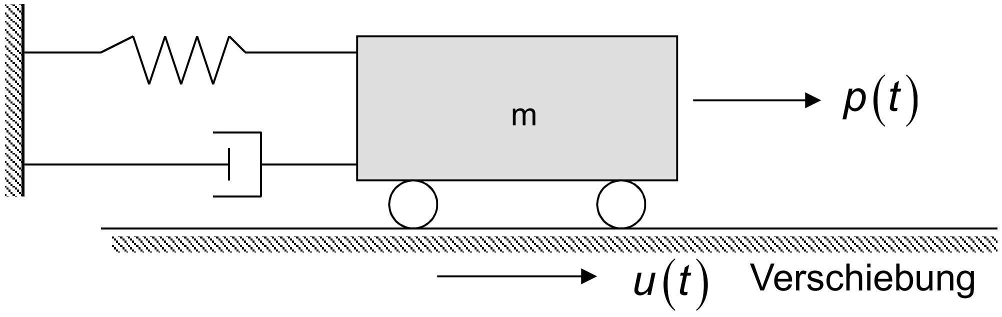
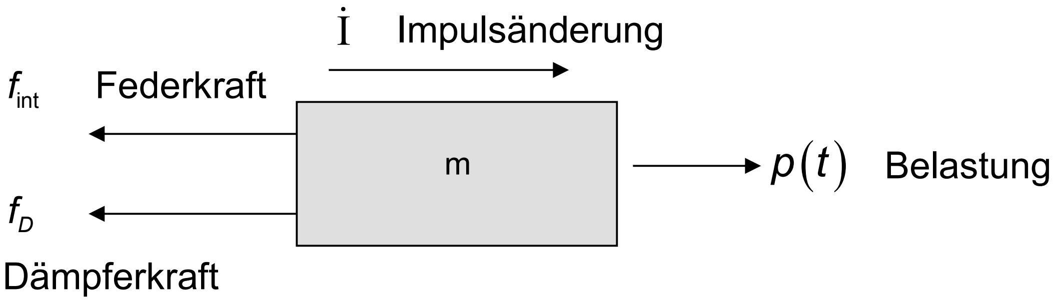
Untersuchungen zur kritischen Zeitschrittlänge bei der expliziten Zeitintegration der Bewegungsgleichungen mit finiten Elementen

Bewegungsgleichung

- System mit einem Freiheitsgrad: Einmassenschwinger



- Freikörperbild der Masse m



Prinzip von d'Alembert

- Dynamisches Gleichgewicht: Impulsbilanz

(Impulsbilanz) $\dot{I} = \sum \text{Kräfte} = p(t) - f_D - f_{\text{int}}$

$$\boxed{\dot{I} + f_D + f_{\text{int}} = p(t)}$$

- Impulsänderung $\dot{I} = m\,\ddot{u}$; $\ddot{u} = \dfrac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2}$ Beschleunigung
- Viskose Dämpfung $f_D = c\,\dot{u}$; $\dot{u} = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ Geschwindigkeit
- Lineare Feder $f_{\text{int}} = k\,u$ u Verschiebung

k: Federsteifigkeit

c: Dämpfungszahl

Bewegungsgleichung für lineare Elastizität

- Gewöhnliche Differentialgleichung 2. Ordnung

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + ku = p(t)}$$

  Nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichung

$$\boxed{m\ddot{u} + c\dot{u} + f_{\text{int}}(u) = p(t)}$$

- Analytische Lösungen, z.B. infolge harmonischer Belastung $p(t) = p_0 \sin \Omega t$

  - Kreisfrequenz: $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ für Einmassenschwinger
  - Eigenfrequenz: $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{T}$ T=Periode
  - Dämpfungsverhältnis: $\xi = \dfrac{c}{c_{krit}} = \dfrac{c}{2m\omega}$ Frequenzverhältnis: $\beta = \dfrac{\Omega}{\omega}$
  - Kreisfrequenz der gedämpften Schwingung $\omega_D = \sqrt{1-\omega^2}$

Lineare Systeme unter harmonischer Belastung

- Lösungsansatz

$$u(t) = \underbrace{u_0 \cos \omega t + \frac{\dot{u}_0}{\omega} \sin \omega t}_{\text{homogene Lösung}} + \underbrace{\underbrace{\frac{p_0}{k} \frac{1}{1-\beta^2}}_{\text{eingeschwungene Lsg.}} (\sin \Omega t - \underbrace{\beta \sin \Omega t}_{\text{transiente Lsg.}})}_{\text{partikuläre Lösung}}$$

- Anfangsbedingungen: $u_0 =$ Anfangsverschiebung

  $\dot{u}_0 =$ Anfangsgeschwindigkeit

- Kenngrößen

  $\frac{p_0}{k}$ = statische Verschiebung

  $\frac{1}{1-\beta^2}$ = dynamischer Vergrößerungsfaktor des ungedämpften Schwingers

