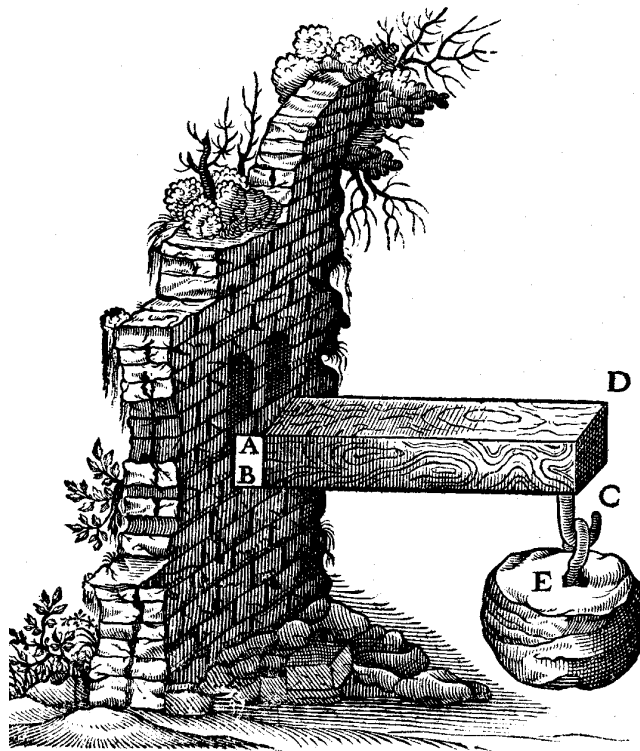


VORLESUNG

TECHNISCHE MECHANIK

für

Studierende der Elektrotechnik und Mechatronik



Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller

Institut für Mechanik im Fachbereich 15
der Universität Kassel
Mönchebergstraße 7
2. OG / Raum 2520
34109 Kassel

VORLESUNG

TECHNISCHE MECHANIK

für

Studierende der Elektrotechnik und Mechatronik

TM 1

Kapitel 1 - 6

Prof. Dr.-Ing. A. Matzenmiller

Institut für Mechanik im Fachbereich 15
der Universität Kassel
Mönchebergstr. 7
34125 Kassel
Zimmer 2520

SoSe 2021

Inhaltsverzeichnis

TEIL I: Statik starrer Körper

1	Statik starrer Körper	1
1.1	Einleitung	1
1.1.1	Übersicht	1
1.1.2	Axiome	2
1.2	Hilfsmittel aus der Vektorrechnung	3
1.2.1	Vektoraddition	3
1.2.2	Multiplikation mit einem Skalar	4
1.2.3	Skalarprodukt zweier Vektoren	5
1.2.4	Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)	6
1.2.5	Spatprodukt (gemischtes Produkt)	8
2	Kräfte und Momente	10
2.1	Der Begriff der Kraft und des Moments	10
2.1.1	Einführung der Kraft	10
2.1.2	Einteilung der Kräfte	11
2.1.3	Kräftepaar und dessen Wirkung - Vorbemerkungen zum Moment	11
2.1.4	Zur Bedeutung eines freien Vektors	12
2.2	Moment (Drehmoment)	14
2.2.1	Definition des Moments	14
2.2.2	Berechnung des Moments aus den Komponenten des Orts- und Kraftvektors	15
2.3	Äquivalente Kraftsysteme	17
2.4	Gleichgewichtsbedingungen	19
2.5	Ebene Statik	21
2.6	Grundaufgaben der ebenen Statik	22
2.6.1	Erste Grundaufgabe: Reduktion	22
2.6.2	Zweite Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft	27
3	Kräftemittelpunkt, Schwerpunkt und Massenmittelpunkt	32
3.1	Schwerpunkt einer Gruppe von Einzelmassen	34
3.2	Schwerpunkt eines Körpers	36
3.3	Flächenschwerpunkt	39
3.4	Schwerpunkt einer Linie	43
3.5	Schwerpunkt einer Linienlast	44
4	Reaktionskräfte in Systemen starrer Körper	46
4.1	Auflagerarten	46
4.2	Statische Bestimmtheit	47
4.3	Bestimmung der Auflagerreaktion	51
4.4	Reaktionskräfte in Systemen starrer Körper	57

