# FEM-Grundlagen

# 11. Übung

# Bilineares Rechteckelement

Marvin Nahrmann

**Sommersemester 2020**

## Aufgabe 1

In Abb. 1 ist ein bilineares Rechteckelement mit einer Länge von $2a$ und einer Breite von $2b$ zu sehen. Die Achsen des physikalischen Koordinatensystems $(x, y)$ sind parallel zu denen des natürlichen Koordinatensystems $(\xi, \eta)$. $x_1, x_2, y_2$ und $y_3$ stellen jeweils Koordinaten dar. Für das ebene Element soll die Elementsteifigkeitsmatrix bestimmt werden.

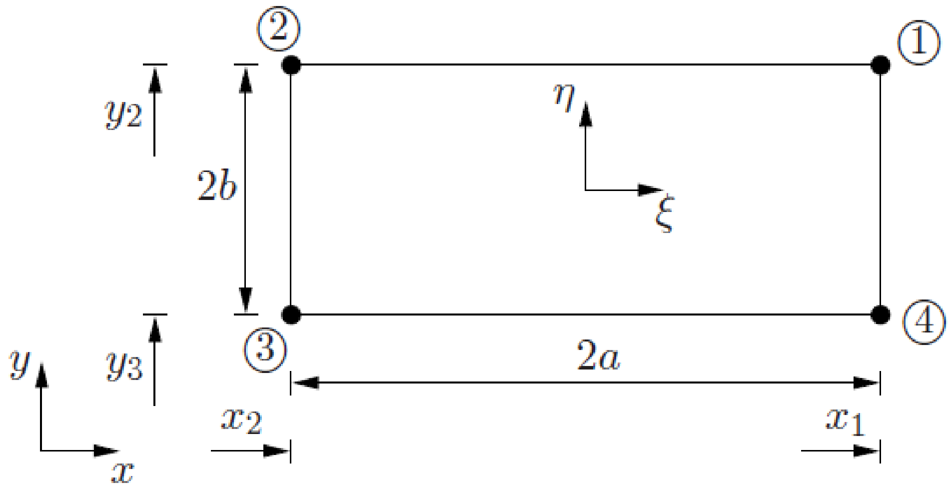



**Abb. 1:** Ebenes bilineares Rechteckelement

# Aufgabe 1

Berechnungsvorschrift Elementsteifigkeitsmatrix (aus diskretisierter schwacher Form)

$$
\begin{aligned}
\mathbf{k} &= \iint_A \mathbf{B}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \mathbf{B} \, \mathrm{d}A \\
&= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \widehat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} \mathbf{C} \, \widehat{\mathbf{B}} \det(\mathbf{J}) \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

zu bestimmen: **B**, **C**, det **J**

Geometrieinterpolation im ebenen, bilinearen isoparametrischen Element

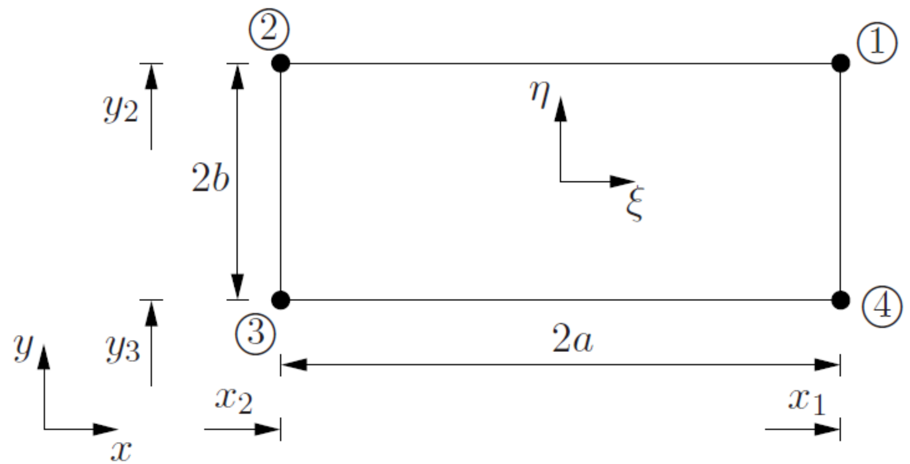
$$
\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{\mathrm{k}} \\ y_1^{\mathrm{k}} \\ x_2^{\mathrm{k}} \\ y_2^{\mathrm{k}} \\ x_3^{\mathrm{k}} \\ y_3^{\mathrm{k}} \\ x_4^{\mathrm{k}} \\ y_4^{\mathrm{k}} \end{Bmatrix} \qquad (1)
$$

$$
\mathbf{x} = \mathbf{N} \, \mathbf{x}^{\mathrm{k}}
$$

# Aufgabe 1

Knotenkoordinaten im physikalischen $(x, y)$-Koordinatensystem

$$\begin{aligned}
&\text{Knoten } ① : (x_1, y_2)\\
&\text{Knoten } ② : (x_2, y_2)\\
&\text{Knoten } ③ : (x_2, y_3)\\
&\text{Knoten } ④ : (x_1; y_3)
\end{aligned} \qquad (2)$$