Integration der Bewegungsgleichung

- Nichtlineare Probleme können fast nur mit numerischen Verfahren gelöst werden

- Anwendung numerischer Zeitintegrationsverfahren liefert Näherungslösungen für Verschiebungen, Geschwindigkeit und Beschleunigungen

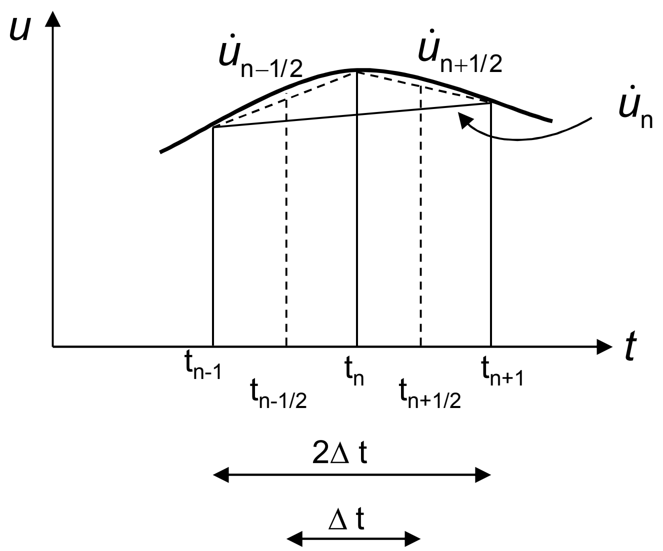
- Unterscheidung in implizite und explizite Verfahren

	Implizite Verfahren	**Explizite Verfahren**
Anwendung	Statische und quasi-statische Belastungen	Dynamische Belastungen Kurzzeit-Ereignisse, z.B. Crash
Merkmale	Rechenintensiv Beliebige Zeitschrittweite	Rechenzeit je Zeitschritt gering Zeitschritt $<$ kritischer Zeitschritt

- Explizite Verfahren erfüllen die Bewegungsgleichung am aktuellen Zeitpunkt t_n, während implizite Verfahren die Bewegungsgleichung am neuen Zeitpunkt t_{n+1} nutzen

Zentrales Differenzenverfahren

- Diskretisierung



- Differenzenformel

Geschwindigkeit (1)

$$\dot{u}_n = \frac{1}{2\Delta t}\left(u_{n+1} - u_{n-1}\right)$$

Beschleunigung

$$\ddot{u}_n = \frac{1}{\Delta t}\left(\dot{u}_{n+1/2} - \dot{u}_{n-1/2}\right) = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{u_{n+1} - u_n}{\Delta t} - \frac{u_n - u_{n-1}}{\Delta t}\right)$$

$$= \frac{1}{(\Delta t)^2}\left(u_{n+1} - 2u_n + u_{n-1}\right) \qquad (2)$$

- Gleichgewicht zum Zeitpunkt t_n des Mehrmassenschwingers

$$\mathbf{M}\,\ddot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{C}\,\dot{\mathbf{u}}_n + \mathbf{K}\,\mathbf{u}_n = \mathbf{P}_n \qquad (3)$$

Einsetzen von (1) und (2) in (3):

$$\boxed{\left(\mathbf{M} + \frac{1}{2}\Delta t\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_{n+1} = \Delta t^2\mathbf{P}_n - \left(\Delta t^2\mathbf{K} - 2\mathbf{M}\right)\mathbf{u}_n - \left(\mathbf{M} - \frac{\Delta t}{2}\mathbf{C}\right)\mathbf{u}_{n-1}}$$

Zentrales Differenzenverfahren

- Vereinfachung: Konzentrierte Massenmatrix und massenproportionale Dämpfungsmatrix führt auf Diagonalmatrizen **M** und **C**
  - ➢ Inversion der Diagonalmatrizen **M** und **C** ist trivial

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & m_2 & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & m_n \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{m_1} & 0 & \dots & & 0 \\ 0 & \frac{1}{m_2} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & 0 \\ 0 & & \dots & 0 & \frac{1}{m_n} \end{bmatrix}$$

- Anfangsbedingungen u_0 und $\dot{u}_0$ zum Zeitpunkt $t = 0$
- Bestimmung von $\ddot{u}_0$ mit Gleichgewichtsbedingungen
- Bestimmung des Hilfswerts mit (1) und (2) zur Initialisierung des Zeitintegrationsverfahrens

$$u_{-1} = u_0 - \Delta t\,\dot{u}_0 + \frac{\Delta t^2}{2}\ddot{u}_0$$

- Das zentrale Differenzenverfahren ist bedingt stabil, d. h. die Größe des Zeitschnitts ist beschränkt

