
FEM-Grundlagen

9. Übung

Vorgespannte Membran

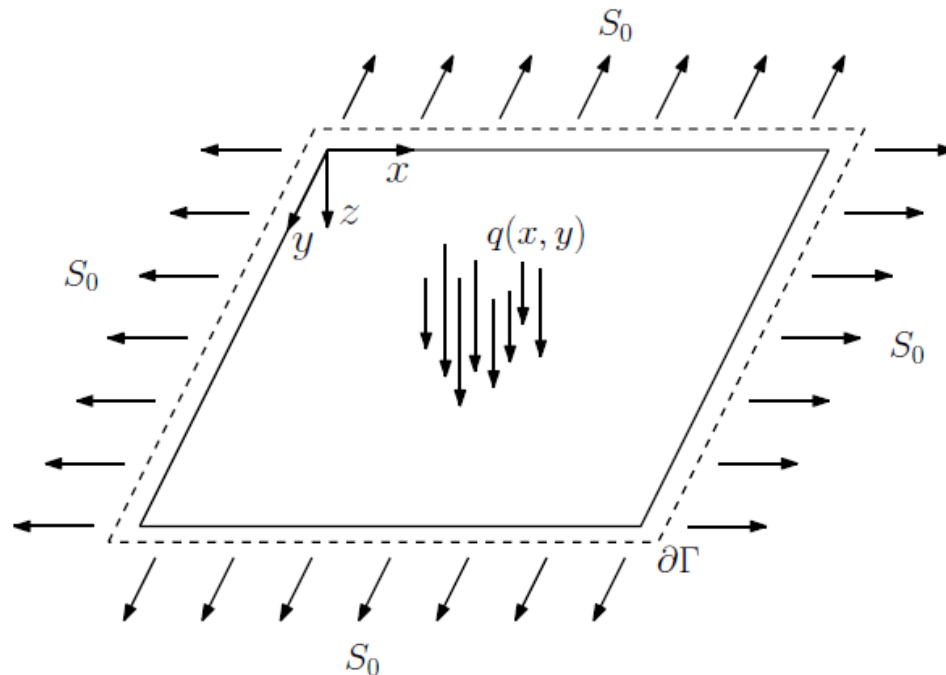
Marvin Nahrman

Sommersemester 2020



Aufgabenstellung

Eine vorgespannte Membran verhält sich im Zweidimensionalen wie ein Seil im Eindimensionalen. Die Membran nimmt keine Momente auf, sondern nur Zugkräfte und leitet diese an ihre Ränder weiter. Ein bekannter Anwendungsfall ist z. B. das Trampolin. Das mechanische Problem ist in Abb. 1 skizziert.



$\partial\Gamma$: Rand

S_0 : Vorspannkraft

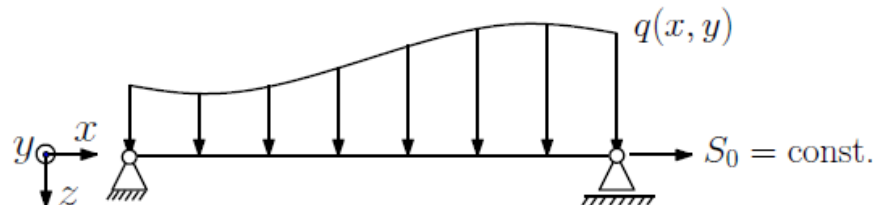
$\equiv$ Lagerung längs des Randes

$q(x, y)$: Flächenverteilte Last

$$[q] = \frac{\text{Kraft}}{\text{Fläche}}$$

$$[S_0] = \frac{\text{Kraft}}{\text{Länge}}$$

Längsschnitt:



Um die Membran im Kontext der FEM anzuwenden, muss die Elementsteifigkeitsmatrix und der Elementlastvektor hergeleitet werden. Dazu sollen die folgenden Teilschritte bearbeitet werden:

1. Herleitung der Differentialgleichung
2. Schwache Form
3. FE-Diskretisierung
4. Parametrisierung
5. Aufstellen der Elementsteifigkeitsmatrix
6. Aufstellen des Elementlastvektors

(1) Herleitung der Differentialgleichung

(1) Herleitung der Differentialgleichung (an der ausgelenkten Membran)

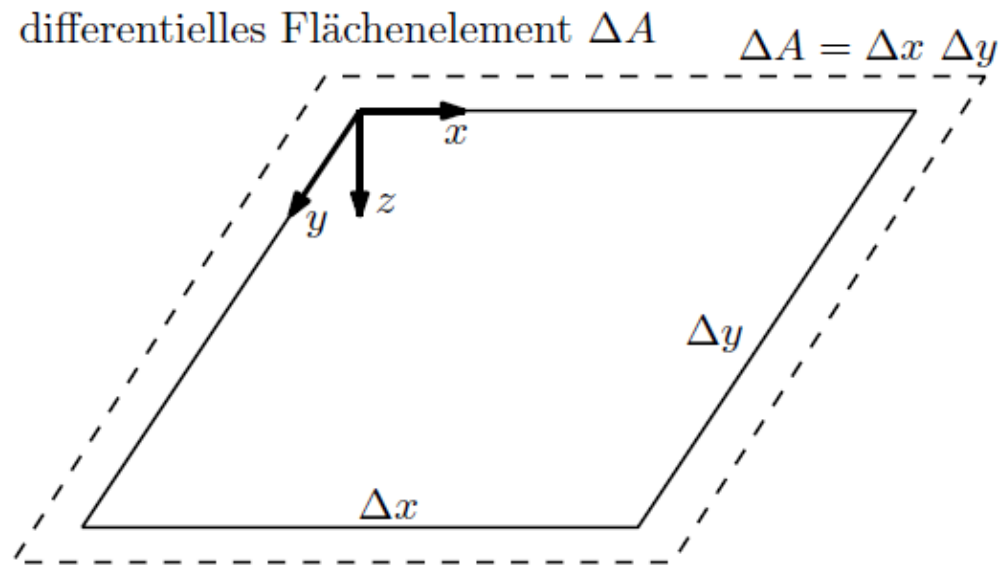


Abb. 1: Differentielles Flächenelement

(1) Herleitung der Differentialgleichung

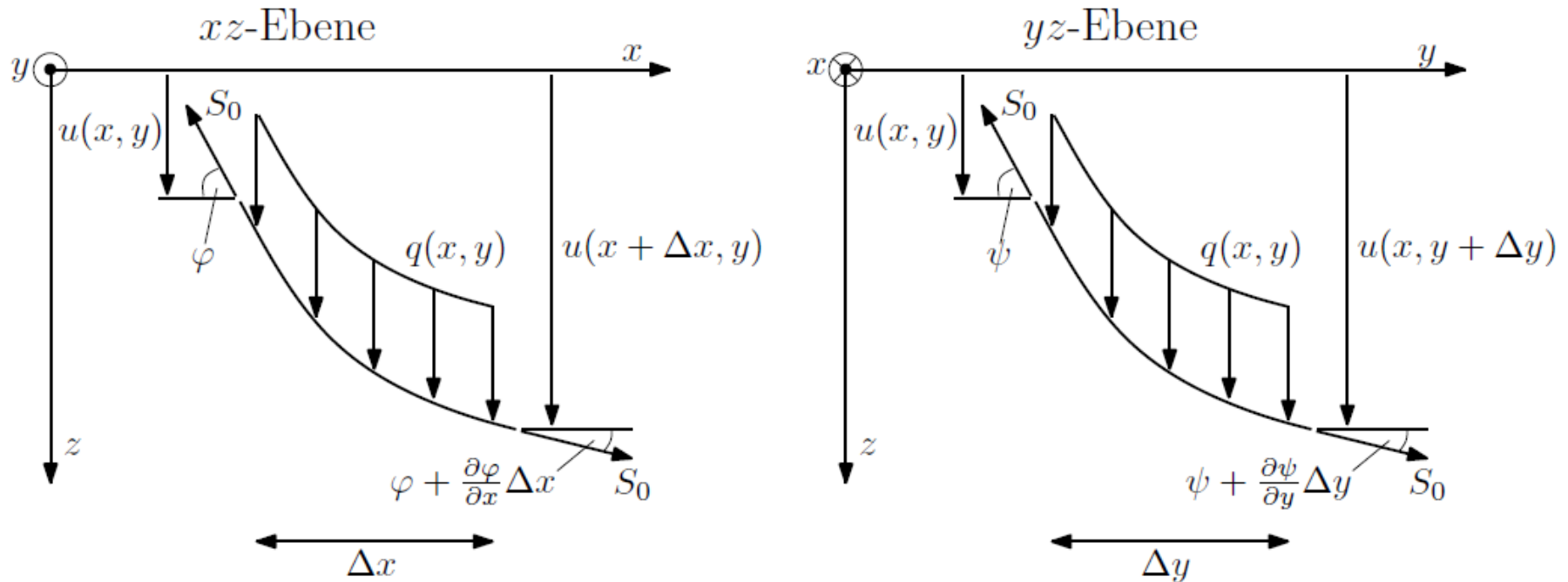


Abb. 2: Darstellung in der xz- und in der yz-Ebene

$$\sum F_{i,z} : \left[-S_0 \sin(\varphi) + S_0 \sin\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x\right) \right] \Delta y + \left[-S_0 \sin(\psi) + S_0 \sin\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta y\right) \right] \Delta x + q \Delta x \Delta y = 0$$

(1) Herleitung der Differentialgleichung

Kleinwinkelnäherung: $\sin(\varphi) \approx \varphi$ bzw. $\sin(\psi) \approx \psi$

$$-S_0\varphi\Delta y + S_0\varphi\Delta y + S_0\frac{\partial\varphi}{\partial x}\Delta x\Delta y - S_0\psi\Delta x + S_0\psi\Delta x + S_0\frac{\partial\psi}{\partial y}\Delta y\Delta x + q\Delta x\Delta y = 0$$

Kleinwinkelnäherung: $\tan(\varphi) = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $\tan(\varphi) \approx \varphi$ bzw. $\tan(\psi) = \frac{\partial u}{\partial y}$ und $\tan(\psi) \approx \psi$

