FEM-Übung
-
Isoparametrische Elemente (Musterlösung)

Aufgabe 1

Geometrieinterpolation im bilinearen Element

$$x(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i x_i^{\mathrm{k}} \tag{1}$$

$$y(\xi,\eta) = \sum_{i=1}^{4} N_i y_i^{\mathrm{k}} \tag{2}$$

Einsetzen der Knotenkoordinaten liefert

$$x(\xi,\eta) = N_1 \cdot 4 + N_2 \cdot 1 + N_3 \cdot 1 + N_4 \cdot 3 \tag{3}$$

$$y(\xi,\eta) = N_1 \cdot 5 + N_2 \cdot 4 + N_3 \cdot 1 + N_4 \cdot 1 \tag{4}$$

Umformungen

$$x(\xi,\eta) = \frac{9}{4} + \frac{5}{4}\xi + \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4}\xi\eta \tag{5}$$

$$y(\xi,\eta) = \frac{11}{4} + \frac{1}{4}\xi + \frac{7}{4}\eta + \frac{1}{4}\xi\eta \tag{6}$$

partielle Ableitungen

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{5}{4} + \frac{1}{4}\eta \tag{7}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\eta \tag{8}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\xi \tag{9}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{7}{4} + \frac{1}{4}\xi \tag{10}$$

Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{11}$$

$$= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 5+\eta & 1+\xi \\ 1+\eta & 7+\xi \end{bmatrix} \tag{12}$$

Jacobi-Determinante

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{1}{16}\left[(5+\eta)(7+\xi) - (1+\xi)(1+\eta)\right] \tag{13}$$

$$= \frac{1}{8}\left[17 + 2\xi + 3\eta\right] \tag{14}$$

$$\tag{15}$$

Wann ist die Determinante $\det(\mathbf{J}) > 0$ positiv?

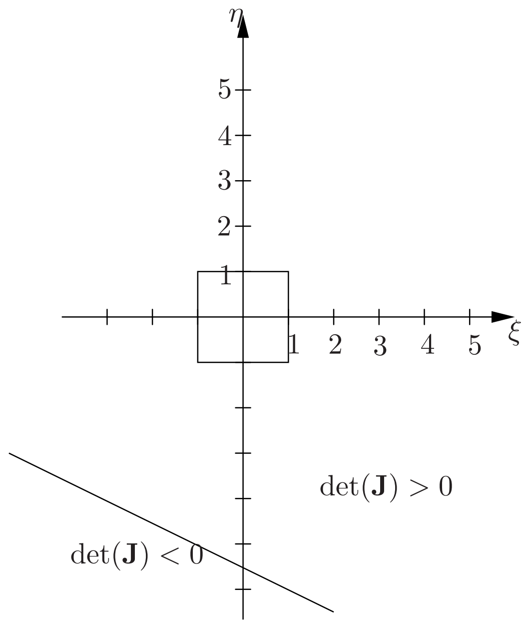
$$\det(\mathbf{J}) = 17 + 2\xi + 3\eta > 0 \tag{16}$$

$\det(\mathbf{J}) > 0$ falls

$$\eta > -\frac{17}{3} - \frac{2}{3}\xi \tag{17}$$

Geradengleichung

$$\eta = -\frac{17}{3} - \frac{2}{3}\xi \tag{18}$$



Gebiet des Einheitselements $-1 \leq \{\xi, \eta\}^{\mathrm{T}} \leq +1$ liegt im Bereich mit positiver Determinante

Aufgabe 2

Geometrieinterpolation

$$x(\xi, \eta) = \frac{9}{4} + \frac{1}{4}\xi + \frac{5}{4}\eta + \frac{1}{4}\xi\eta \tag{19}$$

$$y(\xi, \eta) = \frac{11}{4} + \frac{7}{4}\xi + \frac{1}{4}\eta + \frac{1}{4}\xi\eta \tag{20}$$

Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+\eta & 5+\xi \\ 7+\eta & 1+\xi \end{bmatrix} \tag{21}$$

Jacobi-Determinante

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{1}{8}\left[-17 - 2\eta - 3\xi\right] \tag{22}$$

