
FEM Berechnung Praktikum

Fachwerk

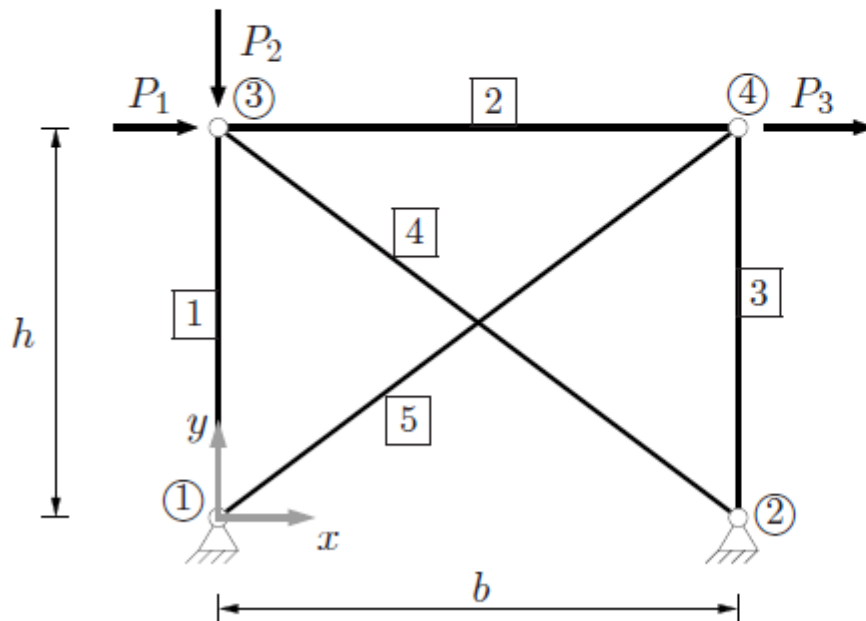
Marvin Nahrman

Sommersemester 2020



Fachwerksberechnung

In Abb. 1 ist ein Fachwerk dargestellt, das durch die Einzelkräfte P_1 , P_2 und P_3 belastet wird. Die Stäbe besitzen jeweils unterschiedliche Dehnsteifigkeiten $(EA)_i$ mit $i = 1, 2, 3, 4, 5$, die sich aus dem Verhältnis zur charakteristischen Dehnsteifigkeit $(EA)_c$, das in der unten stehenden Tabelle angegeben ist, ergibt. Alle Stäbe besitzen denselben Elastizitätsmodul E . Des Weiteren ist eine charakteristische Querschnittsfläche A_c gegeben.



Geometrie: $b = 4 \text{ m}$, $h = 3 \text{ m}$

Last: $P_1 = 3 \text{ kN}$, $P_2 = 4 \text{ kN}$, $P_3 = 6 \text{ kN}$

Material: $E = 20000 \text{ MPa}$, $A_c = 500 \text{ mm}^2$

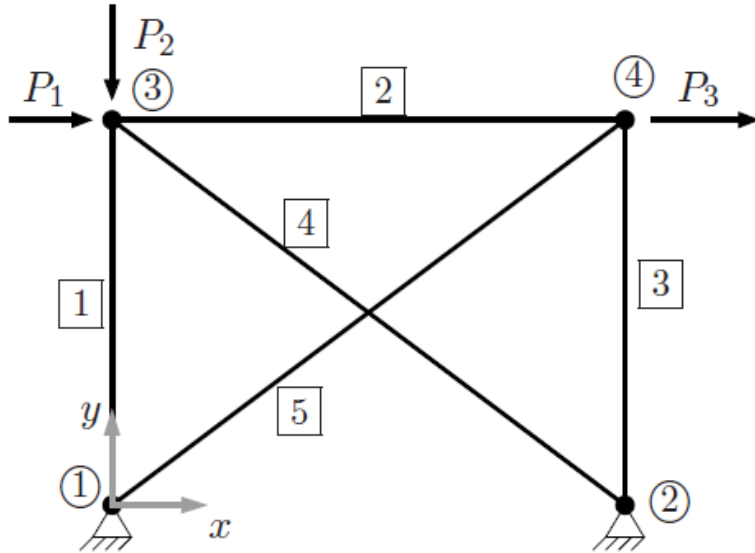
Stab i	1	2	3	4	5
$(EA)_i / (EA)_c$	9	8	9	5	5