Daraus folgt: $\varphi \approx \frac{\partial u}{\partial x}$ bzw. $\psi \approx \frac{\partial u}{\partial y}$

$$S_0\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S_0\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + q = 0$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

LAPLACE Operator

$$S_0\Delta u + q = 0$$

Dies ist eine POISSONSche Differentialgleichung (partielle Dgl. 2. Ordnung, linear, inhomogen)

Randbedingungen: $u = 0$ auf Rand Γ

(2) Schwache Form

(2) Schwache Form

$$\begin{aligned}\iint_A (w [S_0 \Delta u + q]) \, dA &= 0 \\ \Leftrightarrow S_0 \iint_A (w \Delta u) \, dA &= - \iint_A (w q) \, dA\end{aligned}$$

Produktintegration der linken Seite:

$$w \Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Einsetzen:

$$S_0 \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \, dA - S_0 \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \, dA = - \iint_A w q \, dA \quad (*)$$

(2) Schwache Form

Ersten Term umformulieren:

$$S_0 \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] dA = S_0 \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left(w \frac{\partial}{\partial x} \right) dA = S_0 \iint_A \nabla \cdot \mathbf{v} dA \quad (**)$$

GAUSS-Theorem (Divergenztheorem):

$$\iint_A \nabla \cdot \mathbf{v} dA = \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} d\Gamma$$

