

FEM-Übung - Vorgespannte Membran (Musterlösung)

(1) Herleitung der Differentialgleichung (an der ausgelenkten Membran)

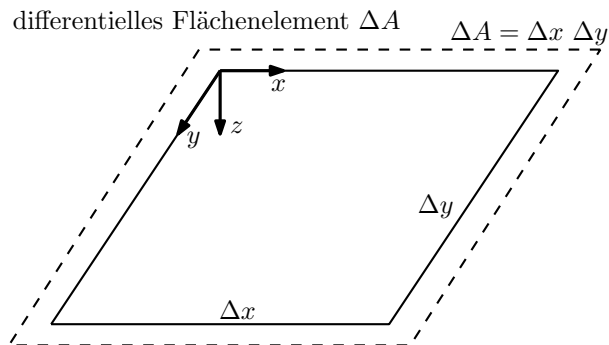


Abb. 1: Differentielles Flächenelement

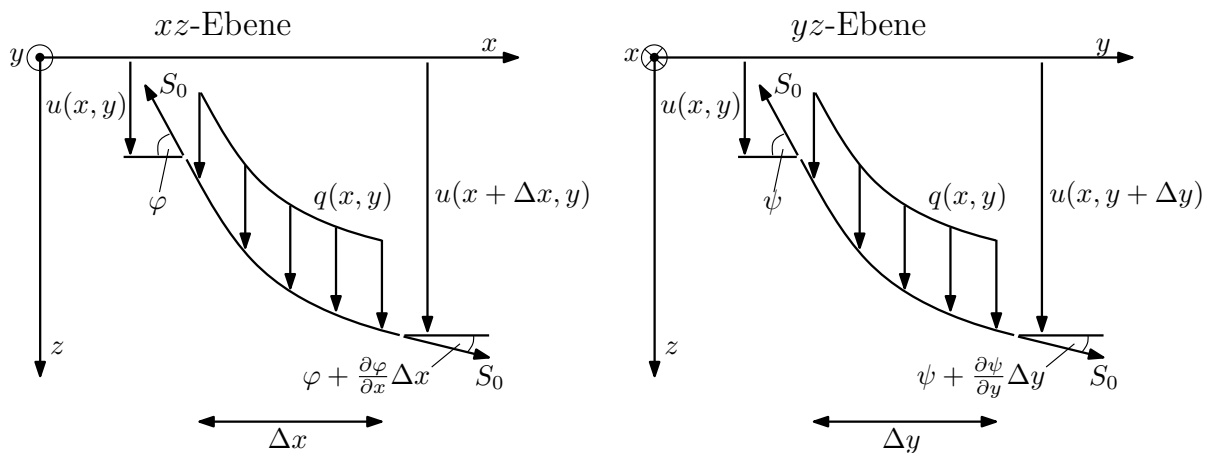


Abb. 2: Darstellung in der xz - und in der yz -Ebene

$$\sum F_{i,z} : \left[-S_0 \sin(\varphi) + S_0 \sin\left(\varphi + \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x\right) \right] \Delta y + \left[-S_0 \sin(\psi) + S_0 \sin\left(\psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta y\right) \right] \Delta x + q \Delta x \Delta y = 0$$

Kleinwinkelnäherung: $\sin(\varphi) \approx \varphi$ bzw. $\sin(\psi) \approx \psi$

$$-S_0 \varphi \Delta y + S_0 \varphi \Delta y + S_0 \frac{\partial \varphi}{\partial x} \Delta x \Delta y - S_0 \psi \Delta x + S_0 \psi \Delta x + S_0 \frac{\partial \psi}{\partial y} \Delta y \Delta x + q \Delta x \Delta y = 0$$

Kleinwinkelnäherung: $\tan(\varphi) = \frac{\partial u}{\partial x}$ und $\tan(\varphi) \approx \varphi$ bzw. $\tan(\psi) = \frac{\partial u}{\partial y}$ und $\tan(\psi) \approx \psi$

Daraus folgt: $\varphi \approx \frac{\partial u}{\partial x}$ bzw. $\psi \approx \frac{\partial u}{\partial y}$

$$S_0 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + S_0 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + q = 0$$

Dabei wird der LAPLACE-Operator $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ eingeführt. Die Differentialgleichung in Kurzform lautet dann:

$$S_0 \Delta u + q = 0$$

Dies ist eine POISSONSche Differentialgleichung (partielle Dgl. 2. Ordnung, linear, inhomogen)
 Randbedingungen: $u = 0$ auf Rand Γ