Abb. 1: Fachwerk unter äußerer Belastung

Die V deformation des Fachwerks soll mit dem FE-Programm FEAP_{pv} berechnet werden. Dabei soll wie folgt vorgegangen werden:

- (i) Stellen Sie das FE-Modell mit allen Verschiebungs- und Kraftrandbedingungen sowie dem globalen Koordinatensystem für die in der Systemskizze angegebene Diskretisierung dar. Geben Sie auch die Element- und Materialdefinition an.
- (ii) Berechnen Sie die Knotenverschiebungen und Stabkräfte des dargestellten Fachwerks mit Hilfe des Programms FEAP_{pv} unter Verwendung des ebenen Fachwerkelements TRUSS.
- (iii) Überprüfen Sie händisch das Ergebnis anhand geeigneter Kontrollrechnungen.

Aufgabe (i)



Materialdefinition: linear-elastisch, isotrop mit $E = 20000 \text{ MPa}$ und $A = 500 \text{ mm}^2$

Elementdefinition: Truss

Die V deformation des Fachwerks soll mit dem FE-Programm FEAP_{pv} berechnet werden. Dabei soll wie folgt vorgegangen werden:

- (i) Stellen Sie das FE-Modell mit allen Verschiebungs- und Kraftrandbedingungen sowie dem globalen Koordinatensystem für die in der Systemskizze angegebene Diskretisierung dar. Geben Sie auch die Element- und Materialdefinition an.
- (ii) Berechnen Sie die Knotenverschiebungen und Stabkräfte des dargestellten Fachwerks mit Hilfe des Programms FEAP_{pv} unter Verwendung des ebenen Fachwerkelements TRUSS.
- (iii) Überprüfen Sie händisch das Ergebnis anhand geeigneter Kontrollrechnungen.

