

FEM-Übung

Schwache Form der Gleichgewichtsaussage und konsistente Knotenlasten

Ein einseitig eingespannter Stab, siehe Abb. 1, mit dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α_T , der Querschnittsfläche A und dem Elastizitätsmodul E wird ungleichmäßig erwärmt.

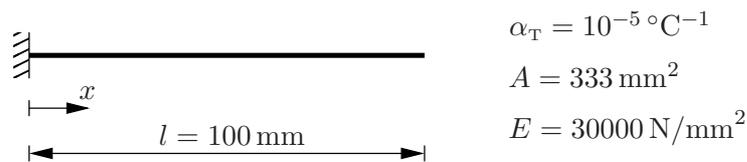


Abb. 1: Einseitig eingespannter Dehnstab

Die thermische Dehnung $\varepsilon_{\text{th}}(x)$ ist proportional der Temperaturänderung $T(x)$:

$$\varepsilon_{\text{th}}(x) = \alpha_T T(x) .$$

Die Gesamtdehnung $\varepsilon(x)$ setzt sich additiv aus elastischer $\varepsilon_{\text{el}}(x)$ und thermischer Dehnung $\varepsilon_{\text{th}}(x)$ zusammen:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{\text{el}}(x) + \varepsilon_{\text{th}}(x) .$$

Die Elastizitätsbeziehung für den Dehnstab lautet:

$$N(x) = EA\varepsilon_{\text{el}}(x) .$$

Aufgabenstellung:

- (i) Geben Sie die Verschiebungsdifferentialgleichung für den Dehnstab mit Temperaturbelastung an.
- (ii) Ermitteln Sie die irreduzible Verschiebungsgleichung in Variationsform für den Dehnstab mit veränderlicher Temperaturbelastung $T(x)$ entlang der Stabachse und geben Sie die diskretisierte schwache Form an.
- (iii) Berechnen Sie die konsistenten Knotenlasten für den Stab, der mit einem quadratischen Element räumlich diskretisiert wird (siehe Abb. 2 (a)), für eine linear veränderliche Temperaturbelastung (siehe Abb. 2 (b)) von

$$T(x) = T_0 \frac{x}{l} \quad \text{mit } T_0 = 200 \text{ }^\circ\text{C} .$$

Benutzen Sie für die Lösung der Integrale die Quadraturformel nach GAUSS.

- (iv) Ermitteln Sie die Verschiebungen der Knoten ② und ③ infolge der Temperaturerhöhung für den obigen Ansatz. Zeichnen Sie den Verschiebungsverlauf. Ist er exakt? Zeigen Sie, dass die Normalkraft im Stab verschwindet.

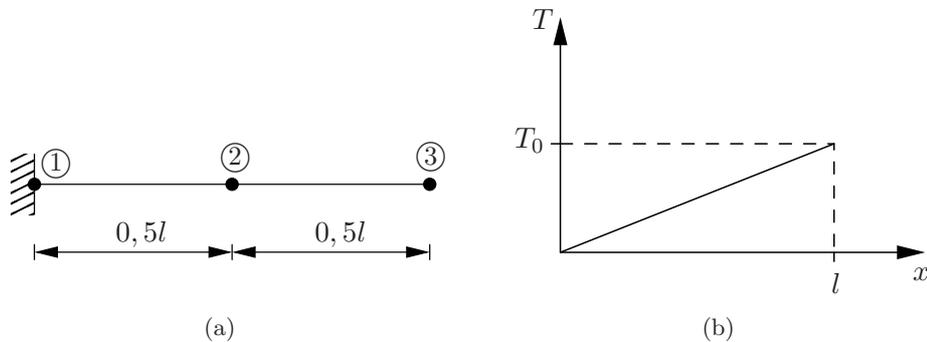


Abb. 2: (a) Räumliche Diskretisierung des einseitig eingespannten Dehnstabs mit einem quadratischen Element (b) Temperaturfeld entlang der Stabachse

- (v) Geben Sie den Verschiebungsverlaufs des Stabs für den Fall an, dass das rechte Stabende unverschieblich gelagert ist, siehe Abb. 3. Stellen Sie den Verschiebungsverlauf graphisch dar.
- (vi) Berechnen Sie die Gesamtdehnung ε , die elastische Dehnung ε_{el} und die thermische Dehnung ε_{th} an den Stützstellen der GAUSS-Integration. Zeichnen Sie die Verläufe über die Stablänge.
- (vii) Ermitteln Sie die Stabnormalkraft N an den Integrationspunkten und stellen Sie den Verlauf $N(x)$ rechnerisch und graphisch dar. Ist der Verlauf exakt? Begründen Sie ihre Antwort.

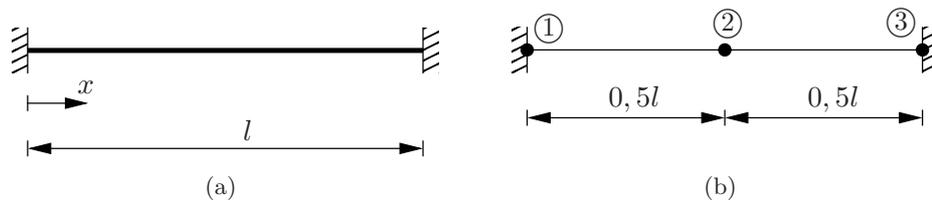


Abb. 3: Beidseitig eingespannter Dehnstab (a) physikalische Problemstellung (b) Diskretisierung mit einem quadratischen Element