
FEM-Grundlagen

6. Übung

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Marvin Nahrman

Sommersemester 2020



Übungsblatt 2 auf der Website

Ein einseitig eingespannter Stab, siehe Abb. 1, mit dem Wärmeausdehnungskoeffizienten α_T , der Querschnittsfläche A und dem Elastizitätsmodul E wird ungleichmäßig erwärmt.

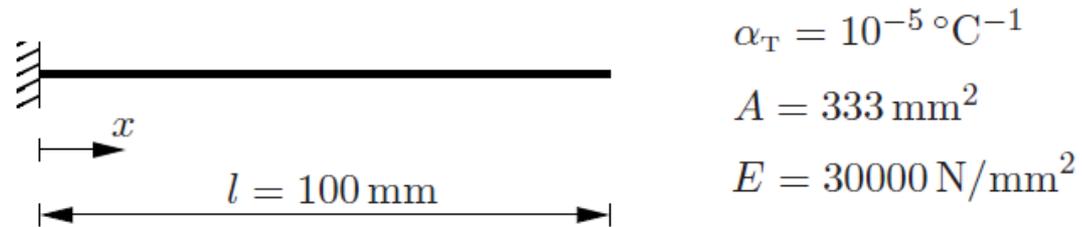


Abb. 1: Einseitig eingespannter Dehnstab

Die thermische Dehnung $\varepsilon_{\text{th}}(x)$ ist proportional der Temperaturänderung $T(x)$:

$$\varepsilon_{\text{th}}(x) = \alpha_T T(x) .$$

Die Gesamtdehnung $\varepsilon(x)$ setzt sich additiv aus elastischer $\varepsilon_{\text{el}}(x)$ und thermischer Dehnung $\varepsilon_{\text{th}}(x)$ zusammen:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{\text{el}}(x) + \varepsilon_{\text{th}}(x) .$$

Die Elastizitätsbeziehung für den Dehnstab lautet:

$$N(x) = EA\varepsilon_{\text{el}}(x) .$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Aufgabenstellung:

- (i) Geben Sie die Verschiebungsdifferentialgleichung für den Dehnstab mit Temperaturbelastung an.
- (ii) Ermitteln Sie die irreduzible Verschiebungsgleichung in Variationsform für den Dehnstab mit veränderlicher Temperaturbelastung $T(x)$ entlang der Stabachse und geben Sie die diskretisierte schwache Form an.
- (iii) Berechnen Sie die konsistenten Knotenlasten für den Stab, der mit einem quadratischen Element räumlich diskretisiert wird (siehe Abb. 2 (a)), für eine linear veränderliche Temperaturbelastung (siehe Abb. 2 (b)) von

$$T(x) = T_0 \frac{x}{l} \quad \text{mit } T_0 = 200^\circ\text{C} .$$

Benutzen Sie für die Lösung der Integrale die Quadraturformel nach GAUSS.

- (iv) Ermitteln Sie die Verschiebungen der Knoten ② und ③ infolge der Temperaturerhöhung für den obigen Ansatz. Zeichnen Sie den Verschiebungsverlauf. Ist er exakt? Zeigen Sie, dass die Normalkraft im Stab verschwindet.