Aufgabe (ii)

```
FEAP ** Fachwerk **  
0 0 0 2 2 2
```

```
!konsistentes Einheitensystem [N, mm, kg, s]
```

```
PARAMeter
```

```
H = 3000  
B = 4000  
P1 = 3000  
P2 = 4000  
P3 = 6000  
E = 20000  
Ac = 500  
A1 = 9*Ac  
A2 = 8*Ac  
A3 = 9*Ac  
A4 = 5*Ac  
A5 = 5*Ac
```

```
MATERial,1
```

```
TRUSS
```

```
ELASTic ISOTropic E
```

```
CROSS SECTION A1
```

```

                                COORdinates
                                1 0 0 0
MATERial,2                     2 0 B 0
    TRUSS                     3 0 0 H
    ELAStic ISOTropic E       4 0 B H
    CROSS SECTION A2

                                ELEMeNts
MATERial,3                     1 0 1 1 3
    TRUSS                     2 0 2 3 4
    ELAStic ISOTropic E       3 0 3 2 4
    CROSS SECTION A3         4 0 4 3 2
                                5 0 5 1 4

MATERial,4
    TRUSS
    ELAStic ISOTropic E
    CROSS SECTION A4

                                BOUN
                                1 0 1 1
                                3 0 1 1

MATERial,5
    TRUSS
    ELAStic ISOTropic E
    CROSS SECTION A5

                                FORCe
                                3 0 P1 -P2
                                4 0 P3 0

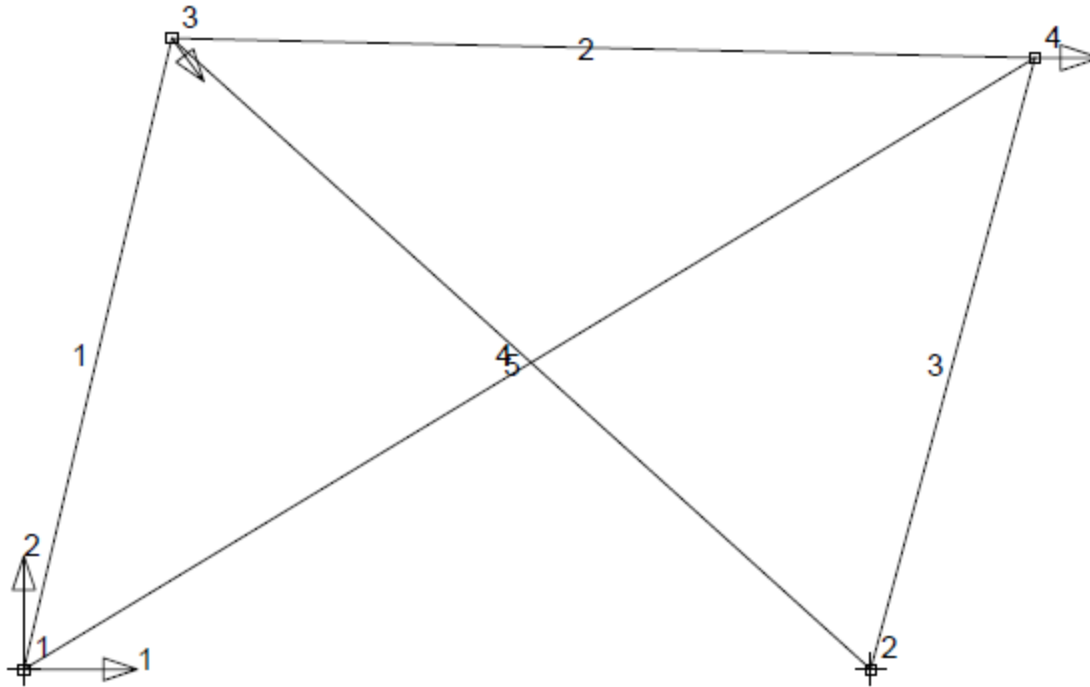
                                END
```

```
BATCH    !Loesen des Gleichungssystems
  TANGent
  FORM
  SOLVE
END
```

```
BATCH    !Postprocessing
  DISP,ALL    !Knotenverschiebungen
  REAC,ALL    !Knotenkraefte
  STRESS,ALL  !Elementspannungen
  PLOT, MESH  !Ploteinstellungen
  PLOT, BOUN
  PLOT, LOAD
  PLOT, ELEM
  PLOT, NODE
  PLOT, AXIS
END
```

```
INTERactive
STOP
```

Darstellung des Fachwerks als FE-Modell im deformierten Zustand (überhöhte Darstellung um Faktor 1000):



Time = 0.00E+00

Knotenverschiebungen

Node	1 Coord	2 Coord	1 Displ	2 Displ
1	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
2	4.0000E+03	0.0000E+00	0.0000E+00	0.0000E+00
3	0.0000E+00	3.0000E+03	6.9844E-01	-1.9271E-02
4	4.0000E+03	3.0000E+03	7.7656E-01	-1.1094E-01

Stabkräfte

Elmt	Matl	1-coord	2-coord	3-coord	Force
1	1	0.000E+00	1.500E+03	0.000E+00	-5.78125E+02
2	2	2.000E+03	3.000E+03	0.000E+00	1.56250E+03
3	3	4.000E+03	1.500E+03	0.000E+00	-3.32812E+03
4	4	2.000E+03	1.500E+03	0.000E+00	-5.70312E+03
5	5	2.000E+03	1.500E+03	0.000E+00	5.54688E+03

