

---

# FEM-Grundlagen

## 10. Übung

### Rechtwinklige Klagscheibe

Marvin Nahrman

Sommersemester 2020



# Rechtwinklige Krag­scheibe

## FEM-Übung

### Rechtwinklige Krag­scheibe unter Quer­kraft­belastung: Konsistente Knotenlasten

Die System­skizze in Abb. 1 (a) zeigt einen Krag­balken der Länge  $l$ , der durch eine Quer­last  $Q$  beansprucht wird. Das Scheiben­modell dieses Krag­balkens ist in Abb. 1 (b) dargestellt. Es wird durch eine zur Quer­last  $Q$  äquivalente Strecken­last  $p(y)$  belastet. Die parabolische Verteilung der Strecken­last am linken Rand der Krag­scheibe folgt aus der Kenntnis, dass die Schubspannungs­verteilung quadratisch über den Querschnitt verläuft. Ihr Maximum wird durch  $p_0$  beschrieben. Die Schubspannung  $\tau_{yx}$  am oberen ( $y = b$ ) und unteren Rand ( $y = -b$ ) ist Null (schubspannungsfreier Rand). Gemäß der Symmetrie­bedingung  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$  muss an den Eckpunkten bei  $(0, b)$  und  $(0, -b)$  auch die Schubspannung  $\tau_{xy}$  verschwinden. Somit nimmt auch die Strecken­last  $p(y)$  dort den Wert Null an.

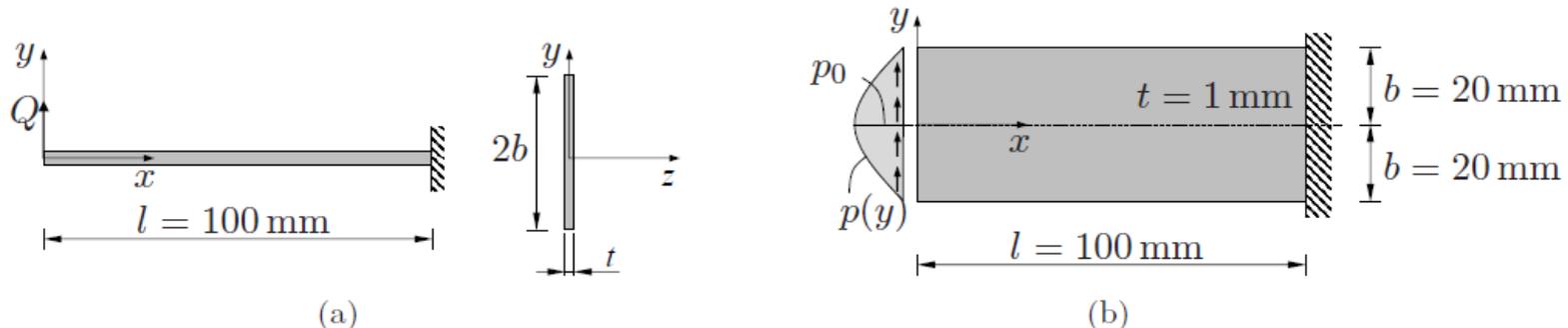


Abb. 1: (a) Krag­balken unter Einzellast  $Q$  (b) Krag­scheibe unter konsistenter Strecken­last  $p(y)$

# Rechtwinklige Krag­scheibe

Geg.: Elastizitätsmodul  $E = 2 \cdot 10^5$  MPa, Querdehnzahl  $\nu = 0,3$ , Querlast  $Q = -100$  N

Die Krag­scheibe soll mit der Methode der Finiten Elemente berechnet werden. Dazu werden 4 lineare Elemente über die Höhe verwendet, wie in Abb. 2 zu sehen ist. Die äquivalenten Knotenlasten sollen für diese Diskretisierung ermittelt werden.

