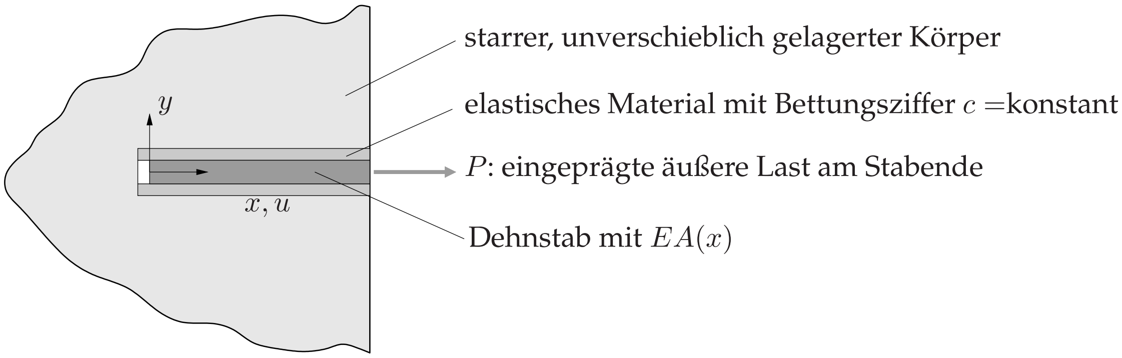
Hausübung 5

Aufgabe 1:

Ein langer, dünner Bolzen wird in ein steifes Bauteil eingesetzt, indem die Aussparung durch einen elastischen Klebstoff vergossen wird. Im mechanischen Modell zur Berechnung des Normalkraft- und Verschiebungsverlaufs des Bolzens wird dieser als Dehnstab, das Bauteil als starrer Körper und der Klebstoff als Grenzfläche mit nachgiebigem Verbund idealisiert, die wie eine elastische Bettung zwischen Bolzen und Bauteil wirkt.



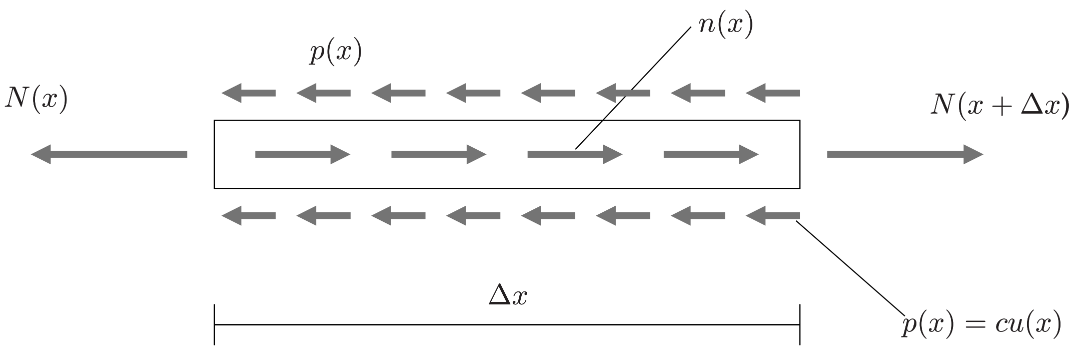
Die Differentialgleichung (DGL) für die Längsverschiebung $u(x)$ des elastisch gebetteten Dehnstabs unter der Längsstreckenlast $n(x)$ kann aus der lokalen Gleichgewichtsbedingung gefunden werden. Dazu wird ein Stabelement der Länge Δx betrachtet. Der Einfluss der nachgiebigen Klebverbindung auf den Bolzen wird durch das WINKLERsche Modell für die elastische Bettung mit Hilfe der konstitutiven Gleichung

$$p(x) = cu(x) \tag{1}$$

erfasst, in der $p(x)$ die übertragene Kraft pro Länge der Klebverbindung, $u(x)$ die Verschiebung des Dehnstabs und c die Steifigkeit (Bettungsziffer) des Verbunds sind.

