Organisatorisches

Mittwoch, 11. November 2020 10:05

4 Hausübungen zum Bearbeiten

Zu finden auf der Website unter dem Punkt Hausübungen
(Institut für Mechanik --> Numerische Mechanik --> Lehre --> Computational Mechanics)

Abgabe der Ausarbeitungen als pdf an: marvin.nahrmann@uni-kassel.de
Name und Matrikelnummer nicht vergessen!

Abgabe der 1. Hausübung: 25.11.2020

Aufgabe 1

Mittwoch, 11. November 2020 10:05

Aufgabe 1:

Weisen Sie nach, dass die Invarianten durch die Beziehungen

i) $II_{\mathbf{A}} = \frac{1}{2}[(\mathrm{Sp}\,\mathbf{A})^2 - \mathrm{Sp}(\mathbf{A}^2)]$

ii) $III_{\mathbf{A}} = \det\mathbf{A}$

berechnet werden können.

i)

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \qquad \underline{\underline{A}}^2 = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

$\hookrightarrow (\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}})(\mathrm{Sp}\,\underline{\underline{A}})$ $\qquad\hookrightarrow \mathrm{Sp}(\underline{\underline{A}}^2)$

ii)

$$\underline{\underline{III}}_A = \det \underline{\underline{A}} = \det \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} = \dots$$

$\Rightarrow$ Vgl. der Berechnungen mit Werten aus $\det(\underline{\underline{A}} - \lambda \underline{\underline{1}}) = 0$ (siehe VL)

Aufgabe 2

Mittwoch, 11. November 2020 10:05

Aufgabe 2:

Berechnen Sie die Invarianten $I_{\mathbf{A}}$, $II_{\mathbf{A}}$ und $III_{\mathbf{A}}$ des Tensors **A** in Abhängigkeit seiner Eigenwerte λ_1, λ_2 und λ_3.

Bisher:

$$\left.\begin{aligned} I_A &:= \operatorname{Sp} \underline{\underline{A}} \\ II_A &:= \frac{1}{2}\left[(\operatorname{Sp} \underline{\underline{A}})^2 - \operatorname{Sp} \underline{\underline{A}}^2\right] \\ III_A &:= \det \underline{\underline{A}} \end{aligned}\right\} \text{abhängig von } \underline{\underline{A}}$$

gesucht:

$$\left.\begin{aligned} I_A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= ? \\ II_A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= ? \\ III_A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) &= ? \end{aligned}\right\} \text{abhängig von } \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$$

$$p(\lambda) := -\lambda^3 + I_1 \lambda^2 - \underline{II}_A \lambda + \underline{III}_A = 0 \qquad (1)$$

$$(\lambda_1 - \lambda)(\lambda_2 - \lambda)(\lambda_3 - \lambda) = 0 \qquad (2)$$

Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ sind Nullstellen des charakteristischen Polynoms $p(\lambda)$

$$\underline{\underline{A}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

Mittwoch, 11. November 2020 10:05

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Beweisen Sie, dass

a) alle Eigenwerte reell sind,

b) die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind und

c) es immer drei paarweise orthogonale normierte Eigenvektoren gibt.

a) Eigenwertproblem $\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda\,\underline{u}$

Komplexer Eigenvektor: $\underline{u} = \underline{v} + i\,\underline{w}$

Komplexer Eigenwert: $\lambda = \eta + i\mu$ $\quad i = \sqrt{-1}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{A}}\underbrace{(\underline{v} + i\,\underline{w})}_{\underline{u}} = \underbrace{(\eta + i\mu)}_{\lambda}\underbrace{(\underline{v} + i\,\underline{w})}_{\underline{u}} \qquad (*)$$

Komplexer konjugierter Eigenvektor: $\bar{\underline{u}} = \underline{v} - i\,\underline{w}$

Komplex konjugierter Eigenwert: $\bar{\lambda} = \eta - i\mu$

Multiplikation der Gl. (*) mit komplex konjugiertem Eigenvektor

$$\Rightarrow \bar{\underline{u}}^T\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \bar{\underline{u}}^T\lambda\,\underline{u}$$

... Klammern ausmultiplizieren

... Imaginärteil fällt weg

Aufgabe 3

Mittwoch, 11. November 2020 10:05

Aufgabe 3:

Gegeben sei eine symmetrische Matrix $\mathbf{A} = \mathbf{A}^T$. Beweisen Sie, dass

a) alle Eigenwerte reell sind,

b) die Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten orthogonal sind und

c) es immer drei paarweise orthogonale normierte Eigenvektoren gibt.

b) (1): $\underline{\underline{A}}\,\underline{u}_1 = \lambda_1 \underline{u}_1 \quad | \cdot \underline{u}_2$

(2): $\underline{\underline{A}}\,\underline{u}_2 = \lambda_2 \underline{u}_2 \quad | \cdot \underline{u}_1$

$\Rightarrow$ zu zeigen: $\underline{u}_1 \perp \underline{u}_2$ falls $\underline{\underline{u}_1 \cdot \underline{u}_2 = 0}$

$\longrightarrow$ (1) und (2) miteinander verrechnen

c)

Fall 1: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda \; , \; \lambda_3 \neq \lambda$

Fall 2: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

Fall 3: $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{u} = \lambda \underline{u}$

Fall 1: $\underline{u} = \alpha \underline{u}_1 + \beta \underline{u}_2$ $\qquad \alpha, \beta, \gamma$: reelle Konstanten

Fall 2: $\underline{u} = \alpha \underline{u}_1 + \beta \underline{u} + \gamma \underline{u}_3$

Fall 3: siehe Aufg. 3 b)

Aufgabe 4

Mittwoch, 11. November 2020 10:05

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine symmetrische, positiv definite Matrix $\mathbf{A}$. Zeigen Sie, dass die Wurzel $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}}$ mit $\mathbf{B} = (\mathbf{A} + II_B \mathbf{1})^{-1}(I_B \mathbf{A} + III_B \mathbf{1})$ berechenbar ist. Wie können die Invarianten der Matrix $\mathbf{B}$ aus den Eigenwerten der Matrix $\mathbf{A}$ ermittelt werden?

