# Vorbemerkungen und Einleitung

Das Lehr- und Forschungsgebiet „Computational Mechanics“ befasst sich mit dem Entwurf und den Lösungsverfahren für die Modellgleichungen der Mechanik.

Modellgleichungen der Mechanik sind:

| Gleichungstyp | Beispiele |
|---|---|
| gewöhnliche Differentialgleichungen | NEWTONscher Dämpfer $\sigma = \eta \dot{\varepsilon}$<br>Balkenbiegung, Dynamik des Massenpunkts |
| lineare Gleichungssysteme | Statik-Aufgaben der Systeme starrer Körper |
| Ungleichungen | Kontaktaufgaben, Reibung |
| | Lösung mit Fallunterscheidungen |
| Variationsprobleme | Energiemethoden |
| Integralgleichungen | Viskoelastizitätstheorie |
| Gleichungen mit Fallunterscheidungen | klass. Elastoplastizitätstheorie |
| Partielle Differentialgleichungen | Plattenbiegung |

Kontinuierliche Aufgabenstellungen, wie sie stetige Funktionen mathematisch beschrieben, werden diskretisiert, um numerisch aufbereitet werden zu können. Das Differenzenverfahren und die finite Elementmethode sind die bekanntesten Diskretisierungsmethoden.

Computational Mechanics ist ein sehr junger Wissenschaftszweig, der sich im Bereich von Forschung, Entwicklung und industrieller Anwendung der Mechanik sehr stürmisch entwickelt.

Sie ist Grundlage für die Simulation mechanischer Prozesse, d.h. der Berechnung von Bewegungen und Verformungen der materiellen Körper unter dem Einfluss von äußeren Kräften und Momenten.

LINUX ist vorzugsweise das Betriebssystem, das in der Simulation mechanischer Systeme benutzt wird.

# 1 Elemente der Mathematik

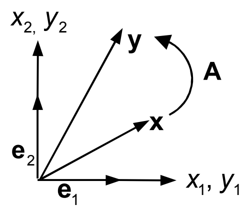
## 1.1 Tensoren und Produkte

### 1.1.1 Lineare Abbildung

Zweistufige Tensoren sind Matrizen, die einen Vektor **x** im linearen Vektorraum wiederum in einen Vektor **y** abbilden und bestimmten Transformationseigenschaften genügen.

$\mathbf{y} = \mathbf{A}\,\mathbf{x}$ :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$




$y_i = A_{ij}\, x_j$

Abb. 1: Lineare Vektortransformation

Summenkonvention: Über Indices, die sich in einem Tensor oder einem Produkt wiederholen, wird summiert. Beispiele hierzu siehe 1. Übung

$$A_{ij}\, x_j$$

Der Index $j$ wiederholt sich: $A_{ij}\, x_j = A_{i1}x_1 + A_{i2}x_2 + A_{i3}x_3$

$$A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$$

### 1.1.2 Spurbildung

Eine wichtige Tensoroperation ist die Spurbildung.

Bildung der Spur $\quad \mathrm{Sp}\,\mathbf{A} = A_{ii} = A_{11} + A_{22} + A_{33}$

↑

(engl. trace) $\quad \mathrm{tr}\,\mathbf{A}$

$$\mathbf{C} = \mathbf{AB} = A_{ik}\, B_{kj} = \begin{bmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . & . & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots \end{bmatrix} = C_{ij}$$

$$\mathrm{Sp}\,\mathbf{C} = C_{kk} = \mathrm{Sp}\,\mathbf{AB} = A_{ik}\, B_{ki} = B_{ki}\, A_{ik} = \mathrm{Sp}\,\mathbf{BA}$$

Fazit: Faktoren **A** und **B** können im Spuroperator Sp vertauscht werden.

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = A_{ij} + B_{ij}$$

$$\text{Sp } \mathbf{C} = \text{Sp } (\mathbf{A} + \mathbf{B}) = A_{kk} + B_{kk} = \text{Sp } \mathbf{A} + \text{Sp } \mathbf{B}$$

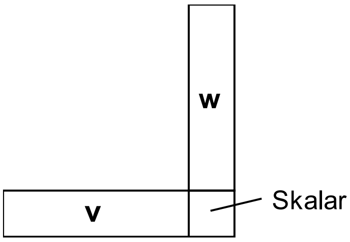
$$\mathbf{D} = \mathbf{ABC} = A_{ij} B_{jk} C_{kl}$$

$$\text{Sp } \mathbf{D} = \text{Sp } \mathbf{ABC} = A_{ij} B_{jk} C_{ki} = C_{ki} A_{ij} B_{jk} = \text{Sp } \mathbf{CAB}$$

Fazit: Zyklische Vertauschung der Faktoren $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ und $\mathbf{C}$ im Spuroperator.

