

---

# FEM Berechnung Praktikum

## Cook Membran

Marvin Nahrman

Sommersemester 2020



# 2D / 3D Zustand

Methode der finiten Elemente

1D

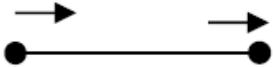
2D

3D

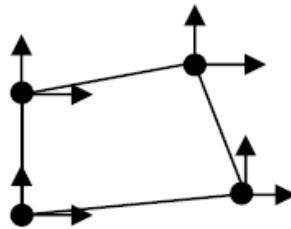
lineares  
Dehnstabelement

lineares  
Scheibenelement

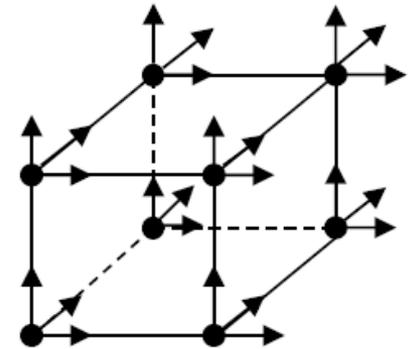
lineares  
Volumenelement



- 2 Knoten
- 2 Fhg. / Knoten



- 4 Knoten
- 2 Fug. / Knoten



- 8 Knoten
- 3 Fug. / Knoten



**Linear elastisches Materialverhalten: 1D**

$$\sigma = E \cdot \varepsilon$$

→ 1 Parameter : E

**Linear elastisches Materialverhalten: 2D**

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{E'}{1-(\nu')^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu' & 0 \\ \nu' & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu'}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

$$\begin{array}{ll} \text{ESZ: } E' = E & \text{EVZ: } E' = \frac{E}{1-\nu^2} \\ \nu' = \nu & \nu' = \frac{\nu}{1-\nu} \end{array}$$

→ 2 Parameter : E,  $\nu$

## Linear elastisches Materialverhalten: 3D

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{(1-\nu)E}{a} & \frac{\nu E}{a} & \frac{\nu E}{a} & 0 & 0 & 0 \\ & \frac{(1-\nu)E}{a} & \frac{\nu E}{a} & 0 & 0 & 0 \\ & & \frac{(1-\nu)E}{a} & 0 & 0 & 0 \\ & & & \text{symm.} & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ & & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} \\ & & & & & & \frac{E}{2(1+\nu)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}$$

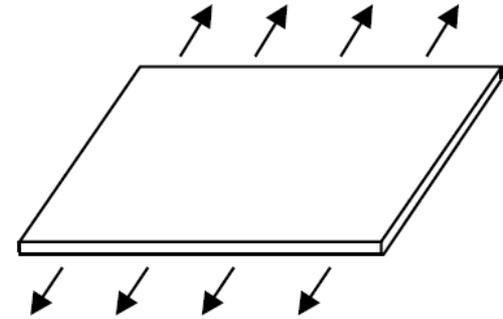
$$a = (1+\nu)(1-2\nu)$$

→ 2 Parameter :  $E, \nu$

## Ebener Spannungszustand (ESZ, plane stress)

Spannungen in 3. Raumrichtung sind Null

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ & \sigma_{yy} & 0 \\ \text{symm.} & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ & \varepsilon_{yy} & 0 \\ \text{symm.} & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$