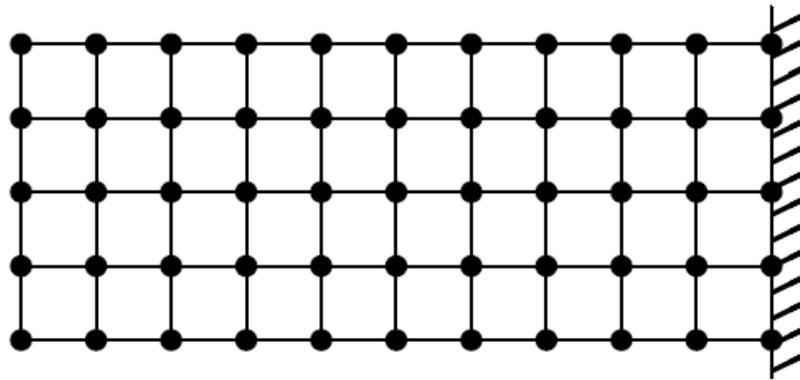


Abb. 2: Vernetzung der Krag­scheibe mit  $8 \times 4$  Elementen

# Rechtwinklige Kragsscheibe

Zunächst wird das Maximum der äquivalenten Streckenlast ermittelt. Dazu wird folgender quadratischer Ansatz verwendet:

$$p(y) = -p_0 \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] .$$

Mit dem Zusammenhang zwischen der Querkraft und der Streckenlast

$$Q = \int_{-b}^b p(y) dy .$$

folgt:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-b}^b p(y) dy \\ &= \int_{-b}^b -p_0 \left[ 1 - \left( \frac{y}{b} \right)^2 \right] dy \\ &= -p_0 \left[ y - \frac{y^3}{3b^2} \right]_{-b}^b \\ &= -\frac{4}{3} p_0 b , \end{aligned}$$

gegeben:  $Q = -100 \text{ N}$



# Rechtwinklige Krag­scheibe

wodurch  $p_0$  sich zu

$$\begin{aligned} p_0 &= -\frac{3Q}{4b} \\ &= 3,75 \frac{\text{N}}{\text{mm}} \end{aligned}$$

ergibt. Der Ansatz für die parabolische Streckenlast lautet somit:

$$p(y) = -3,75 \left[ 1 - \left( \frac{y}{20} \right)^2 \right].$$

Dazu wird die Krag­scheibe in  $8 \times 4$  Elemente eingeteilt, siehe Abb. 2.

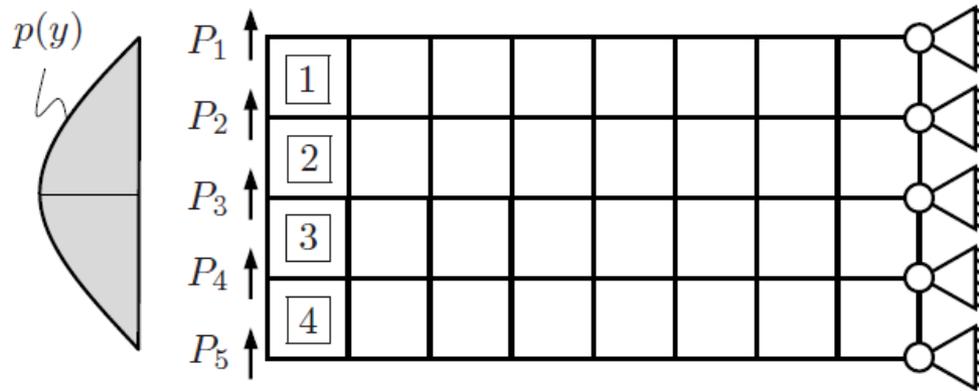


Abb. 2: FE-Modell mit  $8 \times 4$  Scheibenelementen

# Rechtwinklige Kragsscheibe

---

Im linear-elastischen Fall lautet das resultierende Gleichungssystem

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{P} .$$

Der Strukturlastvektor  $\mathbf{P}$  berechnet sich für linienförmig verteilte Lasten nach

$$\mathbf{P} = \int_{a_\sigma} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, da \quad \text{mit } \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} .$$