Schwache Form und konsistente Knotenlasten

$$T(x) = T_0 \frac{x}{l} \quad \text{mit } T_0 = 200^\circ\text{C}$$

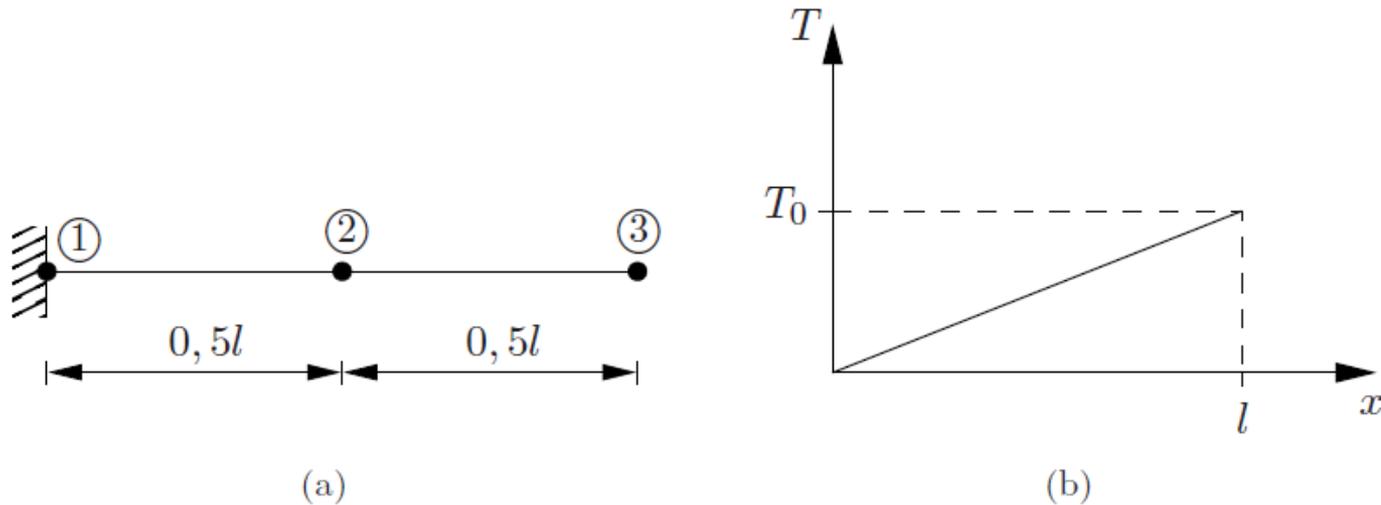


Abb. 2: (a) Räumliche Diskretisierung des einseitig eingespannten Dehnstabs mit einem quadratischen Element (b) Temperaturfeld entlang der Stabachse

Lösung zu Teil (i)

Die starke Form des Gleichgewichts ist gegeben durch

$$N'(x) + n(x) = 0 . \quad (1)$$

Die Elastizitätsbeziehung des Dehnstabs gibt den Zusammenhang zwischen den inneren Kräften $N(x)$ und der elastischen Dehnung $\varepsilon_{\text{el}}(x)$ an:

$$N(x) = EA\varepsilon_{\text{el}}(x) \quad (2)$$

Die Gesamtdehnung $\varepsilon(x)$ setzt sich additiv aus einem elastischen $\varepsilon_{\text{el}}(x)$ und thermischen Anteil $\varepsilon_{\text{th}}(x)$ zusammen:

$$\varepsilon(x) = \varepsilon_{\text{el}}(x) + \varepsilon_{\text{th}}(x) . \quad (3)$$

Das Einsetzen der Gesamtdehnung nach Gl. (3) in die Elastizitätsbeziehung (2) liefert:

$$N(x) = EA [\varepsilon(x) - \varepsilon_{\text{th}}(x)] . \quad (4)$$

Die thermischen Dehnungen $\varepsilon_{\text{th}}(x)$ sind proportional zur Temperaturänderung $T(x)$:

$$\varepsilon_{\text{th}}(x) = \alpha_T T(x) . \quad (5)$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Das Einsetzen von Gl. (5) in Gl. (4) ergibt:

$$N(x) = EA [\varepsilon(x) - \alpha_T T(x)] . \quad (6)$$

Der so erhaltene Zusammenhang aus Gl. (6) wird in das Gleichgewicht (1) eingesetzt:

$$N'(x) + n(x) = 0 \quad \Longrightarrow \quad \{EA [\varepsilon(x) - \alpha_T T(x)]\}' + n(x) = 0 \quad (7)$$

$$EA [\varepsilon(x)]' - [EA\alpha_T T(x)]' + n(x) = 0 , \quad (8)$$

E und A sind hier
konstant

wobei $(.)' = d(.) / dx$ bezeichnet. Unter Verwendung der Kinematik

$$\varepsilon(x) = u'(x) \quad (9)$$

kann Gl. (8) reduziert werden auf:

$$EA [u'(x)]' - [EA\alpha_T T(x)]' + n(x) = 0 . \quad (10)$$



Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Weiteres Umformen von Gl. (10) führt auf:

$$EAu''(x) = EA\alpha_T T'(x) - n(x) . \quad (11)$$

Gl. (11) bezeichnet die Verschiebungsdifferentialgleichung des Dehnstabs unter Einwirkung mechanischer Kräfte und eines Temperaturfeldes. Sie ist eine lineare, inhomogene, gewöhnliche Differentialgleichung zweiter Ordnung.

Starke Form der Differentialgleichung



Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Aufgabenstellung:

- (i) Geben Sie die Verschiebungsdifferentialgleichung für den Dehnstab mit Temperaturbelastung an.
- (ii) Ermitteln Sie die irreduzible Verschiebungsgleichung in Variationsform für den Dehnstab mit veränderlicher Temperaturbelastung $T(x)$ entlang der Stabachse und geben Sie die diskretisierte schwache Form an.
- (iii) Berechnen Sie die konsistenten Knotenlasten für den Stab, der mit einem quadratischen Element räumlich diskretisiert wird (siehe Abb. 2 (a)), für eine linear veränderliche Temperaturbelastung (siehe Abb. 2 (b)) von

$$T(x) = T_0 \frac{x}{l} \quad \text{mit } T_0 = 200^\circ\text{C} .$$

Benutzen Sie für die Lösung der Integrale die Quadraturformel nach GAUSS.