(2) Schwache Form

$$\begin{aligned} \iint_A (w [S_0 \Delta u + q]) \, dA &= 0 \\ \Leftrightarrow S_0 \iint_A (w \Delta u) \, dA &= \iint_A (w q) \, dA \end{aligned}$$

Produktintegration der linken Seite:

$$w \Delta u = \frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial}{\partial y} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right)$$

Einsetzen:

$$S_0 \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \, dA - S_0 \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \, dA = - \iint_A w q \, dA \quad (*)$$

Ersten Term umformulieren:

$$S_0 \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(w \frac{\partial}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(w \frac{\partial}{\partial y} \right) \right] \, dA = S_0 \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} \right) \cdot \left(w \frac{\partial}{\partial x} \right) \, dA = S_0 \iint_A \nabla \cdot \mathbf{v} \, dA \quad (**)$$

GAUSS-Theorem (Divergenztheorem):

$$\iint_A \nabla \cdot \mathbf{v} \, dA = \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma$$

Es folgt für (**)

$$S_0 \oint_{\Gamma} \mathbf{n} \cdot \begin{pmatrix} w \frac{\partial}{\partial x} \\ w \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \, d\Gamma = 0, \quad \text{da } w = 0 \text{ auf } \Gamma$$

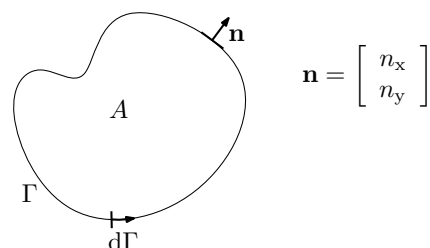


Abb. 3: Gebiet A mit Rand Γ

Es folgt für (*):

$$S_0 \iint_A \left(\frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial u}{\partial y} \right) dA = \iint_A w q dA$$

Dies ist die schwache Form der vorgespannten Membran.

(3) FE-Diskretisierung

$$u(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) u_i^k = \mathbf{N} \mathbf{u}^k$$

$$\frac{\partial u(x, y)}{\partial x} = \mathbf{N}_{,x} \mathbf{u}^k, \quad \frac{\partial u(x, y)}{\partial y} = \mathbf{N}_{,y} \mathbf{u}^k$$

$$w(x, y) = \sum_{i=1}^n N_i(x, y) \delta w_i^k = \mathbf{N} \delta \mathbf{w}^k$$

$$\frac{\partial w(x, y)}{\partial x} = \mathbf{N}_{,x} \delta \mathbf{w}^k, \quad \frac{\partial w(x, y)}{\partial y} = \mathbf{N}_{,y} \delta \mathbf{w}^k$$

Einsetzen in schwache Form aus Aufgabenteil (2):

$$\bigcup_{l=1}^{nel} \delta \mathbf{w}^{kT} \iint_{A_e} \left[S_0 \mathbf{N}_{,x}^T \mathbf{N}_{,x} + S_0 \mathbf{N}_{,y}^T \mathbf{N}_{,y} \right] dA_e \mathbf{u}^k = \bigcup_{l=1}^{nel} \delta \mathbf{w}^{kT} \iint_{A_e} \mathbf{N}^T q dA_e$$

Wegkürzen von $\delta \mathbf{w}^{kT}$ und Vektor-Matrix-Schreibweise führt auf:

$$\bigcup_{l=1}^{nel} \iint_{A_e} \left[S_0 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x}^T & \mathbf{N}_{,y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix} \right] dA_e \mathbf{u}^k = \bigcup_{l=1}^{nel} \iint_{A_e} \mathbf{N}^T q dA_e$$

Begriffe Elementsteifigkeitsmatrix und Elementlastvektor:

$$\bigcup_{l=1}^{nel} \underbrace{\iint_{A_e} \left[S_0 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x}^T & \mathbf{N}_{,y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix} \right] dA_e}_{\text{Elementsteifigkeitsmatrix } \mathbf{k}^e} \mathbf{u}^k = \bigcup_{l=1}^{nel} \underbrace{\iint_{A_e} \mathbf{N}^T q dA_e}_{\text{Elementlastvektor } \mathbf{p}^e}$$

Begriffe Struktursteifigkeitsmatrix und Strukturlastvektor:

$$\underbrace{\bigcup_{l=1}^{nel} \iint_{A_e} \left[S_0 \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x}^T & \mathbf{N}_{,y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix} \right] dA_e}_{\text{Struktursteifigkeitsmatrix } \mathbf{K}} \mathbf{u}^k = \underbrace{\bigcup_{l=1}^{nel} \iint_{A_e} \mathbf{N}^T q dA_e}_{\text{Strukturlastvektor } \mathbf{P}}$$