Stabilität des zentralen Differenzenverfahrens

- Entkopplung des linearen Gleichungssystems durch Transformation in den Modalraum

$$\phi^{T}\,\mathbf{M}\phi = 1$$

$$\phi^{T}\,\mathbf{K}\phi = [\mathrm{diag}(\omega_i^2)]$$

$$\phi^{T}\,\mathbf{C}\phi = [\mathrm{diag}(2\,\xi\omega_i^2)]$$

ϕ = Modalmatrix mit Eigenvektoren als Spaltenvektoren

1 = Einheitsmatrix

für geschwindigkeitsproportionale, orthogonale Dämpfung

- Bewegungsgleichung in Modalkoordinate **x**: $\mathbf{u} = \phi\mathbf{x}$

$$\ddot{x} + 2\,\xi\,\omega\dot{x} + \omega^2 x = \underbrace{\phi^{T}\,p}_{=y},$$

- Zentrale Differenzen für Geschwindigkeit und Beschleunigung in Modalkoordinaten:

$$\dot{x}_n = \frac{x_{n+1} - x_{n-1}}{2\,\Delta t}$$

$$\ddot{x}_n = \frac{x_{n+1} - 2x_n + x_{n-1}}{\Delta t^2}$$

Stabilität des zentralen Differenzenverfahrens

- Einsetzen der Differenzenformeln für $\dot{x}_n$ und $\ddot{x}_n$ in Bewegungsgleichung zum Zeitpunkt t_n :

$$x_{n+1} = \frac{2-\omega^2\Delta t^2}{1+2\xi\omega\Delta t} x_n - \frac{1-2\xi\omega\Delta t}{1+2\xi\omega\Delta t} x_{n-1} + \frac{\Delta t^2}{1+2\xi\omega\Delta t} y_n$$

$$x_n = x_n$$

- Matrizenschreibweise der diskretisierten Bewegungsgleichung im Zustandsraum

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2-\omega^2\Delta t^2}{1+2\xi\omega\Delta t} & -\frac{1-2\xi\omega\Delta t}{1+2\xi\omega\Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ x_{n-1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{1+2\xi\omega\Delta t} \\ 0 \end{bmatrix} y_n$$

$$\hat{\mathbf{x}}_{n+1} = \mathbf{A} \quad \hat{\mathbf{x}}_n + \mathbf{L} \quad y_n$$

- System gekoppelter Gleichungen für Vorwärtsintegration
  A : Zeitintegrationsoperator der diskretisierten Bewegungsgleichung

- Für m Zeitschritte und $y_n = 0$

$$\hat{\mathbf{x}}_m = \mathbf{A}^m \hat{\mathbf{x}}_0$$ Untersuchung von **A** erforderlich!

Stabilität des zentralen Differenzenverfahrens

Durch Ähnlichkeitstransformation kann die die reelle, nicht symmetrische Matrix $\mathbf{A}$ dargestellt werden als

- $\mathbf{A} = \mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{P}^{-1}$
  mit der Matrix $\mathbf{P}$ der Eigenvektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ von $\mathbf{A}$ gemäß
  $\mathbf{P} = [\mathbf{v}_1,\ \mathbf{v}_2]$ und der Diagonalmatrix $\mathbf{J}$ als Jordanform mit den Eigenwerten λ_1, λ_2 gemäß

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$$

Für die m-te Potenz der Matrix $\mathbf{A}^m$ gilt: $\mathbf{A}^m = \left(\mathbf{P}\,\mathbf{J}\,\mathbf{P}^{-1}\right)^m = \mathbf{P}\,\mathbf{J}^m\,\mathbf{P}^{-1}$

Siehe: D. S. Watkins: Fundamentels of Matrix Computations, John Wiley, 1991, Seite 2255, theorem 4.4.4.

- Spektralradius = ρ ($\mathbf{A}$) = größter Eigenwert von $\mathbf{A}$ = max (diag ($\mathbf{J}$))

Spektrale Stabilität:

$$\mathbf{J}^m \quad \text{ist} \quad \text{beschränkt, falls} \quad \left|\rho(\mathbf{A})\right| \le 1 \quad \text{wenn} \quad m \to \infty$$

Stabilität des zentralen Differenzenverfahrens

- Eigenwerte von **A** im Falle eines ungedämpften Systems

$$\mathrm{Det}\left(\begin{vmatrix} 2\text{-}\omega^2\Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - \lambda \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\right) \overset{!}{=} 0$$

$$-\left(2-\omega^2\Delta t^2-\lambda\right)\cdot\lambda+1=0$$

$$\lambda_{1,\,2}=\frac{2-\omega^2\Delta t^2}{2}\pm\sqrt{\frac{\left(2-\omega^2\Delta t^2\right)^2}{4}-1}$$

