6. Übung

Mittwoch, 16. Dezember 2020 09:47

Spannungsdeviator

Aufteilung des Spannungstensors in zwei Anteile:

1. Teil: Deviator S_{ij} → Gestaltänderungsanteil (= Schubspannungsanteil)

2. Teil: Kugelanteil $\sigma_{kk} \cdot \underline{\underline{1}}$ → mittlere Hauptnormalspann. (= hydrostatischer Druck p)

$$\boxed{S_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}\sigma_{kk}}$$

$$\frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}\left(\sigma_{11}+\sigma_{22}+\sigma_{33}\right) = \frac{1}{3} I_1$$

$$= \sigma_m = -p$$

$$S_{ij} = \sigma_{ij} + \delta_{ij}\, p$$

5. Beispiel

Der Spannungstensor $\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix}$ soll in Deviator- und Kugelanteil aufgespalten werden.

$$I_1 = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} = 12 + 9 + 3 = 24$$

$$\Rightarrow \sigma_m = \frac{24}{3} = 8 \quad \Rightarrow p = -8$$

$$S_{ij} = \begin{bmatrix} 12 & 4 & 0 \\ 4 & 9 & -2 \\ 0 & -2 & 3 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}$$

6. Übung

Mittwoch, 16. Dezember 2020 09:47

$$\Rightarrow \quad \underline{\underline{\sigma}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 4 & 4 & 0 \\ 4 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & -5 \end{bmatrix}}_{\text{Deviator}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}}_{\text{Kugelanteil}}$$

Deviatorinvarianten und Hauptrichtungen

Deviatorinvarianten:

$$J_1 = S_{11} + S_{22} + S_{33} \overset{!}{=} 0$$

$$J_2 = \frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}$$

$$J_3 = \det S_{ij}$$

charakteristische Gleichung: $\lambda^3 - J_2 \lambda - J_3 = 0$

Trigonometrische Identität: $(\sin \theta)^3 - \frac{3}{4} \sin(\theta) + \frac{1}{4} \sin(3\theta) = 0$

Setze: $\lambda = \frac{2}{\sqrt{3}} \left(J_2\right)^{\frac{1}{2}} \cdot \sin\theta$

Die charakteristische Gleichung liefert dann die 3 reellen Wurzeln: $\lambda_1 = S_{I}$, $\lambda_2 = S_{II}$, $\lambda_3 = S_{III}$

$$\begin{bmatrix} S_{I} \\ S_{II} \\ S_{III} \end{bmatrix} = \frac{2 \left(J_2\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin\left(\theta + \frac{2}{3}\pi\right) \\ \sin(\theta) \\ \sin\left(\theta + \frac{4}{3}\pi\right) \end{bmatrix}$$

6. Übung

Mittwoch, 16. Dezember 2020 09:47

wobei $\sin(3\theta) = \frac{-3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{\frac{3}{2}}}$

$\Rightarrow$ Der Winkel θ ist also eine Invariante

Die Hauptspannungen ergeben sich zu:

$$\begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s_I \\ s_{II} \\ s_{III} \end{bmatrix} + \sigma_m \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \frac{2\,(J_2)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(\theta + \frac{2}{3}\pi) \\ \sin(\theta) \\ \sin(\theta + \frac{4}{3}\pi) \end{bmatrix} + \frac{I_1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

