Aufgabe 1

Mittwoch, 25. November 2020 10:34

Aufgabe 1: Tensoralgebra

Berechnen Sie folgende Terme für die zweistufigen Tensoren A und B

a) $\mathrm{A}\mathrm{A}^{-1}$
b) $(\mathrm{AB})\mathrm{B}^{-1}$
c) $\mathrm{B}^{-1}(\mathrm{AB})$

a) $\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{1}} = \delta_{jl}$

b) $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})\,\underline{\underline{B}}^{-1} = A_{ij} B_{jk} B^{-1}_{kl} = A_{ij} \delta_{jl} = A_{il} = \underline{\underline{A}}$

c) $\underline{\underline{B}}^{-1}(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}) = B^{-1}_{ij} A_{jk} B_{kl} = \underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}}$

Aufgabe 2

Mittwoch, 25. November 2020 10:34

Aufgabe 2: Tensorgleichungen

Beweisen Sie folgende Identitäten für die Gleichungen mit den zweistufigen Tensoren A und B:

a) $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

b) $(A^{-1} + B^{-1})^{-1} = A(A + B)^{-1}B$

a) $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$ (zu zeigen)

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{1}} \quad | \underline{\underline{A}}^{-1}(\ldots)$ von links

$\underline{\underline{B}}\,(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{A}}^{-1} \quad | \underline{\underline{B}}^{-1}(\ldots)$ von links

$(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$

w.z.b.w

b) $(\underline{\underline{A}}^{-1} + \underline{\underline{B}}^{-1})^{-1} = \underbrace{\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}^{-1}}_{=\underline{\underline{1}}}(\underline{\underline{A}}^{-1} + \underline{\underline{B}}^{-1})^{-1}$

$= \underline{\underline{A}}\left((\underline{\underline{A}}^{-1} + \underline{\underline{B}}^{-1})\,\underline{\underline{A}}\right)^{-1}$

Regel: $(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{B}})^{-1} = \underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}^{-1}$ (2a)

$= \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\right)^{-1}$

$= \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{B}}^{-1}\,\underline{\underline{A}}\right)^{-1}$

$= \underline{\underline{A}}\left(\underline{\underline{B}}^{-1}(\underline{\underline{B}} + \underline{\underline{A}})\right)^{-1}$

Regel 2a

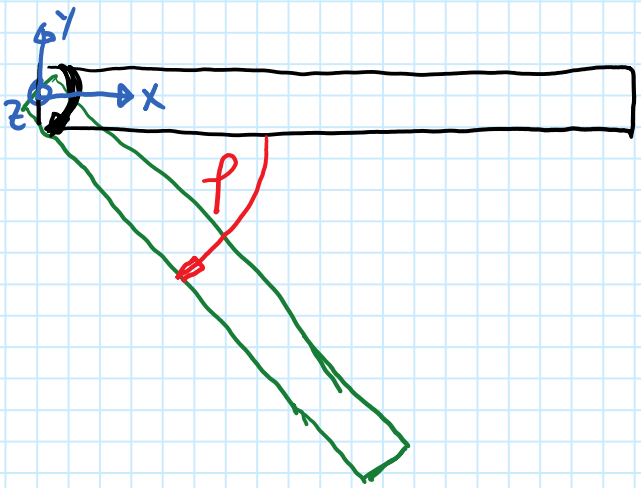
$= \underline{\underline{A}}\,(\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{B}})^{-1}\,\underline{\underline{B}}$

Aufgabe 3

Mittwoch, 25. November 2020 10:34

Aufgabe 3: Starrkörperdrehung

Ein Stab wird einer reinen Sarrkörperdrehung unterworfen. Berechnen Sie den GREEN-schen Verzerrungstensor $\underline{\underline{E}}$ und den linearen Verzerrungstensor ε. Was stellen Sie fest?



