FEM-Übung - Arbeitsprinzip (Musterlösung)

Allgemein

Prinzip der virtuellen Verschiebungen

- Prinzip zur Lösung von Randwertaufgaben, wichtigste ist das Prinzip der virtuellen Verschiebungen
- analytische Lösungen von RWAs sind nur in seltenen Fällen möglich
- RWA (Differentialgleichung mit RB) muss in ein System von algebraischen Gleichungen überführt werden, um es zu lösen
- Lösung von Gleichgewichtsaufgaben und Dynamikproblemen starrer und deformierbarer Körper
- FEM beruht auf Prinzip der virtuellen Verschiebungen
- für Starrkörper:Ein mechanisches System befindet sich im Gleichgewicht, wenn die Gesamtarbeit (virtuelle Arbeit) der eingeprägten Kräfte $\mathbf{F}_i^{\mathrm{a}}$ für jeden beliebigen virtuellen Verschiebungszustand $\delta\mathbf{u}_i$ verschwindet:

Virtuellen Verschiebung/Drehung

- gedacht Verschiebung/Drehung
- klein, sodass sich die Geometrie der Kräftekonstellation nicht ändert, entspricht jener in der Ausgangslage
- kinematisch mögliche Verschiebung, d. h. sie muss mit den geometrischen Randbedingungen kompatibel sein

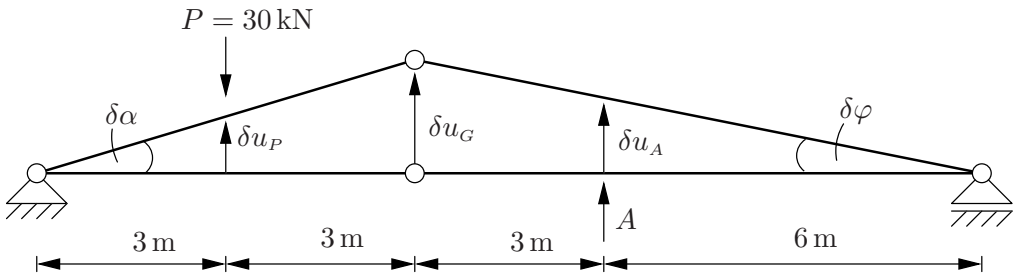
Aufgabe 1

Kraftplan und virtuelle Verschiebungsfigur

- Lagerbindung lösen
- Lagerreaktion antragen
- virtuelle Verschiebungen und Verdrehungen antragen

Kinematik

Merke: Kleine Verschiebungen, kleine Winkeländerungen $\rightarrow$ Kleinwinkelnäherung $\tan(\varphi) \approx \varphi$



Berechung von δu_A am Lager

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_A}{6} \tag{1}$$

Berechnung von δu_G am Gelenk in Abh. von $\delta\varphi$ und Zusammenhang zu δu_A

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_G}{9} \tag{2}$$

$$\rightarrow \quad \delta u_G = 9\delta\varphi \tag{3}$$

$$= \frac{3}{2}\delta u_A \tag{4}$$

Berechnung von δu_P am Kraftangriffspunkt

$$\delta\alpha = \frac{\delta u_P}{3} \tag{5}$$

Berechnung von δu_G am Gelenk in Abh. von $\delta\alpha$ und Zusammenhang zu δu_P

$$\delta\alpha = \frac{\delta u_G}{6} \tag{6}$$

$$\rightarrow \quad \delta u_G = 6\delta\alpha \tag{7}$$

$$= 2\delta u_P \tag{8}$$

Gleichsetzen der virtuellen Verschiebung am Gelenk

$$\delta u_G = \delta u_G \tag{9}$$

$$\frac{3}{2}\delta u_A = 2\delta u_P \tag{10}$$

$$\frac{3}{4}\delta u_A = \delta u_P \tag{11}$$

Prinzip der virtuellen Verschiebung

$$\delta A = \delta A_\mathrm{a} - \delta A_\mathrm{i} = 0 \tag{12}$$

die innere virtuelle Arbeit δA_i ist gleich Null, da starre Körper

äußere virtuelle Arbeit δA_a

$$\delta A_\mathrm{a} = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta u_i = 0 \tag{13}$$