Es folgt für (**)

$$S_0 \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \left(w \frac{\partial}{\partial x} \right) d\Gamma = 0, \quad \text{da } w = 0 \text{ auf } \Gamma$$

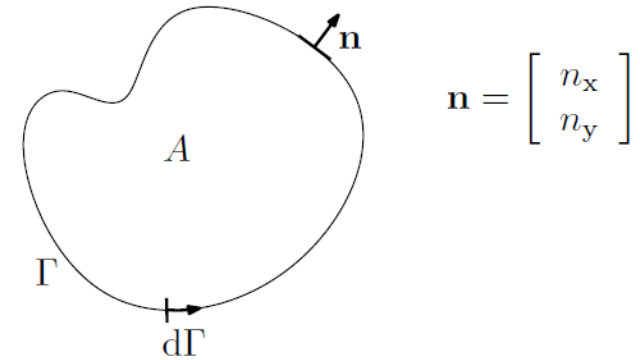


Abb. 3: Gebiet A mit Rand Γ

Es folgt für (*):

$$S_0 \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA = \iint_A w q dA$$

Dies ist die schwache Form der vorgespannten Membran.

(3) FE-Diskretisierung

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i^k = \mathbf{N} \mathbf{u}^k$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \mathbf{N}_{,x} \mathbf{u}^k, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \mathbf{N}_{,y} \mathbf{u}^k$$

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \delta w_i^k = \mathbf{N} \delta \mathbf{w}^k$$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \mathbf{N}_{,x} \delta \mathbf{w}^k, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \mathbf{N}_{,y} \delta \mathbf{w}^k$$

(3) FE-Diskretisierung

Einsetzen in schwache Form aus Aufgabenteil (2):

$$\bigcup_{l=1}^{\text{nel}} \delta \mathbf{w}^k{}^T \iint_{A_e} \left[S_0 \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + S_0 \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y} \right] dA_e \mathbf{u}^k = \bigcup_{l=1}^{\text{nel}} \delta \mathbf{w}^k{}^T \iint_{A_e} \mathbf{N}^T q dA_e$$

Wegkürzen von $\delta \mathbf{w}^k{}^T$ und Vektor-Matrix-Schreibweise führt auf:

$$\underbrace{\bigcup_{l=1}^{\text{nel}} \iint_{A_e} \left[S_0 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x}^T & \mathbf{N}_{,y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix} \right] dA_e}_{\text{Elementsteifigkeitsmatrix } \mathbf{k}^e} \mathbf{u}^k = \underbrace{\bigcup_{l=1}^{\text{nel}} \iint_{A_e} \mathbf{N}^T q dA_e}_{\text{Elementlastvektor } \mathbf{p}^e}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Struktursteifigkeitsmatrix } \mathbf{K}} \qquad \underbrace{\hspace{15em}}_{\text{Strukturlastvektor } \mathbf{P}}$