5	Schnittgrößen in Stäben und Balken	73
	5.1 Schnittgrößenvereinbarungen in Stäben, Balken und Bögen	73
	5.2 Schnittgrößenermittlung im geraden Stab unter ebener Belastung durch Gleichgewichts- bildung am Teilstab	76
	5.3 Differentialgleichungen für das Gleichgewicht des Stabs	87
	5.4 Statische Randbedingungen	89
	5.5 Berechnung der Schnittgrößen aus den Differentialgleichungen für das GGW	90
	5.6 Schnittgrößen in Stabsystemen (Fachwerke und Rahmen).....	96
6	Reibung	103
	6.1 Haft- und Gleitreibung	103
	6.2 Seilreibung.....	107
3		
TEIL II: Dynamik des Massenpunktes und der starren Körper		
7	Dynamik des Massenpunkts	111
	7.1 Geschwindigkeit und Beschleunigung.....	111
	7.2 Kinematik der Punktbewegung.....	112
	7.3 Bewegungsgesetz (Impulssatz)	117
	7.4 Bewegungswiderstände	121
	7.5 Arbeit, Energie und Leistung für die geradlinige Bewegung eines Massenpunkts	122
	7.5.1 Potentielle Energie und Energieerhaltungssatz.....	123
	7.5.2 Konservative Kräfte	126
	7.5.3 Nicht konservative Kräfte.....	129
	7.5.4 Arbeitssatz	132
8	Ein-Massen-Schwinger	135
	8.1 Bewegungsgleichung des harmonischen Schwingers	135
	8.2 Ungedämpfte Eigenschwingung.....	136
	8.3 Freie gedämpfte Schwingung.....	139
	8.3.1 Starke Dämpfung ($D > 1$).....	140
	8.3.2 Kritische Dämpfung ($D = 1$)	142
	8.3.3 Schwache Dämpfung ($D < 1$)	144
	8.4 Energiebetrachtung	147
	8.5 Erzwungene Schwingung	149
	8.5.1 Lineare Erregerkraft.....	150
	8.5.2 Harmonische Erregerkraft.....	151
9	Dynamik des starren Körpers	156
	9.1 Kinematik der Starrkörperbewegung.....	156
	9.2 Momentanpol der allgemeinen ebenen Bewegung.....	160
	9.3 Impuls- und Drallsatz.....	164
	9.4 Massenträgheitsmomente des starren Körpers	166

9.5 Ebene Bewegung des symmetrischen Starrkörpers	171
9.6 Drehung um eine raumfeste Achse	175
9.7 Energiesatz für die Bewegung des starren Körpers	184
9.8 Dynamik der Systeme starrer Körper	192

Teil III: Elastostatik und Festigkeitslehre

10 Einachsiger Spannungs- und Deformationszustand im Dehnstab.....	199
10.1 Spannungen und Gleichgewichtsbeziehung in längsbelasteten Stäben	199
10.2 Dehnung und geometrische (kinematische) Beziehung.....	201
10.3 Elastizitätsbeziehung	203
10.4 Verschiebungsdifferentialgleichung des Dehnstabs	205
11 Ebene Elastostatik	216
11.1 Zum Begriff der Schubspannung.....	216
11.2 Ebener Spannungszustand und Spannungstensor (CAUCHY-Spannungskonzept von 1824)	217
11.3 Spannungstransformation	225
11.4 Hauptspannungen und Hauptschubspannung	226
11.5 Lokale Gleichgewichtsbedingungen für ebene Spannungsaufgaben	233
11.6 Ebener Verzerrungszustand.....	236
11.7 Elastizitätsbeziehung	240
12 Biegung des geraden Balkens.....	246
12.1 Reine Biegung	246
12.2 Verschiebungsdifferentialgleichung des Balkens in der Technischen Biegetheorie	257
12.3 Berechnung von Biegelinien.....	261
12.4 Biegelinie für Mehrbereichsaufgaben.....	267
12.5 Zusammengesetzte Beanspruchung aus Biegung und Längskraft	271
13 Torsion des geraden Stabs mit Kreisquerschnitt.....	274
13.1 Reine Torsion	274
13.2 Gleichgewicht des Torsionsstabs.....	276
13.3 Technische Torsion	277
14 Arbeitsprinzip	281
14.1 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für Starrkörpersysteme	282
14.1.1 Einzelner Starrkörper	282
14.1.2 Gebundenes System von starren Körpern	286
14.2 Prinzip der virtuellen Verschiebungen für elastische Feder-Masse-Systeme.....	290
14.3 Herleitung des Prinzips der virtuellen Verschiebungen für den Dehnstab.....	297
14.3.1 Problematik und Motivation	297
14.3.2 Prinzip der virtuellen Verschiebung für kontinuierliche, verformbare Körper am Beispiel des Dehnstabs	298