$$-P\delta u_P + A\delta u_A = 0 \tag{14}$$

$$-P\frac{3}{4}\delta u_A + A\delta u_A = 0 \tag{15}$$

$$\delta u_A \left(-P\frac{3}{4} + A\right) = 0 \tag{16}$$

die virtuelle Verschiebung ist i. A. ungleich Null und beliebig, d. h. der Klammerausdruck muss verschwinden

$$-P\frac{3}{4} + A = 0 \tag{17}$$

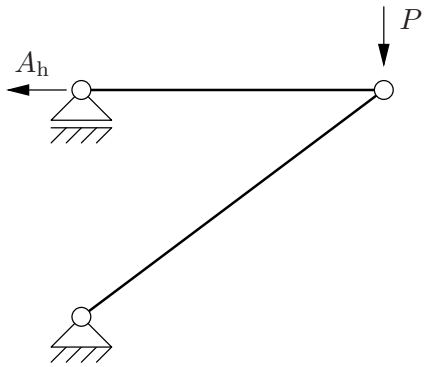
$$\rightarrow \quad A = \frac{3}{4}P \tag{18}$$

$$= 22,5\,\mathrm{kN} \tag{19}$$

Aufgabe 2

Kraftplan

- Lagerbindung lösen
- Lagerreaktion antragen



Virtuelle Verschiebungsfigur

- Momentanpol im unteren Lager (vgl. mit Polplan!)

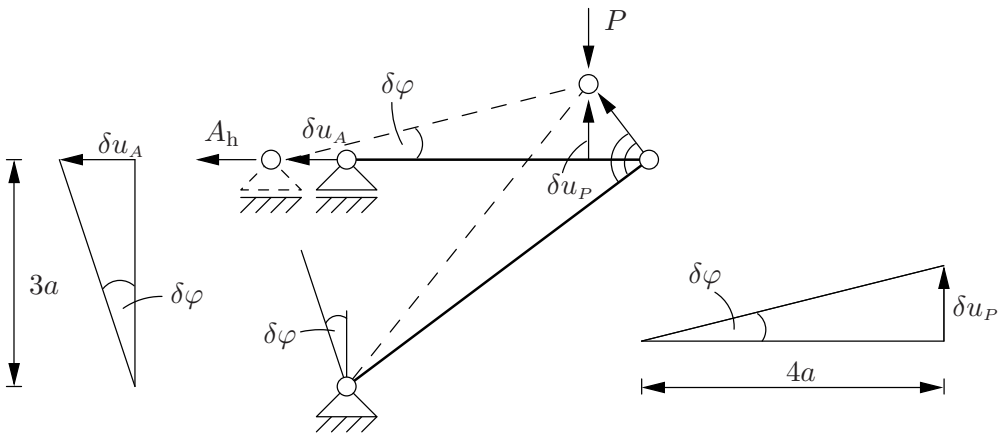
Kinematik

Dreieck mit Kraft P

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_P}{4a} \tag{20}$$

Dreieck mit Kraft A_h

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_A}{3a} \tag{21}$$



Bedingung "gleicher Verdrehwinkel"

$$\delta\varphi = \delta\varphi \tag{22}$$

$$\frac{\delta u_P}{4a} = \frac{\delta u_A}{3a} \tag{23}$$

$$\delta u_P = \frac{4}{3}\delta u_A \tag{24}$$

Prinzip der virtuellen Verschiebung

$$\delta A_\mathrm{a} = \sum_{i=1}^{n} F_i \delta u_i = 0 \tag{25}$$

$$A_\mathrm{h}\delta u_A - P\delta u_P = 0 \tag{26}$$

$$A_\mathrm{h}\delta u_A - P\frac{4}{3}\delta u_A = 0 \tag{27}$$

$$\delta u_A \left(A_\mathrm{h} - \frac{4}{3}P\right) = 0 \tag{28}$$

die virtuelle Verschiebung ist i. A. ungleich Null und beliebig, d. h. der Klammerausdruck muss verschwinden