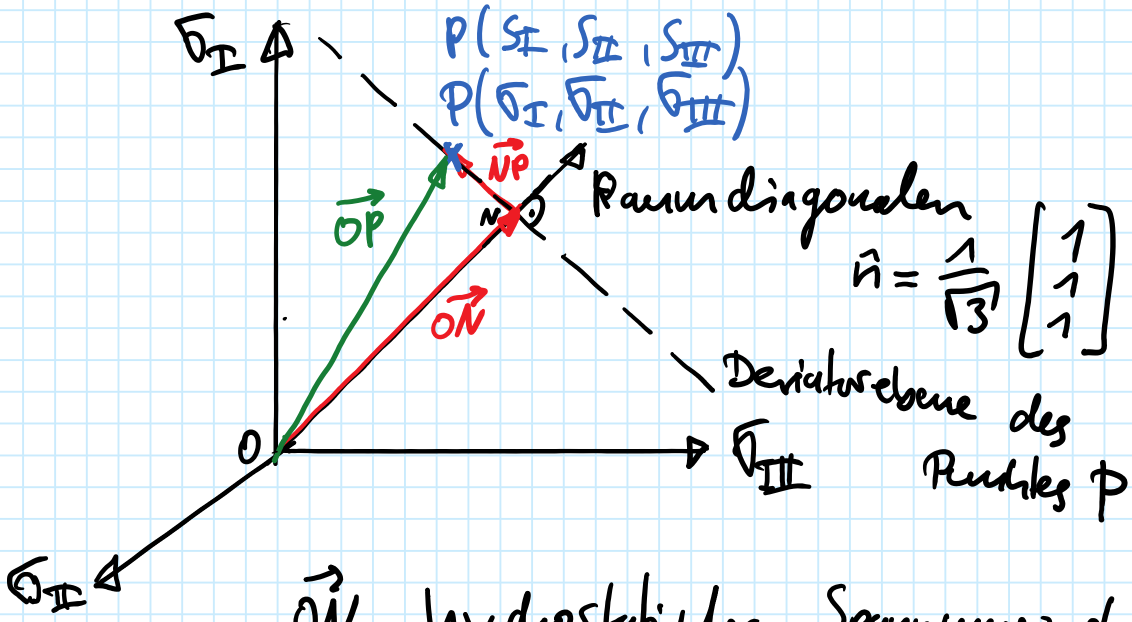
$\rightarrow$ Spannungstensor $\underline{\underline{\sigma}}$ und Deviator $\underline{\underline{S}}$ haben die selben Hauptrichtungen.

<u>Hinweis:</u> Der Deviator $\underline{\underline{S}}$ legt also die Hauptspannungsrichtungen fest. Er kann in <u>fünf</u> einfache Schubspannungszustände zerlegt werden.

6. Übung

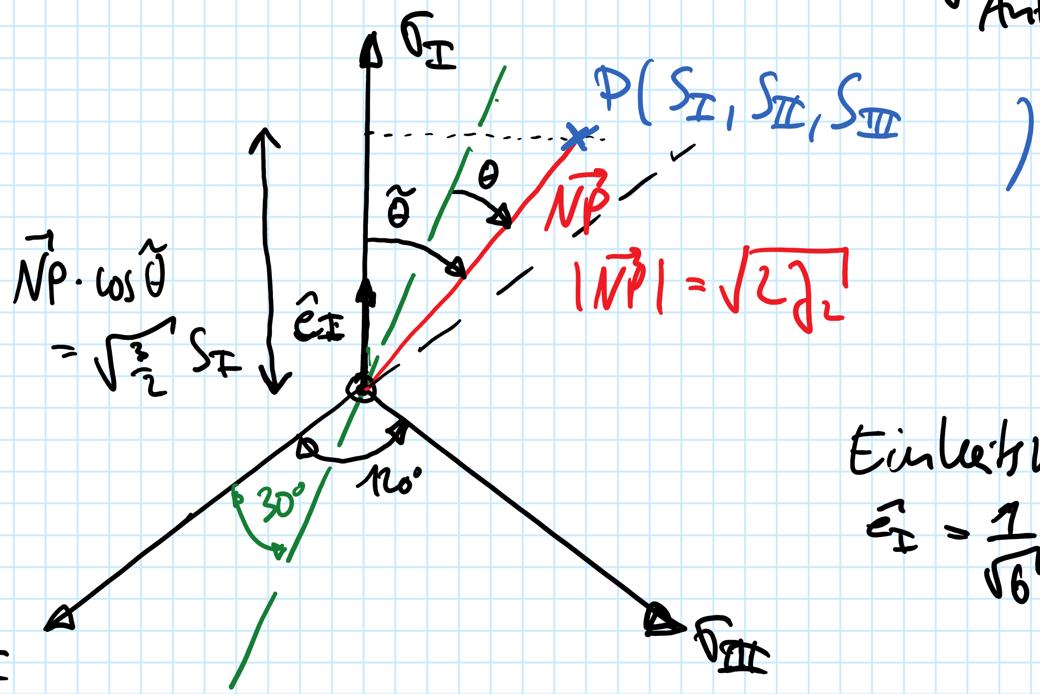
Mittwoch, 16. Dezember 2020 09:47

Zerlegung der Hauptspannungen σ_I, σ_{II} und σ_{III} in den hydrostatischen und den deviatorischen Anteil



$\vec{ON}$: hydrostatischer Spannungszustand

$\vec{NP}$: deviatorischer Anteil („Abweichung vom hydr. Anteil")



