FEM-Übung – Rechtwinklige Kragscheibe unter Querkraftbelastung: Konsistente Knotenlasten

Die Systemskizze in Abb. 1 (a) zeigt einen Kragbalken der Länge l, der durch eine Querlast Q beansprucht wird. Das Scheibenmodell dieses Kragbalkens ist in Abb. 1 (b) dargestellt, das durch eine zur Querlast Q äquivalenten Streckenlast $p(y)$ belastet wird. Die parabolische Verteilung der Streckenlast am linken Rand der Kragscheibe folgt aus der Kenntnis, dass die Schubspannungsverteilung quadratisch über den Querschnitt verläuft. Ihr Maximum wird durch p_0 beschrieben. Die Schubspannung τ_{yx} am oberen ($y = b$) und unteren Rand ($y = -b$) ist Null (schubspannungsfreier Rand). Gemäß der Symmetriebedingung $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ muss an den Eckpunkten bei $(0, b)$ und $(0, -b)$ auch die Schubspannung τ_{xy} verschwinden. Somit nimmt auch die Streckenlast $p(y)$ dort den Wert Null an.

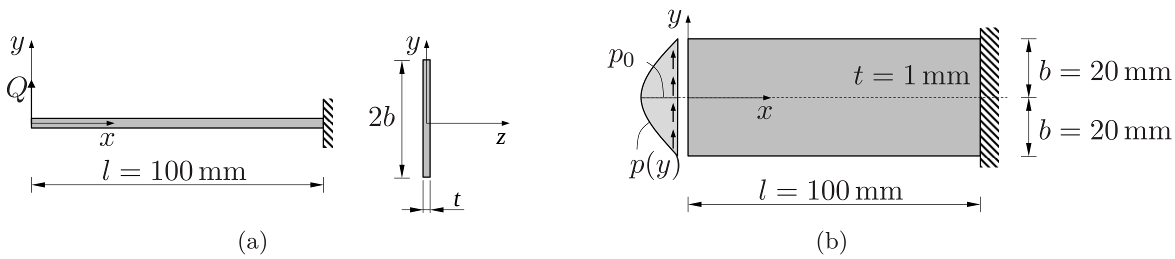

Abb. 1: (a) Kragbalken unter Einzellast Q (b) Kragscheibe unter konsistenter Streckenlast $p(y)$

Geg.: Elastizitätsmodul $E = 2 \cdot 10^5\,\mathrm{MPa}$, Querdehnzahl $\nu = 0,3$, Querlast $Q = -100\,\mathrm{N}$

Die Kragscheibe soll mit der Methode der Finiten Elemente berechnet werden. Dazu werden 4 lineare Elemente über die Höhe verwendet, deren äquivalente Knotenlasten ermittelt werden sollen.

Zunächst wird das Maximum der äquivalenten Streckenlast ermittelt. Dazu wird folgender quadratischer Ansatz verwendet:

$$p(y) = -p_0 \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] \; .$$

Mit dem Zusammenhang zwischen der Querkraft und der Streckenlast

$$Q = \int_{-b}^{b} p(y) \mathrm{d}y \; . \tag{1}$$

folgt:

$$\begin{aligned} Q &= \int_{-b}^{b} p(y) \mathrm{d}y && (2) \\ &= \int_{-b}^{b} -p_0 \left[1 - \left(\frac{y}{b} \right)^2 \right] \mathrm{d}y && (3) \\ &= -p_0 \left[y - \frac{y^3}{3b^2} \right]_{-b}^{b} && (4) \\ &= -\frac{4}{3} p_0 b \; , && (5) \\ & && (6) \end{aligned}$$

wodurch p_0 sich zu

$$\begin{aligned} p_0 &= -\frac{3Q}{4b} && (7) \\ &= 3,75 \, \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{mm}} && (8) \end{aligned}$$

ergibt. Der Ansatz für die parabolische Streckenlast lautet somit:

$$p(y) = -3,75 \left[1 - \left(\frac{y}{20} \right)^2 \right] \; . \tag{9}$$

Dazu wird die Kragscheibe in 8×4 Elemente eingeteilt, siehe Abb. 2.

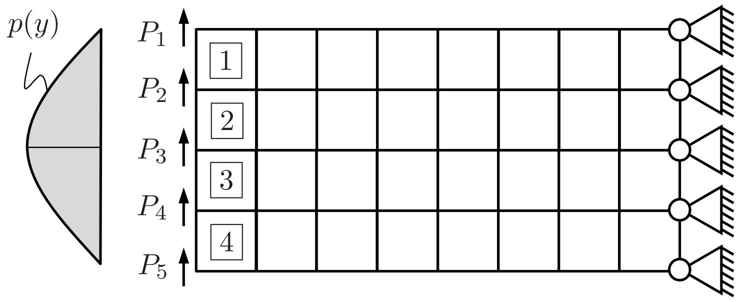

Abb. 2: FE-Modell mit 8x4 Scheibenelementen

Im linear-elastischen Fall lautet das resultierende Gleichungssystem

$$\mathbf{K}\mathbf{r} = \mathbf{P}\ . \tag{10}$$

Der Strukturlastvektor $\mathbf{P}$ berechnet sich für linienförmig verteilte Lasten nach

$$\mathbf{P} = \int\limits_{a_\sigma} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\ \mathrm{d}a \quad \text{mit } \mathbf{t} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix}\ . \tag{11}$$