$$A_\mathrm{h} - \frac{4}{3}P = 0 \tag{29}$$

$$\rightarrow \quad A_\mathrm{h} = \frac{4}{3}P \tag{30}$$

Aufgabe 3

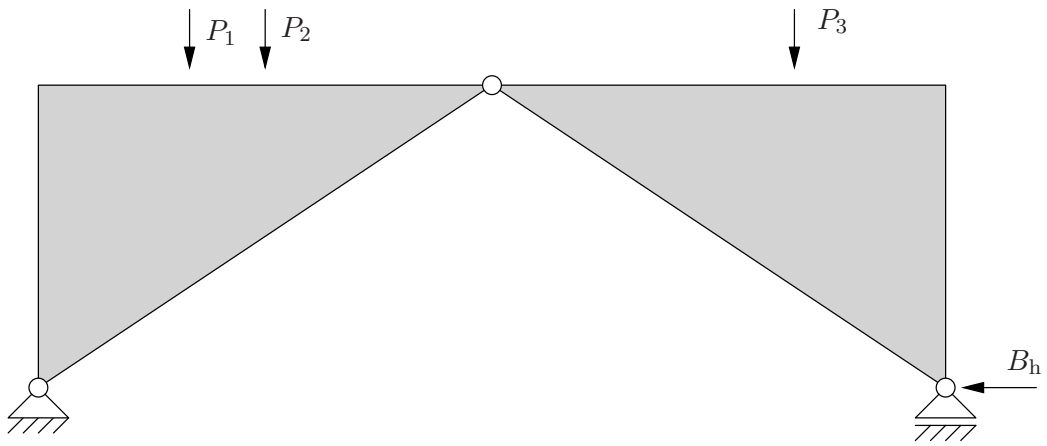
Kraftplan

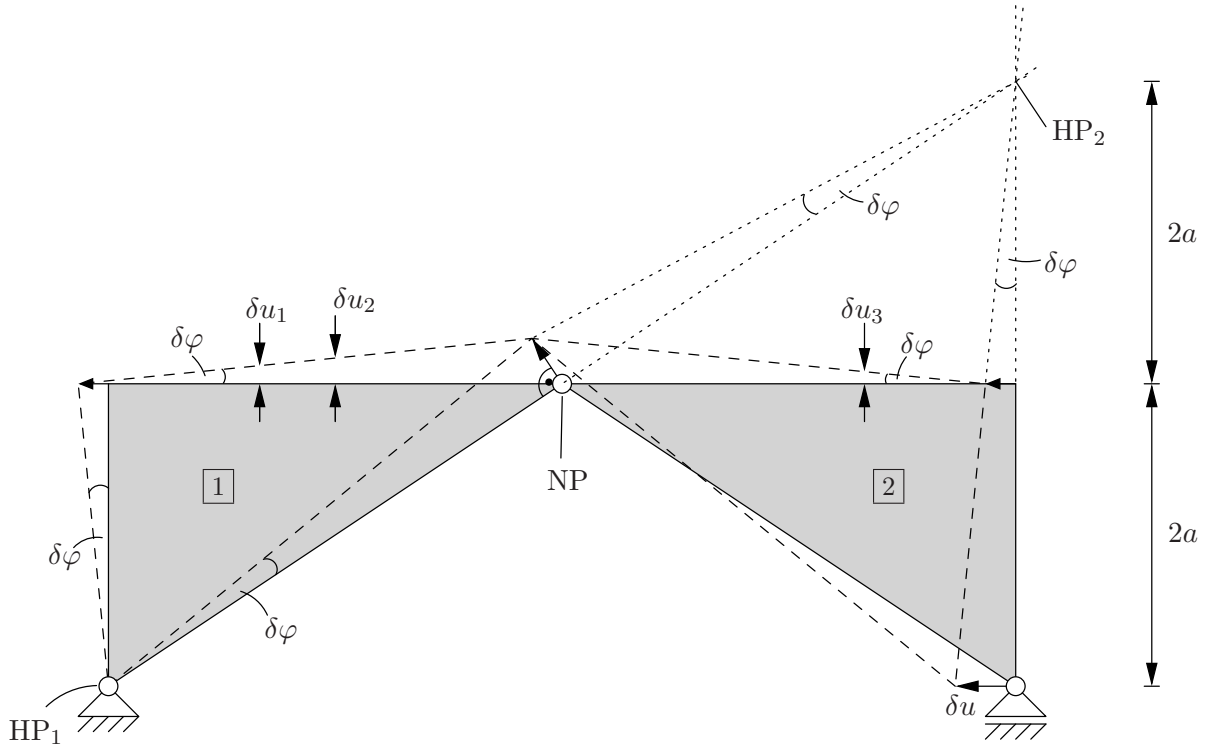
- Lagerbindung lösen
- horizontale Auflagerkraft B_h antragen