- Kritischer Zeitschritt:

$|\lambda|\leq 1$ gegeben: $\boxed{\Delta t\leq\frac{2}{\omega_{max}}}$

Stabilität des zentralen Differenzenverfahrens

- Im Falle eines gedämpften Systems gilt für den Zeitschritt:

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}}\left(\sqrt{1+\xi^2}-\xi\right)}$$

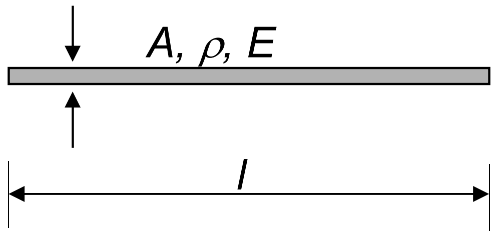
  - ➢ Daraus folgt: Die Dämpfung reduziert die kritische Zeitschrittweite.

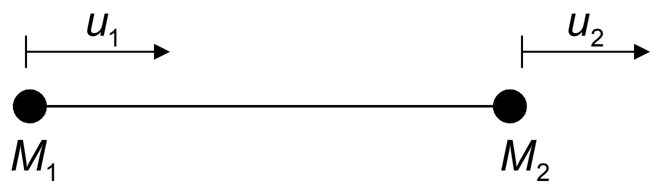
- Für **veränderliche Zeitschrittweiten**:

$$\Delta t_i^2 \leq \frac{4\delta_i}{\omega_i^2} \qquad \text{mit} \qquad \delta_i = \frac{\Delta t_i}{\Delta t_{i-1}} \qquad 0 \leq \delta_i \leq 1$$

- Das Zeitintegrationsverfahren ist stabil, falls die Zeitschrittweite abnimmt.
- Der Zeitschritt wird beschränkt durch die größte Eigenfrequenz der Strukturen.
- Bei Schalenelementen können Biege- und Membranmoden auftraten. Die Frequenz der Membranmode beschränkt gewöhnlich den kritischen Zeitschritt, da die Membransteifigkeit wesentlich größer ist als die Biegesteifigkeit.

Kritischer Zeitschritt eines Dehnstabelements (kontinuierliches System)





Diskretisierung der kontinuierlichen Masse im Sinne der konzentrierten Massenverteilung:

$$M_1 = M_2 = \frac{1}{2}\rho A l$$

- Steifigkeitsmatrix und Massenmatrix

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{M} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\rho A l & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\rho A l \end{bmatrix}$$

- Eigenfrequenzen ω

$$\mathrm{Det}\left(\frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\rho A l & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\rho A l \end{bmatrix}\right) \overset{!}{=} 0 \qquad \omega_{max}^2 = 4\frac{E}{l^2\rho} \quad , \qquad \omega_{max} = \frac{2}{l}\sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Kritischer Zeitschritt eines Dehnstabelements

- Wellenausbreitungsgeschwindigkeit:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- Größte Eigenfrequenz

$$\omega_{\mathsf{max}} = 2\frac{c}{l}$$

- Kritische Zeitschrittweite: $\Delta t_{\text{crit}} = \frac{l}{c}$

$$\boxed{\Delta t \leq \frac{l}{c} = \Delta t_{\text{crit}}}$$

Courant-Friedrichs-Levy-Kriterium

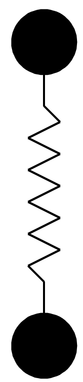
Die Zeitspanne, die eine Welle benötigt, um einen Stab mit der Länge L zu durchlaufen.

Schwierigkeit: Mit kleiner werdender Elementlänge l geht der Zeitschritt Δt gegen null ($\Delta t \to 0$)

Kritischer Zeitschritt eines Feder-Masse-Systems

Problem : Diskretes System besitzt keine endliche Länge zur Bestimmung des kritischen Zeitschritts

Betrachtung der freien Schwingung einer Feder mit den Knotenmassen m_1 und m_2



$$\begin{bmatrix} k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_2 \end{bmatrix} - \omega^2 \begin{bmatrix} m_1 & 0 \\ 0 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} k - \omega^2 m_1 & -k \\ -k & k - \omega^2 m_2 \end{bmatrix} \overset{!}{=} 0 \quad \rightarrow \quad \omega_{max}^2 = \frac{k\left(m_1 + m_2\right)}{m_1 \cdot m_2}$$

<u>Vergleich mit Stabelement:</u>

$$\left.\begin{aligned} &\Delta t \leq \frac{l}{c} \\ &\omega_{max} = 2\frac{c}{l} \end{aligned}\right\} \quad \Delta t \leq \frac{2}{\omega_{max}} \quad \rightarrow \quad \Delta t = 2\sqrt{\frac{m_1\, m_2}{m_1 + m_2}\frac{1}{k}}$$