- (iv) Ermitteln Sie die Verschiebungen der Knoten ② und ③ infolge der Temperaturerhöhung für den obigen Ansatz. Zeichnen Sie den Verschiebungsverlauf. Ist er exakt? Zeigen Sie, dass die Normalkraft im Stab verschwindet.



Lösung zu Teil (ii)

Zur Konstruktion der schwachen Form wird die Verschiebungsdifferentialgleichung (11) mit dem virtuellen Verschiebungsfeld $\delta u(x)$ multipliziert und über das Gebiet l integriert:

$$\int_0^l \delta u(x) \left\{ EA [u'(x)]' - [EA\alpha_T T(x)]' + n(x) \right\} dx = 0 \quad (12)$$

$$\int_0^l \delta u(x) [EAu'(x)]' dx - \int_0^l \delta u(x) [EA\alpha_T T(x)]' dx + \int_0^l \delta u(x) n(x) dx = 0 \quad (13)$$

Der additive Zusammenhang zwischen den Dehnungen (3) und der Ansatz für die thermische Dehnung (5) führt von Gl. (13) auf:

$$u' = u'_{\text{el}} + u'_{\text{th}} \quad u'_{\text{th}} = \alpha_T T(x)$$

$$\begin{aligned} & \int_0^l \delta u(x) [EAu'_{\text{el}}(x)]' dx + \int_0^l \delta u(x) [EAu'_{\text{th}}]' dx + \\ & - \int_0^l \delta u(x) [EAu'_{\text{th}}(x)]' dx + \int_0^l \delta u(x) n(x) dx = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Die Terme, die aus der Temperaturbelastung resultieren, heben sich auf, sodass

$$\int_0^l \underset{v}{\delta u(x)} \underset{u'}{[EAu'_{el}(x)]}' dx + \int_0^l \delta u(x)n(x) dx = 0 \quad (15)$$

folgt. Die partielle Integration des ersten Summanden

$$\int u'v = uv - \int uv' \quad (16)$$

mit

$$u = [EAu'_{el}(x)] \quad v = \delta u(x) \quad u' = [EAu'_{el}(x)]' \quad v' = \delta u'(x) \quad (17)$$

führt auf

$$\int_0^l \delta u(x) [EAu'_{el}(x)]' dx = [\delta u(x)EAu'_{el}(x)]_{x=0}^{x=l} - \int_0^l \delta u'(x)EAu'_{el}(x) dx . \quad (18)$$



Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Das Einsetzen des Integrationsergebnisses (18) in Gl. (15) ergibt:

$$-\int_0^l \delta u'(x) EA u'_{el}(x) dx + [\delta u(x) EA u'_{el}(x)]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l \delta u(x) n(x) dx = 0 . \quad (19)$$

Der Zusammenhang (3) kann umgeformt werden zu

$$u'_{el}(x) = u'(x) - u'_{th}(x) . \quad (20)$$

Gl. (20) sowie der Zusammenhang zwischen den inneren Kräften und der elastischen Dehnung (2) werden in Gl. (19) eingesetzt:

$$-\int_0^l \delta u'(x) EA [u'(x) - u'_{th}(x)] dx + [\delta u(x) N(x)]_{x=0}^{x=l} + \int_0^l \delta u(x) n(x) dx = 0 . \quad (21)$$



Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Weiteres Umformen von Gl. (21) liefert:

$$\int_0^l \delta u'(x) E A u'(x) dx = \int_0^l \delta u'(x) E A u'_{\text{th}}(x) dx + [\delta u(x) P(x)]_{x=x_p} + \int_0^l \delta u(x) n(x) dx, \quad (22)$$

wobei die Normalkraft N den eingeprägten äußeren Kräften P an den Stellen $x = x_p$ entspricht. Gl. (22) stellt die irreduzible Verschiebungsgleichung in Variationsform für den Dehnstab mit Temperaturbelastung dar.