1 Statik starrer Körper

1.1 Einleitung

1.1.1 Übersicht

- Die Mechanik
- ist die Lehre von den Bewegungen und Verformungen von Körpern unter dem Einfluss von Kräften
 - ist das älteste Teilgebiet der Physik
 - reicht bis ins Altertum zurück (Wortprägung durch ARISTOTELES 384-322 v.Chr.: „die Kunst, Maschinen zu bauen“)

Mit **technischer Mechanik** (TM) bezeichnet man die an technischen Problemen orientierte Darstellung des Lehrstoffs der Mechanik in den Ingenieurwissenschaften, wo vor allem die Theorie des Kontinuums für die Berechnung von Bauteilen zugrunde gelegt wird.

Die Mechanik kann eingeteilt werden

- nach dem Aggregatzustand der Körper:
 - Strömungsmechanik (Flüssigkeiten, Gase)
 - Festkörpermechanik
- nach der Problemstellung:
 - Kinematik: beschreibt den geometrischen Bewegungsablauf
 - Dynamik: ist die Lehre von den Kräften und wird unterteilt in:
 - * Kinetik: Lehre von den bestehenden Beziehungen zwischen Kräften und Bewegungen
 - * Statik: Lehre vom Gleichgewicht der Kräfte ruhender Körper

In der Festkörpermechanik vorkommende Körper (sie sind im Gegensatz zum Punkt räumlich ausgedehnt) werden unterschieden in

- starre Körper: Abstände der Körperpunkte werden als unveränderlich angenommen
(Stereostatik und Starrkörperdynamik; Lehrstoff der TM I)
- elastische Körper: können sich verformen
(Elastostatik; Lehrstoff der TM II)

1.1.2 Axiome

Die Gesetze der Mechanik können auf ein paar wenige Axiome, d.h. nicht beweisbare Erfahrungstatsachen zurückgeführt werden. Die Kraft betreffenden Axiome sind:

i) Gleichgewichtsaxiom:

Zwei an einem Punkt eines Körpers angreifende Kräfte sind im Gleichgewicht, wenn sie entgegengesetzt gleich groß sind.

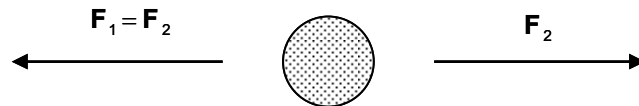
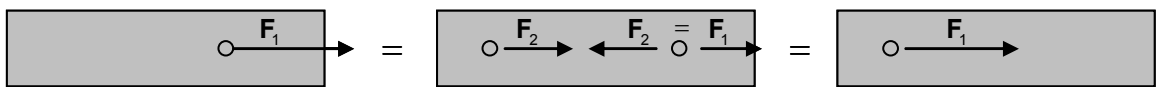


Abb. 1.1-1: Körper mit entgegengesetzten Kräften

ii) Axiom von der Linienflüchtigkeit der Kraft:

Der Angriffspunkt der Kraft darf auf der Wirkungsline beliebig verschoben werden.