Verschiebungen der globalen Freiheitsgrade:

$$\begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +6.9844E-01 \\ -1.9271E-02 \\ +7.7656E-01 \\ -1.1094E-01 \end{Bmatrix} \text{ mm}$$

Vergleiche mit Lösung aus dem Skript (beachte Einheiten!):

Skript S. 47 ff.

$$\begin{aligned} EA_c \mathbf{r} &= \begin{Bmatrix} +6,98 \\ -0,19 \\ +7,77 \\ -1,11 \end{Bmatrix} \text{ kN m} \\ 10.000.000 \text{ N} \mathbf{r} &= \begin{Bmatrix} +6,98 \\ -0,19 \\ +7,77 \\ -1,11 \end{Bmatrix} \cdot 1000 \cdot 1000 \text{ N mm} \\ \mathbf{r} &= \begin{Bmatrix} +6,98 \\ -0,19 \\ +7,77 \\ -1,11 \end{Bmatrix} \cdot 0,1 \text{ mm} \\ &= \begin{Bmatrix} +0,698 \\ -0,019 \\ +0,777 \\ -0,111 \end{Bmatrix} \text{ mm} \end{aligned}$$

Die V deformation des Fachwerks soll mit dem FE-Programm FEAP_{pv} berechnet werden. Dabei soll wie folgt vorgegangen werden:

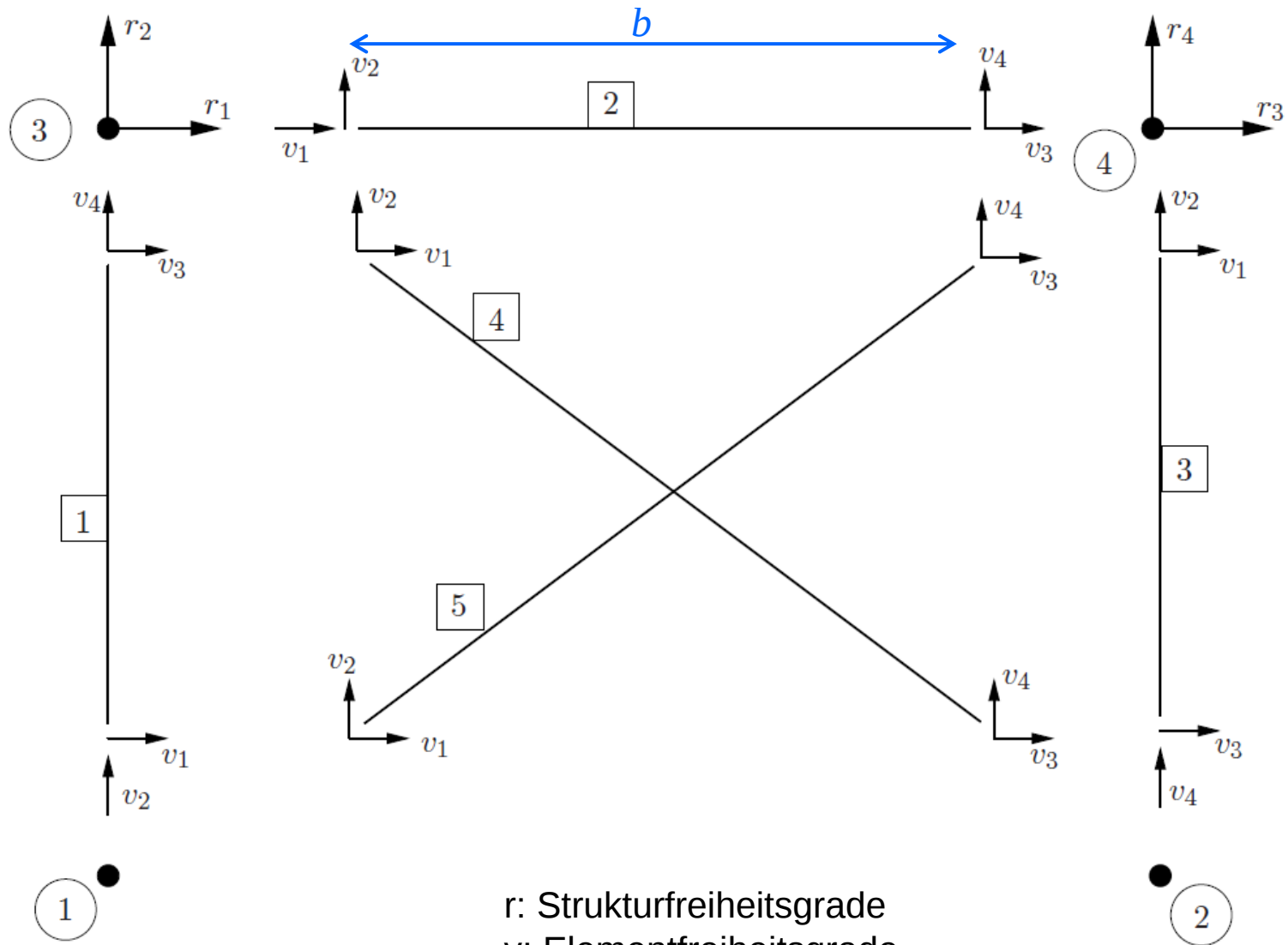
- (i) Stellen Sie das FE-Modell mit allen Verschiebungs- und Kraftrandbedingungen sowie dem globalen Koordinatensystem für die in der Systemskizze angegebene Diskretisierung dar. Geben Sie auch die Element- und Materialdefinition an.
- (ii) Berechnen Sie die Knotenverschiebungen und Stabkräfte des dargestellten Fachwerks mit Hilfe des Programms FEAP_{pv} unter Verwendung des ebenen Fachwerkelements TRUSS.
- (iii) Überprüfen Sie händisch das Ergebnis anhand geeigneter Kontrollrechnungen.