Die Berechnung auf Strukturebene setzt sich aus den Anteilen der Elementlastvektoren zusammen:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \sum_{e=1}^{nel_\sigma} \mathbf{p} \\ &= \sum_{e=1}^{nel_\sigma} \int_{a_{\sigma e}} \mathbf{N}^T \mathbf{t} \, da . \end{aligned}$$



# Rechtwinklige Krag­scheibe

---

Der Randspannungsvektor hat im vorliegenden Fall nur Komponenten in  $y$ -Richtung:

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p(y) \end{Bmatrix} .$$

Der Ansatz für das Verschiebungsfeld lautet in Vektor-Matrix Schreibweise ausgeschrieben:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^k \\ v_1^k \\ u_2^k \\ v_2^k \\ u_3^k \\ v_3^k \\ u_4^k \\ v_4^k \end{Bmatrix} .$$

# Rechtwinklige Kragsscheibe

Somit lautet der Elementlastvektor  $\mathbf{p}$  aus Gl. (12) unter Verwendung von Gl. (14) wie folgt:

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{pmatrix}$$

$$= \int_{a_{\sigma e}} \begin{pmatrix} 0 \\ N_1 p(y) \\ 0 \\ N_2 p(y) \\ 0 \\ N_3 p(y) \\ 0 \\ N_4 p(y) \end{pmatrix} da = \int_{-1}^{+1} \begin{pmatrix} 0 \\ N_1 p(y) \\ 0 \\ N_2 p(y) \\ 0 \\ N_3 p(y) \\ 0 \\ N_4 p(y) \end{pmatrix} \det(\mathbf{J}) d\eta$$

# Rechtwinklige Kragsscheibe

Elementkante bei  
 $x=0$  bzw.  $\xi=-1$

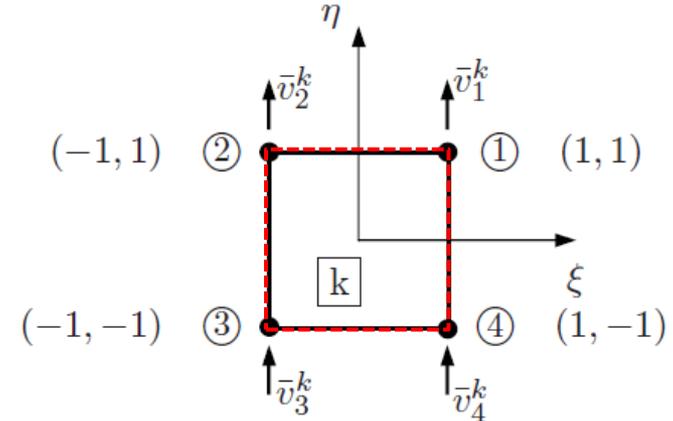
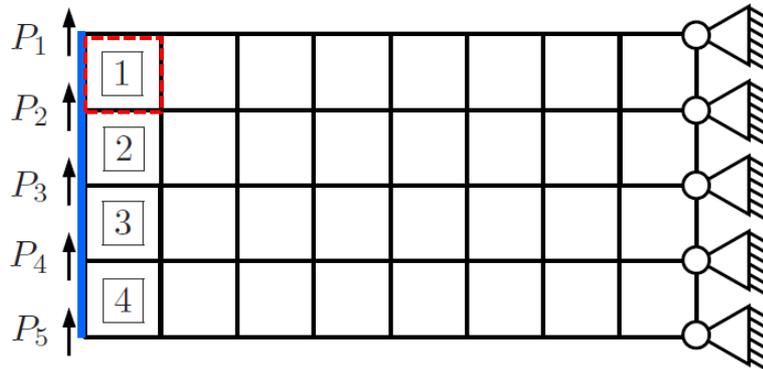