Deformationsgradient:

$$\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{U}}$$

hier $\underline{\underline{U}} = \underline{\underline{1}}$ d.h. keine Streckung

$\Rightarrow$ Reine Rotation: $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{R}}$

$\underline{\underline{R}}$ ist orthogonaler Tensor: $\underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^{-1} = \underline{\underline{R}}\,\underline{\underline{R}}^{T} = \underline{\underline{1}}$ (*)

Greenscher Verzerrungstensor:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\underline{\underline{F}}^{T}\underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}}\right) \Rightarrow \underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\underline{\underline{R}}^{T}\underline{\underline{R}}}_{=\underline{\underline{1}}} - \underline{\underline{1}}\right) = \underline{\underline{0}}$$

mit $\underline{\underline{F}} = \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{H}}$ gilt:

$$\underline{\underline{E}} = \frac{1}{2}\left[\left(\underline{\underline{1}}^{T} + \underline{\underline{H}}^{T}\right)\left(\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{H}}\right) - \underline{\underline{1}}\right] \qquad \underline{\underline{1}}^{T} = \underline{\underline{1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{1}} + \underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}^{T} + \underline{\underline{H}}^{T}\underline{\underline{H}} - \underline{\underline{1}}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}^{T} + \underline{\underline{H}}^{T}\underline{\underline{H}}\right]$$

Aufgabe 3

Mittwoch, 25. November 2020 10:34

Linearisierung $\|\underline{\underline{H}}^T \underline{\underline{H}}\| \ll \|\underline{\underline{H}}\| \Rightarrow \|\underline{\underline{H}}\| \ll 1$

$\underline{\underline{E}} = \underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{H}} + \underline{\underline{H}}^T\right]$ $\qquad \underline{\underline{H}} = \underline{\underline{F}} - \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}}$

$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{R}} - \underline{\underline{1}} + \underline{\underline{R}}^T - \underline{\underline{1}}^T\right]$

$= \frac{1}{2}\left[\underline{\underline{R}} + \underline{\underline{R}}^T - 2\,\underline{\underline{1}}\right]$

$$\underline{\underline{R}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$: Rotation um die z-Achse

$$\underline{\underline{R}}^T = \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2\cos\varphi - 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2\cos\varphi - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\underline{\underline{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \cos\varphi - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 3

Mittwoch, 25. November 2020 10:34

Es gilt für $\varphi = 0° \Rightarrow \cos(0°) = 1$

$\Rightarrow \underline{\underline{\xi}} = \underline{\underline{0}}$

und für $\varphi = 90° \Rightarrow \cos(90°) = 0$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\xi}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\| \underline{\underline{\xi}} \| = \sqrt{sp(\underline{\underline{\xi}}^2)} = \sqrt{2}$$

$\longrightarrow$ physikalisch unplausibel, da reine Rotation vorliegt

Aufgabe 4

Mittwoch, 25. November 2020 10:34

Aufgabe 4: Eigenwertberechnung

Gegeben sei der symmetrische Spannungstensor $\mathbf{T}$ im kartesischen Koordinatensystem $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ mit zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ und Eigenvektoren $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$.

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 14 & 2 & 4 \\ 2 & 17 & -2 \\ 4 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 18, \quad \lambda_3 = 9 \qquad \mathbf{n}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Geben Sie den Spannungstensor $\mathbf{T}$ im Eigenraum $(\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3)$ an und zeigen Sie, dass dieser dem Spannungstensor im kartesichen Koordinatensystem gleich ist.

$$\vec{n}_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = n_{(1)i}\,\vec{e}_i = n_{(1)1}\,\vec{e}_1 + n_{(1)2}\,\vec{e}_2 + n_{(1)3}\,\vec{e}_3$$

$$\vec{n}_2 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = n_{(2)i}\,\vec{e}_i = n_{(2)1}\,\vec{e}_1 + n_{(2)2}\,\vec{e}_2 + n_{(2)3}\,\vec{e}_3$$

$$\vec{n}_3 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = n_{(3)i}\,\vec{e}_i = n_{(3)1}\,\vec{e}_1 + n_{(3)2}\,\vec{e}_2 + n_{(3)3}\,\vec{e}_3$$

Eigenwerte: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda = 18$, $\lambda_3 = 9$

Eigenraumdarstellung:

$$\underline{\underline{T}} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

Spektraldarstellung: $\underline{\underline{T}} = \sum_{\alpha=1}^{3} \lambda_{(\alpha)}\,\vec{n}_{(\alpha)} \otimes \vec{n}_{(\alpha)}$ (1)