Formfunktionen des ebenen bilinearen Elements

$$\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)\\
N_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)\\
N_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)\\
N_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)
\end{aligned} \qquad (3)$$

# Aufgabe 1

Einsetzen der Knotenkoordinaten (2) und Formfunktionen (3) in Gl. (1)

$$x = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}\underbrace{(x_1 - x_2)}_{=2a}\xi = \frac{1}{2}(x_1 + x_2) + a\xi$$

$$y = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) + \frac{1}{2}\underbrace{(y_2 - y_3)}_{=2b}\eta = \frac{1}{2}(y_2 + y_3) + b\eta$$

Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \frac{\partial x}{\partial \xi} = a, \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial y}{\partial \eta} = b$$

$$= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} (= \text{konstant})$$

Determinante der Jacobi-Matrix

$$\det(\mathbf{J}) = ab = (\text{konstant})$$

# Aufgabe 1

Diskretisierung des Verschiebungsfeldes

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{\mathrm{k}} \\ v_1^{\mathrm{k}} \\ u_2^{\mathrm{k}} \\ v_2^{\mathrm{k}} \\ u_3^{\mathrm{k}} \\ v_3^{\mathrm{k}} \\ u_4^{\mathrm{k}} \\ v_4^{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \; \mathbf{u}^{\mathrm{k}}$$

Kinematische Operatormatrix (B-Matrix) für den Knoten *N:* S. 114 im Skript

$$\mathbf{B}_N(x,y) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial N_N}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_N}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_N}{\partial y} & \dfrac{\partial N_N}{\partial x} \end{bmatrix} = \hat{\mathbf{B}}_N(\xi,\eta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial N_N}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial N_N}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} \\ \dfrac{\partial N_N}{\partial \eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} & \dfrac{\partial N_N}{\partial \xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} \end{vmatrix}$$

# Aufgabe 1

kinematischer Operator

$$
\widehat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}
$$

Knoten 1 Knoten 2 Knoten 3 Knoten 4

mit

$$
N_{k,x} = N_{k,\xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} = a^{-1} N_{k,\xi} \ , \ \ k = 1, \ldots, 4
$$

$$
N_{k,y} = N_{k,\eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} = b^{-1} N_{k,\eta} \ , \ \ k = 1, \ldots, 4
$$

$$
\widehat{\mathbf{B}} = \frac{1}{4ab} \begin{bmatrix} b(1+\eta) & 0 & -b(1+\eta) & 0 & -b(1-\eta) & 0 & b(1-\eta) & 0 \\ 0 & a(1+\xi) & 0 & a(1-\xi) & 0 & -a(1-\xi) & 0 & -a(1+\xi) \\ a(1+\xi) & b(1+\eta) & a(1-\xi) & -b(1+\eta) & -a(1-\xi) & -b(1-\eta) & -a(1+\xi) & b(1-\eta) \end{bmatrix}
$$

# Aufgabe 1

Transponierte des kinematischen Operators

$$\widehat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{1,y} \\ 0 & N_{1,y} & N_{1,x} \\ N_{2,x} & 0 & N_{2,y} \\ 0 & N_{2,y} & N_{2,x} \\ N_{3,x} & 0 & N_{3,y} \\ 0 & N_{3,y} & N_{3,x} \\ N_{4,x} & 0 & N_{4,y} \\ 0 & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}$$

Elastizitätsmatrix im ESZ

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(1-\nu) \end{bmatrix}$$

# Aufgabe 1

Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix (Matrizenmultiplikation)

$$\mathbf{k} = \int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} ab \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \qquad \left(\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{8\times 8}\right)$$

$$k_{ij} = \int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} \widehat{B}_{ik}^{\mathrm{T}} C_{kl} \widehat{B}_{lj} ab \, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \quad \text{(Indexschreibweise)}$$

Über doppelte Indizes wird summiert
(EINSTEINsche Summenkonvention)

