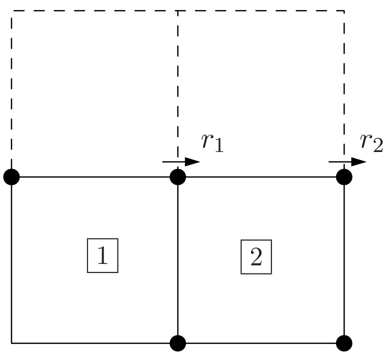
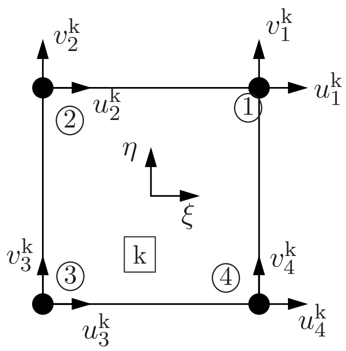
# FEM-Übung
-
# FE-Berechnung zweidimensionaler Strukturen (Musterlösung)

## Aufgabe 1

Einführen von Systemfreiheitsgraden




Elementfreiheitsgrade und lokale Knotennummerierung




Location-Vektoren

$$\mathrm{LM}_1 = \{1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^{\mathrm{T}}$$
$$\mathrm{LM}_2 = \{2 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0\}^{\mathrm{T}}$$

Elementsteifigkeitsmatrix Element 1

$$\mathbf{k}_1 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} 6 & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array}\right] \end{array} \mathrm{N/m}$$

Elementsteifigkeitsmatrix Element 2

$$\mathbf{k}_2 = \begin{array}{cc} & \begin{array}{cccccccc} 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \\ \begin{array}{c} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} & \left[\begin{array}{cccccccc} 6 & & -3 & & & & & \\ & & & & & & & \\ -3 & & 6 & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \\ & & & & & & & \end{array}\right] \end{array} \mathrm{N/m}$$

Elementlastvektor Element 2

$$\mathbf{p}_2 = 1 \cdot 0,5 \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \mathrm{N}$$

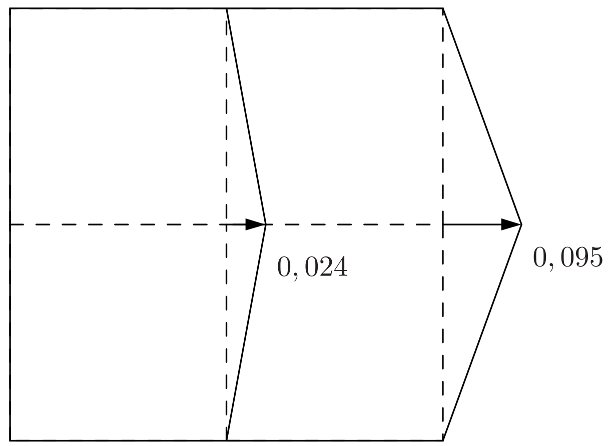
Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} 6+6 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

Lösung

$r_1 = 0,024$ $\qquad$ $r_2 = 0,095$

Verschiebungsfigur




Spannungsberechnung

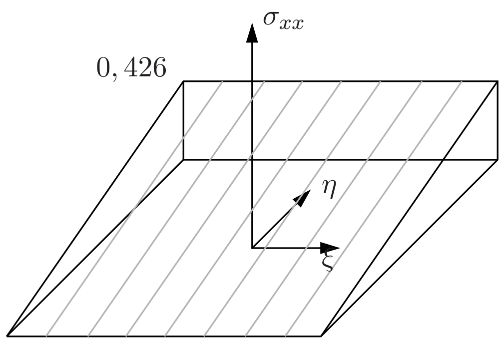
$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{C}\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{C}\underbrace{\mathbf{L}\mathbf{N}}_{=\mathbf{B}}\mathbf{u}^{\mathrm{k}}$$