Aufgabe (iii)

Räumliche Diskretisierung des Systems

- Definition der Strukturfreiheitsgrade
- Definition der lokalen Elementfreiheitsgrade
- Definition der Elemente

Fachwerk



r : Strukturfreiheitsgrade
 v : Elementfreiheitsgrade



Location-Vektoren

$$\text{LM}^1 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{Bmatrix}, \text{LM}^2 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}, \text{LM}^3 = \begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{LM}^4 = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \text{LM}^5 = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$$

Zuordnung der Element- zu Systemfreiheitsgraden

$$\begin{Bmatrix} v_1^1 \\ v_2^1 \\ v_3^1 \\ v_4^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} v_1^2 \\ v_2^2 \\ v_3^2 \\ v_4^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} v_1^3 \\ v_2^3 \\ v_3^3 \\ v_4^3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_3 \\ r_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} v_1^4 \\ v_2^4 \\ v_3^4 \\ v_4^4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \begin{Bmatrix} v_1^5 \\ v_2^5 \\ v_3^5 \\ v_4^5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix}$$

Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrizen

- Elementsteifigkeitsmatrix im lokalen Elementkoordinatensystem:

$$\mathbf{k}_i = \frac{E_i A_i}{l_i} \begin{bmatrix} +1 & -1 \\ -1 & +1 \end{bmatrix}$$