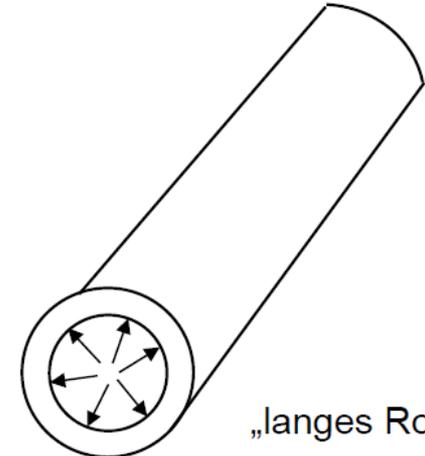


„Scheibe“

## Ebener Verzerrungszustand (EVZ, plane strain)

Verzerrungen in 3. Raumrichtung sind Null

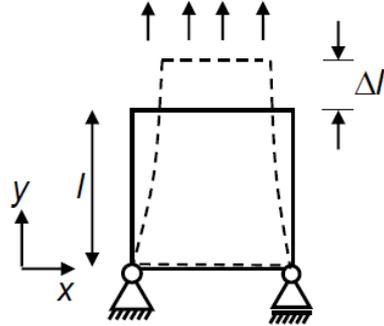
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ & \varepsilon_{yy} & 0 \\ \text{symm.} & & 0 \end{bmatrix} \rightarrow \boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & 0 \\ & \sigma_{yy} & 0 \\ \text{symm.} & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



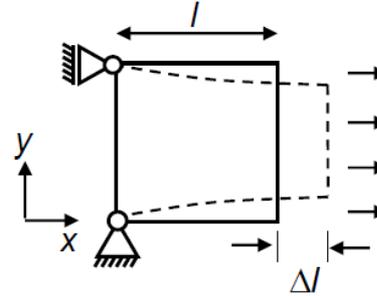
„langes Rohr“

## Normalverzerrung vs. Gleitung / Schubverzerrung

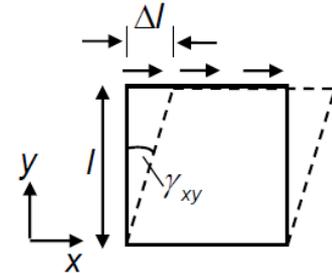
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} & \gamma_{xy} & \gamma_{xz} \\ \text{symm.} & \varepsilon_{yy} & \gamma_{yz} \\ & & \varepsilon_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\varepsilon_{yy} = \frac{\Delta l}{l}$$



$$\varepsilon_{xx} = \frac{\Delta l}{l}$$

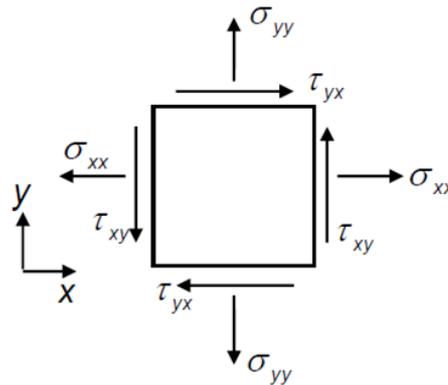


$$\gamma_{xy} = \frac{\Delta l}{l}$$

$$\varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \gamma_{xy} \quad (\text{Schubverzerrung})$$

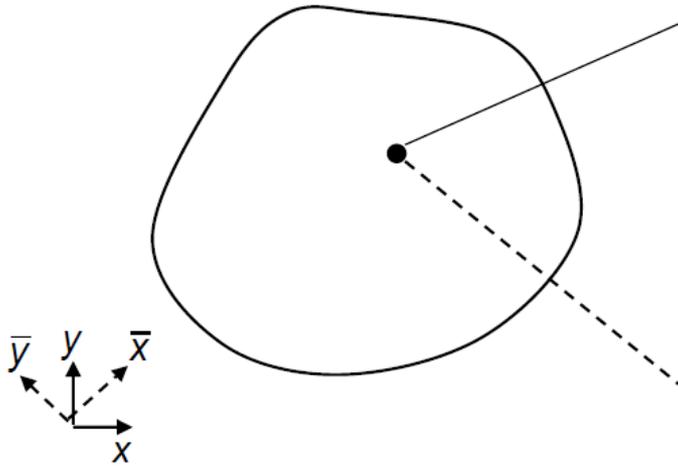
## Normalspannung vs. Schubspannung

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \text{symm.} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$



$$\tau_{yx} = \tau_{xy}$$

## Hauptspannung (principal stress)



$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \text{symm.} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ & & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

(Spannungszustand im Koordinatensystem  $x, y, z$ )

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ \text{symm.} & \sigma_2 & 0 \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix}$$

(Spannungszustand im Koordinatensystem  $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ )

$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$  : Hauptspannung

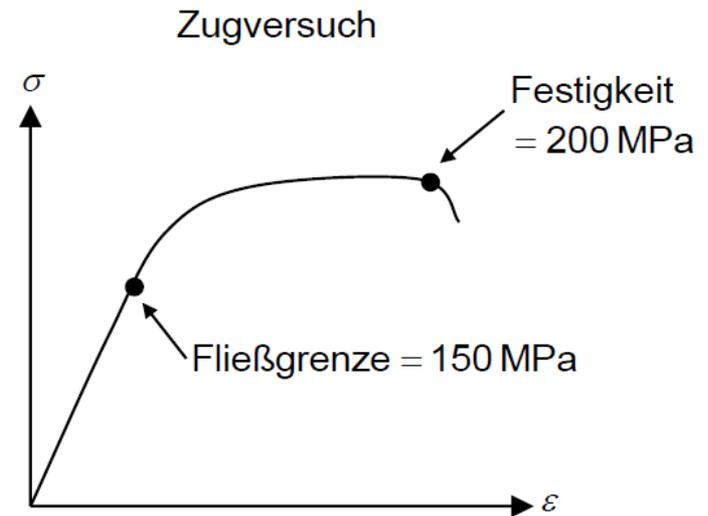
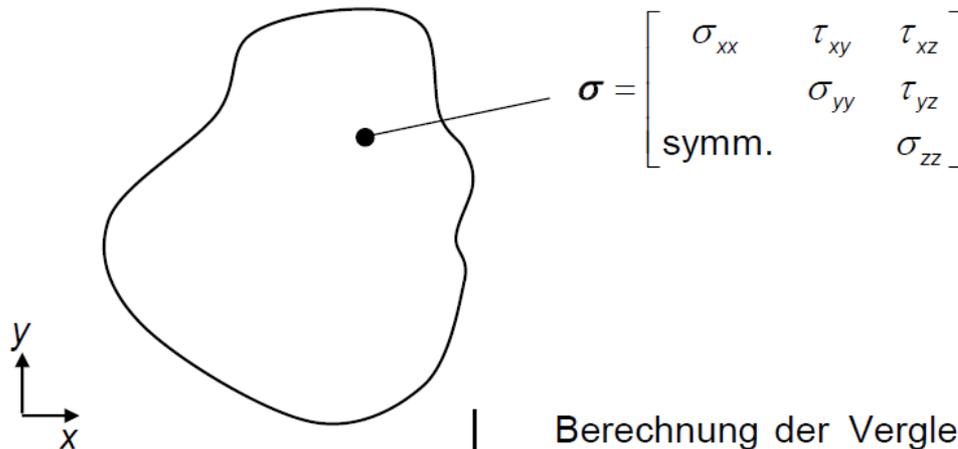
## Spannungstensor in Voigtischer Notation

$$\sigma = \begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{xz} \end{Bmatrix}$$