# Aufgabe 1

Beispiel: Steifigkeitskomponente $k_{15}$

$$k_{15} = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \widehat{B}^{\mathrm{T}}_{1k} C_{kl} \widehat{B}_{l5}\, ab \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\widehat{B}^{\mathrm{T}}_{11} C_{11} \widehat{B}_{15} + \widehat{B}^{\mathrm{T}}_{11} C_{12} \underbrace{\widehat{B}_{25}}_{=0} + \widehat{B}^{\mathrm{T}}_{11} \underbrace{C_{13}}_{=0} \widehat{B}_{35} +$$

$$+ \underbrace{\widehat{B}^{\mathrm{T}}_{12}}_{=0} C_{21} \widehat{B}_{15} + \underbrace{\widehat{B}^{\mathrm{T}}_{12}}_{=0} C_{22} \widehat{B}_{25} + \underbrace{\widehat{B}^{\mathrm{T}}_{12}}_{=0} C_{23} \widehat{B}_{35} +$$

$$+ \widehat{B}^{\mathrm{T}}_{13} \underbrace{C_{31}}_{=0} \widehat{B}_{15} + \widehat{B}^{\mathrm{T}}_{13} \underbrace{C_{32}}_{=0} \widehat{B}_{25} + \widehat{B}^{\mathrm{T}}_{13} C_{33} \widehat{B}_{35})\, ab \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

$$= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\widehat{B}^{\mathrm{T}}_{11} C_{11} \widehat{B}_{15} + \widehat{B}^{\mathrm{T}}_{13} C_{33} \widehat{B}_{35})\, ab \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta$$

# Aufgabe 1

$$
\begin{aligned}
k_{15} &= ab \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (N_{1,x} C_{11} N_{3,x} + N_{1,y} C_{33} N_{3,y})\, \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= ab \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left( N_{1,x} \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}}_{=E'} N_{3,x} + N_{1,y} \underbrace{\frac{E}{2(1+\nu)}}_{=G} N_{3,y} \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= ab \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left( E' \frac{b(1+\eta)}{4ab} \frac{-b(1-\eta)}{4ab} + G \frac{a(1+\xi)}{4ab} \frac{-a(1-\xi)}{4ab} \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= -\frac{1}{16ab} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left( E' b^2 (1-\eta^2) + G a^2 (1-\xi^2) \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

Integration (numerische oder analytisch) führt auf: $k_{15} = -\frac{1}{6} \left( E' \frac{b}{a} + G \frac{a}{b} \right)$

## Aufgabe 2

In Abb. 2 ist das bilineare Rechteckelement aus Aufgabe 1 dargestellt, das auf seiner Oberseite bei $\eta = +1$ durch eine konstante Streckenlast $p_0$ belastet wird. Die konsistenten Knotenlasten infolge der Beanspruchung sollen ermittelt werden.

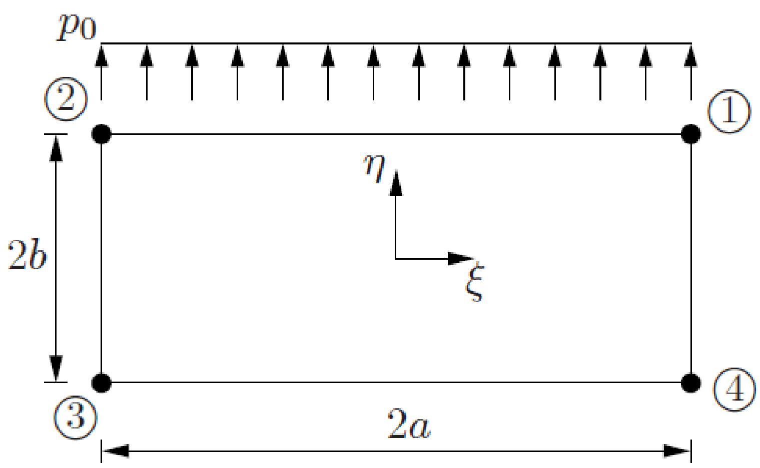



**Abb. 2:** Ebenes bilineares Rechteckelement unter konstanter Streckenlast

# Aufgabe 2

Berechnung des Elementlastvektors

$$\mathbf{p} = \int\limits_{a_\sigma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{t} \; \mathrm{d}a \quad \text{mit } \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}$$

$$= \int\limits_{x} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \mathbf{t} \; \mathrm{d}x$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\xi, \eta = 1) \mathbf{t} \; a \mathrm{d}\xi \quad \text{mit } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = a$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix}_{\eta=1} \begin{Bmatrix} 0 \\ p_0 \end{Bmatrix} a \mathrm{d}\xi \quad = \frac{1}{4} \int\limits_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1+\xi)2 & 0 \\ 0 & (1+\xi)2 \\ (1-\xi)2 & 0 \\ 0 & (1-\xi)2 \\ (1-\xi)0 & 0 \\ 0 & (1-\xi)0 \\ (1+\xi)0 & 0 \\ 0 & (1+\xi)0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ p_0 \end{Bmatrix} a \mathrm{d}\xi$$

# Aufgabe 2

$$\mathbf{p} = \frac{ap_0}{2}\left\{\begin{matrix} 0 \\ \xi + 0,5\xi^2 \\ 0 \\ \xi - 0,5\xi^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}_{-1}^{+1} = ap_0\left\{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}\right\}$$

## 5.8.3 Gesamtfehler in FEM-Rechnungen

Im Allgemeinen gilt, dass mit zunehmender Netzverfeinerung (Elementdichte) bessere Näherungslösungen $u^h$ durch die FEM–Methode erzielt werden, d. h. der lokale Diskretisierungsfehler

$$e_D(x,y) = u(x,y) - u^h(x,y)$$

zwischen der exakten Lösung $u$ und der Approximation wird kleiner.