(4) Parametrisierung

Parametrisierung mit bilinearen Rechteckelementen

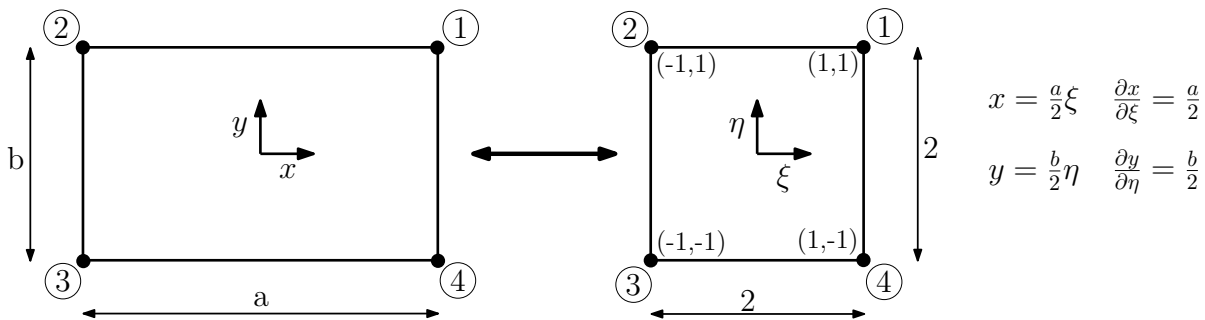


Abb. 4: Transformation des physikalischen Koordinatensystems in das natürliche Koordinatensystem

Formfunktionen:

$$\mathbf{N}^T = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 + \eta) \\ (1 - \xi)(1 - \eta) \\ (1 + \xi)(1 - \eta) \end{pmatrix}$$

Es gilt allgemein: $\mathbf{N}^T(\xi(x, y), \eta(x, y))$.

$$\mathbf{N}_{,x}^T = \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial x}}_{=\frac{2}{a}} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial x}}_{=0} = \frac{2}{a} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + \eta) \\ -(1 + \eta) \\ -(1 - \eta) \\ (1 - \eta) \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{N}_{,y}^T = \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \xi} \underbrace{\frac{\partial \xi}{\partial y}}_{=0} + \frac{\partial \mathbf{N}^T}{\partial \eta} \underbrace{\frac{\partial \eta}{\partial y}}_{=\frac{2}{b}} = \frac{2}{b} \frac{1}{4} \begin{pmatrix} (1 + \xi) \\ (1 - \xi) \\ -(1 - \xi) \\ -(1 + \xi) \end{pmatrix}$$

(5) Elementsteifigkeitsmatrix

$$\mathbf{k}^e = S_0 \iint_{A_e} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x}^T & \mathbf{N}_{,y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix} dx dy$$

$$dx = \frac{a}{2} d\xi, \quad dy = \frac{b}{2} d\eta$$

Berechnung der Jacobi-Matrix und Jacobi-Determinanten:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{J} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial x}{\partial \eta} \frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{a}{2} \frac{b}{2} - 0 = \frac{ab}{4}$$

Damit wird die Elementsteifigkeitsmatrix im natürlichen Koordinatensystem zu:

$$\mathbf{k}^e = S_0 \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x}^T & \mathbf{N}_{,y}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{N}_{,x} \\ \mathbf{N}_{,y} \end{bmatrix} \frac{ab}{4} d\xi d\eta$$

$$\mathbf{k}^e = \frac{S_0}{3} \begin{bmatrix} \frac{a}{b} + \frac{b}{a} & & & & \text{sym.} \\ \frac{a}{b} - \frac{b}{a} & \frac{a}{b} + \frac{b}{a} & & & \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) & -\frac{a}{b} + \frac{b}{2a} & \frac{a}{b} + \frac{b}{a} & & \\ -\frac{a}{b} + \frac{b}{2a} & -\frac{1}{2} \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \right) & \frac{a}{2b} - \frac{b}{a} & \frac{a}{b} + \frac{b}{a} \end{bmatrix}$$

Die Steifigkeit wird durch die Vorspannkraft S_0 bestimmt.

(6) Elementlastvektor

$$\mathbf{p}^e = \iint_{A_e} \mathbf{N}^T q \, dA_e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T \tilde{q}(\xi, \eta) \frac{ab}{4} d\xi d\eta$$

Mit konstantem Lastvektor $q(x, y) = q_0 = \text{konst.}$ folgt:

$$\mathbf{p}^e = \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \mathbf{N}^T q_0 \frac{ab}{4} d\xi d\eta = q_0 \frac{ab}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$