Aufgabe 4

Mittwoch, 25. November 2020 10:34

Dyaden der Eigenvektoren $\vec{n}_{(\alpha)} \otimes \vec{n}_{(\alpha)}$:

$$\vec{n}_1 \otimes \vec{n}_1 = n_{(1)i}\, n_{(1)j}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{9} \quad (2)$$

$$\vec{n}_2 \otimes \vec{n}_2 = n_{(2)i}\, n_{(2)j}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{9} \quad (3)$$

$$\vec{n}_3 \otimes \vec{n}_3 = n_{(3)i}\, n_{(3)j}\, \vec{e}_i \otimes \vec{e}_j = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix} \frac{1}{9} \quad (4)$$

(2), (3) und (4) in (1):

$$\underline{\underline{T}} = \lambda_1 \vec{n}_1 \otimes \vec{n}_1 + \lambda_2 \vec{n}_2 \otimes \vec{n}_2 + \lambda_3 \vec{n}_3 \otimes \vec{n}_3$$

$$= \frac{18}{9} \begin{bmatrix} 4 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} + \frac{18}{9} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 4 & -4 \\ 2 & -4 & 4 \end{bmatrix} + \frac{9}{9} \begin{bmatrix} 4 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 2 \\ -4 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 14 & 2 & 4 \\ 2 & 17 & -2 \\ 4 & -2 & 14 \end{bmatrix}$$

Aufgabe 5

Mittwoch, 25. November 2020 10:34

Aufgabe 5: Polarzerlegung des Deformationsgradienten

Berechnen Sie den rechten Strecktensor $\mathbf{U}$ der polaren Zerlegung des Deformationsgradienten $\mathbf{F} = \mathbf{RU}$ aus dem rechten CAUCHY-GREEN Tensor $\mathbf{C} = \mathbf{U}^2$ mithilfe zweifacher Anwendung des CAYLEY-HAMILTON-Theorems.

$$\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2 \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{U}} = \sqrt{\underline{\underline{C}}}$$

$$-\underline{\underline{U}}^3 + \underline{\underline{U}}^2 I_U - \underline{\underline{U}}\, II_U + III_U \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}}$$

$$-\underbrace{\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}}_{\underline{\underline{C}}}\,\underline{\underline{U}} + \underbrace{\underline{\underline{U}}\,\underline{\underline{U}}}_{\underline{\underline{C}}} I_U - \underline{\underline{U}}\, II_U + III_U \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}}$$

$$-\underline{\underline{C}}\,\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{C}} I_U - \underline{\underline{U}}\, II_U + III_U \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}}$$

$$-\left(\underline{\underline{C}} + II_U \underline{\underline{1}}\right)\underline{\underline{U}} + \underline{\underline{C}} I_U + III_U \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{U}} = \underbrace{\left(\underline{\underline{C}} + II_U \underline{\underline{1}}\right)^{-1}}_{:= \underline{\underline{A}}} \left(\underline{\underline{C}} I_U + III_U \underline{\underline{1}}\right) = \underline{\underline{0}}$$

$$-\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}} I_A - \underline{\underline{A}}\, II_A + III_A \underline{\underline{1}} = \underline{\underline{0}} \qquad \left| \underline{\underline{A}}^{-1}(\ldots) \text{ von links} \right.$$

$$-\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}} + \underline{\underline{A}} I_A - \underline{\underline{1}}\, II_A + III_A \underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{0}}$$

$$\underline{\underline{A}}^{-1} = \left(\underline{\underline{A}}\,\underline{\underline{A}} - \underline{\underline{A}} I_A + II_A \underline{\underline{1}}\right) \frac{1}{III_A}$$

Aufgabe 5

Mittwoch, 25. November 2020 10:34

Rücksubstitution: $\underline{\underline{A}}^{-1} = \underline{\underline{C}} + \Pi_u \underline{\underline{1}}$

$$I_A = sp\left(\underline{\underline{C}} + \Pi_u \underline{\underline{1}}\right)$$

$$II_A = \frac{1}{2}\left[sp\left(\underline{\underline{C}} + \Pi_u \underline{\underline{1}}\right)^2 - sp\left[\left(\underline{\underline{C}} + \Pi_u \underline{\underline{1}}\right)^2\right]\right]$$

$$III_A = \det\left(\underline{\underline{C}} + \Pi_u \underline{\underline{1}}\right)$$

Die Invarianten I_u, II_u und III_u werden aus der Lsg. des Eigenwertproblems von $\underline{\underline{C}}$ und $\lambda_i^u = \sqrt{\lambda_i^c}$ (folgt aus $\underline{\underline{C}} = \underline{\underline{U}}^2$)