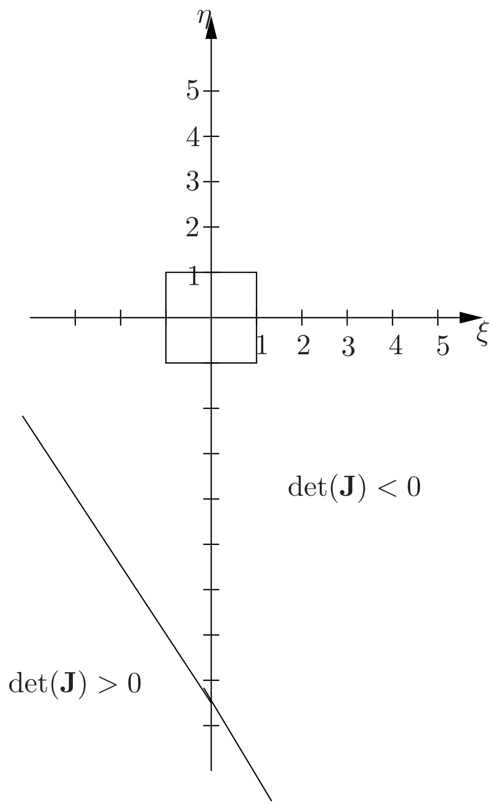
$$\tag{23}$$

Wann ist die Determinante $\det(\mathbf{J}) > 0$ positiv?

$$\eta < -\frac{17}{2} - \frac{3}{2}\xi \tag{24}$$

Geradengleichung

$$\eta = -\frac{17}{2} - \frac{3}{2}\xi \tag{25}$$



Gebiet des Einheitselements $-1 \leq \{\xi, \eta\}^{\mathrm{T}} \leq +1$ liegt im Bereich mit negativer Determinante

Flächenintegral

$$A = \int_{-1}^{+1}\int_{-1}^{+1} \det(\mathbf{J}) \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta < 0 \tag{26}$$

Aufgabe 3

Geometrieinterpolation

$$x(\xi,\eta) = \frac{1}{4}(8 + 4\xi - 2\eta - 2\xi\eta) \tag{27}$$

$$y(\xi,\eta) = \frac{1}{8}(19 - 5\xi + 11\eta - 5\xi\eta) \tag{28}$$

Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 8 - 4\eta & -4 - 4\xi \\ -5 - 5\eta & 11 - 5\xi \end{bmatrix} \tag{29}$$

Jacobi-Determinante

$$\det(\mathbf{J}) = \frac{1}{16}[17 - 15\eta - 16\xi] \tag{30}$$

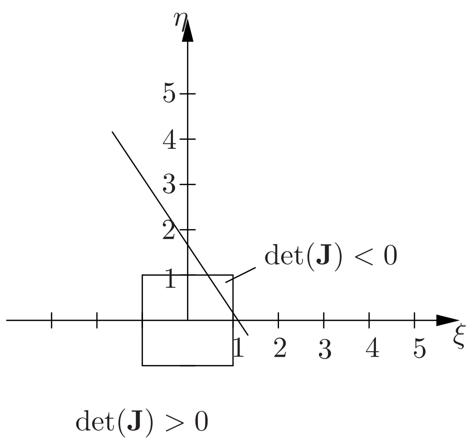
$$\tag{31}$$

Wann ist die Determinante $\det(\mathbf{J}) > 0$ positiv?

$$\eta < \frac{17}{16} - \frac{15}{16}\xi \tag{32}$$

Geradengleichung

$$\eta = \frac{17}{16} - \frac{15}{16}\xi \tag{33}$$



im Gebiet des Einheitselements $-1 \leq \{\xi,\eta\}^{\mathrm{T}} \leq +1$ gibt es Bereiche mit negativer Determinante

Aufgabe 4

Verzerrungsberechnung

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{\mathrm{k}} \tag{34}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_{1,x} & 0 & N_{2,x} & 0 & N_{3,x} & 0 & N_{4,x} & 0 \\ 0 & N_{1,y} & 0 & N_{2,y} & 0 & N_{3,y} & 0 & N_{4,y} \\ N_{1,y} & N_{1,x} & N_{2,y} & N_{2,x} & N_{3,y} & N_{3,x} & N_{4,y} & N_{4,x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{\mathrm{k}} \\ v_1^{\mathrm{k}} \\ u_2^{\mathrm{k}} \\ v_2^{\mathrm{k}} \\ u_3^{\mathrm{k}} \\ v_3^{\mathrm{k}} \\ u_4^{\mathrm{k}} \\ v_4^{\mathrm{k}} \end{Bmatrix} \tag{35}$$