- Elastizitätsmodul E_i

$$E_1 = E_2 = E_3 = E_4 = E_5 = E = 20000 \text{ MPa}$$

- Querschnittsfläche A_i

$$A_1 = 9A_c = 4500 \text{ mm}^2$$

$$A_2 = 8A_c = 4000 \text{ mm}^2$$

$$A_3 = 9A_c = 4500 \text{ mm}^2$$

$$A_4 = 5A_c = 2500 \text{ mm}^2$$

$$A_5 = 5A_c = 2500 \text{ mm}^2$$

- Elementlänge l_i

$$l_1 = h = 3000 \text{ mm}$$

$$l_2 = b = 4000 \text{ mm}$$

$$l_3 = h = 3000 \text{ mm}$$

$$l_4 = \sqrt{h^2 + b^2} = 5000 \text{ mm}$$

$$l_5 = \sqrt{h^2 + b^2} = 5000 \text{ mm}$$

- Transformation der Elementsteifigkeitsmatrix im lokalen Elementkoordinatensystem auf globales Koordinatensystem mithilfe der Transformationsmatrix $\mathbf{a}_i$ für jedes Element i mit $c_i = \cos(\alpha_i)$ und $s_i = \sin(\alpha_i)$:

$$\mathbf{k}_i^g = \mathbf{a}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{a}_i \quad \text{mit} \quad \mathbf{a}_i = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\alpha_i) & \sin(\alpha_i) \end{bmatrix}$$
$$= \frac{E_i A_i}{l_i} \begin{bmatrix} c_i^2 & c_i s_i & -c_i^2 & -c_i s_i \\ c_i s_i & s_i^2 & -c_i s_i & -s_i^2 \\ -c_i^2 & -c_i s_i & c_i^2 & c_i s_i \\ -c_i s_i & -s_i^2 & c_i s_i & s_i^2 \end{bmatrix}$$

- Winkel α_i zwischen $\mathbf{e}_x$ -Richtung des globalen Koordinatensystems und der $\mathbf{e}_x$ -Richtung des lokalen Koordinatensystems für jedes Element i :

$$\alpha_1 = 90^\circ$$

$$\alpha_2 = 0^\circ$$

$$\alpha_3 = -90^\circ$$

$$\alpha_4 = -\arctan\left(\frac{h}{b}\right) = -36,87^\circ$$

$$\alpha_5 = \arctan\left(\frac{h}{b}\right) = 36,87^\circ$$

- somit folgt für den Sinus und Kosinus der Winkel α_i :

$$\cos(\alpha_1) = 0$$

$$\sin(\alpha_1) = 1$$

$$\cos(\alpha_2) = 1$$

$$\sin(\alpha_2) = 0$$

$$\cos(\alpha_3) = 0$$

$$\sin(\alpha_3) = -1$$

$$\cos(\alpha_4) = 0,8$$

$$\sin(\alpha_4) = -0,6$$

$$\cos(\alpha_5) = 0,8$$

$$\sin(\alpha_5) = 0,6$$

- Elementsteifigkeitsmatrix $\mathbf{k}_i^g$ aller Elemente i im globalen Koordinatensystem:

$$\mathbf{k}_1^g = \frac{EA_1}{l_1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_2^g = \frac{EA_2}{l_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_3^g = \frac{EA_3}{l_3} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_4^g = \frac{EA_4}{l_4} \begin{bmatrix} +0,64 & -0,48 & -0,64 & +0,48 \\ -0,48 & +0,36 & +0,48 & -0,36 \\ -0,64 & +0,48 & +0,64 & -0,48 \\ +0,48 & -0,36 & -0,48 & +0,36 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{k}_5^g = \frac{EA_5}{l_5} \begin{bmatrix} +0,64 & +0,48 & -0,64 & -0,48 \\ +0,48 & +0,36 & -0,48 & -0,36 \\ -0,64 & -0,48 & +0,64 & +0,48 \\ -0,48 & -0,36 & +0,48 & +0,36 \end{bmatrix}$$

- mit Location-Matrizen:

$$\mathbf{k}_1^g = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^1 & 0 & k_{24}^1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{42}^1 & 0 & k_{44}^1 \end{bmatrix}$$