Körper mit einwirkender Kraft F_1 und Gleichgewichtsgruppe F_2



(Gleichgewichtsgruppe)

Abb. 1.1-2: Ideenskizze zur Linienflüchtigkeit der Kraft

Die Gleichgewichtsgruppe hat keine Auswirkung auf das äußere Kräftespiel eines Körpers.

iii) Axiom von der Gleichheit von Wirkung ("actio") und Gegenwirkung ("reactio") - Reaktionsprinzip (Gegenwirkungsprinzip, Wechselwirkungsprinzip):

Zu einer Kraft ist stets eine gleichgroße entgegengesetzte Kraft auf derselben Wirkungsline vorhanden.

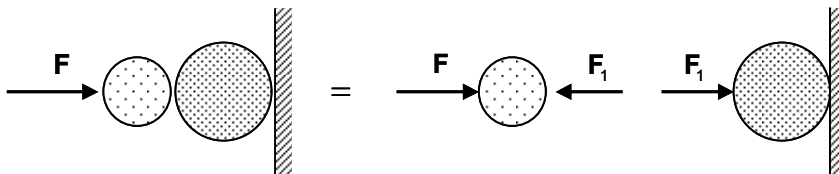
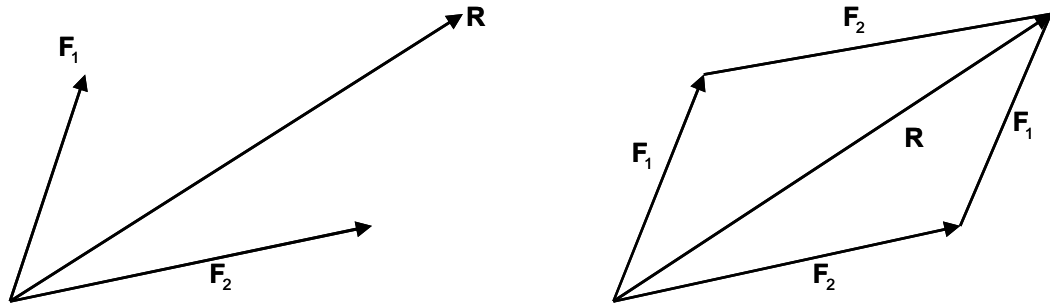


Abb. 1.1-3: Zwei Körper mit Last- und Reaktionskräften

iv) Axiom vom Kräfteparallelogramm:

Die Wirkung zweier an einem Punkt angreifenden Kräfte F_1 und F_2 ist statisch äquivalent der Wirkung einer Einzelkraft (Resultierenden) R gemäß folgender Konstruktion:



Angriffspunkt und Richtung der Kräfte

Kräfteparallelogramm

$$\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{R} = \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_1$$

Abb. 1.1-4: Kräfteparallelogramm

1.2 Hilfsmittel aus der Vektorrechnung

Das geeignete mathematische Hilfsmittel zur Beschreibung von Kräften und Momenten oder zur Darstellung eines Punkts (Orts) im Raum ist die Vektorrechnung im dreidimensionalen euklidischen Raum, denn ein Vektor, genauer ein Pfeilvektor oder geometrischer Vektor ist eine gerichtete Größe mit bestimmtem Betrag, bestimmter Richtung und bestimmter Orientierung.

Übliche Bezeichnungen für Vektoren im Schrifttum sind

- Fettdruck: $\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ (in dieser Vorlesung TM)
- übergesetzter Pfeil: $\vec{v}, \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$
- Unterstreichung: $\underline{v}, \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$
- Fraktur- oder Sütterlinbuchstaben (veraltet)

Länge des Vektors $\mathbf{a}$: $|\mathbf{a}| = a$

Einführung der Vektoroperationen:

1.2.1 Vektoraddition

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

Die Addition von Vektoren ist kommutativ: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$

und assoziativ: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$

Neutrales Element **0** mit der Eigenschaft

$$\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$$

Es gilt:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$$

Subtraktion:

$$\mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

1.2.2 Multiplikation mit einem Skalar

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{a} = \mathbf{a} \lambda$$

$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \mathbf{e}$, wobei **e** ein **Einheitsvektor** mit der Länge "1" in Richtung von **a** ist.