Nun werden Ansätze für das Verschiebungsfeld $u(x)$ und virtuelle Verschiebungsfeld $\delta u(x)$ gemacht:

$$u(x) = \mathbf{N}(x) \mathbf{u}^k \qquad \delta u(x) = \mathbf{N}(x) \delta \mathbf{u}^k, \quad (23)$$

wodurch sich für die Verzerrungsfelder

$$u'(x) = \mathbf{B}(x) \mathbf{u}^k \qquad \delta u'(x) = \mathbf{B}(x) \delta \mathbf{u}^k \quad (24)$$

ergibt. Dabei bezeichnen \mathbf{N} die Formfunktionsmatrix zur Approximation des Verschiebungsfelds, \mathbf{B} die Formfunktionsmatrix zur Approximation des Verzerrungsfelds und \mathbf{u}^k den Vektor der unbekanntenen Knotenverschiebungen.



Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Irreduzible Verschiebungsgleichung in diskretisierter Form:

$$\sum_{i=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^k{}^T \int_0^{l_i} \mathbf{B}^T(x) E A \mathbf{B}(x) dx \mathbf{u}^k = \left[\delta \mathbf{u}^k{}^T \mathbf{N}^T(x) \mathbf{P} \right]_{x=x_p} +$$
$$\sum_{i=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^k{}^T \int_0^{l_i} \mathbf{B}^T(x) E A \alpha_T T(x) dx + \sum_{i=1}^{nel} \delta \mathbf{u}^k{}^T \int_0^{l_i} \mathbf{N}^T(x) n(x) dx .$$

nel: Anzahl der Elemente



Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Aufgabenstellung:

- (i) Geben Sie die Verschiebungsdifferentialgleichung für den Dehnstab mit Temperaturbelastung an.
- (ii) Ermitteln Sie die irreduzible Verschiebungsgleichung in Variationsform für den Dehnstab mit veränderlicher Temperaturbelastung $T(x)$ entlang der Stabachse und geben Sie die diskretisierte schwache Form an.
- (iii) Berechnen Sie die konsistenten Knotenlasten für den Stab, der mit einem quadratischen Element räumlich diskretisiert wird (siehe Abb. 2 (a)), für eine linear veränderliche Temperaturbelastung (siehe Abb. 2 (b)) von

$$T(x) = T_0 \frac{x}{l} \quad \text{mit } T_0 = 200^\circ\text{C} .$$

Benutzen Sie für die Lösung der Integrale die Quadraturformel nach GAUSS.

- (iv) Ermitteln Sie die Verschiebungen der Knoten ② und ③ infolge der Temperaturerhöhung für den obigen Ansatz. Zeichnen Sie den Verschiebungsverlauf. Ist er exakt? Zeigen Sie, dass die Normalkraft im Stab verschwindet.



Lösung zu Teil (iii)

Da weder Einzelkräfte P noch Streckenlasten $n(x)$ am Stab angreifen, wird die rechte Seite \mathbf{P} ausschließlich durch den Temperaturbeitrag gebildet. Dass der Knoten ① unverschieblich gelagert ist, wird des Weiteren von Anfang an beim Aufstellen des Lastvektors berücksichtigt. Beides führt auf:

$$\mathbf{P} = \begin{Bmatrix} P_2 \\ P_3 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

$$= \int_0^l \begin{Bmatrix} B_2(x)EA\alpha_T T(x) \\ B_3(x)EA\alpha_T T(x) \end{Bmatrix} dx . \quad (27)$$

Der quadratische Verschiebungsansatz im Raum der Einheitskoordinate η lautet:

$$u^h(\eta) = N_2(\eta)u_2^k + N_3(\eta)u_3^k \quad (28)$$

$$= (1 - \eta^2) u_2^k + \frac{1}{2}\eta(1 + \eta) u_3^k . \quad (29)$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