$\{0 \quad 0 \quad r_1 \quad r_2\}$

$$\mathbf{k}_2^g = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^2 & 0 & k_{13}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ k_{31}^2 & 0 & k_{33}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$\{r_1 \quad r_2 \quad r_3 \quad r_4\}$

$$\mathbf{k}_3^g = \begin{Bmatrix} r_3 \\ r_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{22}^3 & 0 & k_{24}^3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_{42}^3 & 0 & k_{44}^3 \end{bmatrix}$$

$\{r_3 \quad r_4 \quad 0 \quad 0\}$

$$\mathbf{k}_4^g = \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^4 & k_{12}^4 & k_{13}^4 & k_{14}^4 \\ k_{21}^4 & k_{22}^4 & k_{23}^4 & k_{24}^4 \\ k_{31}^4 & k_{32}^4 & k_{33}^4 & k_{34}^4 \\ k_{41}^4 & k_{42}^4 & k_{43}^4 & k_{44}^4 \end{bmatrix}$$

$\{r_1 \quad r_2 \quad 0 \quad 0\}$

$$\mathbf{k}_5^g = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_3 \\ r_4 \end{Bmatrix} \begin{bmatrix} k_{11}^5 & k_{12}^5 & k_{13}^5 & k_{14}^5 \\ k_{21}^5 & k_{22}^5 & k_{23}^5 & k_{24}^5 \\ k_{31}^5 & k_{32}^5 & k_{33}^5 & k_{34}^5 \\ k_{41}^5 & k_{42}^5 & k_{43}^5 & k_{44}^5 \end{bmatrix}$$

$\{0 \quad 0 \quad r_3 \quad r_4\}$

- Assemblierung der Struktursteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} k_{11}^2 + k_{11}^4 & k_{12}^4 & k_{13}^2 & 0 \\ k_{31}^4 & k_{22}^4 + k_{44}^1 & k_{33}^2 & 0 \\ k_{31}^2 & 0 & k_{33}^2 + k_{33}^5 & k_{34}^5 \\ 0 & 0 & k_{43}^5 & k_{44}^5 + k_{22}^3 \end{bmatrix}$$

- Berechnung der einzelnen Einträge

$$k_{44}^1 = \frac{20000 \cdot 4500}{3000} = 30000 \text{ N/mm}$$

$$k_{11}^2 = \frac{20000 \cdot 4000}{4000} = 20000 \text{ N/mm}$$

$$k_{13}^2 = -\frac{20000 \cdot 4000}{4000} = -20000 \text{ N/mm}$$

$$k_{31}^2 = -\frac{20000 \cdot 4000}{4000} = -20000 \text{ N/mm}$$

$$k_{33}^2 = \frac{20000 \cdot 4000}{4000} = 20000 \text{ N/mm}$$

$$k_{22}^3 = \frac{20000 \cdot 4500}{3000} = 30000 \text{ N/mm}$$

$$k_{11}^4 = \frac{20000 \cdot 2500}{5000} \cdot (0,8)^2 = 6400 \text{ N/mm}$$

- Berechnung der einzelnen Einträge

$$k_{12}^4 = \frac{20000 \cdot 2500}{5000} \cdot (0,8)(-0,6) = -4800 \text{ N/mm}$$

$$k_{21}^4 = \frac{20000 \cdot 2500}{5000} \cdot (0,8)(-0,6) = -4800 \text{ N/mm}$$

$$k_{22}^4 = \frac{20000 \cdot 2500}{5000} \cdot (-0,6)^2 = 3600 \text{ N/mm}$$

$$k_{33}^5 = \frac{20000 \cdot 2500}{5000} \cdot (0,8)^2 = 6400 \text{ N/mm}$$

$$k_{34}^5 = \frac{20000 \cdot 2500}{5000} \cdot (0,8)(0,6) = 4800 \text{ N/mm}$$

$$k_{43}^5 = \frac{20000 \cdot 2500}{5000} \cdot (0,8)(0,6) = 4800 \text{ N/mm}$$