## von Mises - Vergleichsspannung

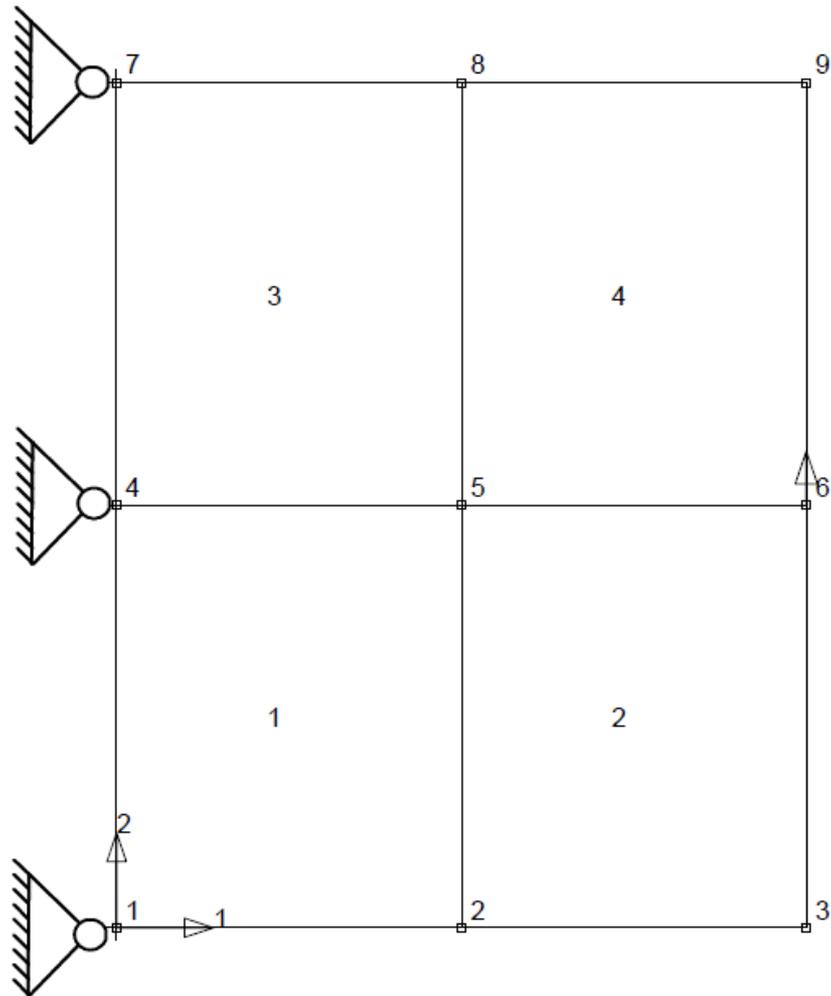
Spannung, die den 3D Spannungszustand auf einen skalaren Wert abbildet (geeignet für Metalle)

$$\sigma_v = \sqrt{\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xx}\sigma_{zz} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} + 3(\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2)}$$
$$= \sqrt{0,5[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2]}$$



Berechnung der Vergleichsspannung  $\sigma_v$   
und Vergleich mit Kennwerten aus dem  
Versuch für den Sicherheitsnachweis

# Beispiel: Scheibe



# Beispiel: Scheibe

---

```
feap * * Übung ebene Scheibe * *
  0 0 0 2 2 4
! 0 0 0 2D-3D DOFs/Knoten Knotenanzahl/Element

global          ! Nur bei 2D
plane strain    ! stress

parameter
n1 = 2          ! Anzahl der Elemente
n2 = 2          ! Anzahl der Elemente
a  = 40         ! Abmessung
b  = 50         ! Abmessung
d  = 1          ! Dicke
f  = 1          ! Kraft F
E  = 1          ! E-Modul
nu = 1/3.0      ! Querdehnzahl
```



# Beispiel: Scheibe

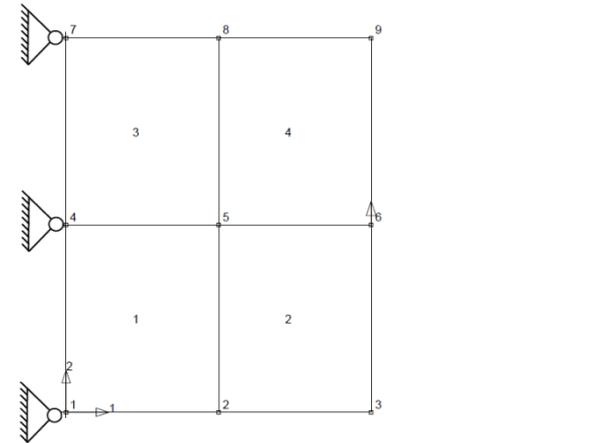
```
block                                ! Erzeugt einen Block
  cart n1 n2
    1   0   0   ! Pkt. x-Koord. y-Koord.
    2   a   0   ! Pkt. x-Koord. y-Koord.
    3   a   b   ! Pkt. x-Koord. y-Koord.
    4   0   b   ! Pkt. x-Koord. y-Koord.

eboun                                ! Randbedingungen
  1 0 1 1                                ! Richtung (x,y-Koord), Länge, DOF-x, DOF-y

cforce                                ! Knotenlast
  NODE a b/2.0 0 f                                ! NODE x-Koord. y-Koord. x-Kraft y-Kraft

mate 1                                ! Materialkarte
  solid
    elastic isotropic E nu
    thick section d

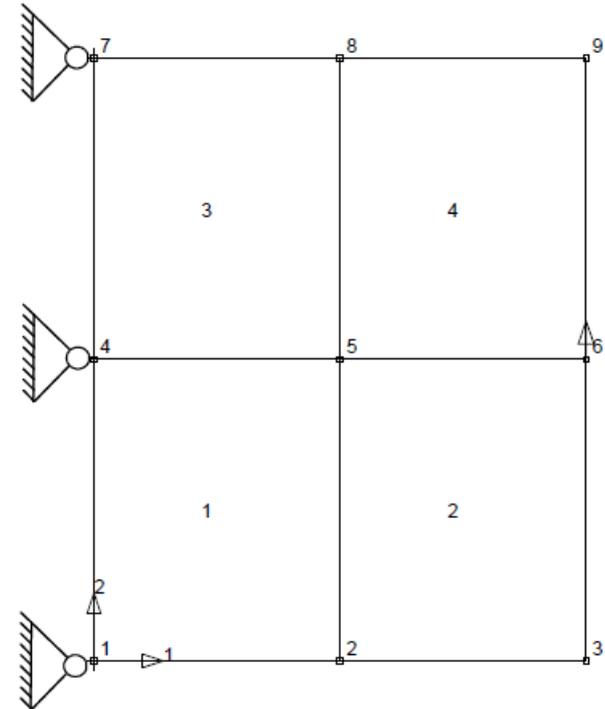
end                                    ! Ende der Netzgenerierung
```



# Beispiel: Scheibe

```
batch                                ! Solver
  tangent
  form
  solve
  disp,all                            ! Daten ins O-File
  stre all                            ! Daten ins O-File
  reac all                            ! Daten ins O-File
end
```

```
batch                                ! Post
! plot postscript
! plot cont 2
plot stress
plot load
plot boun
plot mesh
plot node
plot elem
plot axis
! plot postscript
end
```



```
! Ausgabe auf den Bildschirm
```