Virtuelle Verschiebungsfigur

- Polplan (Hilfsmittel für Verschieblichkeitsuntersuchungen von statischen Systemen)

- Winkel $\delta\varphi$ überall der selbe ("Kippen eines Block um eine Kannte")





Grundregeln für die Konstruktion eines Polplans

- jedes feste Gelenklager ist Hauptpol der angeschlossenen starren Körper
- jedes Momentengelenk ist Nebenpol der verbundenen Körper
- die Senkrechte zur Bewegungsrichtung eines verschieblichen Gelenklagers ist geometrischer Ort des Hauptpols der angeschlossenen Körper (Polstrahl)
- die Hauptpole zweier Körper und ihr gemeinsamer Nebenpol liegen auf einer Geraden

Berechnung der virtuellen Verschiebungen der Kraftangriffspunkte

$$\delta\varphi = \frac{\delta u}{4a} \tag{31}$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_1}{a} \tag{32}$$

$$\rightarrow \quad \delta u_1 = \delta\varphi \cdot a = \frac{1}{4}\delta u \tag{33}$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_2}{1,5a} \tag{34}$$

$$\rightarrow \quad \delta u_2 = \delta\varphi \cdot \frac{3}{2}a = \frac{\delta u}{4a} \cdot \frac{3}{2}a = \frac{3}{8}\delta u \tag{35}$$

$$\delta\varphi = \frac{\delta u_3}{a} \tag{36}$$

$$\rightarrow \quad \delta u_3 = \delta\varphi \cdot a = \frac{1}{4}\delta u \tag{37}$$

Anwendung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen

$$\delta A_\mathrm{a} = 0 = -P_1 \cdot \frac{1}{4}\delta u - P_2\frac{3}{8}\delta u - P_3\frac{1}{4}\delta u + B_\mathrm{h}\delta u \tag{38}$$

$$0 = \delta u\left(-\frac{1}{4}P_1 - \frac{3}{8}P_2 - \frac{1}{4}P_3 + B_\mathrm{h}\right) \tag{39}$$

$$\rightarrow \quad B_\mathrm{h} = \frac{1}{4}P_1 + \frac{3}{8}P_2 + \frac{1}{4}P_3 \tag{40}$$

$$= 3\,\mathrm{kN} \tag{41}$$

Aufgabe 4

Aufgabe 4 (a)

linearer Ansatz für das Verschiebungsfeld, der den geometrischen Randbedingungen genügt (Verschiebung am linken Lager gleich Null)

$$u(x) = a_1 x \tag{42}$$

$$\varepsilon(x) = u'(x) = a_1 \tag{43}$$

$$\delta u(x) = \delta a_1 x \tag{44}$$

$$\delta\varepsilon(x) = \delta u'(x) = \delta a_1 \tag{45}$$

a_1 ist unbekannter Parameter im Verschiebungsansatz (hat hier noch nicht die Bedeutung einer Knotenverschiebung)

Prinzips der virtuellen Verschiebungen für den Dehnstab (siehe TM II, Matzenmiller)

$$\underbrace{\int_0^l \delta\varepsilon(x)EA(x)\varepsilon(x)\,\mathrm{d}x}_{=\delta A_\mathrm{i}} = \underbrace{\left[\delta u(x)P(x)\right]_{x=x_p} + \int_0^l \delta u(x)n(x)\,\mathrm{d}x}_{=\delta A_\mathrm{a}} \tag{46}$$

Einsetzen der Ansätze

$$\int_0^l \delta a_1 E A_0 a_1 \,\mathrm{d}x = \underbrace{\left[\delta a_1 P(x)\right]_{x=x_p}}_{=0} + \int_0^l \delta a_1 x n_0 \,\mathrm{d}x \tag{47}$$