Freigeschnittenes Stabelement:

$$N(x) = \text{Normalkraft im Stab}$$
$$n(x) = \text{eingeprägte äußere Streckenlast}$$



Gleichgewicht in x-Richtung:

$$\sum_i F_{i_x} = 0 : \quad N(x + \Delta x) - N(x) + n(x)\Delta x - p(x)\Delta x = 0$$

Division durch Δx und Grenzwertbildung $\Delta x \to 0$ liefert:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{N(x + \Delta x) - N(x)}{\Delta x} - p(x) = -n(x)$$

$$N'(x) - p(x) = -n(x) \tag{2}$$

wobei folgende Kurzschreibweise für die Ableitung nach der Ortskoordinate x gelten soll:

$$(\bullet)' = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\bullet) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(\bullet)(x + \Delta x) - (\bullet)(x)}{\Delta x}$$

Die Elastizitätsbeziehung für den Dehnstab lautet:

$$N(x) = EA(x)\varepsilon(x) \tag{3}$$

Die kinematische Beziehung ist durch die Gleichung

$$\varepsilon(x) = u'(x) \tag{4}$$

gegeben. Einsetzen der Gln. (1), (3) und (4) in die Gleichgewichtsbeziehung (2) liefert eine gewöhnliche DGL zweiter Ordnung für die Verschiebung $u(x)$:

$$(EAu')' - cu = -n \qquad \text{im Gebiet} \qquad 0 < x < l$$

mit den Randbedingungen:

$$\begin{aligned} EAu'(0) &= P_1 = 0 && \text{am Rand} \quad x = x_\mathrm{p} = 0 \\ EAu'(l) &= P_2 && \text{am Rand} \quad x = x_\mathrm{p} = l \end{aligned}$$

1) Bestimmen Sie die schwache Form (Variationsgleichung, Integralgleichung) der Gleichgewichtsaussage.

2) Welche Stetigkeitsanforderungen werden an die Ansatzfunktionen für die Diskretisierung im Sinne der FE-Methode gestellt?

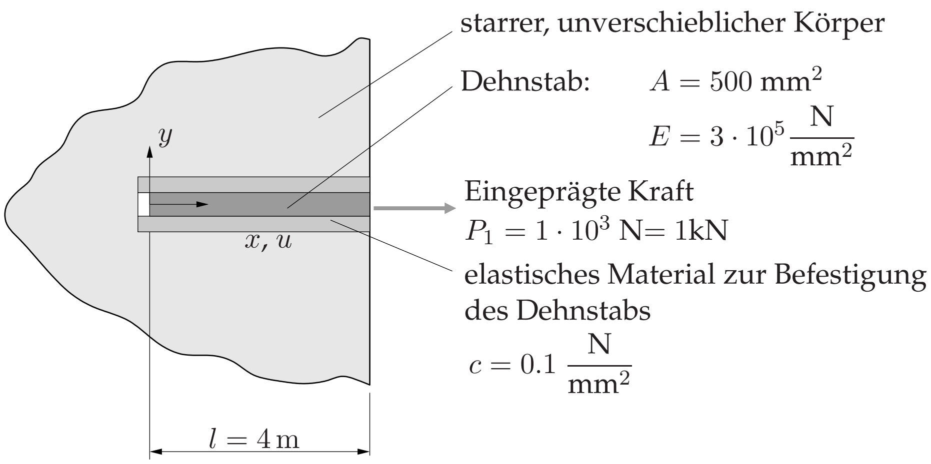
3) Ermitteln Sie die Elementsteifigkeitsmatrix für einen linearen Verschiebungsansatz.

Lehrveranstaltung:
Einführung in die Methode der Finiten Elemente
Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller
Sekretariat: Raum Nr. 2519, Mönchebergstr. 7

UNIKASSEL VERSITÄT

Aufgabe 2:

Stellen Sie zur Berechnung des elastisch gebetteten Dehnstabs die Steifigkeitsmatrix für ein finites Element mit linearem Verschiebungssatz auf. Führen Sie die Berechnung der Verschiebung am belasteten Stabende „von Hand“ mit folgenden Angaben durch:



1) Diskretisieren Sie den Stab mit 1, 2 und 4 linearen Elementen über die Stablänge.

$$\text{Dehnsteifigkeit: } EA = 3 \cdot 10^5 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2} \cdot 500\ \text{mm}^2 = 0,15 \cdot 10^9\ \text{N}$$

$$\text{Bettungsziffer: } c = 0,1 \frac{\text{N}}{\text{mm}^2}$$

2) Berechnen Sie für n = 1, 2 und 4 Elemente den Verlauf der Normalkraft $N(x)$ im Bolzen in Abhängigkeit der Stablängenkoordinaten x.

3) Stellen Sie den Schubspannungsverlauf zwischen Bolzen und starrem Bauteil graphisch dar.