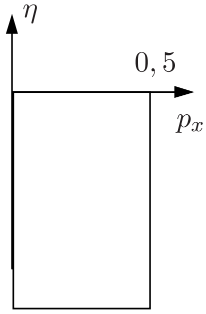
es folgt für die Spannungsverterteilung im Element 2

$$\sigma_{xx} = 0,213(1+\eta)$$
$$\sigma_{yy} = 0$$
$$\tau_{xy} = 0,1785 + 0,1065\xi$$

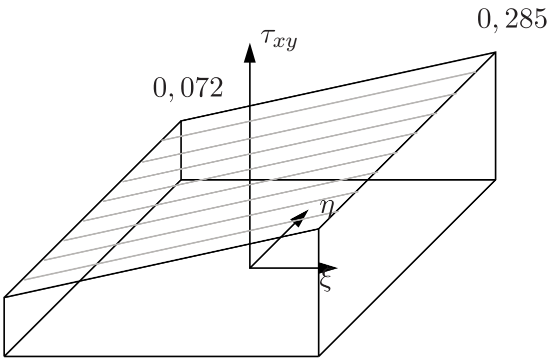
Spannungsverterteilung $\sigma_{xx}$ im Element 2

Lastverteilung am Rand ($\xi = 1$)

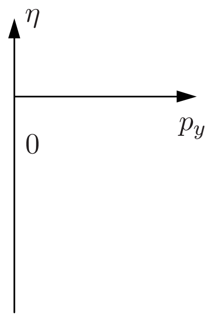


Spannungsverterteilung $\tau_{xy}$ im Element 2




Lastverteilung




Kräftegleichgewicht am Rand des Elements 2 ($\xi = +1$)

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} \\ \tau_{xy} & \sigma_{yy} \end{bmatrix} \quad & \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} & \\
\boldsymbol{\sigma} \quad & \mathbf{n} &= \mathbf{t} & \quad \text{(Cauchy-Theorem)} \\
& \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} & \\
& \begin{Bmatrix} \sigma_{xx}(\xi = 1) \\ \tau_{xy}(\xi = 1) \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} p_x \\ p_y \end{Bmatrix} & \\
& \begin{Bmatrix} 0,213(1+\eta) \\ 0,285 \end{Bmatrix} &\neq \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0 \end{Bmatrix} & \quad \text{(nicht erfüllt)}
\end{aligned}$$

Überprüfung des Kräftegleichgewichts in $y$-Richtung

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \underbrace{\rho k_y}_{=0} = 0$$

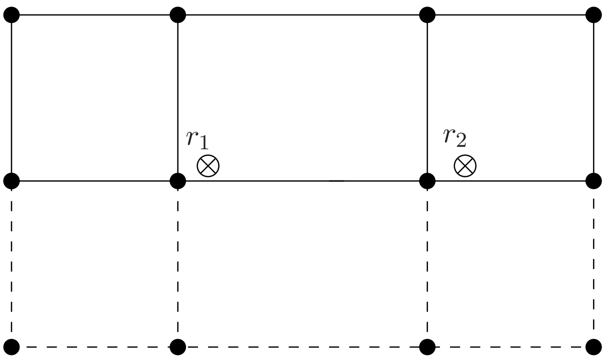
$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=1/a} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + 0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(0,1785 + 0,1065\xi) \cdot 1/1 + 0 + 0 = 0$$

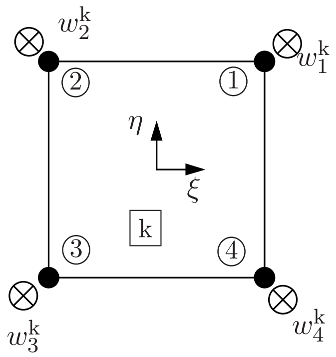
$$0,1065 + 0 + 0 \neq 0 \quad \text{(nicht erfüllt)}$$

## Aufgabe 2

Einführung von Systemfreiheitsgraden




Elementfreiheitsgrade und Knotennummerierung




Elementsteifigkeitsmatrix Element 1 und 3

$$\mathbf{k}_{1,3} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -0,5 & -1 & -0,5 \\ & 2 & -0,5 & -1 \\ & \text{symm.} & 2 & -0,5 \\ & & & 2 \end{bmatrix} \text{kN/cm}$$