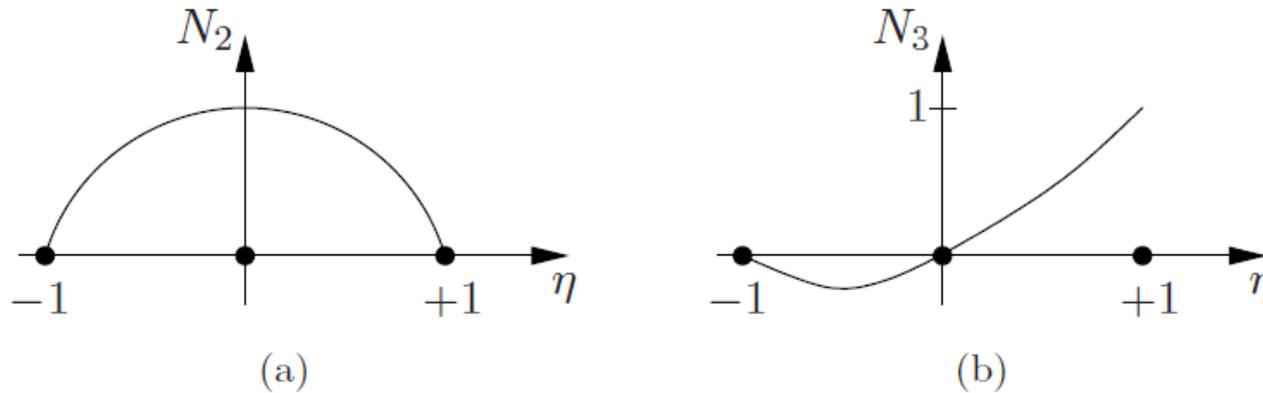


Abb. 1: (a) Formfunktion $N_2(\eta)$ (b) Formfunktion $N_3(\eta)$

Das Integral in Gl. (27) soll im Raum der Einheitskoordinate ausgewertet werden. Dazu muss bei der Ableitung der Formfunktionen die Kettenregel beachtet werden, d. h.

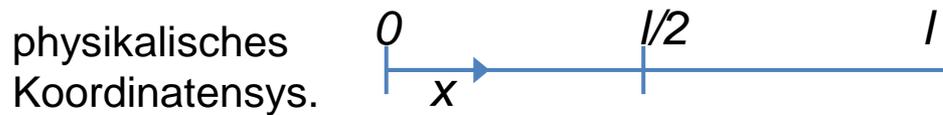
$$\hat{B}_2(\eta(x)) = \frac{dN_2}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \qquad \hat{B}_3(\eta(x)) = \frac{dN_3}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \qquad (30)$$

Die Ableitung der Formfunktionen nach der natürlichen Koordinate ist:

$$\frac{dN_2}{d\eta} = -2\eta \qquad \frac{dN_3}{d\eta} = \frac{1}{2} + \eta \qquad (31)$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Zur Berechnung des zweiten Faktors muss die Transformationsvorschrift zwischen dem Raum der physikalischen und natürlichen Koordinaten ermittelt werden. Die Transformation zwischen dem physikalischen Koordinatensystem x und dem Einheitskoordinatensystem η auf dem Intervall $[-1, +1]$ ist gegeben durch den isoparametrischen Ansatz:



$$\begin{aligned}x(\eta) &= \{N_2(\eta) \quad N_3(\eta)\} \begin{Bmatrix} x_2^k \\ x_3^k \end{Bmatrix} \\ &= (1 - \eta^2) \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} \eta (1 + \eta) l \\ &= \frac{1}{2} l - \frac{1}{2} l \eta^2 + \frac{1}{2} l \eta + \frac{1}{2} l \eta^2 \\ &= \frac{1}{2} l + \frac{1}{2} l \eta \\ &= \frac{1}{2} l (1 + \eta) .\end{aligned}$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Mit Gl. (36) kann die Ableitung $dx/d\eta$ angegeben werden. Dazu wird zunächst x nach η abgeleitet:

$$\frac{dx}{d\eta} = \frac{l}{2}, \quad (37)$$

und anschließend die Inverse gebildet:

$$\frac{d\eta}{dx} = \left(\frac{dx}{d\eta}\right)^{-1} \quad (38)$$

$$= \frac{2}{l}. \quad (39)$$

Mit Gl. (37) ist gleichzeitig auch die JACOBI-Matrix \mathbf{J} :

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} dx \\ d\eta \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$= \begin{bmatrix} l \\ 2 \end{bmatrix}, \quad (41)$$

wie auch ihre Determinante bekannt:

$$\det(\mathbf{J}) = \left| \begin{bmatrix} dx \\ d\eta \end{bmatrix} \right| \quad (42)$$

$$= \frac{l}{2}. \quad (43)$$

Koordinatentransformation des Lastvektors:

$$\hat{T}(\eta(x)) = \frac{T_0}{l} \left(\frac{1}{2}l(1 + \eta) \right) \quad (44)$$

$$= \frac{T_0}{2} (1 + \eta) . \quad (45)$$

Das Integral (27) wird in den Raum der Einheitskoordinate transformiert

$$\mathbf{P} = \int_{-1}^{+1} \left\{ \begin{array}{l} \hat{B}_2(\eta)EA\alpha_T\hat{T}(\eta) \\ \hat{B}_3(\eta)EA\alpha_T\hat{T}(\eta) \end{array} \right\} \det\mathbf{J} \, d\eta . \quad (46)$$