Abb. 3: Abb. 4: Isoparametrisches Scheibenelement

Formfunktionen entlang  
 der Elementkante  
 ( $\xi=-1$ )

$$N_1 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta),$$

$$N_1|_{\xi=-1} = 0$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta),$$

$$N_2|_{\xi=-1} = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta),$$

$$N_3|_{\xi=-1} = \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta),$$

$$N_4|_{\xi=-1} = 0$$

# Rechtwinklige Kragsscheibe

Die Geometrie wird analog zum Verschiebungsfeld interpoliert:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^k \\ y_1^k \\ x_2^k \\ y_2^k \\ x_3^k \\ y_3^k \\ x_4^k \\ y_4^k \end{Bmatrix} \\
 &\downarrow \\
 &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\xi=-1} \begin{Bmatrix} x_1^k \\ y_1^k \\ x_2^k \\ y_2^k \\ x_3^k \\ y_3^k \\ x_4^k \\ y_4^k \end{Bmatrix} \cdot \quad (24)
 \end{aligned}$$

$$N_1|_{\xi=-1} = 0$$

$$N_2|_{\xi=-1} = \frac{1}{2}(1 + \eta)$$

$$N_3|_{\xi=-1} = \frac{1}{2}(1 - \eta)$$

$$N_4|_{\xi=-1} = 0$$

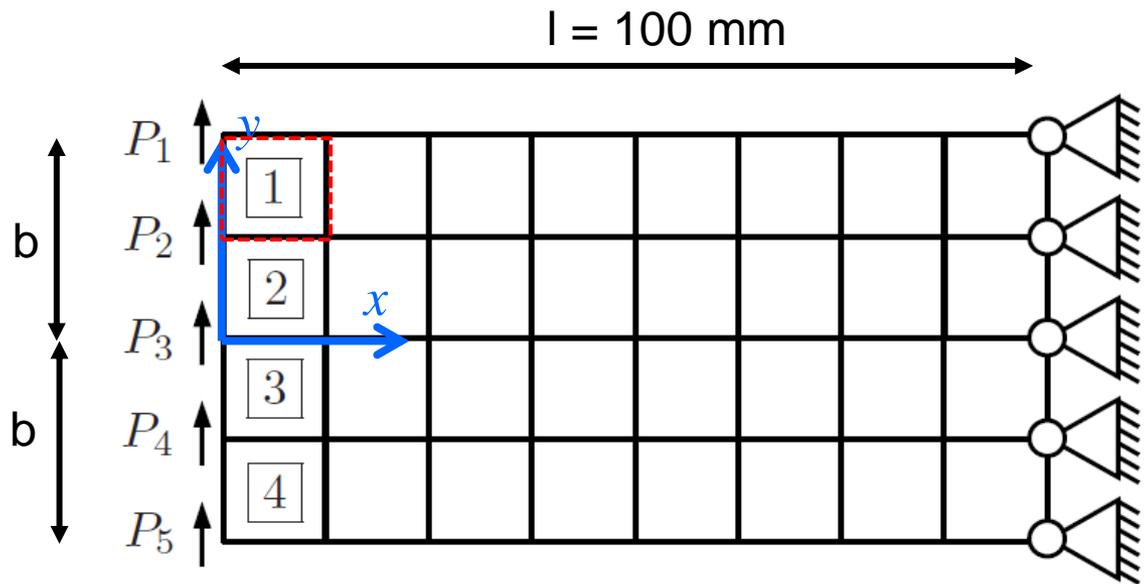
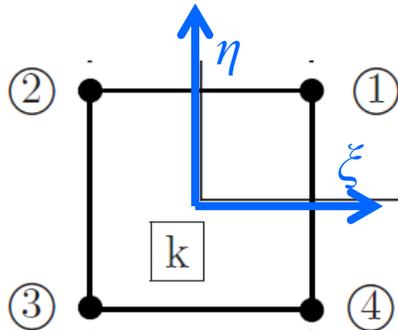
# Rechtwinklige Kragsscheibe