### 1.1.3 Produkte von Vektoren und Tensoren

**Skalarprodukt** (Punktprodukt oder CAYLEIGHsches Produkt) zweier Vektoren $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$



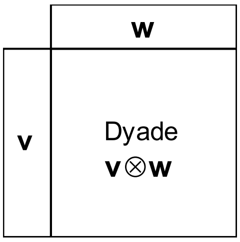

$\mathbf{v} \bullet \mathbf{w}$ oder $(\mathbf{v}, \mathbf{w})$ symbolische

$v_i\ w_i$ Index-

Schreibweise

Indizes werden kursiv geschrieben, da sie zu Vektorkomponenten gehören.

**Dyadisches Produkt** zweier Vektoren (Tensorprodukt zweier Vektoren)




$\mathbf{v} \otimes \mathbf{w}$ oder $\mathbf{vw}$ (ohne Punkt) $\mathbf{vw}^T$

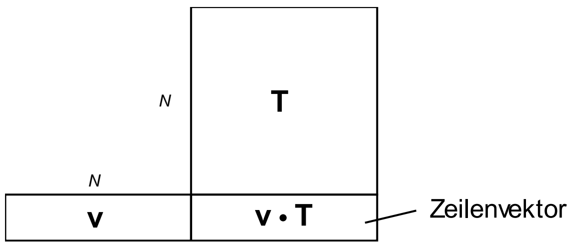
$v_i\ w_j$

Spannungskomponenten

↓

Beispiel: $\boldsymbol{\sigma} = \sigma_{ij} \underbrace{\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j}_{Dyade}$

**Vektorprodukt von Vektor v und Tensor T**

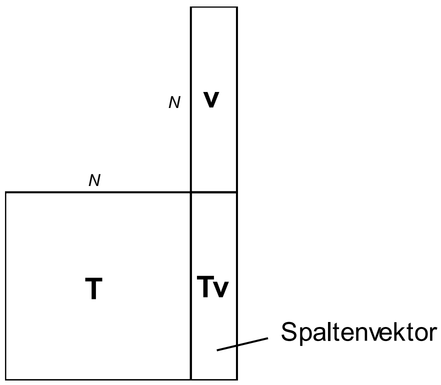



$\mathbf{v} \bullet \mathbf{T}$ oder $\mathbf{v}^T\mathbf{T}$

$v_i\ T_{ij}$ oder $\sum_{i=1}^{N} v_i\ T_{ij}$ Indexschreibweise mit Summenzeichen

Doppelte Indizes des Tensors $T_{ij}$ werden kursiv geschrieben.

**Vektorprodukt von Tensor und Vektor** (Anwendung eines Tensors auf einen Vektor)



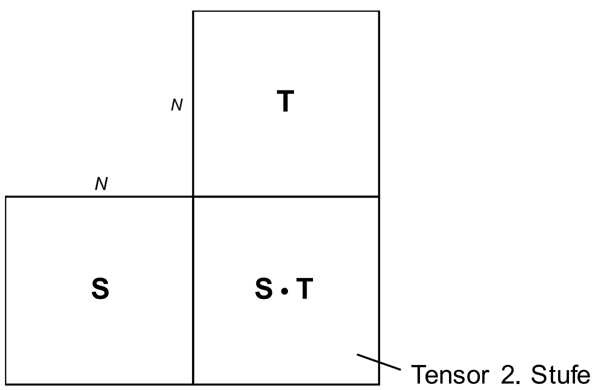

$\mathbf{T} \bullet \mathbf{v}$ oder $\mathbf{Tv}$

$T_{ij}\ \mathrm{v}_j$ oder $\sum_{j=1}^{N} T_{ij}\ v_j$ Indexschreibweise mit Summenzeichen

Beispiel: Spannungstensor $\boldsymbol{\sigma}$ bildet Normalenvektor $\mathbf{n}$ in Spannungsvektor $\mathbf{t}$ ab.