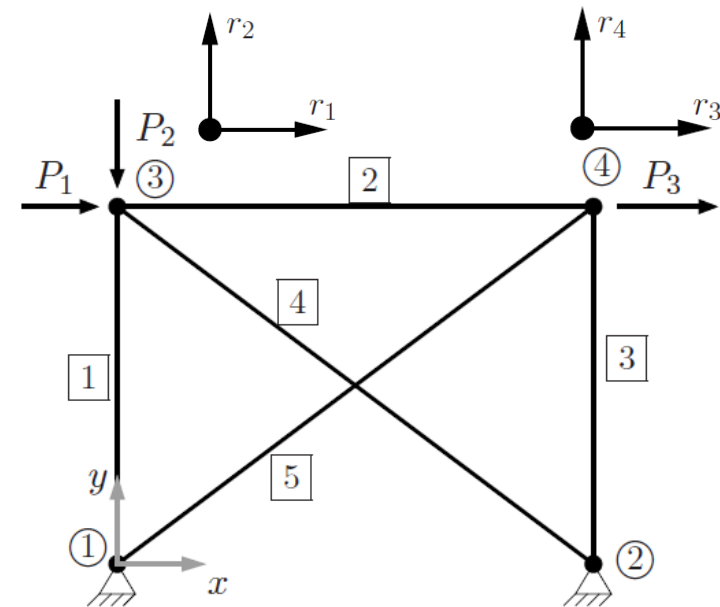
$$k_{44}^5 = \frac{20000 \cdot 2500}{5000} \cdot (0,6)^2 = 3600 \text{ N/mm}$$

- Angabe der Struktursteifigkeitsmatrix $\mathbf{K}$:

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} 26400 & -4800 & -20000 & 0 \\ -4800 & 33600 & 0 & 0 \\ -20000 & 0 & 26400 & 4800 \\ 0 & 0 & 4800 & 33600 \end{bmatrix} \text{ N/mm}$$

- Strukturlastvektor

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} +P_1 \\ -P_2 \\ +P_3 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} +3000 \\ -4000 \\ +6000 \\ 0 \end{Bmatrix} \text{ N}$$



Lösen des linearen Gleichungssystems nach den Verschiebungen

$$\mathbf{r} = \mathbf{K}^{-1} \mathbf{P}$$
$$= \begin{pmatrix} +0.6984375 \\ -0.0192708 \\ +0.7765625 \\ -0.1109375 \end{pmatrix} \text{ mm}$$

Stabkräfte im Element i :

$$N_i = -\frac{E_i A_i}{l_i} [\cos(\alpha_i)(v_1 - v_3) + \sin(\alpha_i)(v_2 - v_4)]$$

$$N_1 = -\frac{EA_1}{l_1} [0 \cdot (0 - r_1) + 1 \cdot (0 - r_2)]$$

$$N_1 = \frac{EA_1}{l_1} r_2$$
$$= -578,13 \text{ N}$$

$$\begin{aligned} N_2 &= -\frac{EA_2}{l_2} [1 \cdot (r_1 - r_3) + 0 \cdot (r_2 - r_4)] \\ &= \frac{EA_2}{l_2} (r_3 - r_1) \\ &= 1562,4 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_3 &= -\frac{EA_3}{l_3} [0 \cdot (r_1 - 0) + (-1) \cdot (r_4 - 0)] \\ &= \frac{EA_3}{l_3} r_4 \\ &= -3328,2 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_4 &= -\frac{EA_4}{l_4} [0,8(r_1 - 0) + (-0,6)(r_2 - 0)] \\ &= -\frac{EA_4}{l_4} (0,8r_1 - 0,6r_2) \\ &= -5703,15 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} N_5 &= -\frac{EA_5}{l_5} [0,8(0 - r_3) + 0,6(0 - r_4)] \\ &= \frac{EA_5}{l_5} (0,8r_3 + 0,6r_4) \\ &= 5546,84 \text{ N} \end{aligned}$$