Integrieren

$$\delta a_1 E A_0 a_1 \left[x\right]_{x=0}^{x=l} = \delta a_1 n_0 \left[0,5x^2\right]_{x=0}^{x=l} \tag{48}$$

Lösen der skalaren Gleichung

$$\delta a_1 \left(E A_0 a_1 l - \frac{n_0 l^2}{2}\right) = 0 \tag{49}$$

Klammerausdruck muss verschwinden, Umstellen nach a_1

$$a_1 = \frac{n_0 l}{2 E A_0} \tag{50}$$

Erhalt des Verschiebungs-, Verzerrungsfelds sowie der Stabnormalkraft durch Einsetzen

$$u(x) = \frac{n_0 l}{2 E A_0} x \tag{51}$$

$$\varepsilon(x) = u'(x) = \frac{n_0 l}{2 E A_0} \tag{52}$$

$$N(x) = E A_0 \varepsilon(x) = \frac{n_0 l}{2} \tag{53}$$

Aufgabe 4 (b)

quadratischer Ansatz für das Verschiebungsfeld, der den geometrischen Randbedingungen genügt (somit entfällt der konstante Term)

$$u(x) = a_1 \frac{x}{l} + a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 = \begin{Bmatrix} \frac{x}{l} & \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{54}$$

$$\varepsilon(x) = a_1 \frac{1}{l} + a_2 \frac{2x}{l^2} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{l} & \frac{2x}{l^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \tag{55}$$

$$\delta u(x) = \delta a_1 \frac{x}{l} + \delta a_2 \left(\frac{x}{l}\right)^2 = \begin{Bmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{Bmatrix} \tag{56}$$

$$\delta \varepsilon(x) = \delta a_1 \frac{1}{l} + \delta a_2 \frac{2x}{l^2} = \begin{Bmatrix} \delta a_1 & \delta a_2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{1}{l} \\ \frac{2x}{l^2} \end{Bmatrix} \tag{57}$$

Einsetzen der Ansätze in das Prinzip der virtuellen Verschiebungen für den Dehnstab

$$\int_0^l \{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \begin{Bmatrix} \frac{1}{l} \\ \frac{2x}{l^2} \end{Bmatrix} EA_0 \begin{Bmatrix} \frac{1}{l} & \frac{2x}{l^2} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} \mathrm{d}x = \underbrace{\left[\{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \begin{Bmatrix} \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{Bmatrix} P(x) \right]_{x=x_p}}_{=0} + \tag{58}$$

$$+ \int_0^l \{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \begin{Bmatrix} \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{Bmatrix} n_0 \, \mathrm{d}x \tag{59}$$

keine Randlasten, Umsortieren

$$\underbrace{\{\delta a_1 \quad \delta a_2\}}_{\delta \mathbf{a}^{\mathrm{T}}} \underbrace{\int_0^l EA_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{l^2} & \frac{2x}{l^3} \\ \frac{2x}{l^3} & \frac{4x^2}{l^4} \end{bmatrix} \mathrm{d}x}_{\mathbf{K}} \underbrace{\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix}}_{\mathbf{a}} = \underbrace{\{\delta a_1 \quad \delta a_2\}}_{\delta \mathbf{a}^{\mathrm{T}}} \underbrace{n_0 \int_0^l \begin{Bmatrix} \frac{x}{l} \\ \left(\frac{x}{l}\right)^2 \end{Bmatrix} \mathrm{d}x}_{\mathbf{P}} \tag{60}$$

mit

$\delta \mathbf{a}$ = Vektor der virtuellen Unbekannten
$\mathbf{K}$ = Steifigkeitsmatrix
$\mathbf{a}$ = Vektor der Unbekannten
$\mathbf{P}$ = Lastvektor

Integrieren

$$\{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \frac{EA_0}{l^2} \begin{bmatrix} x & \frac{x^2}{l} \\ \frac{x^2}{l} & \frac{4x^3}{3l^2} \end{bmatrix}_{x=0}^{x=l} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = \{\delta a_1 \quad \delta a_2\} n_0 \begin{Bmatrix} \frac{x^2}{2l} \\ \frac{x^3}{3l^2} \end{Bmatrix}_{x=0}^{x=l} \tag{61}$$