Das Einsetzen aller benötigten Terme liefert rein formal

$$\mathbf{P} = \frac{EA\alpha_T T_0}{2} \int_{-1}^{+1} \left\{ \begin{array}{l} -2(\eta^2 + \eta) \\ \eta^2 + \frac{3}{2}\eta + \frac{1}{2} \end{array} \right\} d\eta . \quad (47)$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Die Auswertung des Integrals in Gl. (47) soll mit der GAUSSschen Quadraturformel

$$\int_{-1}^{+1} \tilde{\mathbf{P}}(\eta) \, d\eta = \sum_{i=1}^{n_{\text{int}}} \tilde{\mathbf{P}}(\eta_i) w_i . \quad (48)$$

erfolgen. Im Integranden treten quadratische Polynome auf, was eine 2-Punkt GAUSS Quadratur erfordert:

$$\int_{-1}^{+1} \tilde{\mathbf{P}}(\eta) \, d\eta = \sum_{i=1}^2 \tilde{\mathbf{P}}(\eta_i) w_i \quad (49)$$

$$= \tilde{\mathbf{P}}(\eta_1) w_1 + \tilde{\mathbf{P}}(\eta_2) w_2 . \quad (50)$$

Die Stützstellen und Wichtungsfaktoren lauten wie folgt:

$$\eta_1 = -\frac{1}{\sqrt{3}} \quad w_1 = 1 \quad \eta_2 = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad w_2 = 1 . \quad (51)$$



Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Die Auswertung der Integrale in Gl. (47) folgt somit:

$$\mathbf{P} = \frac{EA\alpha_T T_0}{2} \left\{ \begin{array}{l} -2 \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \\ \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \frac{3}{2} \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{2} \right] \end{array} \right\} \quad (52)$$

$$= EA\alpha_T T_0 \left\{ \begin{array}{l} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} \end{array} \right\} . \quad (53)$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Aufgabenstellung:

- (i) Geben Sie die Verschiebungsdifferentialgleichung für den Dehnstab mit Temperaturbelastung an.
- (ii) Ermitteln Sie die irreduzible Verschiebungsgleichung in Variationsform für den Dehnstab mit veränderlicher Temperaturbelastung $T(x)$ entlang der Stabachse und geben Sie die diskretisierte schwache Form an.
- (iii) Berechnen Sie die konsistenten Knotenlasten für den Stab, der mit einem quadratischen Element räumlich diskretisiert wird (siehe Abb. 2 (a)), für eine linear veränderliche Temperaturbelastung (siehe Abb. 2 (b)) von

$$T(x) = T_0 \frac{x}{l} \quad \text{mit } T_0 = 200^\circ\text{C} .$$

Benutzen Sie für die Lösung der Integrale die Quadraturformel nach GAUSS.

- (iv) Ermitteln Sie die Verschiebungen der Knoten ② und ③ infolge der Temperaturerhöhung für den obigen Ansatz. Zeichnen Sie den Verschiebungsverlauf. Ist er exakt? Zeigen Sie, dass die Normalkraft im Stab verschwindet.



Lösung zu Teil (iv)

Zur Bestimmung der Knotenverschiebungen u_2^k und u_3^k muss die Steifigkeitsmatrix \mathbf{K} ermittelt werden:

$$\mathbf{K} = \int_0^l \mathbf{B}^T(x) E A \mathbf{B}(x) dx \quad \mathbf{K} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} . \quad (54)$$

Auch diese Integrale werden wieder in den Raum der Einheitskoordinate transformiert:

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{+1} \hat{\mathbf{B}}^T(\eta) E A \hat{\mathbf{B}}(\eta) \det \mathbf{J} d\eta \quad (55)$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Die Auswertung von Gl. (55) erfolgt, indem alle zuvor ermittelten Zusammenhänge eingesetzt werden:

$$\mathbf{K} = \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} \frac{dN_2}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \\ \frac{dN_3}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \end{Bmatrix} EA \begin{Bmatrix} \frac{dN_2}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} & \frac{dN_3}{d\eta} \frac{d\eta}{dx} \end{Bmatrix} \det \mathbf{J} d\eta \quad (56)$$

$$= EA \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \det \mathbf{J} \int_{-1}^{+1} \begin{Bmatrix} \frac{dN_2}{d\eta} \\ \frac{dN_3}{d\eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{dN_2}{d\eta} & \frac{dN_3}{d\eta} \end{Bmatrix} d\eta \quad (57)$$

$$= EA \left(\frac{d\eta}{dx} \right)^2 \left(\frac{dx}{d\eta} \right) \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} \left(\frac{dN_2}{d\eta} \right)^2 & \frac{dN_2}{d\eta} \frac{dN_3}{d\eta} \\ \text{sym.} & \left(\frac{dN_3}{d\eta} \right)^2 \end{bmatrix} d\eta \quad (58)$$