Komponentendarstellung eines Vektors anhand von Vektoraddition und Multiplikation mit einem Skalar:

Einführung einer orthonormierten Basis mit Basisvektoren:

$$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$$

und Komponenten:

$$v_x, v_y, v_z$$

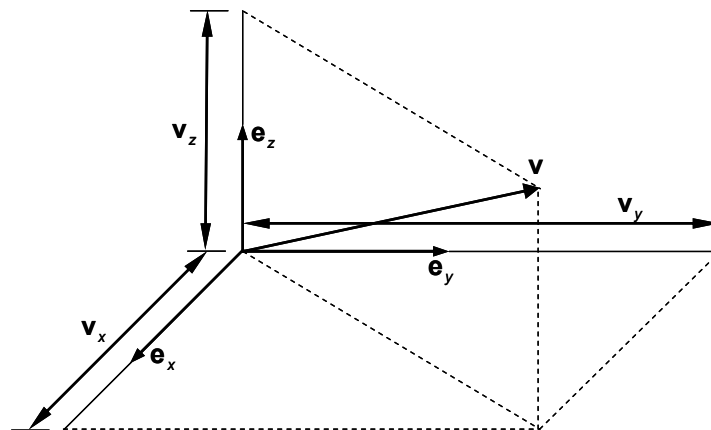


Abb. 1.2-1: Vektor mit Basissystem

Basis = System linear unabhängiger Vektoren $\mathbf{e}_x$, $\mathbf{e}_y$ und $\mathbf{e}_z$ mit der Eigenschaft, dass im (dreidimensionalen) Raum gilt:

$$\alpha_1 \mathbf{e}_x + \alpha_2 \mathbf{e}_y + \alpha_3 \mathbf{e}_z = \mathbf{0},$$

wobei die Gleichung als einzige Lösung $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = 0$ hat.

orthonormierte Basis = System orthogonal zueinander stehender Vektoren mit der Länge "1"

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{e}_x + v_y \mathbf{e}_y + v_z \mathbf{e}_z =: (v_x, v_y, v_z) = \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix}$$

1.2.3 Skalarprodukt zweier Vektoren

Def.: Unter dem Skalarprodukt (inneres Produkt) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ versteht man den Skalar ("Zahl") c

$$c = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \cos \alpha,$$

wobei α der eingeschlossene Winkel zwischen $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ ist.

Sonderfälle: (1) $\mathbf{a} = \mathbf{b}$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$, da $\alpha = 0^\circ$

(2) $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ oder $\mathbf{b} = \mathbf{0}$: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$

(3) Ist z.B. $|\mathbf{b}| = 1$, d.h. $\mathbf{b} = \mathbf{e}$, so ist: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{e} = |\mathbf{a}| \cos \alpha$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{e}$ ist also die Länge der (senkrechten) Projektion von $\mathbf{a}$ auf die durch $\mathbf{e}$ bestimmte Gerade.

Def.: Voraussetzung: $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$

Falls $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ist, so sind $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ **senkrecht (orthogonal)** zueinander ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$).

Rechenregeln: (1) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ (kommutativ)

(2) $c(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} \cdot \mathbf{b})$

(3) $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

Berechnung des skalaren Produkts aus den Vektorkomponenten

Geg.: Orthonormiertes Basissystem mit Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z) \cdot (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z)$$

$$\begin{aligned}
&= a_x b_x \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_x)}_{=1} + a_x b_y \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_y)}_{=0} + a_x b_z \underbrace{(\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{e}_z)}_{=0} \\
&+ a_y b_x \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_x)}_{=0} + a_y b_y \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_y)}_{=1} + a_y b_z \underbrace{(\mathbf{e}_y \cdot \mathbf{e}_z)}_{=0} \\
&+ a_z b_x \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_x)}_{=0} + a_z b_y \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_y)}_{=0} + a_z b_z \underbrace{(\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z)}_{=1} \\
\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} &= a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z
\end{aligned}$$

Beispiel: Länge $a = |\mathbf{a}|$ des Vektors $\mathbf{a}$: $a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$