$t_i = \sigma_{ij}\ n_j$ Spannungsvektor

**Tensorprodukt zweier Tensoren** (einfaches Skalarprodukt)




$\mathbf{S} \bullet \mathbf{T}$ oder $\mathbf{ST}$

$S_{ij}\ T_{jk}$ oder $\sum_{j=1}^{N} S_{ij}\ T_{jk}$ Indexschreibweise mit Summenzeichen

**Doppeltes Skalarprodukt** zweier Tensoren (Doppelpunkt-Produkt)

$$\mathbf{S} : \mathbf{T} = \sum_i \left( \sum_k S_{ik}\ T_{ki} \right) = \mathrm{Sp}\,\mathbf{ST}$$

**Vektorprodukt** zweier Vektoren (Kreuzprodukt)

$$\mathbf{v} \times \mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{bmatrix} = \mathbf{e}_x \left( v_y\, w_z - v_z\, w_y \right) - \mathbf{e}_y \left( v_x\, w_z - v_z\, w_x \right) + \mathbf{e}_z \left( v_x\, w_y - v_y\, w_x \right) = \begin{bmatrix} v_y\, w_z - v_z\, w_y \\ -v_x\, w_z + v_z\, w_x \\ v_x\, w_y - v_y\, w_x \end{bmatrix}$$

Hinweis: Für die Indexschreibweise des Kreuzprodukts zweier Vektoren wird i. d. R. der LEVI-CIVITA-Tensor (auch Permutationssymbol genannt) $\varepsilon_{ijk}$ eingeführt. In dieser Einführungsveranstaltung wird davon aber kein Gebrauch gemacht.

## 1.2 Charakteristische Gleichung für Tensoren 2. Stufe

Die Eigenwertaufgabe für den Tensor 2. Stufe führt auf die charakteristische Gleichung.

Die Eigenwertaufgabe für den zweistufigen Tensor $\mathbf{A}$ lautet:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\ \mathbf{x} \overset{!}{=} \lambda \mathbf{x} \tag{1.2.1}$$

$$\left( \mathbf{A} - \lambda \mathbf{I} \right)\ \mathbf{x} = \mathbf{0} \tag{1.2.2}$$

homogenes Gleichungssystem (GLS)

wobei der Tensor $\mathbf{A}$ gegeben ist.

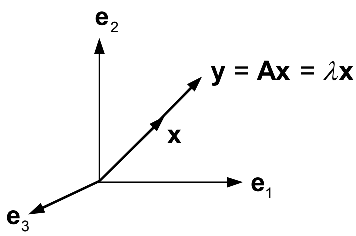



Abb. 1.2-1: Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$ haben dieselbe Richtung

Die Eigenwertaufgabe ergibt ein lineares, homogenes Gleichungssystem zur Lösung für den gesuchten Vektor $\mathbf{x}$. Ausführlich geschrieben lautet das Gleichungssystem (1.2.1):

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \overset{!}{=} \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Die Aufgabenstellung lautet somit: Welcher Vektor **x** wird durch Anwenden der Matrix **A** als Vielfaches $\lambda$ in sich selbst abgebildet?

Gesucht: **x**, $\lambda$ (Eigenvektor **x**, Eigenwert $\lambda$ )

Lösung des homogenen Gleichungssystems (1.2.2) in Komponentenschreibweise:

$$\begin{bmatrix} A_{11}-\lambda & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22}-\lambda & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33}-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Das homogene Gleichungssystem hat die triviale Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .

Damit dieses homogene Gleichungssystem nicht nur trivial lösbar ist (eine einzige Lösung hat), muss die Determinante der Koeffizientenmatrix $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I})$ gleich null sein.

$$\det\,(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{I}) \overset{!}{=} 0 \tag{1.2.3}$$

Auswertung der Determinanten mit der Regel von SARRUS (LAPLACEscher Entwicklungssatz für Determinanten mit drei Zeilen und drei Spalten):

$$(A_{11}-\lambda)(A_{22}-\lambda)(A_{33}-\lambda) + A_{12}A_{23}A_{31} + A_{13}A_{21}A_{32} - A_{31}(A_{22}-\lambda)A_{13} - A_{32}A_{23}(A_{11}-\lambda) - (A_{33}-\lambda)A_{21}A_{12} = 0$$

Diese Gleichung stellt bei gegebener Matrix **A** ein Polynom $p(\lambda)$ dritten Grades für die Unbekannte $\lambda$ dar.