$$= \frac{2EA}{l} \int_{-1}^{+1} \begin{bmatrix} 4\eta^2 & -\eta - 2\eta^2 \\ \text{sym.} & \eta^2 + \eta + \frac{1}{4} \end{bmatrix} d\eta \quad (59)$$

$$= \begin{bmatrix} K_{22} & K_{23} \\ \text{sym.} & K_{33} \end{bmatrix} \cdot \quad (60)$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Es treten wiederum Polynome vom Grad zwei im Integranden auf, wodurch wiederum die 2-Punkt GAUSS Quadratur verwendet wird:

$$\int_{-1}^{+1} \tilde{\mathbf{K}}(\eta) d\eta = \sum_{i=1}^2 \tilde{\mathbf{K}}(\eta_i) w_i \quad (61)$$

$$= \tilde{\mathbf{K}}(\eta_1) w_1 + \tilde{\mathbf{K}}(\eta_2) w_2 . \quad (62)$$

Somit ergibt sich:

$$K_{22} = \frac{8EA}{l} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 \right] \quad (63)$$

$$= \frac{16 EA}{3 l} \quad (64)$$

$$K_{33} = \frac{2EA}{l} \left[\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) + \frac{1}{4} \right] \quad (65)$$

$$= \frac{7 EA}{3 l} \quad (66)$$

$$K_{23} = \frac{2EA}{l} \left[-2 \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \right) - 2 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2 - \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right] \quad (67)$$

$$= -\frac{8 EA}{3 l} , \quad (68)$$

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Steifigkeitsmatrix:

$$\mathbf{K} = \frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ \text{sym.} & \frac{7}{3} \end{bmatrix}$$

Das resultierende lineare Gleichungssystem $\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{P}$

$$\frac{EA}{l} \begin{bmatrix} \frac{16}{3} & -\frac{8}{3} \\ \frac{8}{3} & \frac{7}{3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_2^k \\ u_3^k \end{Bmatrix} = EA\alpha_T T_0 \begin{Bmatrix} -\frac{2}{3} \\ \frac{5}{6} \end{Bmatrix} \quad (70)$$

führt auf folgende Knotenverschiebungen:

$$u_3^k = \frac{1}{2} \alpha_T T_0 l \quad (71)$$

$$u_2^k = \frac{1}{8} \alpha_T T_0 l . \quad (72)$$



Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Das Einsetzen der Knotenverschiebungen in den quadratischen Ansatz liefert das Verschiebungsfeld:

$$u^h(\eta) = N_2(\eta)u_2^k + N_3(\eta)u_3^k \quad (73)$$

$$= \frac{1}{8} (1 - \eta^2) \alpha_T T_0 l + \frac{1}{4} \eta (1 + \eta) \alpha_T T_0 l . \quad (74)$$

Der Verlauf ist in Abb. 2 dargestellt.

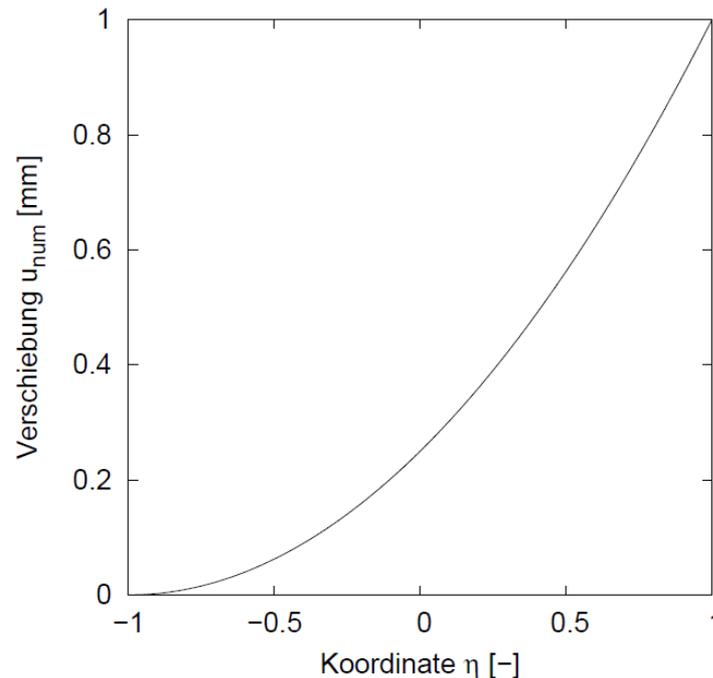


Abb. 2: Verschiebungsverlauf im Dehnstab

Schwache Form und konsistente Knotenlasten

Die Normalkraft $N(x)$ folgt nach Gl. (6): $N(x) = EA(\varepsilon(x) - \varepsilon_{\text{th}}(x))$

und wird in den Raum der natürlichen Koordinate transformiert:

$$\hat{N}(\eta) = EA(\hat{\varepsilon}(\eta) - \hat{\varepsilon}_{\text{th}}(\eta)) .$$