Einheitsvektor

$$\hat{e}_I = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

6. Übung

Mittwoch, 16. Dezember 2020 09:47

Aus dem Skalarprodukt $\vec{NP} \cdot \hat{e}_I = \underbrace{|\vec{NP}|}_{\sqrt{2J_2}} \cdot \underbrace{|\hat{e}_I|}_{1} \cdot \cos\tilde{\theta}$

und $\theta = \tilde{\theta} - 30°$

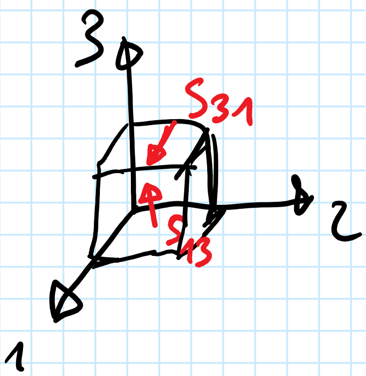
folgt: $\boxed{\cos(3\theta) = \frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{\frac{3}{2}}}}$

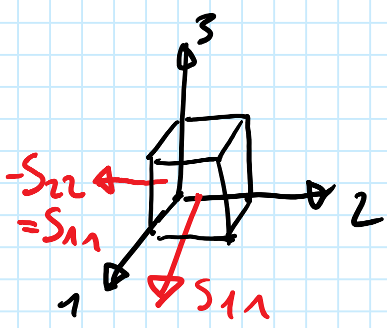
$\Rightarrow$ θ ist gegenüber einer Drehung des KoS invariant

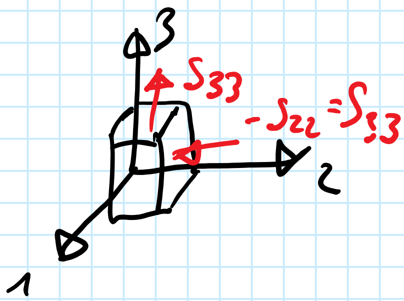
Zerlegung des Spannungsdeviators in Schubspannungszustände:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & S_{12} & 0 \\ S_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & S_{23} \\ 0 & S_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & S_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ S_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} S_{11} & 0 & 0 \\ 0 & -S_{11} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -S_{33} & 0 \\ 0 & 0 & S_{33} \end{bmatrix}$$







6. Übung

Mittwoch, 16. Dezember 2020 09:47

6. Beispiel

geg: $\underline{\underline{\sigma}} = \underline{\underline{S}} - p\underline{\underline{1}} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 0 \\ -6 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} 3 & -6 & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ges: Hauptspannungen des Deviators S_I, S_{II}, S_{III}

$$J_3 = 3 \cdot 3 \cdot (-6) - (-6) \cdot (-6) \cdot (-6) = 162$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left(3^2 + 3^2 + (-6)^2 + 2 \cdot (-6)^2 \right) = 63$$

$$\sin(3\theta) = -\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{(J_2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{3 \cdot \sqrt{3}}{2} \frac{162}{63^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -0{,}8417 \quad \Rightarrow \quad \theta = -19{,}11°$$

Hauptsp. des Deviators:

$$\begin{bmatrix} S_I \\ S_{II} \\ S_{III} \end{bmatrix} = \frac{2 \cdot (63)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} \sin(-19{,}1 + 120) \\ \sin(-19{,}1) \\ \sin(-19{,}1 + 240) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

Hauptspannungen:

$$\begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \\ \sigma_{III} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ -3 \\ -6 \end{bmatrix} + 7 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