Die parabolische Streckenlast muss auch in den Einheitsraum transformiert werden:

$$p(y(\eta)) = -p_0 \left[ 1 - \left( \frac{y(\eta)}{20} \right)^2 \right]. \quad (25)$$

Die globalen Knotenkoordinaten im ersten Element lauten:

- Knoten 1:  $(0, 125l; b)$
- Knoten 2:  $(0; b)$
- Knoten 3:  $(0; 0, 5b)$
- Knoten 4:  $(0, 125l; 0, 5b)$



$b = 20 \text{ mm}$

# Rechtwinklige Kragsscheibe

---

Somit folgt Gl. (24) zu

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0,5(1 + \eta) \cdot 0 + 0,5(1 - \eta) \cdot 0 \\ 0,5(1 + \eta) \cdot b + 0,5(1 - \eta) \cdot 0,5b \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 5(3 + \eta) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

Die JACOBI-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix}$$

und deren Determinante folgt zu

$$\det(\mathbf{J}) = 5 .$$



# Rechtwinklige Kragsscheibe

Die Streckenlast (25) im wird nun auch transformiert:

$$\begin{aligned} p(y(\eta)) &= -p_0 \left[ 1 - \left( \frac{5(3+\eta)}{20} \right)^2 \right] \\ &= -3,75 \left[ 1 - \frac{1}{16} (3+\eta)^2 \right] \end{aligned}$$

Somit ergeben sich die beiden Anteile im Elementlastvektor:

$$\int_{-1}^{+1} \begin{pmatrix} 0 \\ N_1 p(y) \\ 0 \\ N_2 p(y) \\ 0 \\ N_3 p(y) \\ 0 \\ N_4 p(y) \end{pmatrix} \det(\mathbf{J}) d\eta$$

$$p_4^1 = \int_{-1}^{+1} -3,75 \left[ 1 - \frac{1}{16} (3+\eta)^2 \right] \frac{5}{2} (1+\eta) d\eta$$

$$p_6^1 = \int_{-1}^{+1} -3,75 \left[ 1 - \frac{1}{16} (3+\eta)^2 \right] \frac{5}{2} (1-\eta) d\eta$$

$$N_1 = 0 \text{ und } N_4 = 0$$

# Rechtwinklige Kragsscheibe

Der Integrand ist jeweils ein Polynom 3. Grades und wird mittels 2-Punkt-GAUSS-Quadratur mit

$$\eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad w_1 = 1 \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad w_2 = 1$$

gelöst. Es folgt dann für die Komponenten

$$p_4^1 \approx -9,375 \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 9,375 \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( 3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \approx -5,46875 \text{ N}$$

$$p_4^6 \approx -9,375 \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( 3 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 9,375 \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( 3 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \\ \approx -10,15625 \text{ N} \quad .$$