Die Gesamtdehnung ergibt sich aus:

$$\begin{aligned}\hat{\varepsilon}(\eta) &= B_2(\eta) \frac{d\eta}{dx} u_2^k + B_3(\eta) \frac{d\eta}{dx} u_3^k \\ &= -\frac{4\eta}{l} u_2^k + \left(\frac{1}{l} + \frac{2\eta}{l} \right) u_3^k \\ &= \frac{1}{2} \alpha_T T_0 (1 + \eta) .\end{aligned}$$

Die thermische Dehnung folgt zu:

$$\hat{\varepsilon}_{\text{th}}(\eta) = \frac{\alpha_T T_0}{2} (1 + \eta) .$$

Das Einsetzen beider Dehnungen in Gl. (76) liefert:

$$\begin{aligned}\hat{N}(\eta) &= EA \left(\frac{1}{2} \alpha_T T_0 (1 + \eta) - \frac{\alpha_T T_0}{2} (1 + \eta) \right) \\ &= 0 .\end{aligned}$$



Abgabe bis 17.06.2020

Hausübung 3

Aufgabe 1: Kubischer Verschiebungsansatz

Werten Sie die Integrale für die Steifigkeitsmatrix mit kubischem Verschiebungsansatz in Aufgabe 3 der 2. Hausübung mit Hilfe des GAUSSschen Integrationsverfahrens aus, falls Sie das Quadraturverfahren mit einem Integrationspunkt weniger ausführen, als es der Polynomgrad des Integranden erfordern würde.

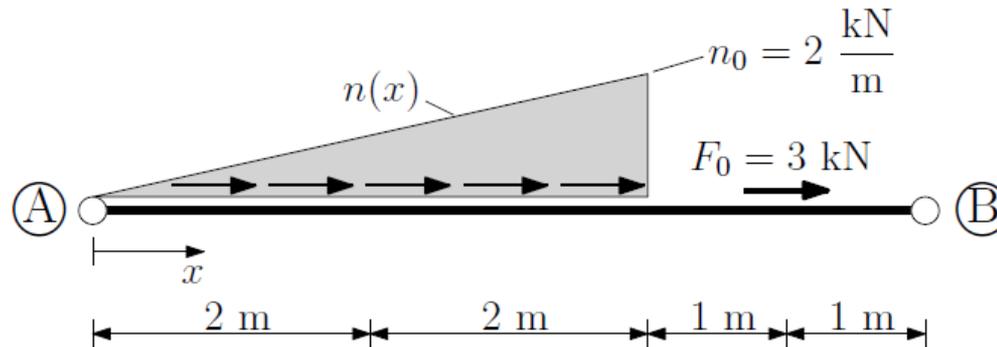
- 1) Was beobachten Sie?
- 2) Lässt sich das System der Gleichung für die Knotenverschiebungen eindeutig lösen?
- 3) Ist die Steifigkeitsmatrix regulär?
- 4) Sind die Zeilen der Steifigkeitsmatrix linear unabhängig?
- 5) Ziehen Sie hieraus Schlussfolgerungen.



Hausübung 3

Aufgabe 2: Konsistente Knotenlasten

Berechnen Sie die konsistenten Knotenlasten für den abgebildeten Stab (A)-(B) unter der skizzierten Streckenlast $n(x)$ und der Einzelkraft F_0 . Der Angriffspunkt der Kraft F_0 liegt 1 m links vom Stabende (B).



- 1)
 - i) Der Dehnstab wird durch ein lineares Element diskretisiert.
 - ii) Die Diskretisierung erfolgt mit zwei gleichlangen linearen Elementen.
 - iii) Es wird ein quadratisches Element verwendet.
 - iv) Was ergibt sich als Lastvektor für ein kubisches Element?
- 2)
 - i) Berechnen Sie den Verschiebungs- und Spannungsverlauf für den Dehnstab, wenn er am rechten Ende frei und am linken Ende unverschieblich gehalten ist für die vier obigen Diskretisierungen.
 - ii) Vergleichen Sie die FE-Näherungslösung im Arbeitspunkt 2) i) mit der exakten Lösung für den Verschiebungs- und Spannungsverlauf in allen gewählten FE-Diskretisierungen.