Lösen der skalaren Gleichung

$$\{\delta a_1 \quad \delta a_2\} \left(\frac{EA_0}{l^2} \begin{bmatrix} l & l \\ l & \frac{4}{3}l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} - n_0 \begin{Bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{3} \end{Bmatrix} \right) = 0 \tag{62}$$

in Matrixschreibweise

$$\delta \mathbf{a}^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{K}\mathbf{a} - \mathbf{P} \right) = 0 \tag{63}$$

Klammerausdruck muss verschwinden, Gleichungsystem (2 Gleichungen, 2 Unbekannte)

$$\mathbf{Ka} = \mathbf{P} \tag{64}$$

$$\frac{EA_0}{l}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{Bmatrix} = n_0 \begin{Bmatrix} \frac{l}{2} \\ \frac{l}{3} \end{Bmatrix} \tag{65}$$

Lösen des Gleichungssystems (z. B. Gauss oder Einsetzungsverfahren)

$$a_1 = \frac{n_0 l^2}{EA_0} \tag{66}$$

$$a_2 = -\frac{n_0 l^2}{2EA_0} \tag{67}$$

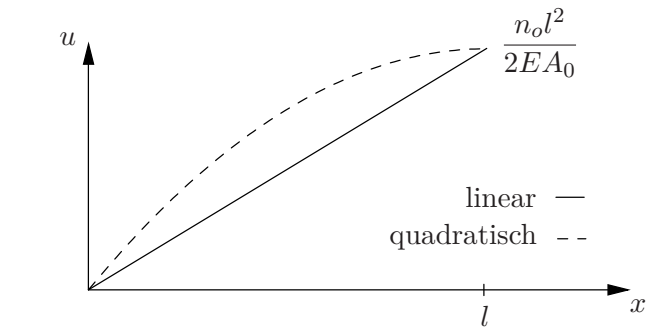
Erhalt des Verschiebungs-, Verzerrungsfelds sowie der Stabnormalkraft durch Einsetzen

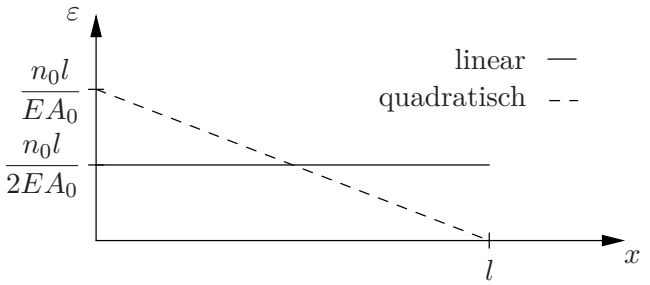
$$u(x) = \frac{n_0 l^2}{2EA_0}\left[2\frac{x}{l} - \left(\frac{x}{l}\right)^2\right] \tag{68}$$

$$\varepsilon(x) = u'(x) = \frac{n_0 l}{EA_0}\left[1 - \frac{x}{l}\right] \tag{69}$$

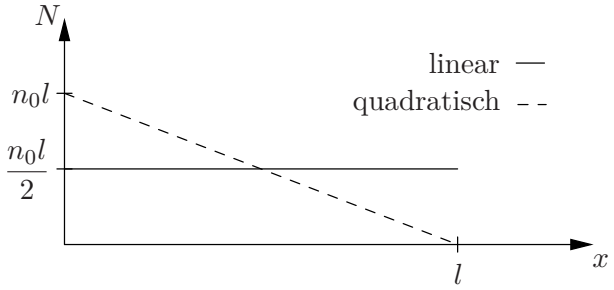
$$N(x) = EA_0\varepsilon(x) = n_0 l\left[1 - \frac{x}{l}\right] \tag{70}$$

Aufgabe 4 (c)





Der quadratische Ansatz liefert die exakte Lösung, da diese auch quadratisch ist.
Der lineare Verschiebungsansatz liefert einen konstanten Normalkraftverlauf, die im energetischen Mittel die exakten Lösung approximiert.


N
linear
quadratisch
$n_0 l$
$\frac{n_0 l}{2}$
l
x