Hinweis: Polynome bis zum Grad 4 sind mit den Formeln von CARDANO geschlossen lösbar (GALOIS, fr. Mathematiker, Anfang 19. Jh.)

$$p(\lambda) := -\lambda^3 + \underbrace{(A_{11} + A_{22} + A_{33})}_{= I_{\mathbf{A}}} \lambda^2 - \underbrace{(A_{11}\,A_{22} + A_{22}\,A_{33} + A_{33}\,A_{11} - A_{13}\,A_{31} - A_{23}\,A_{32} - A_{21}\,A_{12})}_{= II_{\mathbf{A}}} \lambda$$

$$+ \underbrace{(A_{11}\,A_{22}\,A_{33} + A_{12}\,A_{23} A_{31} + A_{13}\,A_{21}\,A_{32} - A_{11}\,A_{23}\,A_{32} - A_{13}\,A_{22}\,A_{31} - A_{12}\,A_{21}\,A_{33})}_{= III_{\mathbf{A}}} = 0$$

Da die Eigenwerte für den Tensor **A** unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems sind, müssen die Koeffizienten (Invarianten) $I_{\mathbf{A}}$, $II_{\mathbf{A}}$ und $III_{\mathbf{A}}$ vom Koordinatensystem unabhängig sein also unveränderlich bezüglich Drehungen desselben. Denn unabhängig von der Wahl des Koordinatensystems müssen sich immer die gleichen Eigenwerte $\lambda_i$ ergeben.

Die Invarianten (Grundinvarianten) des Tensors **A** lauten also:

Erste Invariante (lineare Invariante):

$$I_{\mathbf{A}} := A_{11} + A_{22} + A_{33} \equiv \mathrm{Sp}\mathbf{A} \tag{1.2.4}$$

Zweite Invariante (quadratische Invariante):

$$II_{\mathbf{A}} := A_{11}\,A_{22} + A_{22}\,A_{33} + A_{33}\,A_{11} - A_{13}\,A_{31} - A_{23}\,A_{32} - A_{21}\,A_{12} \equiv \frac{1}{2}\left[(\mathrm{Sp}\mathbf{A})^2 - \mathrm{Sp}\mathbf{A}^2\right] \quad (1.2.5)$$

Dritte Invariante (kubische Invariante):

$$III_{\mathbf{A}} := A_{11}\,A_{22}\,A_{33} + A_{12}\,A_{23}\,A_{31} + A_{13}\,A_{21}\,A_{32} - A_{11}\,A_{23}\,A_{32} - A_{13}\,A_{22}\,A_{31} - A_{12}\,A_{21}\,A_{33} \equiv \det\mathbf{A} \quad (1.2.6)$$

Die dritte Invariante $III_{\mathbf{A}}$ ist gerade gleich der Determinanten des Tensors **A**. Man kann zeigen, dass sie auch gemäß der Beziehung $III_{\mathbf{A}} = \frac{1}{3}\left[I_{\mathbf{A}^3} + 3\,I_{\mathbf{A}}\,II_{\mathbf{A}} - I_{\mathbf{A}}^3\right]$ berechnet werden kann.

Kurzschreibweise für die Eigenwertgleichung (charakteristisches Polynom):

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + I_{\mathbf{A}}\,\lambda^2 - II_{\mathbf{A}}\lambda + III_{\mathbf{A}} = 0 \quad (1.2.7)$$

Alle Koeffizienten $I_{\mathbf{A}}$, $II_{\mathbf{A}}$ und $III_{\mathbf{A}}$ des charakteristischen Polynoms sind reell. Damit hat $p(\lambda)$ mindestens eine reelle Nullstelle (und 2 konjugiert komplexe) oder drei reelle Nullstellen (die u. U. mehrfach sein können).

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms werden Eigenwerte oder auch Hauptwerte (z. B. Hauptspannungen) $\lambda_i$ genannt. Zu jedem Eigenwert $\lambda_i$ gehört ein Eigenvektor $x_i$, der nach Einsetzen von $\lambda_i$ in das homogene Gleichungssystem daraus berechnet werden kann (siehe Übung). Symmetrische Tensoren **A** besitzen 3 reelle Nullstellen $\lambda_i$ (Eigenwerte) und dazu orthogonale Eigenvektoren $\mathbf{x}_i$ (siehe Übung), die üblicherweise zu Einheitsvektoren $\mathbf{n}_i = \frac{\mathbf{x}_i}{|\mathbf{x}_i|}$ normiert werden. Sie geben die Hauptrichtungen (z. B. Richtung der Hauptspannungen) im Koordinatensystem an.

