FEM-Grundlagen

3. Übung

GAUSS Quadratur

Marvin Nahrmann

Sommersemester 2020

Institut für Mechanik
FG Numerische Mechanik
Prof. Dr.-Ing. Anton Matzenmiller

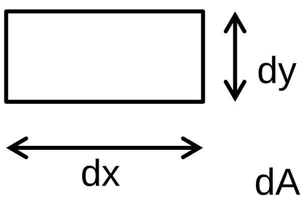
UNIKASSEL VERSITÄT

Theorie

Theorieteil im Skript Kap. 1.5, S. 20 ff.

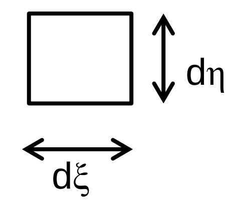
1.5 Numerische Integration – GAUSSsche Quadratur

Die Berechnung des Integrals $\int_{A_e} f(x,y)\,\mathrm{d}A$ soll im Einheitselement mit den Koordinaten ξ,η ausgeführt werden.



dA = dx dy

$$\int_{A_e} f(x,y)\,dA = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \underbrace{f\big(x(\xi,\eta),\, y(\xi,\eta)\big)\,\det(\mathbf{J})}_{g(\xi,\eta)}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta$$



Typischerweise ist eine Matrix der Form $\mathbf{f}(x,y) = \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\ \mathbf{C}\ \mathbf{B}$ mit Elementen f_{ij} in der FE-Methode aufzustellen.

Annahme: $f(x,y)$ ist integrierbar, da sich f aus dem Produkt zweier Funktionen mit quadratisch integrierbaren Ableitungen zusammensetzt - siehe Kapitel 3.

1.5.1 GAUSSsche Quadratur für einfache Integrale (eindimensionale Aufgaben)

Das bestimmte Integral wird durch eine endliche Summe mit Restglied $R(\xi)$ dargestellt.

$$\int_{-1}^{1} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{int}}} g(\xi_i)\,w_i + R(\bar{\xi}) \cong \sum_{i=1}^{n_{\mathrm{int}}} g(\xi_i)\,w_i \tag{1.5.2}$$

	$R(\bar{\xi})$	$\hat{=}$	Restglied
	w_i	$\hat{=}$	Wichtungsfaktoren
	ξ_i	$\hat{=}$	Koordinate des Integrationspunkts
und	n_{int}	$\hat{=}$	Anzahl der Integrationspunkte

Die Beziehung in Gl. (1.5.2) ist die Formel für die numerische Integration nach GAUSS ("GAUSS-Quadratur"). Deren Vor- und Nachteile sind:

Vorteil: Das bestimmte Integral über ein Polynom vom Grad n kann anhand der GAUSS-Quadratur mit geringstem Aufwand exakt numerisch gelöst werden.

Nachteil: Da die Integrationspunkte ξ_i und die Wichtungsfaktoren w_i so bestimmt sind, dass optimale Genauigkeit erzielt wird, können die Stützstellen für die numerische Integration nicht frei gewählt werden. Wünschenswert wären Stützstellen an den Knotenpunkten, jedoch sind die Stützstellen für die GAUSS-Quadratur im Inneren des Elements.

Theorie

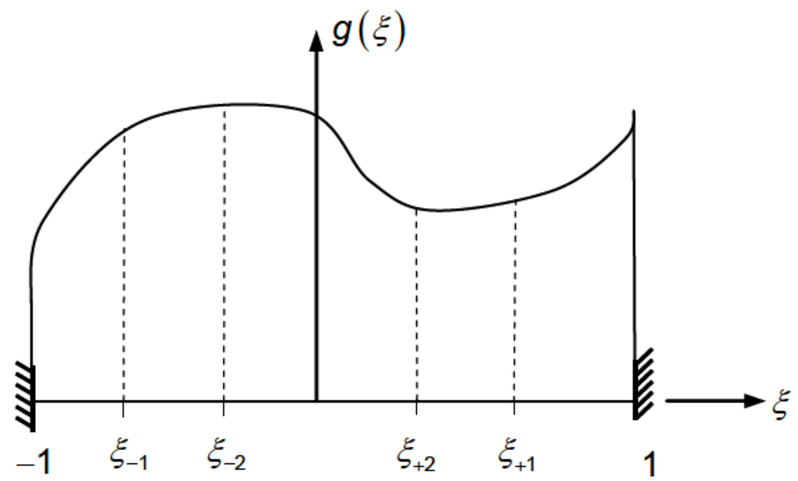


Abb. 1.5-1: Funktionsverlauf $g(\xi)$ im Intervall $-1 \leq \xi \leq 1$ mit Stützstellen

Satz: Die GAUSSsche Quadraturformel

- ergibt mit n -Integrationsstellen den exakten Wert des bestimmten Integrals eines Polynoms $g(\xi)$ vom Grad $(2n-1)$ oder kleiner;
- hat für eine $(2n)$– mal differenzierbare, beliebige Funktion $g(\xi)$ im Intervall $[-1,1]$ als Restglied:

$$R(\bar{\xi}) = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)\cdot((2n)!)^3}\, g^{(2n)}(\bar{\xi}) \qquad (1.5.3)$$

mit $-1 < \bar{\xi} < 1$.

2n-te Ableitung der Funktion g

GAUSSsche Quadratur-Formeln für Stützstellen unterschiedlicher Anzahl n_{int}:

1. $n_{\text{int}} = 1$: $\xi_1 = 0 \;,\; w_1 = 2$

$$R = \frac{g_{,\xi\xi}\left(\bar{\xi}\right)}{3}$$

(

Die Quadratur ist exakt für eine lineare Funktion.

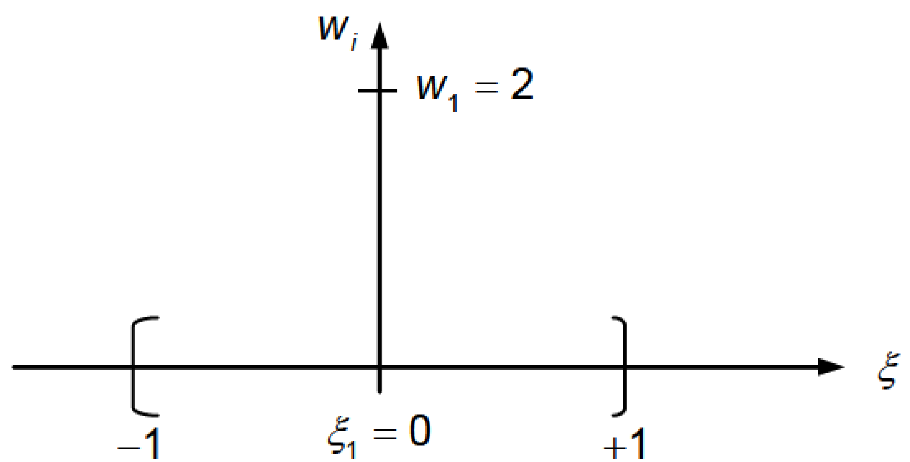


Abb. 1.5-2: Stützstelle und Wichtungsfaktor für GAUSSsche Integration 1. Ordnung

2. $n_{\text{int}} = 2:$

$$\xi_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad w_1 = 1 \qquad\qquad R = \frac{g^{(4)}(\bar{\xi})}{135}$$

$$\xi_2 = +\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad w_2 = 1$$

Die Quadratur ist exakt für ein kubisches Polynom.

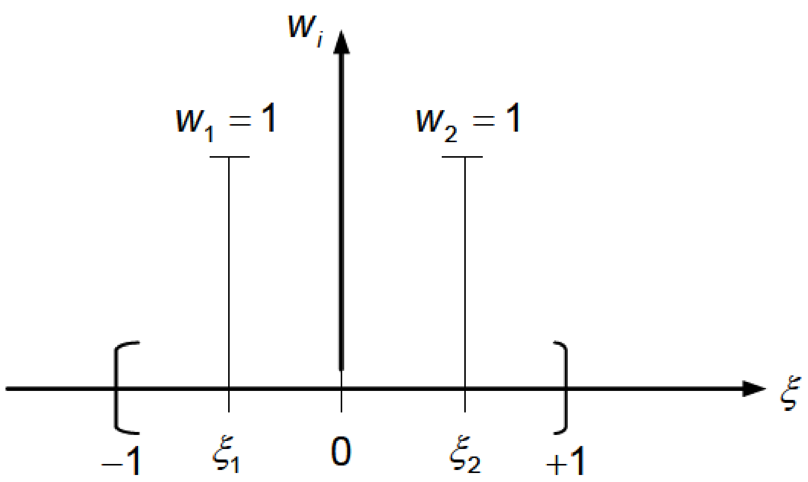


Abb. 1.5-3: Stützstellen und Wichtungsfaktoren für GAUSSsche Integration 2. Ordnung

3. $n_{\text{int}} = 3:$

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad w_1 = \frac{5}{9} \qquad\qquad \xi_3 = +\sqrt{\frac{3}{5}}, \qquad w_3 = \frac{5}{9}$$

$$\xi_2 = 0, \qquad w_2 = \frac{8}{9} \qquad\qquad R = \frac{g^{(6)}\left(\bar{\xi}\right)}{15750}$$

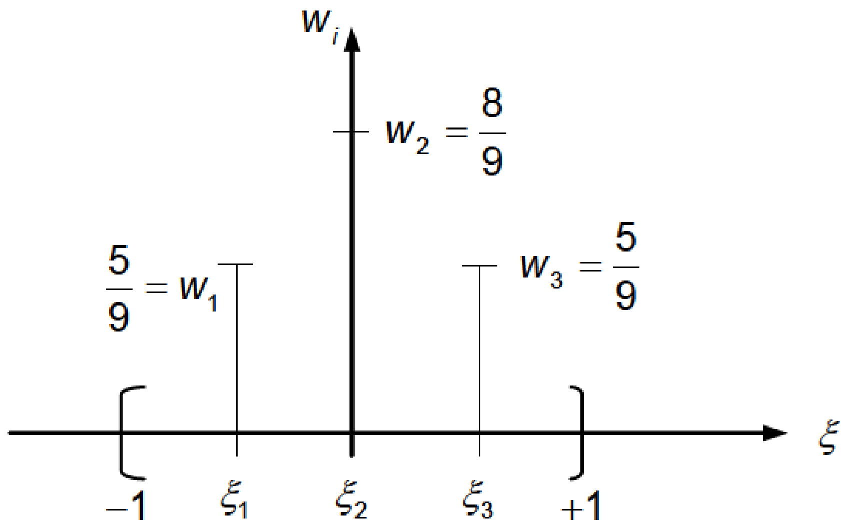


Abb. 1.5-4: Stützstellen und Wichtungsfaktoren für GAUSSsche Integration 3. Ordnung

1.5.2 Herleitung und Anwendung der Gaussschen Quadraturformel

Die Herleitung der GAUSSschen Quadraturformel soll am Beispiel der Integration eines kubischen Polynoms erläutert werden.

Eine ausführliche Herleitung des GAUSSschen Integrationsverfahrens findet sich z. B. in:

J. Stoehr: Einführung in die numerische Mathematik I, Springer Verlag, S. 127ff.

Kubisches Polynom:
$$g(\xi) = \alpha_0 + \alpha_1\,\xi + \alpha_2\,\xi^2 + \alpha_3\,\xi^3$$

Analytische Lösung:
$$\int_{-1}^{1} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = \int_{-1}^{1} \left(\alpha_0 + \alpha_1\,\xi + \alpha_2\,\xi^2 + \alpha_3\,\xi^3\right)\mathrm{d}\xi$$

$$= \left[\alpha_0\,\xi + \frac{1}{3}\,\alpha_2\,\xi^3\right]_{-1}^{1} + \underbrace{\left[\frac{1}{2}\,\alpha_1\,\xi^2 + \frac{1}{4}\,\alpha_3\,\xi^4\right]_{-1}^{+1}}_{=0}$$

Der zweite Summand verschwindet, da es ein Integral einer ungeraden Funktion $\alpha_1\,\xi + \alpha_3\,\xi^3$ über einem symmetrischen Intervall ist.

$$\int_{-1}^{1} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 2\,\alpha_0 + \frac{2}{3}\,\alpha_2 \tag{1.5.8}$$

GAUSS-Quadratur mit zwei Stützstellen:

$$\int_{-1}^{1} g(\xi)\,\mathrm{d}\xi \overset{\substack{n_{\text{int}}=2\\ \downarrow}}{=} \sum_{i=1}^{2} w_i\; g(\xi_i)$$

$$= w_1\; g\,(\xi_1) + w_2\; g\,(\xi_2) \qquad \text{Polynome dritter Ordnung}$$

$$= w_1\,\overbrace{\left(\alpha_0 + \alpha_1\,\xi_1 + \alpha_2\,\xi_1^2 + \alpha_3\,\xi_1^3\right)} + w_2\,\overbrace{\left(\alpha_0 + \alpha_1\,\xi_2 + \alpha_2\,\xi_2^2 + \alpha_3\,\xi_2^3\right)} \tag{1.5.9}$$

Die Koeffizienten w_1, w_2 und ξ_1, ξ_2 in Gl. (1.5.9) für die GAUSS-Quadratur sollen die analytische Lösung in Gl. (1.5.8) exakt darstellen.

Koeffizientenvergleich:

$$\alpha_0: \quad 2 = w_1 + w_2 \tag{1.5.10a}$$

$$\alpha_1: \quad 0 = w_1 \xi_1 + w_2 \xi_2 \tag{1.5.10b}$$

$$\alpha_2: \quad \frac{2}{3} = w_1 \xi_1^2 + w_2 \xi_2^2 \tag{1.5.10c}$$

$$\alpha_3: \quad 0 = w_1 \xi_1^3 + w_2 \xi_2^3 \tag{1.5.10d}$$

$\Rightarrow$ Die Gleichungen (1.5.10a) bis (1.5.10d) bilden ein System von 4 nichtlinearen Gleichungen für die 4 Unbekannten w_1, w_2 und ξ_1, ξ_2.

Theorie

Eine **mögliche** Lösung lautet:

$$w_1 = w_2 = 1 \qquad \text{(symmetrisch)}$$

Dann erfüllen

$$\xi_1 = -\xi_2$$

die Gl. (1.5.10b) und (1.5.10d)

Aus Gl. (1.5.10c) folgt:

$$\frac{2}{3} = 1 \cdot \xi_1^2 + 1 \cdot \xi_2^2$$

$$\Leftrightarrow \qquad \xi_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} = -\xi_1$$

Beispiel im Skript Kap. 1.5, S. 24 ff.

Beispiel: Anwendung auf den Dehnstab (Aufgabenstellung siehe Kapitel 1.3)

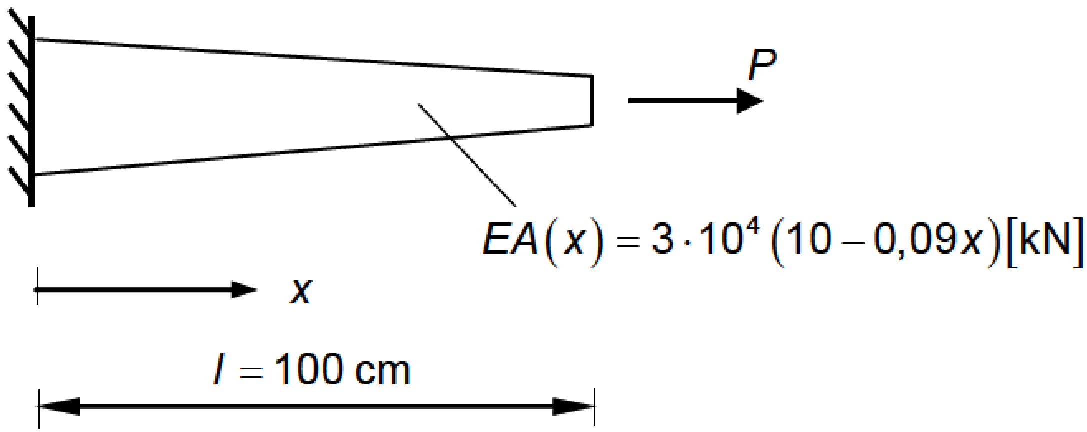


Abb. 1.5-5: Systemskizze

i) Quadratisches Element:

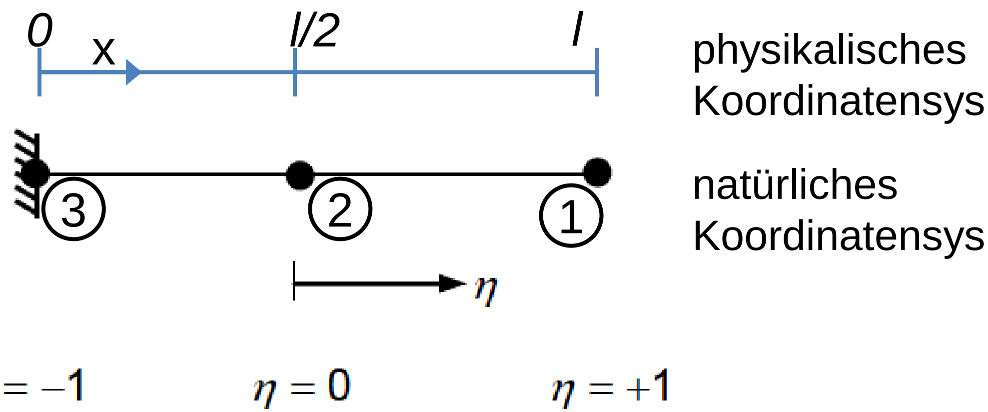
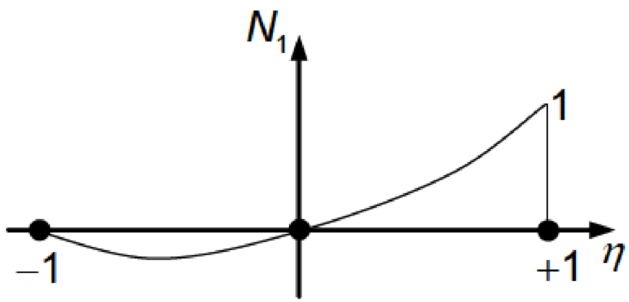


Abb. 1.5-6: Quadratisches Stabelement

Formfunktionen:



$$N_1(\eta) = \frac{1}{2}\eta(1+\eta) \qquad \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\eta} = \frac{1}{2} + \eta$$

Abb. 1.5-7: Formfunktion für Randknoten

Beispiel

i) Quadratisches Element:

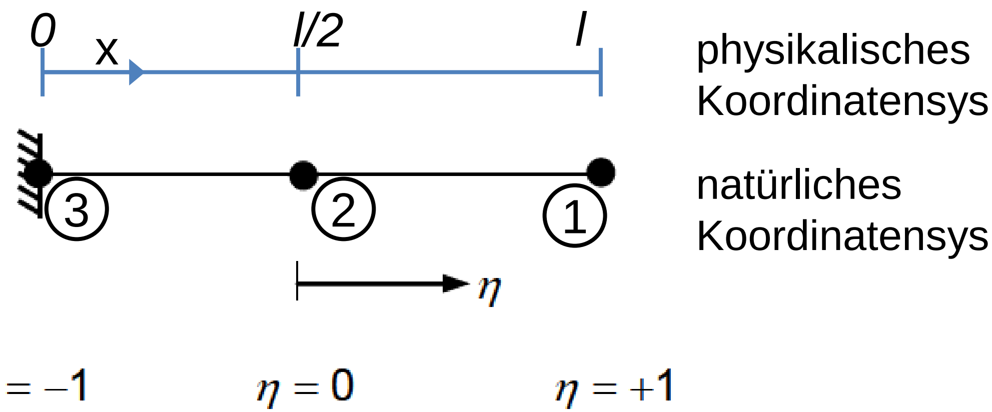
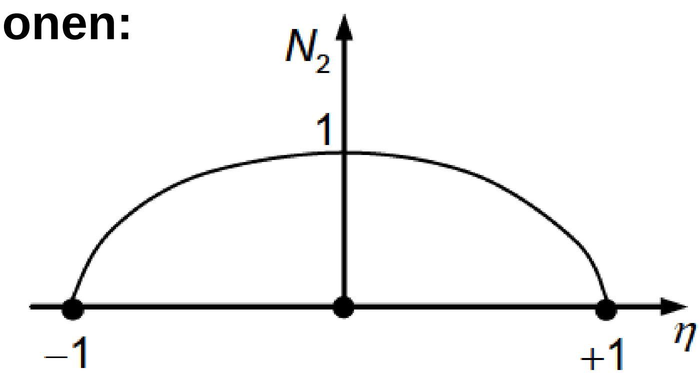


Abb. 1.5-6: Quadratisches Stabelement

Formfunktionen:



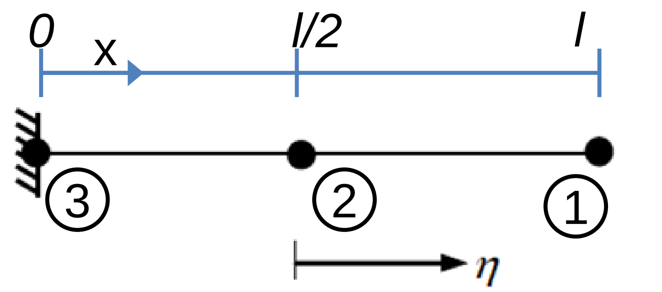
$$N_2(\eta) = 1 - \eta^2 \qquad \frac{dN}{d\eta} = -2\eta$$

Abb. 1.5-8: Formfunktion für Mittelknoten

Beispiel

physikalisches Koordinatensys.

natürliches Koordinatensys.



$\eta = -1$ $\qquad$ $\eta = 0$ $\qquad$ $\eta = +1$

Variablentransformation: $x \rightarrow \eta$, d. h. Stablängskoordinate x auf das Intervall $\left[-1, +1\right]$ abbilden.

Ansatz: $\qquad x = \hat{x}(\eta) = 50 + 50\eta$

oder formales Vorgehen: Interpolation der Ortskoordinate x - s. Kap. 6: Isoparametr. Elemente

$$\begin{aligned} x &= \hat{x}(\eta) = \left[N_1(\eta) \quad N_2(\eta)\right] \begin{bmatrix} x_1^k \\ x_2^k \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}\eta\,(1+\eta)\cdot 100 + \left(1-\eta^2\right)\cdot 50 \\ &= 50 + 50\eta \end{aligned}$$

Beispiel

Umrechnung des Differentials $\mathrm{d}x$ in $\mathrm{d}\eta$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\eta} = 50 \qquad \Leftrightarrow \qquad \frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{50}$$

$$\mathrm{d}x = 50\,\mathrm{d}\eta$$

$$\mathbf{J} = \left[\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\eta}\right] = [50]$$ Jacobi Matrix (hier eindimensional)

$$\det \mathbf{J} = |50| = 50$$ Jacobi Determinante

Beispiel

Verschiebung:

$$u = \hat{u}(\eta) = \begin{bmatrix} N_1(\eta) & N_2(\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{bmatrix}$$

Dehnung:

$$\varepsilon(x) = \frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}\hat{u}}{\mathrm{d}\eta}\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}\eta}\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} & \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}\eta}\,\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}+\eta\right)\frac{1}{50} & -2\eta\,\frac{1}{50} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1^k \\ u_2^k \end{bmatrix}$$

Beispiel

Querschnitt:

$$EA(x) = 3\cdot 10^4 \, (10 - 0{,}09\,x)$$

$$= 3\cdot 10^4 \left[10 - 0{,}09\,\left(50 + 50\,\eta\right)\right]$$

$$= 3\cdot 10^4 \left[5{,}5 - 4{,}5\,\eta\right]$$

$$= E\hat{A}(\eta)$$

Steifigkeit:

$$\mathbf{K} = \int_0^{100} \mathbf{B}^{\mathrm{T}}(x) \; EA(x) \; \mathbf{B}(x)\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-1}^{1} \hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}(\eta) \; E\hat{A}(\eta) \; \hat{\mathbf{B}}(\eta)\,\det\mathbf{J}\,\mathrm{d}\eta$$

Beispiel

Steifigkeit:

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{1} \hat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}(\eta) \quad E\hat{A}(\eta) \quad \hat{\mathbf{B}}(\eta)\,\det\mathbf{J}\,\mathrm{d}\eta$$

$$= \int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \frac{1}{2}+\eta & \frac{1}{50} \\ -2\eta & \frac{1}{50} \end{bmatrix} 3\cdot 10^4 (5{,}5-4{,}5\eta)\left[\left(\frac{1}{2}+\eta\right)\frac{1}{50} - 2\eta\frac{1}{50}\right]\cdot 50\,\mathrm{d}\eta$$

$$= \frac{3\cdot 10^4}{50}\int_{-1}^{1} \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}+\eta\right)^2 (5{,}5-4{,}5\eta) & -\left(\frac{1}{2}+\eta\right)2\eta(5{,}5-4{,}5\eta) \\ -2\eta\left(\frac{1}{2}+\eta\right)(5{,}5-4{,}5\eta) & (2\eta)^2(5{,}5-4{,}5\eta) \end{bmatrix}\mathrm{d}\eta$$

Im Integranden treten kubische Polynome auf. $\rightarrow$ Die 2-Punkt-GAUSS-Quadratur ist erforderlich.

$n_{\text{int}} = 2$:

$$\eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad ; \qquad w_1 = 1$$

Ausführen der GAUSS Integration für den ersten Integrationspunkt:

$$w_1\, \boldsymbol{g}\,(\eta_1) = 1 \cdot 600 \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(5{,}5 + 4{,}5\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) & -\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{-2}{\sqrt{3}}\left(5{,}5 + 4{,}5\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(5{,}5 + 4{,}5\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) & \left(-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left(5{,}5 + 4{,}5\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 29{,}071 & -433{,}975 \\ -433{,}975 & 6478{,}461 \end{bmatrix}$$

$$\eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad ; \qquad w_2 = 1$$

Beispiel

Ausführen der GAUSS Integration für den zweiten Integrationspunkt:

$$w_2\ \mathbf{g}\,(\eta_2) = 1\cdot 600 \begin{bmatrix} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 \left(5{,}5-4{,}5\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) & -\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\frac{2}{\sqrt{3}}\left(5{,}5-4{,}5\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \\ \frac{-2}{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(5{,}5-4{,}5\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) & \left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2\left(5{,}5-4{,}5\,\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2020{,}929 & -2166{,}025 \\ -2166{,}025 & 2321{,}539 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{K} = w_1\ \mathbf{g}(\eta_1) + w_2\ \mathbf{g}(\eta_2) = \begin{bmatrix} 2050{,}000 & -2600{,}000 \\ -2600{,}000 & 8800{,}000 \end{bmatrix}$$

Beispiel

ii) Lineares Element:

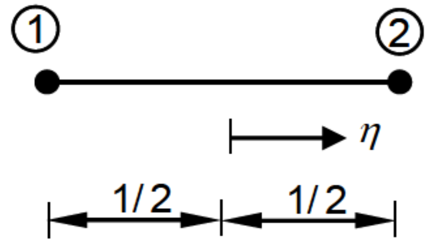


Abb. 1.5-9: Lineares Stabelement

- Der Verschiebungsverlauf $\hat{u}(\eta)$ ist ein lineares Polynom in η.
- Die Geometrieinterpolation $x(\eta)$ ist lineare Abbildung: $\eta \to x$. $\Rightarrow$ Die "Jacobi-Matrix" ist konstant.
- Der Verzerrungsverlauf $\varepsilon(x)$ ist konstant in x.
- Der Integrand der Steifigkeitsmatrix ist konstant.

$\Rightarrow$ Die 1-Punkt-GAUSS-Quadratur ist ausreichend für die Berechnung des bestimmten Integrals.