Elementsteifigkeitsmatrix Element 2

$$\mathbf{k}_{2} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} \frac{13}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{13}{4} & -\frac{7}{2} \\ & \frac{13}{2} & -\frac{7}{2} & -\frac{13}{4} \\ & \text{symm.} & \frac{13}{2} & \frac{1}{4} \\ & & & \frac{13}{2} \end{bmatrix} \text{kN/cm}$$

Elementlastvektor Element 1 und 3

$$\mathbf{p}_{1,3} = -0,2 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

Elementlastvektor Element 2

$$\mathbf{p}_{2} = -0,3 \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \text{ kN}$$

Location-Vektoren

$$\begin{aligned} \mathrm{LM}_1 &= \{0 \quad 0 \quad 0 \quad 1\}^\mathrm{T} \\ \mathrm{LM}_2 &= \{0 \quad 0 \quad 1 \quad 2\}^\mathrm{T} \\ \mathrm{LM}_3 &= \{0 \quad 0 \quad 2 \quad 0\}^\mathrm{T} \end{aligned}$$

Gleichungssystem

$$\begin{bmatrix} \frac{25}{18} & \frac{1}{36} \\ \text{symm.} & \frac{25}{18} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} 0,5 \\ 0,5 \end{Bmatrix}$$

Lösung

$$r_1 = -0,352941\,\mathrm{cm} \qquad r_2 = -0,352941\,\mathrm{cm}$$

Verschiebungsberechnung

$$\begin{aligned} w &= \underbrace{\{N_1(\xi,\eta) \quad N_2(\xi,\eta) \quad N_3(\xi,\eta) \quad N_4(\xi,\eta)\}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{Bmatrix} w_1^\mathrm{k} \\ w_2^\mathrm{k} \\ w_3^\mathrm{k} \\ w_4^\mathrm{k} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{w}^\mathrm{k}} \\ w &= \mathbf{N} \, \mathbf{w}^\mathrm{k} \end{aligned}$$

Punkt $P_1$ bei (1;1), d. h. lokal bei (0;0) im Element 1

$$\begin{aligned} w_1(0,0) &= \mathbf{N}(0,0) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ r_1 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{4} r_1 \\ &= -\frac{0,353}{4}\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

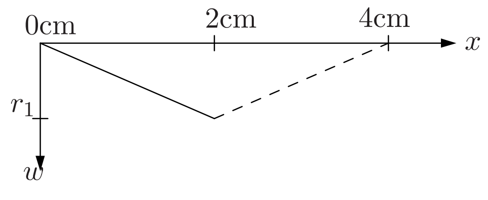
Punkt $P_2$ bei (3,5;1), d. h. lokal bei (0;-0,5) im Element 4

$$\begin{aligned} w_4(0;-0,5) &= \mathbf{N}(0;-0,5) \begin{Bmatrix} r_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \\ &= -\frac{0,353}{8}\,\mathrm{cm} \end{aligned}$$

(Symmetrielinien $B-B$ und $A-A$ einzeichnen)

Symmetrielinie $B-B$ (verläuft in Element 2 bei $\xi = 0$)

$$\begin{aligned} w_2 &= \mathbf{N}(0,\eta) \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_1 \\ r_2 \end{Bmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(1-\eta) r_1 \end{aligned}$$



Symmetrielinie $A-A$ (verläuft in Element 1 und Element 2 bei $\eta=-1$)

$$\begin{aligned}
w_1(\xi,-1) &= \mathbf{N}(\xi,-1)\begin{Bmatrix}0\\0\\0\\r_1\end{Bmatrix}\\
&= \frac{1}{2}(1+\xi)r_1\\
w_2(\xi,-1) &= \mathbf{N}(\xi,-1)\begin{Bmatrix}0\\0\\r_1\\r_2\end{Bmatrix}\\
&= r_1(\text{constant})
\end{aligned}$$