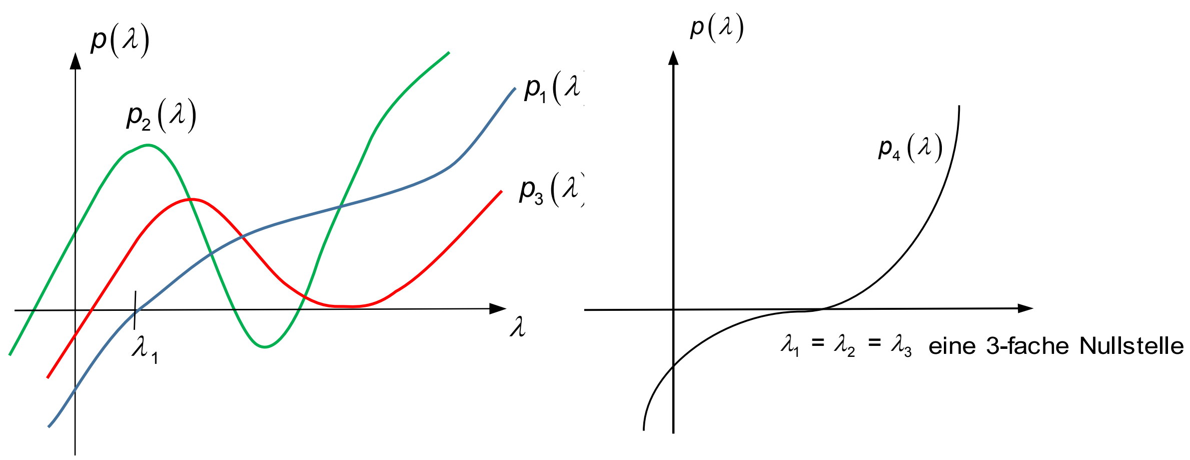



Abb. 1.2-2: Mögliche Verläufe und Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$ bzw. eines Polynoms 3.Grads

Die Nullstellen des charakteristischen Polynoms werden Eigenwerte $\lambda_i$ genannt. Zu jedem Eigenwert gehört ein Eigenvektor $\mathbf{x}_i$ (siehe Mathematik).

## 1.3 Satz von CAYLEY-HAMILTON

Der Satz von CAYLEY-HAMILTON zeigt eine wichtige mathematische Beziehung zwischen den Potenzen $\mathbf{A}^n$ eines Tensors $\mathbf{A}$ mit $n = 1, 2, 3, \ldots$ .

Aus der Eigenwertgleichung

$$-\lambda^3 + I_{\mathbf{A}}\ \lambda^2 - II_{\mathbf{A}}\ \lambda + III_{\mathbf{A}} = 0 \tag{1.3.1}$$

und der Definitionsgleichung $\mathbf{Ax} = \lambda\mathbf{x}$ für die Eigenwertaufgabe ergibt sich die CAYLEY-HAMILTON Beziehung (Satz von CAYLEY-HAMILTON).

Satz: Es seien $I_{\mathbf{A}}$, $II_{\mathbf{A}}$ und $III_{\mathbf{A}}$ die Invarianten des Tensors $\mathbf{A}$. Dann gilt:

$$-\mathbf{A}^3 + I_{\mathbf{A}}\ \mathbf{A}^2 - II_{\mathbf{A}}\ \mathbf{A} + III_{\mathbf{A}}\ \mathbf{I} = \mathbf{0} \tag{1.3.2}$$

Merkregel: Der Satz von CAYLEY-HAMILTON besagt also, dass jeder 2. stufige Tensor $\mathbf{A}$ der eigenen charakteristischen Gleichung $-\lambda^3 + I_{\mathbf{A}}\ \lambda^2 - II_{\mathbf{A}}\ \lambda + III_{\mathbf{A}} = 0$ genügt.

Beweis: Im Hauptachsensystem gilt für die Darstellung des Tensors $\mathbf{A}$ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \qquad \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \lambda_3$$

in vollständiger Notation des Tensors $\mathbf{A}$

$$\mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha\ \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \tag{1.3.3}$$

mit $\mathbf{n}_\alpha$ als der Eigenvektor zum Eigenwert $\lambda_\alpha = \lambda_i$ und $\alpha =$ 1 , 2, 3 als Laufvariable über die 3 Hauptwerte und Hauptrichtungen mit den Einheitsnormalenvektoren $\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n}_2$ und $\mathbf{n}_3$ in Richtung des Hauptachsenkoordinatensystems.