Zu zeigen: $\underline{\underline{B}} = \sqrt{\underline{\underline{A}}} = (\underline{\underline{A}} + II_B \underline{\underline{1}})^{-1}(I_B \underline{\underline{A}} + III_B \underline{\underline{1}})$

Symmetrie $\underline{\underline{A}} = \underline{\underline{A}}^T$

pos. Definitheit: $\underline{v}^T \underline{\underline{A}}\, \underline{v} > 0$

$\hookrightarrow$ alle Eigenwerte größer als null

Cayley-Hamilton Theorem:

$$-\underline{\underline{B}}^3 + I_B \underline{\underline{B}}^2 - II_B \underline{\underline{B}} + III_B \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}$$

⋮ einsetzen & umstellen

Eigenwerte von $\underline{\underline{B}}$ aus $\underline{\underline{A}}$

(1) $\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \mu \underline{v}$

(2) $\underline{\underline{B}}\,\underline{v} = \lambda \underline{v}$

μ: Eigenwert von $\underline{\underline{A}}$

λ: Eigenwert von $\underline{\underline{B}}$

$\hookrightarrow$ Wie hängen μ und λ zusammen?

aus (2): $\overbrace{\underline{\underline{B}}\,\underline{\underline{B}}}^{\underline{\underline{A}}}\,\underline{v} = \lambda \underline{\underline{B}}\,\underline{v}$

$= \lambda \lambda \underline{v} = \lambda^2 \underline{v}$

$\underline{\underline{A}}\,\underline{v} = \mu \underline{v} = \lambda^2 \underline{v} \quad \Rightarrow \mu = \lambda^2$

Aufgabe 4

Mittwoch, 11. November 2020 10:05

Aufgabe 4:

Gegeben sei eine symmetrische, positiv definite Matrix $\mathbf{A}$. Zeigen Sie, dass die Wurzel $\mathbf{B} = \sqrt{\mathbf{A}}$ mit $\mathbf{B} = (\mathbf{A} + II_{\mathbf{B}}\mathbf{1})^{-1}(I_{\mathbf{B}}\mathbf{A} + III_{\mathbf{B}}\mathbf{1})$ berechenbar ist. Wie können die Invarianten der Matrix $\mathbf{B}$ aus den Eigenwerten der Matrix $\mathbf{A}$ ermittelt werden?

⋮

nächster Schritt:

Berechnung der Invarianten von $\underline{\underline{B}}$ in Abhängigkeit der Eigenwerte μ (siehe Aufg. 2)

Aufgabe 5

Mittwoch, 11. November 2020 10:05

Aufgabe 5:

Für Determinanten gilt der „Multiplikationssatz“:

$$\det(\mathbf{AB}) = (\det\mathbf{A})(\det\mathbf{B})$$

Beweisen Sie auf dieser Grundlage die Formel

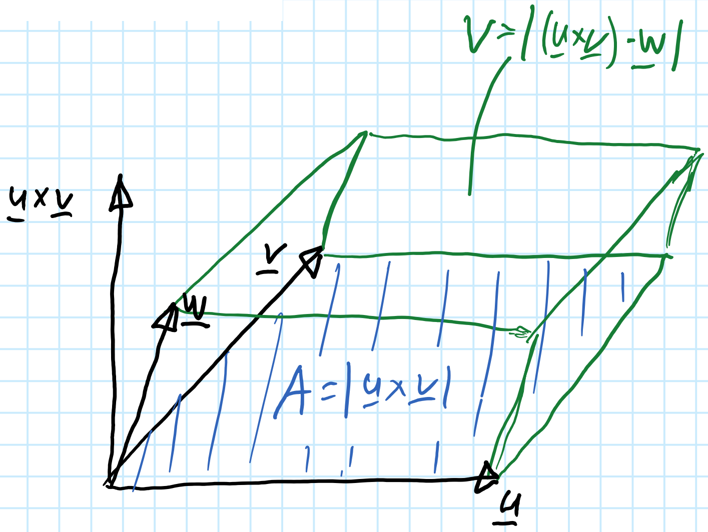
$$(\mathbf{Au} \times \mathbf{Av}) \cdot (\mathbf{Aw}) = (\det\mathbf{A})\,[(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}],$$

die für beliebige $3\text{x}3$ - Matrizen und Vektoren **u**, **v**, **w** gilt.

Spatprodukt:

$$(\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}$$

$$= \det [\underline{u} \;\; \underline{v} \;\; \underline{w}]$$



$$\underline{\underline{B}} = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{bmatrix} = (\underline{u} \;\; \underline{v} \;\; \underline{w})$$

$$\Rightarrow \det \underline{\underline{B}} = \det [\underline{u} \;\; \underline{v} \;\; \underline{w}] = (\underline{u} \times \underline{v}) \cdot \underline{w}$$

$$\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \underline{\underline{A}}\,[\underline{u} \;\; \underline{v} \;\; \underline{w}] = [\underline{\underline{A}}\,\underline{u} \;\; \underline{\underline{A}}\,\underline{v} \;\; \underline{\underline{A}}\,\underline{w}]$$

$$\Rightarrow \det \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}} = \ldots$$