Die Berechnung auf Strukturebene setzt sich aus den Anteilen der Elementlastvektoren zusammen:

$$\mathbf{P} = \sum_{e=1}^{nel_\sigma} \mathbf{p} \tag{12}$$

$$= \sum_{e=1}^{nel_\sigma} \int\limits_{a_{\sigma e}} \mathbf{N}^{\mathrm{T}}\mathbf{t}\ \mathrm{d}a\ . \tag{13}$$

Der Randspannungsvektor hat im vorliegenden Fall nur Komponenten in y-Richtung:

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} 0 \\ p(y) \end{Bmatrix}\ . \tag{14}$$

Der Ansatz für das Verschiebungsfeld lautet in Vektor-Matrix Schreibweise ausgeschrieben:

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_1^{\mathrm{k}} \\ v_1^{\mathrm{k}} \\ u_2^{\mathrm{k}} \\ v_2^{\mathrm{k}} \\ u_3^{\mathrm{k}} \\ v_3^{\mathrm{k}} \\ u_4^{\mathrm{k}} \\ v_4^{\mathrm{k}} \end{Bmatrix}\ . \tag{15}$$

Somit lautet der Elementlastvektor $\mathbf{p}$ aus Gl. (12) unter Verwendung von Gl. (14) wie folgt:

$$\mathbf{p} = \begin{Bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \\ p_6 \\ p_7 \\ p_8 \end{Bmatrix} \tag{16}$$

$$= \int\limits_{a_{\sigma e}} \begin{Bmatrix} 0 \\ N_1 p(y) \\ 0 \\ N_2 p(y) \\ 0 \\ N_3 p(y) \\ 0 \\ N_4 p(y) \end{Bmatrix} \mathrm{d}a \tag{17}$$

$$= \int\limits_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} 0 \\ N_1 p(y) \\ 0 \\ N_2 p(y) \\ 0 \\ N_3 p(y) \\ 0 \\ N_4 p(y) \end{Bmatrix} \det(\mathbf{J}) \mathrm{d}\eta \tag{18}$$

Im isoparametrischen Einheitselement, siehe Abb. 4, wird die Elementkante bei $x = 0$ durch $\xi = -1$

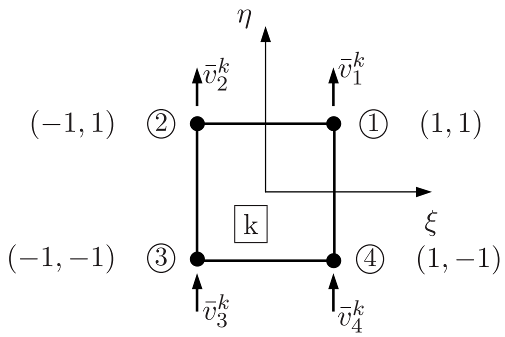

Abb. 3: Abb. 4: Isoparametrisches Scheibenelement

beschrieben. Die Formfunktionen lauten entlang dieser Elementkante:

$$N_1 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta), \qquad N_1|_{\xi=-1} = 0 \tag{19}$$

$$N_2 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta), \qquad N_2|_{\xi=-1} = \frac{1}{2}(1+\eta) \tag{20}$$

$$N_3 = \frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta), \qquad N_3|_{\xi=-1} = \frac{1}{2}(1-\eta) \tag{21}$$

$$N_4 = \frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta), \qquad N_4|_{\xi=-1} = 0 \tag{22}$$

Zur Bestimmung der Jacobi-Determinanten muss die Koordinatentransformation bestimmt werden.

Die Geometrie wird analog zum Verschiebungsfeld interpoliert:

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & N_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1^{\mathrm{k}} \\ y_1^{\mathrm{k}} \\ x_2^{\mathrm{k}} \\ y_2^{\mathrm{k}} \\ x_3^{\mathrm{k}} \\ y_3^{\mathrm{k}} \\ x_4^{\mathrm{k}} \\ y_4^{\mathrm{k}} \end{Bmatrix} \tag{23}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{\xi=-1} \begin{Bmatrix} x_1^{\mathrm{k}} \\ y_1^{\mathrm{k}} \\ x_2^{\mathrm{k}} \\ y_2^{\mathrm{k}} \\ x_3^{\mathrm{k}} \\ y_3^{\mathrm{k}} \\ x_4^{\mathrm{k}} \\ y_4^{\mathrm{k}} \end{Bmatrix} . \tag{24}$$

Die parabolische Streckenlast muss auch in den Einheitsraum transformiert werden:

$$p(y(\eta)) = -p_0 \left[1 - \left(\frac{y(\eta)}{20} \right)^2 \right] . \tag{25}$$

Die globalen Knotenkoordinaten im ersten Element lauten:

- Knoten 1: $(0,125l; b)$
- Knoten 2: $(0; b)$
- Knoten 3: $(0; 0,5b)$
- Knoten 4: $(0,125l; 0,5b)$

Somit folgt Gl. (24) zu

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5(1+\eta) \cdot 0 + 0,5(1-\eta) \cdot 0 \\ 0,5(1+\eta) \cdot b + 0,5(1-\eta) \cdot 0,5b \end{Bmatrix} \tag{26}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 5(3+\eta) \end{Bmatrix} \tag{27}$$

$$\tag{28}$$

Die Jacobi-Matrix

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} \tag{29}$$

und deren Determinante folgt zu

$$\det(\mathbf{J}) = 5 . \tag{30}$$

Die Streckenlast (25) im wird nun auch transformiert:

$$p(y(\eta)) = -p_0 \left[1 - \left(\frac{5(3+\eta)}{20}\right)^2\right] \tag{31}$$

$$= -3,75 \left[1 - \frac{1}{16}(3+\eta)^2\right] \tag{5}$$

Somit ergeben sich die beiden Anteile im Elementlastvektor:

$$p_4^1 = \int_{-1}^{+1} -3,75 \left[1 - \frac{1}{16}(3+\eta)^2\right] \frac{5}{2}(1+\eta)\mathrm{d}\eta \tag{32}$$

$$p_6^1 = \int_{-1}^{+1} -3,75 \left[1 - \frac{1}{16}(3+\eta)^2\right] \frac{5}{2}(1-\eta)\mathrm{d}\eta \tag{33}$$

Der Integrand ist jeweils ein Polynom 3. Grades und wird mittels 2-Punkt-GAUSS-Quadratur mit

$$\eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad w_1 = 1 \qquad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad w_2 = 1 \tag{34}$$

gelöst. Es folgt dann für die Komponenten

$$p_4^1 \approx -9,375 \left[1 - \frac{1}{16}\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 9,375 \left[1 - \frac{1}{16}\left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{35}$$

$$\approx -5,46875\,\mathrm{N} \tag{36}$$

$$p_4^6 \approx -9,375 \left[1 - \frac{1}{16}\left(3 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 9,375 \left[1 - \frac{1}{16}\left(3 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{37}$$

$$\approx -10,15625\,\mathrm{N} \quad . \tag{38}$$

Die globalen Knotenkoordinaten im zweiten Element lauten:

- Knoten 1: $(0,125l; 0,5b)$
- Knoten 2: $(0; 0,5b)$
- Knoten 3: $(0; 0)$
- Knoten 4: $(0,125l; 0)$

Somit folgt Gl. (24) zu

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0,5(1+\eta)\cdot 0 + 0,5(1-\eta)\cdot 0 \\ 0,5(1+\eta)\cdot 0,5b + 0,5(1-\eta)\cdot 0 \end{Bmatrix} \tag{39}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 5(1+\eta) \end{Bmatrix} \tag{40}$$

$$\tag{41}$$

Die Determinante ist weiterhin

$$\det(\mathbf{J}) = 5 \ . \tag{42}$$

Die Streckenlast ist

$$p(y(\eta)) = -3,75\left\{1-\left[\frac{5(1+\eta)}{20}\right]^2\right\} \tag{43}$$

$$= -3,75\left\{1-\frac{1}{16}(1+\eta)^2\right\} \; . \tag{44}$$

Die Komponenten im zweiten Element ergeben sich nun

$$p_4^2 = \int\limits_{-1}^{1} -3,75\left[1-\frac{1}{16}(1+\eta)^2\right]\frac{5}{2}(1+\eta)\mathrm{d}\eta \tag{45}$$

$$p_6^2 = \int\limits_{-1}^{1} -3,75\left[1-\frac{1}{16}\,(1+\eta)^2\right]\frac{5}{2}\,(1-\eta)\,\mathrm{d}\eta \tag{46}$$

Die numerische Integration mit der 2-Punkt-Gauss-Quadratur führt auf

$$p_4^2 \approx -9,375\left[1-\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 9,375\left[1-\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{47}$$

$$\approx -16,40625\,\mathrm{N} \tag{48}$$

$$p_6^2 \approx -9,375\left[1-\frac{1}{16}\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) - 9,375\left[1-\frac{1}{16}\left(1-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2\right]\left(1+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) \tag{49}$$

$$\approx -17,96875\,\mathrm{N} \quad . \tag{50}$$

Der Strukturlastvektor ergibt sich nun folgendermaßen:

$$P_1 = p_4^1 \qquad = -5,46875\,\mathrm{N} \tag{51}$$

$$P_2 = p_6^1 + p_4^2 \qquad = -26,5625\,\mathrm{N} \tag{52}$$

$$P_3 = 2p_6^2 \qquad = -35,9375\,\mathrm{N} \tag{53}$$

$$P_4 = P_2 \qquad = -26,5625\,\mathrm{N} \tag{54}$$

$$P_5 = P_1 \qquad = -5,46875\,\mathrm{N} \tag{55}$$