Für die n-te Potenz gilt das Corollar (Zwischenergebnis):

$$\mathbf{A}^n = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^n\ \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha$$

Wird der Tensor $\mathbf{A}$ potenziert zu $\mathbf{A}^n$, so betrifft das nur die Eigenwerte $\lambda_\alpha$. Die Eigenvektoren $\mathbf{n}_\alpha$ bleiben unverändert.

Z. B. $$\mathbf{A}^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha\ \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha \cdot \sum_{\beta=1}^{3} \lambda_\beta\ \mathbf{n}_\beta \otimes \mathbf{n}_\beta \tag{1.3.4}$$

$$\mathbf{A}^2 = \sum_{\substack{\alpha=1\\ \beta=1}}^{3} \lambda_\alpha \lambda_\beta \; \mathbf{n}_\alpha \otimes \underbrace{\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta}_{\mathbf{I} = \delta_{\alpha\beta}} \otimes \mathbf{n}_\beta = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \; \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha$$

mit $\delta_{\alpha\beta}$ als Symbol für das Kronecker – Delta und $\mathbf{I}$ als Einheitsmatrix. Es gilt:

$$\mathbf{n}_\alpha \cdot \mathbf{n}_\beta = \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1 & \text{für } \alpha = \beta \\ 0 & \text{für } \alpha \neq \beta \end{cases}$$

Beweis durch vollständige Induktion!

- 
- 
- 

$$\mathbf{A}^n = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{A}^n = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^n \; \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha$$

Für $n = 3$: $\quad \mathbf{A}^3 = \mathbf{A}^2 \; \mathbf{A} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^3 \; \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha$ (1.3.5)

Multiplikation von Gleichung (1.3.1) mit der Dyade der Eigentensoren $\mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha$ und Summation:

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \left( -\lambda_\alpha^3 + I_{\mathbf{A}} \; \lambda_\alpha^2 - II_{\mathbf{A}} \; \lambda_\alpha + III_{\mathbf{A}} \; \lambda_\alpha^0 \right) \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{0}$$

mit dem Nulltensor $\mathbf{0}$.

Ausmultiplizieren:

$$-\sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^3 \; \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha + I_{\mathbf{A}} \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^2 \; \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha - II_{\mathbf{A}} \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha \; \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha + III_{\mathbf{A}} \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_\alpha^0 \; \mathbf{n}_\alpha \otimes \mathbf{n}_\alpha = \mathbf{0}$$

Einsetzen von Gleichungen (1.3.3) bis (1.3.5) ergibt:

$$\boxed{-\mathbf{A}^3 + I_{\mathbf{A}} \; \mathbf{A}^2 - II_{\mathbf{A}} \; \mathbf{A} + III_{\mathbf{A}} \; \mathbf{I} = \mathbf{0}} \qquad (1.3.6)$$

w. z. b. w.

Die CAYLEY-HAMILTON-Gleichung besagt, dass die Bedingung (1.3.1) der charakteristischen Gleichung nicht nur von den Eigenwerten $\lambda_\alpha$, sondern auch vom symmetrischen Tensor $\mathbf{A}$ selbst erfüllt wird.

Fazit: Die dritte Potenz $\mathbf{A}^3$ des Tensors $\mathbf{A}$ kann durch die nullte, erste und zweite Potenz sowie durch die Invarianten ersetzt werden – siehe (1.3.6).

$$\mathbf{A}^3 = I_{\mathbf{A}}\ \mathbf{A}^2 - II_{\mathbf{A}}\ \mathbf{A} + III_{\mathbf{A}}\ \mathbf{I} \tag{1.3.7}$$

Allgemein gilt für jede Potenz $n = \ \geq 3$ des Tensors $\mathbf{A}$, dass sie durch die 0., 1., und 2. Potenz ausgedrückt werden kann.

Z. B. $n = 4$: $\mathbf{A}^4 = I_{\mathbf{A}}\ \mathbf{A}^3 - II_{\mathbf{A}}\ \mathbf{A}^2 + III_{\mathbf{A}}\ \mathbf{A}$

Ersetzen der dritten Potenz $\mathbf{A}^3$ durch die rechte Seite von Gleichung (1.3.7).

$$\mathbf{A}^4 = \left(I_{\mathbf{A}}^2 - II_{\mathbf{A}}\right)\mathbf{A}^2 + \left(III_{\mathbf{A}} - I_{\mathbf{A}}\ II_{\mathbf{A}}\right)\ \mathbf{A} + I_{\mathbf{A}}\ III_{\mathbf{A}}\ \mathbf{I}$$