



Hausübung 2

Aufgabe 1: Quadraturformel

Leiten Sie die GAUSSsche Quadraturformel für drei Integrationspunkte her ($n_{\text{int}} = 3$)

$$\xi_1 = -\xi_3 \quad \text{und} \quad \xi_2 = 0$$

$$\text{sowie} \quad w_1 = w_3.$$

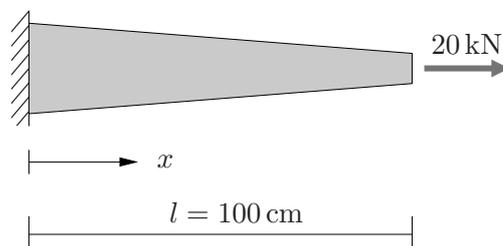
Aufgabe 2: Numerische Integration

Vergleichen Sie die exakte Lösung des Integrals $\int_1^2 e^x dx$ mit den Ergebnissen der GAUSSschen Quadratur für einen, zwei und drei Integrationspunkte ($n_{\text{int}} = 1, 2, 3$). Schätzen Sie den Fehler mit Hilfe der Formel für das Restglied in allen drei Fällen nach oben ab.

Hinweis: Benutzen Sie die Variablentransformation $\xi = 2x - 3$, um das Gebiet $1 \leq x \leq 2$ auf das Integrationsintervall $[-1, 1]$ für die Einheitskoordinate ξ abzubilden.

Aufgabe 3: FEM-Näherungslösung

Ein Dehnstab mit linear veränderlichem Querschnittsverlauf wird am Stabende durch eine Einzellast $P = 20 \text{ kN}$ beansprucht.



$$A(x = 0) = 10 \text{ cm}^2$$

$$A(x = 100) = 1 \text{ cm}^2$$

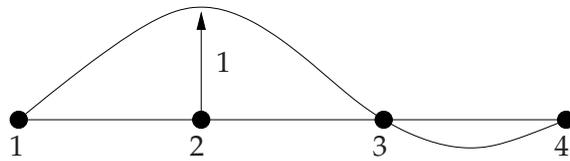
$$E = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

Gesucht ist die Näherungslösung für

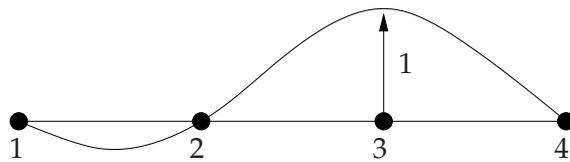
- den Verlauf der Verschiebung $u(x)$,
- die Spannungsverteilung $\sigma(x)$,
- den Verlauf der Normalkraft $N(x)$

mit Hilfe eines kubischen Verschiebungsansatzes in der folgenden Form:

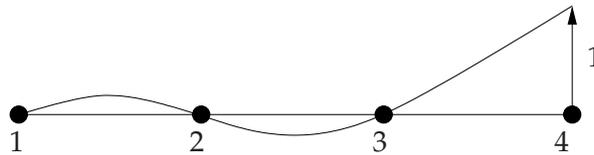
- 3 Verschiebungsfreiheitsgerade u_i mit $i = 2, 3, 4$ werden an den Knoten – wie dargestellt – angenommen.
- Als Formfunktionen $N_i(x)$ mit $i = 2, 3, 4$ sind kubische Polynome mit dem Wert 1 am Knoten i und dem Wert 0 an allen anderen Knoten zu wählen.



$N_2(x)$



$N_3(x)$



$N_4(x)$

Folgende Punkte sind zu bearbeiten:

- 1) Ermitteln Sie die Steifigkeitsmatrix im Sinne der FE-Methode und stellen Sie das Gleichungssystem zur Berechnung der Knotenverschiebungen u_i auf.
- 2) Bestimmen Sie den Verschiebungs- und Spannungsverlauf der Näherungslösung.
- 3) Vergleichen Sie den Verlauf der exakten Lösung aus der Vorlesung mit dem Verlauf der Näherungslösung in Form eines Diagramms.
- 4) Vergleichen Sie den Verlauf der Näherungslösung für die Stabnormalkraft mit der exakten Lösung aus dem Gleichgewicht am Teilstab.
Was schließen Sie daraus?

Hinweis: Die Arbeitsintegrale werden der Einfachheit halber am besten mit dem numerischen Integrationsverfahren nach GAUSS gelöst.