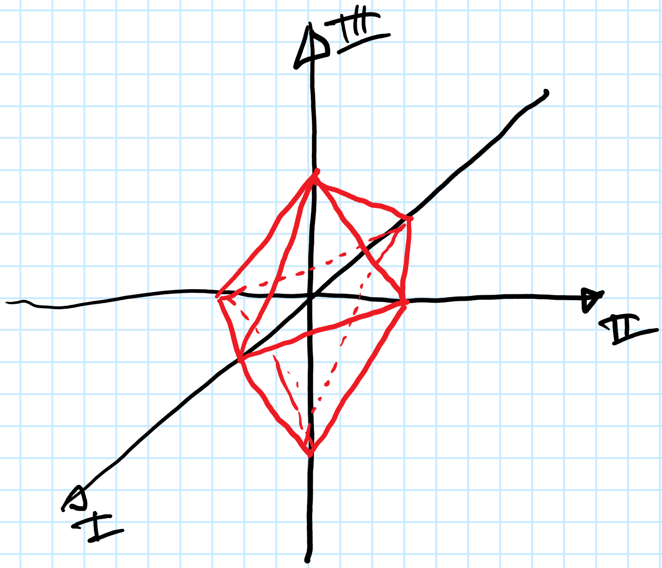
6. Übung

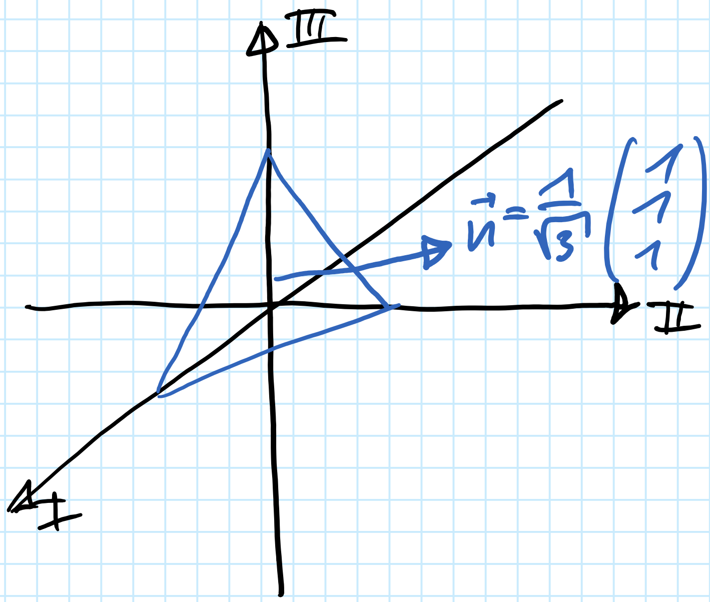
Mittwoch, 16. Dezember 2020 09:47

Oktaederspannungen

Die Ebenen der Oktaederspannung sind als die Ebenen definiert, deren Normale gleiche Winkel mit jeder Hauptspannungsachse einschließt: Normale in Richtung der Hauptdiagonale für positive Hauptachsenabschnitte. $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

Es existieren daher acht solcher Ebenen im Hauptspannungsraum (Oktaederebenen).





Spannungstensor bzgl. Hauptachsensystem:

$$\underline{\underline{\sigma}} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

6. Übung

Mittwoch, 16. Dezember 2020 09:47

Normalspannung im Punkt 0 bzgl. $\vec{n}$:

$$\sigma_n = (\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n})\cdot\vec{n} = \sigma_{ij} n_i n_j$$
$$= \sigma_1 n_1 n_1 + \sigma_2 n_2 n_2 + \sigma_3 n_3 n_3$$

Für die Normalspannung bzgl. einer Ebene des Oktaeders folgt mit $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

$$\sigma_{oct} = \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3} I_1$$

- Die Oktaederspannung ist die mittlere Hauptnormalspannung bzw. der hydrostatische Druck.
- Für isotrope Materialien ändert sich die Oktaederspannung lediglich bei Volumenänderung
- Die Höhe der Oktaederspannung ist bzgl. aller acht Ebenen dieselbe.

6. Übung

Mittwoch, 16. Dezember 2020 09:47

Oktaederschubspannung:

Def.: τ_{oct} ist die Schubspannung bzgl. einer Ebene des Oktaeders.

$$\boxed{\tau_{oct}^2 = |\vec{t}\,|^2 - \sigma_{oct}^2}$$

$$= (\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}) \cdot (\underline{\underline{\sigma}}\,\vec{n}) - \sigma_{oct}^2$$

$$= \sigma_{ij}\,\sigma_{ik}\,n_j n_k - \sigma_{oct}^2$$

$$= \frac{1}{3}\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2\right) - \frac{1}{9}\left(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3\right)^2$$

$$= \frac{1}{9}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]$$

Mit den Hauptschubspannungen

$$\tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}, \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}, \quad \tau_{31} = \frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}$$

$$\Rightarrow \tau_{oct}^2 = \frac{4}{9}\left(\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_{oct} = \frac{2}{3}\sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}}$$

bzw. $\tau_{oct} = \sqrt{\frac{2}{3} J_2}$

6. Übung

Mittwoch, 16. Dezember 2020 09:47

Oktaeder Schubspannungen bzgl. KOS $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$

$$\tau_{oct} = \frac{1}{3}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \ldots}$$

$$\overline{\ldots + 6\left(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2\right)}$$