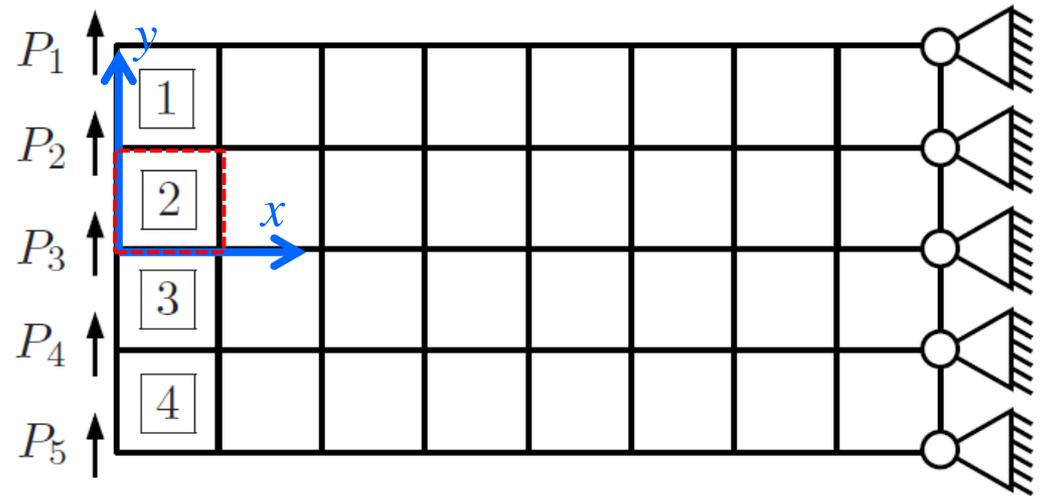


# Rechtwinklige Kragsscheibe

Die globalen Knotenkoordinaten im zweiten Element lauten:

- Knoten 1:  $(0, 125l; 0, 5b)$
- Knoten 2:  $(0; 0, 5b)$
- Knoten 3:  $(0; 0)$
- Knoten 4:  $(0, 125l; 0)$

Somit folgt Gl. (24) zu



$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} 0,5(1+\eta) \cdot 0 + 0,5(1-\eta) \cdot 0 \\ 0,5(1+\eta) \cdot 0,5b + 0,5(1-\eta) \cdot 0 \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 5(1+\eta) \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$\det(\mathbf{J}) = 5$$

# Rechtwinklige Kragsscheibe

Die Streckenlast ist

$$\begin{aligned} p(y(\eta)) &= -3,75 \left\{ 1 - \left[ \frac{5(1+\eta)}{20} \right]^2 \right\} \\ &= -3,75 \left\{ 1 - \frac{1}{16} (1+\eta)^2 \right\}. \end{aligned}$$

Die Komponenten im zweiten Element ergeben sich nun

$$\begin{aligned} p_4^2 &= \int_{-1}^1 -3,75 \left[ 1 - \frac{1}{16} (1+\eta)^2 \right] \frac{5}{2} (1+\eta) d\eta \\ p_6^2 &= \int_{-1}^1 -3,75 \left[ 1 - \frac{1}{16} (1+\eta)^2 \right] \frac{5}{2} (1-\eta) d\eta \end{aligned}$$



# Rechtwinklige Kragsscheibe

Die numerische Integration mit der 2-Punkt-GAUSS-Quadratur führt auf

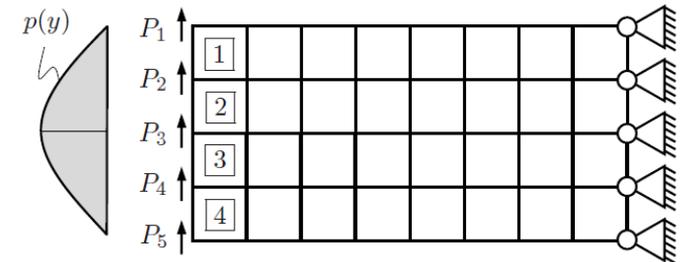
$$p_4^2 \approx -9,375 \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 9,375 \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\approx -16,40625 \text{ N}$$

$$p_6^2 \approx -9,375 \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 9,375 \left[ 1 - \frac{1}{16} \left( 1 - \frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \left( 1 + \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$\approx -17,96875 \text{ N} \quad .$$

Der Strukturlastvektor ergibt sich nun folgendermaßen:



$$P_1 = p_4^1 = -5,46875 \text{ N}$$

$$P_2 = p_6^1 + p_4^2 = -26,5625 \text{ N}$$

$$P_3 = 2p_6^2 = -35,9375 \text{ N}$$

$$P_4 = P_2 = -26,5625 \text{ N}$$

$$P_5 = P_1 = -5,46875 \text{ N}$$

Symmetrie:

