UNIKASSEL VERSITÄT

FEM-Übung
-
Bilineares Rechteckelement (Musterlösung)

Aufgabe 1

Berechnungsvorschrift Elementsteifigkeitsmatrix (aus diskretisierter schwacher Form)

$$\begin{aligned}\mathbf{k} &= \iint_A \mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\mathbf{B}\,\mathrm{d}A \\ &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \widehat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}\,\widehat{\mathbf{B}}\,\det(\mathbf{J})\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\end{aligned}$$

Geometrieinterpolation im ebenen, bilinearen isoparametrischen Element

$$\underbrace{\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{Bmatrix} x_1^{\mathrm{k}} \\ y_1^{\mathrm{k}} \\ x_2^{\mathrm{k}} \\ y_2^{\mathrm{k}} \\ x_3^{\mathrm{k}} \\ y_3^{\mathrm{k}} \\ x_4^{\mathrm{k}} \\ y_4^{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{x}^{\mathrm{k}}} \tag{1}$$

Knotenkoordinaten im physikalischen (x, y)-Koordinatensystem

$$\begin{aligned} &\text{Knoten } ① : (x_1, y_2) \\ &\text{Knoten } ② : (x_2, y_2) \\ &\text{Knoten } ③ : (x_2, y_3) \\ &\text{Knoten } ④ : (x_1; y_3) \end{aligned} \tag{2}$$

Formfunktionen des ebenen bilinearen Elements

$$
\begin{aligned}
N_1 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta) \\
N_2 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta) \\
N_3 &= \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta) \\
N_4 &= \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

Einsetzen der Knotenkoordinaten (2) und Formfunktionen (3) in Gl. (1)

$$
\begin{aligned}
x &= \frac{1}{2}(x_1+x_2) + \frac{1}{2}\underbrace{(x_1-x_2)}_{=2a}\xi = \frac{1}{2}(x_1+x_2) + a\xi \\
y &= \frac{1}{2}(y_2+y_3) + \frac{1}{2}\underbrace{(y_2-y_3)}_{=2b}\eta = \frac{1}{2}(y_2+y_3) + b\eta
\end{aligned}
$$

Jacobi-Matrix

$$
\begin{aligned}
\mathbf{J} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \quad \text{mit } \frac{\partial x}{\partial \xi} = a, \frac{\partial y}{\partial \xi} = 0, \frac{\partial x}{\partial \eta} = 0, \frac{\partial y}{\partial \eta} = b \\
&= \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} (= \text{konstant})
\end{aligned}
$$

Determinante der Jacobi-Matrix

$$
\det(\mathbf{J}) = ab = (\text{konstant})
$$

Diskretisierung des Verschiebungsfeldes

$$
\underbrace{\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}} = \underbrace{\begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix}}_{\mathbf{N}} \underbrace{\begin{Bmatrix} u_1^{\mathrm{k}} \\ v_1^{\mathrm{k}} \\ u_2^{\mathrm{k}} \\ v_2^{\mathrm{k}} \\ u_3^{\mathrm{k}} \\ v_3^{\mathrm{k}} \\ u_4^{\mathrm{k}} \\ v_4^{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}}_{\mathbf{u}^{\mathrm{k}}}
$$

kinematischer Operator

$$\widehat{\mathbf{B}} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad \begin{array}{l} N_{k,x} = N_{k,\xi}\dfrac{\partial \xi}{\partial x} = a^{-1}N_{k,\xi}\ ,\ k = 1, ..., 4 \\ N_{k,y} = N_{k,\eta}\dfrac{\partial \eta}{\partial y} = b^{-1}N_{k,\eta}\ ,\ k = 1, ..., 4 \end{array}$$

$$= \frac{1}{4ab}\begin{bmatrix} b(1+\eta) & 0 & -b(1+\eta) & 0 & -b(1-\eta) & 0 & b(1-\eta) & 0 \\ 0 & a(1+\xi) & 0 & a(1-\xi) & 0 & -a(1-\xi) & 0 & -a(1+\xi) \\ a(1+\xi) & b(1+\eta) & a(1-\xi) & -b(1+\eta) & -a(1-\xi) & -b(1-\eta) & -a(1+\xi) & b(1-\eta) \end{bmatrix}$$

Transponierte des kinematischen Operators

$$\widehat{\mathbf{B}}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{1,y} \\ 0 & N_{1,y} & N_{1,x} \\ N_{2,x} & 0 & N_{2,y} \\ 0 & N_{2,y} & N_{2,x} \\ N_{3,x} & 0 & N_{3,y} \\ 0 & N_{3,y} & N_{3,x} \\ N_{4,x} & 0 & N_{4,y} \\ 0 & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix}$$

Elastizitätsmatrix im ESZ

$$\mathbf{C} = \frac{E}{1-\nu^2}\begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0,5(1-\nu) \end{bmatrix}$$

Berechnung der Elementsteifigkeitsmatrix (Matrizenmultiplikation)

$$\mathbf{k} = \int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix} ab\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \qquad \left(\mathbf{k} \in \mathbb{R}^{8\times 8}\right)$$

$$k_{ij} = \int\limits_{-1}^{+1}\int\limits_{-1}^{+1} \widehat{B}^{\mathrm{T}}_{ik} C_{kl} \widehat{B}_{lj}\, ab\,\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta \quad \text{(Indexschreibweise)}$$

Beispiel: Steifigkeitskomponente k_{15}

$$
\begin{aligned}
k_{15} &= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \sum_{k=1}^{3}\sum_{l=1}^{3} \widehat{B}_{1k}^{\mathrm{T}} C_{kl} \widehat{B}_{l5} ab \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\widehat{B}_{11}^{\mathrm{T}} C_{11} \widehat{B}_{15} + \widehat{B}_{11}^{\mathrm{T}} C_{12} \underbrace{\widehat{B}_{25}}_{=0} + \widehat{B}_{11}^{\mathrm{T}} \underbrace{C_{13}}_{=0} \widehat{B}_{35} + \\
&+ \underbrace{\widehat{B}_{12}^{\mathrm{T}}}_{=0} C_{21} \widehat{B}_{15} + \underbrace{\widehat{B}_{12}^{\mathrm{T}}}_{=0} C_{22} \widehat{B}_{25} + \underbrace{\widehat{B}_{12}^{\mathrm{T}}}_{=0} C_{23} \widehat{B}_{35} + \\
&+ \widehat{B}_{13}^{\mathrm{T}} \underbrace{C_{31}}_{=0} \widehat{B}_{15} + \widehat{B}_{13}^{\mathrm{T}} \underbrace{C_{32}}_{=0} \widehat{B}_{25} + \widehat{B}_{13}^{\mathrm{T}} C_{33} \widehat{B}_{35}) ab \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (\widehat{B}_{11}^{\mathrm{T}} C_{11} \widehat{B}_{15} + \widehat{B}_{13}^{\mathrm{T}} C_{33} \widehat{B}_{35}) ab \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= ab \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} (N_{1,x} C_{11} N_{3,x} + N_{1,y} C_{33} N_{3,y}) \,\mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= ab \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left(N_{1,x} \underbrace{\frac{E}{1-\nu^2}}_{=E'} N_{3,x} + N_{1,y} \underbrace{\frac{E}{2(1+\nu)}}_{=G} N_{3,y} \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= ab \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left(E' \frac{b(1+\eta)}{4ab} \frac{-b(1-\eta)}{4ab} + G \frac{a(1+\xi)}{4ab} \frac{-a(1-\xi)}{4ab} \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \\
&= -\frac{1}{16ab} \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \left(E' b^2 (1-\eta^2) + G a^2 (1-\xi^2) \right) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta
\end{aligned}
$$

numerisch oder analytisch Integrieren

$$
k_{15} = -\frac{1}{6} \left(E' \frac{b}{a} + G \frac{a}{b} \right)
$$

UNI KASSEL VERSITÄT

Aufgabe 2

Berechnung des Elementlastvektors

$$\begin{aligned}
\mathbf{p} &= \int_{a_\sigma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\,\mathrm{d}a \quad \text{mit } \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \\
&= \int_x \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}(\xi, \eta = 1)\mathbf{t}\, a\mathrm{d}\xi \quad \text{mit } \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\xi} = a \\
&= \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} N_1 & 0 \\ 0 & N_1 \\ N_2 & 0 \\ 0 & N_2 \\ N_3 & 0 \\ 0 & N_3 \\ N_4 & 0 \\ 0 & N_4 \end{bmatrix}_{\eta=1} \begin{Bmatrix} 0 \\ p_0 \end{Bmatrix} a\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{1}{4}\int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} (1+\xi)2 & 0 \\ 0 & (1+\xi)2 \\ (1-\xi)2 & 0 \\ 0 & (1-\xi)2 \\ (1-\xi)0 & 0 \\ 0 & (1-\xi)0 \\ (1+\xi)0 & 0 \\ 0 & (1+\xi)0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ p_0 \end{Bmatrix} a\mathrm{d}\xi \\
&= \frac{ap_0}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ \xi + 0,5\xi^2 \\ 0 \\ \xi - 0,5\xi^2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}_{-1}^{+1} \\
&= ap_0 \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}
\end{aligned}$$