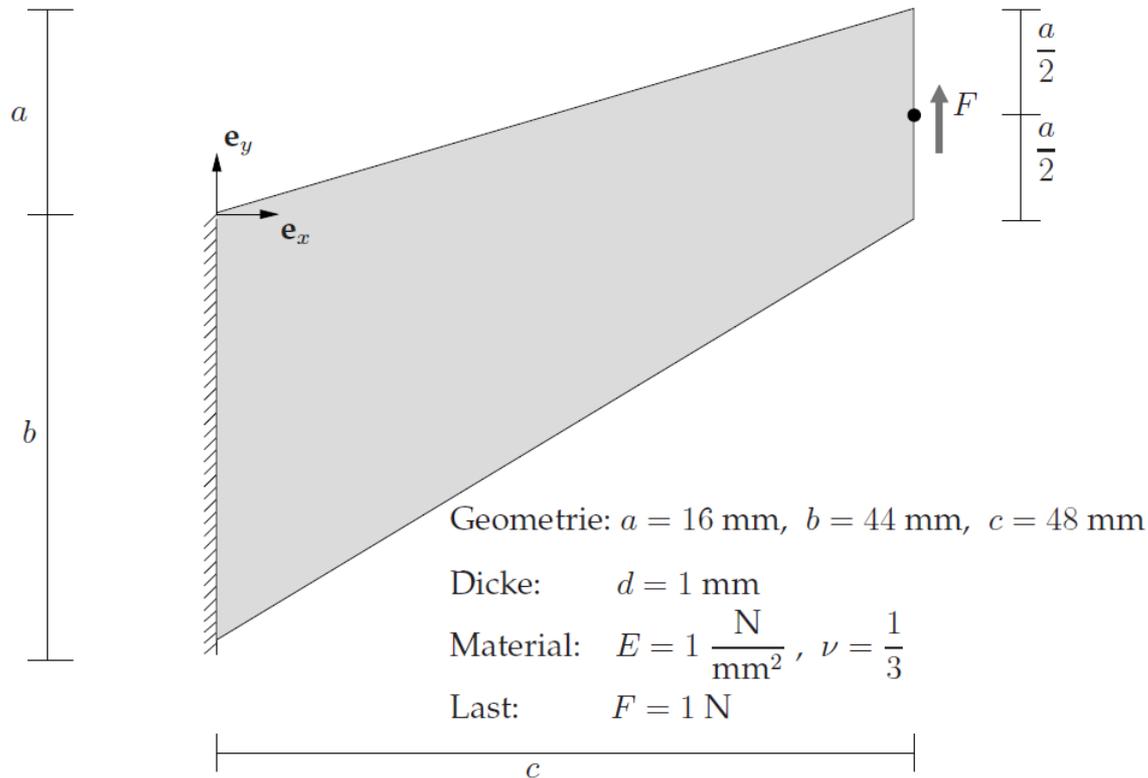
```
inter
stop
```

# Praktikumsübung 2

## Modellierung und Finite-Elemente-Berechnung der Krag­scheibe nach COOK („COOK-Membran“)

Das geometrisch lineare Beispiel der vorwiegend auf Schub beanspruchten Krag­scheibe nach Cook ist ein bekannter Test für die Leistungsfähigkeit von verzerrten finiten Elementen.

### Mechanische Skizze des physikalischen Problems



## Praktikumsübung 2

---

- a) Diskretisieren Sie die Klagscheibe als dreidimensionales Modell mit dem SOLID-Element des FE-Programms FEAP<sub>pv</sub>. Über die Dicke soll ein Volumenelement verwendet werden. Modellieren Sie in einem nächsten Schritt die Klagscheibe als ebene Randwertaufgabe im ebenen Verzerrungszustand (EVZ) sowie ebenen Spannungszustand (ESZ) mit FEAP<sub>pv</sub>. Als Netzteilungen sind  $2 \times 2$ ,  $4 \times 4$ ,  $8 \times 8$  und  $16 \times 16$  Elemente in der Ebene zu wählen. Stellen Sie das FE-Modell mit allen notwendigen Informationen für eine Vernetzung ihrer Wahl dar.
- b) Diskutieren sie den Unterschied zwischen EVZ und ESZ am Spannungs- und Verzerrungszustand.
- c) Berechnen Sie den Verschiebungszustand für das physikalische Problem mit den unterschiedlichen Modellen und Netzteilungen. Tragen Sie für alle Berechnungen die vertikale Verschiebung an der Lasteinleitungsstelle über der Anzahl der Elemente je Seite in einem Diagramm auf.
- d) Plotten Sie die Verteilung der Verschiebungskomponente  $u_z$  senkrecht zur Scheibenebene im Fall der Berechnung mit räumlichen Volumenelementen. Diskutieren Sie den Unterschied zwischen dem 3D-Modell und den zweidimensionalen Idealisierungen.



## Praktikumsübung 2

---

- e) Stellen Sie für alle Berechnungen aus c) die Hauptspannungen  $\sigma_1$ ,  $\sigma_2$  und  $\sigma_3$  an den Knoten mit den Koordinaten  $(0, 0)$  und  $(0, -b/2)$  über der Anzahl der Elemente je Seite in einer Tabelle dar. Ermitteln Sie die prozentuale Abweichung zueinander. Tragen Sie für die genannten Berechnungen die VON MISES-Vergleichsspannung über der Anzahl der Elemente je Seite in einem Diagramm auf.
- f) Ziehen Sie Schlussfolgerungen für die Gültigkeit der Idealisierung der Krag-scheibe mit dem ESZ.

Hinweis:

$$\text{VON-MISES-Vergleichsspannung: } \sigma_v = \sqrt{0,5 \left[ (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$$

Abgabe der 1. Praktikumsübung bis: 24.06.2020

Abgabe der 2. Praktikumsübung bis: 15.07.2020