(4) Parametrisierung

(4) Parametrisierung

Parametrisierung mit bilinearen Rechteckelementen

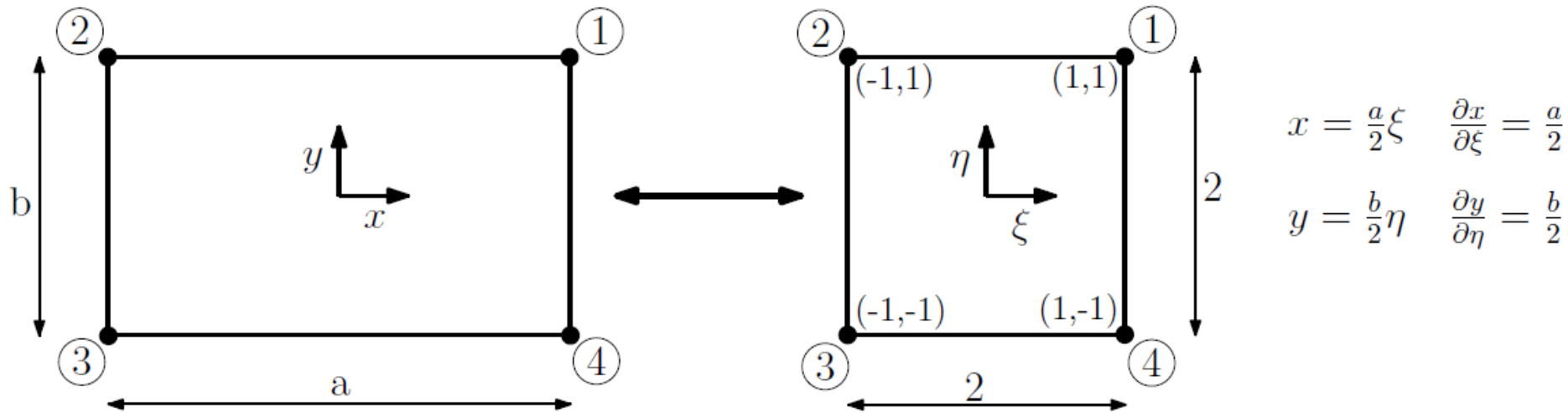


Abb. 4: Transformation des physikalischen Koordinatensystems in das natürliche Koordinatensystem

Formfunktionen:

$$\mathbf{N}^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta) \end{pmatrix}$$

Es gilt allgemein: $\mathbf{N}^T(\xi(x, y), \eta(x, y))$.

(4) Parametrisierung

Es gilt allgemein: $\mathbf{N}^T(\xi(x, y), \eta(x, y))$.

$$\mathbf{N}_{,x}^T = \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=\frac{2}{a}} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=0} = \frac{2}{a} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + \eta) \\ -(1 + \eta) \\ -(1 - \eta) \\ (1 - \eta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{,y}^T = \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{=\frac{2}{b}} = \frac{2}{b} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + \xi) \\ (1 - \xi) \\ -(1 - \xi) \\ -(1 + \xi) \end{pmatrix}$$

(5) Elementsteifigkeitsmatrix

(5) Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}^e = S_0 \iint_{A_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x}^T & \mathbf{N}_{,y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix} dx dy$$

$$dx = \frac{a}{2} d\xi, \quad dy = \frac{b}{2} d\eta$$

Berechnung der Jacobi-Matrix und Jacobi-Determinanten:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{a}{2} \frac{b}{2} - 0 = \frac{ab}{4}$$

(5) Elementsteifigkeitsmatrix

Damit wird die Elementsteifigkeitsmatrix im natürlichen Koordinatensystem zu:

$$\mathbf{k}^e = S_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x}^T & \mathbf{N}_{,y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix} \frac{ab}{4} d\xi d\eta$$

$$\mathbf{k}^e = \frac{S_0}{3} \begin{bmatrix} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} & & & & & & \text{sym.} \\ \frac{a}{b} - \frac{b}{a} & & & & & & \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) & -\frac{a}{b} + \frac{b}{2a} & \frac{a}{b} + \frac{b}{a} & & & & \\ -\frac{a}{b} + \frac{b}{2a} & -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) & \frac{a}{2b} - \frac{b}{a} & \frac{a}{b} + \frac{b}{a} & & & \\ & & & & \frac{a}{b} + \frac{b}{a} & & \end{bmatrix}$$

Die Steifigkeit wird durch die Vorspannkraft S_0 bestimmt.

(6) Elementlastvektor

$$\mathbf{p}^e = \iint_{A_e} \mathbf{N}^T q \, dA_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T \tilde{q}(\xi, \eta) \frac{ab}{4} \, d\xi d\eta$$

Mit konstantem Lastvektor $q(x, y) = q_0 = \text{konst.}$ folgt:

$$\mathbf{p}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T q_0 \frac{ab}{4} \, d\xi d\eta = q_0 \frac{ab}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$