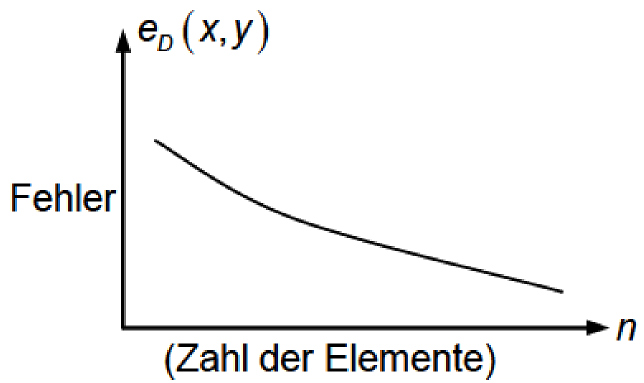



Abb. 5.8-5:Approximationsfehler in Abhängigkeit der Elementanzahl

Der numerische Fehler aus Rundung und Unsicherheit wächst hingegen mit der Anzahl der Elemente, siehe Abb. 5.8.6.

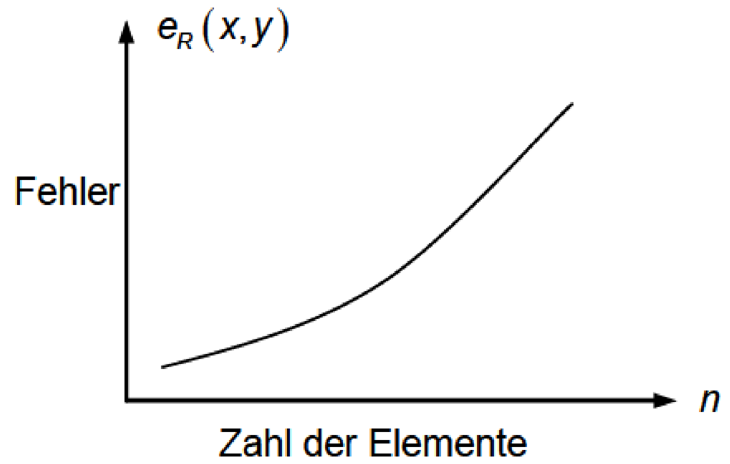



Abb. 5.8-6: Abbruchfehler in Abhängigkeit der Elementzahl

Der Gesamtfehler $e$ aus Diskretisierung und Rundung bzw. Unsicherheit.

$$e = e_R + e_D$$

setzt sich aus gegenläufigen Anteilen in Abhängigkeit der Elementanzahl $n$ zusammen.

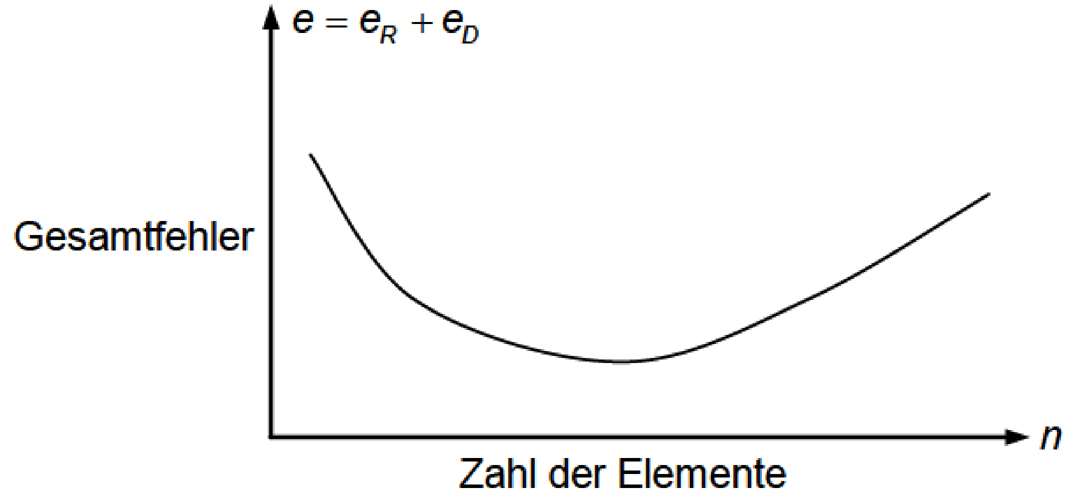



Abb. 5.8-7: Gesamtfehler in Abhängigkeit der Anzahl der Elemente