Formfunktionen

$$\mathbf{N}^{\mathrm{T}} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1+\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1+\eta) \\ (1-\xi)(1-\eta) \\ (1+\xi)(1-\eta) \end{Bmatrix} \tag{36}$$

Geometrieinterpolation

$$x(\xi,\eta) = 1 + \xi \tag{37}$$

$$y(\xi,\eta) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4}\xi + \frac{3}{4}\eta - \frac{1}{4}\xi\eta \tag{38}$$

Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,25 - 0,25\eta & 0,75 - 0,25\xi \end{bmatrix} \tag{39}$$

Jacobi-Determinante

$$\det(\mathbf{J}) = 0,75 - 0,25\xi > 0 \quad \text{für } \xi < 3 \tag{40}$$

→ gesamte Gebiet hat positive Determinante

Punkt $A(0,5/1,75)$ hat Koordinaten $(-0,5/1,0)$ im natürliche Koordinatensystem

Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J}_A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -0,5 & 0,875 \end{bmatrix} \qquad \mathbf{J}_A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & -0,5 \\ 0 & 0,875 \end{bmatrix} \tag{41}$$

Jacobi-Determinante im Punkt A

$$\det(\mathbf{J}_A) = 0,875 > 0 \tag{42}$$

Ableitung der Formfunktionen im Punkt A nach physikalischen Koordinaten

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} \mathbf{N}|_A = \underbrace{\frac{8}{7} \begin{bmatrix} 7/8 & 0,5 \\ 0 & 1\xi \end{bmatrix}}_{\mathbf{J}_A^{-\mathrm{T}}} \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial \xi} \\ \dfrac{\partial}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \mathbf{N}(\xi,\eta)|_A \tag{43}$$

Ableitungen

$$\frac{\partial \mathbf{N}^{\mathrm{T}}}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1+\eta) \\ -(1+\eta) \\ -(1-\eta) \\ (1-\eta) \end{Bmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{N}^{\mathrm{T}}}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \begin{Bmatrix} (1+\xi) \\ (1-\xi) \\ -(1-\xi) \\ -(1+\xi) \end{Bmatrix} \tag{44}$$

Ableitungen im Punkt A

$$\frac{\partial \mathbf{N}^{\mathrm{T}}}{\partial \xi}|_A = \begin{Bmatrix} 0,5 \\ -0,5 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad \frac{\partial \mathbf{N}^{\mathrm{T}}}{\partial \eta}|_A = \begin{Bmatrix} 1/8 \\ 3/8 \\ -3/8 \\ -1/8 \end{Bmatrix} \tag{45}$$

Berechnung der Ableitungen der Formfunktionen

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} N_1|_A = \frac{8}{7} \begin{Bmatrix} 1/2 \\ 1/8 \end{Bmatrix} \tag{46}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} N_2|_A = \frac{8}{7} \begin{Bmatrix} 1/4 \\ 3/8 \end{Bmatrix} \tag{47}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} N_3|_A = \frac{8}{7} \begin{Bmatrix} -3/16 \\ -3/8 \end{Bmatrix} \tag{48}$$

$$\begin{Bmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \end{Bmatrix} N_4|_A = \frac{8}{7} \begin{Bmatrix} -1/16 \\ -1/8 \end{Bmatrix} \tag{49}$$

Berechnung der Verzerrungen

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{u}^{\mathrm{k}} \tag{50}$$

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \frac{8}{7} \begin{Bmatrix} 0,5 \cdot 0,001 + (-1/16) \cdot 0,002 \\ 1/8 \cdot 0,003 + 3/8 \cdot 0,005 \\ 1/2 \cdot 0,003 + 1/4 \cdot 0,005 + 1/8 \cdot 0,001 + (-1/8) \cdot 0,002 \end{Bmatrix} \tag{51}$$

$$= \begin{Bmatrix} -0,0004 \\ 0,00257 \\ 0,003 \end{Bmatrix} \tag{52}$$