2.5) der Längsdehnung ε . Die Materialkonstante

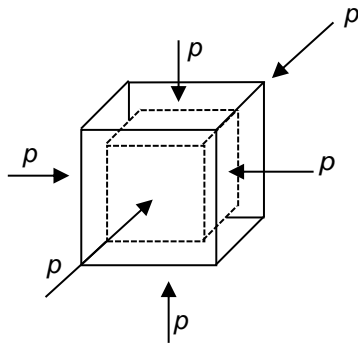
$$E = 2G(1+\nu)$$

ist der Elastizitätsmodul, sodass dann das Ergebnis der Technischen Mechanik folgt:

$$\sigma = E \varepsilon$$

iii. Kompressionsversuch:

-allseitiger Druck (auch hydrostatischer Druck p).



$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = -p \quad \sigma_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

Aus der linearisierten Beziehung für die Volumendehnung

$\varepsilon_v = I_H$ folgt:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \frac{1}{3} \varepsilon_v \quad \varepsilon_{ij} = 0 \text{ für } i \neq j$$

Abb. 3.2-3: Allseitig gleicher Druck p

Einsetzen in die linear elastische Materialgleichung (3.1.1) in Matrixform:

$$\sigma = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} = 2G \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \varepsilon_v & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} \varepsilon_v & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \varepsilon_v \end{bmatrix} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{3} \varepsilon_v \cdot 3 \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

Spurbildung von Gleichung (3.2.6), d. h. Addition der drei nicht trivialen Gleichungen:

$$\text{Sp } \sigma = -3p = 2G \text{ Sp } \mathbf{E} + \frac{2G\nu}{1-2\nu} \varepsilon_v \cdot \text{Sp } \mathbf{1}$$

$$= \varepsilon_v = 3$$

$$-3p = 2G \left(1 + \frac{\nu \cdot 3}{1-2\nu} \right) \varepsilon_v$$

$$-p = \frac{2}{3} \frac{G(1+\nu)}{1-2\nu} \varepsilon_v$$

Definition: Kompressionsmodul

$$K: = \frac{2G}{3} \frac{1+\nu}{1-2\nu}$$

Dann lautet die Elastizitätsbeziehung für den Kompressionszustand:

$$-p = K \varepsilon_v$$

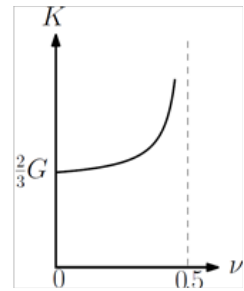
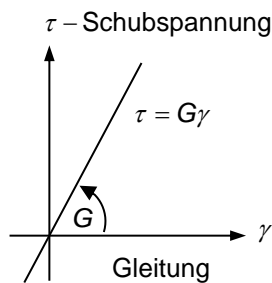


Abb. 3.2-4 : Verlauf K über ν

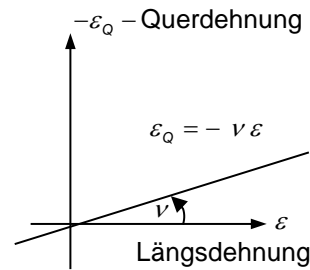
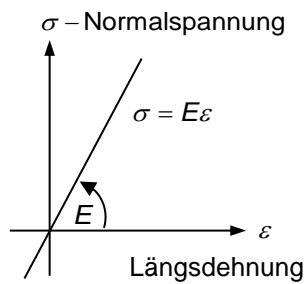
iv. Spannungs- Dehnungsdiagramme

Zwischen Spannung und Dehnung kann für die einzelnen Beanspruchungen – wie unten dargestellt – veranschaulicht werden.

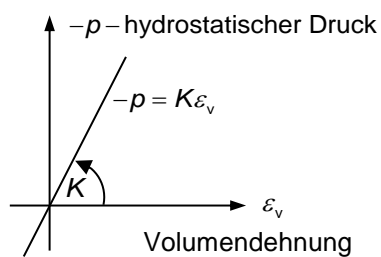
zu i) **Scherversuch:**



zu ii) **Zugversuch:**



zu iii) **Kompressionsversuch:**



Einschränkende Bedingungen:

Aus physikalischen Gründen muss gelten: $G > 0, E > 0, K > 0$

Aus mathematischen Gründen ist: $-1 < \nu < \frac{1}{2}$

Physikalisch gilt im Allgemeinen: $0 < \nu < \frac{1}{2}$

3.3 Inversion der elastischen Materialsteifigkeitsbezeichnungen – Auflösung nach den Verzerrungen

Die elastische Materialsteifigkeitsbeziehung soll invertiert und nach den Verzerrungen aufgelöst werden. Aus der Materialsteifigkeitsbeziehung

$$\boldsymbol{\sigma} = 2G \left[\mathbf{E} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{Sp } \mathbf{E}) \mathbf{1} \right] \quad (3.3.1)$$

folgt durch Umstellung nach dem Verzerrungstensor \mathbf{E} :

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{1-2\nu} (\text{Sp } \mathbf{E}) \mathbf{1} \quad (3.3.2)$$

Die Spurbildung von Gleichung (3.3.1) führt auf:

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \text{Sp } \boldsymbol{\sigma} &= 2G \left[\text{Sp } \mathbf{E} + \frac{3\nu}{1-2\nu} \text{Sp } \mathbf{E} \right] \\ \Leftrightarrow \text{Sp } \mathbf{E} &= \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \text{Sp } \boldsymbol{\sigma}, \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

woraus sich die Elastizitätsbeziehung zwischen der Volumenverzerrung und dem hydrostatischen Druck ergibt:

$$\text{Sp } \mathbf{E} = \frac{1}{3K} \text{Sp } \boldsymbol{\sigma} = -\frac{p}{K}$$

Einsetzen von Gleichung (3.3.3) in (3.3.2):

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= \frac{1}{2G} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{1-2\nu} \left(\frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} \text{Sp } \boldsymbol{\sigma} \right) \mathbf{1} \\ \Leftrightarrow \mathbf{E} &= \frac{1+\nu}{E} \boldsymbol{\sigma} - \frac{\nu}{E} (\text{Sp } \boldsymbol{\sigma}) \mathbf{1} \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Die Gleichung (3.3.4) repräsentiert die elastische Nachgiebigkeitsbeziehung. In ausführlicher Komponentenschreibweise lautet die Tensorgleichung (3.3.4):

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{bmatrix} = \frac{1+\nu}{E} \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix} - \frac{\nu}{E} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3.5)$$

Die sechs Komponentengleichungen sind in Einzeldarstellung:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{11} &= \frac{1}{E} [\sigma_{11} - \nu (\sigma_{22} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{22} &= \frac{1}{E} [\sigma_{22} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{33})] \\ \varepsilon_{33} &= \frac{1}{E} [\sigma_{33} - \nu (\sigma_{11} + \sigma_{22})] \end{aligned} \quad (3.3.6)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{12} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{12} = \frac{1}{2G} \sigma_{12} \\ \varepsilon_{13} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{13} = \frac{1}{2G} \sigma_{13} \\ \varepsilon_{23} &= \frac{1+\nu}{E} \sigma_{23} = \frac{1}{2G} \sigma_{23} \end{aligned}$$

Interpretation: Die Normalverzerrungen lassen sich aus drei simultanen Zugversuchen in zueinander orthogonalen Achsrichtungen und anschließender Addition der entsprechenden Verzerrungen zusammensetzen.

3.4 Elastizitätsbeziehung in VOIGT-Notation

In ausführlicher Komponentenschreibweise werden die Verzerrungs- und Spannungstensoren bei den Materialgleichungen als Vektoren geschrieben (VOIGT-Notation). Die Gleichungen (3.3.6 a - f) lauten in Vektor-Matrix-Schreibweise dementsprechend:

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} = \frac{1}{E} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 \\ -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(1+\nu) \end{bmatrix}}_{= \overset{4}{\mathbb{G}} = \mathbf{G}} \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} \quad (3.3.7)$$

Der elastische Nachgiebigkeitstensor $\overset{4}{\mathbb{G}} = \mathbf{G}$ ist ein Tensor 4. Stufe, dessen Komponenten in geeigneter Weise in eine Matrix eingefügt werden. Entsprechend ergibt sich die Materialsteifigkeitsbeziehung der dreidimensionalen, linearen Elastizitätstheorie für isotropes Werkstoffverhalten:

$$\begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \\ \sigma_{23} \end{bmatrix} = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{bmatrix}}_{= \overset{4}{\mathbb{C}}} \begin{bmatrix} \varepsilon_{11} \\ \varepsilon_{22} \\ \varepsilon_{33} \\ 2\varepsilon_{12} \\ 2\varepsilon_{13} \\ 2\varepsilon_{23} \end{bmatrix} \quad (3.3.8)$$

Der elastische Materialsteifigkeitstensor $\overset{4}{\mathbb{C}}$ ist ebenfalls ein Tensor 4. Stufe. In VOIGT-Notation werden seine Komponenten in Matrizenform angeordnet. Beide Materialtensoren sind symmetrisch und die Schubspannung-Gleitungsbeziehungen sind von der Zug-/Druckbeanspruchung entkoppelt.