1.2.4 Vektorprodukt (äußeres Produkt, Kreuzprodukt)

(wichtig für die Darstellung des Drehmoments und des Drehimpulses [Drall] in der Mechanik)

Def.: Unter dem **Vektorprodukt** $\mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$ zweier Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ versteht man den Vektor $\mathbf{c}$ mit den folgenden Eigenschaften:

- (1) $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ bilden ein Rechtssystem (rechte Handregel)
- (2) $\mathbf{c}$ ist senkrecht zu $\mathbf{a}$ und senkrecht zu $\mathbf{b}$.
- (3) $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha$, wobei $\alpha = \angle(\mathbf{a}, \mathbf{b})$

Hinweise: - Das Vektorprodukt $\mathbf{c}$ ist eine vektorielle Größe.
 - Der Betrag des Vektorprodukts $\mathbf{c}$ ist gleich dem Flächeninhalt A des von den Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ aufgespannten Parallelogramms.

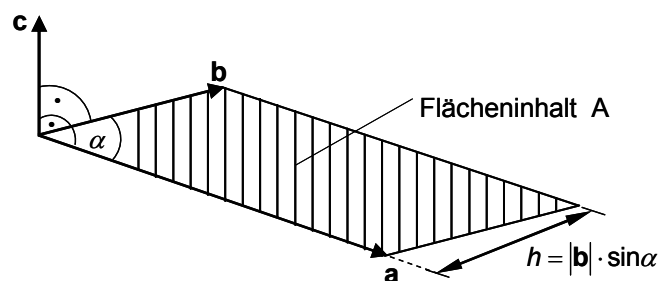


Abb. 1.2-2: Veranschaulichung des Vektorprodukts

Fläche: $A = (\text{Grundlinie}) \cdot (\text{Höhe}) = |\mathbf{a}| h = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \alpha = |\mathbf{c}|$

- Ergibt das Kreuzprodukt $\mathbf{c}$ aus $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ den Nullvektor $\mathbf{0}$ und ist $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ und $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$, so sind die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ zueinander parallel oder gegenseitig parallel.

Sonderfälle:

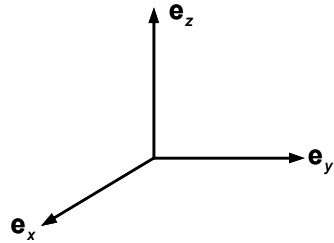


Abb. 1.2-3: Orthonormierte Basis

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x = \mathbf{0} \quad \text{etc.}$$

$$\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y = \mathbf{e}_z, \quad \mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z = \mathbf{e}_x, \quad \mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x = \mathbf{e}_y$$

Rechenregeln:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$$

$$(\mathbf{c} \mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (\mathbf{c} \mathbf{b}) = \mathbf{c} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

Berechnung des Vektorprodukts aus den Komponenten im orthonormierten Basissystem

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{e}_x + a_y \mathbf{e}_y + a_z \mathbf{e}_z) \times (b_x \mathbf{e}_x + b_y \mathbf{e}_y + b_z \mathbf{e}_z) \\ &= a_x b_x \underbrace{(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_x)}_{=\mathbf{0}} + a_x b_y \underbrace{(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_y)}_{=\mathbf{e}_z} + a_x b_z \underbrace{(\mathbf{e}_x \times \mathbf{e}_z)}_{=-\mathbf{e}_y} \\ &\quad + a_y b_x \underbrace{(\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_x)}_{=-\mathbf{e}_z} + a_y b_y \underbrace{(\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_y)}_{=\mathbf{0}} + a_y b_z \underbrace{(\mathbf{e}_y \times \mathbf{e}_z)}_{=\mathbf{e}_x} \\ &\quad + a_z b_x \underbrace{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_x)}_{=\mathbf{e}_y} + a_z b_y \underbrace{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_y)}_{=-\mathbf{e}_x} + a_z b_z \underbrace{(\mathbf{e}_z \times \mathbf{e}_z)}_{=\mathbf{0}} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{e}_x + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{e}_y + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{e}_z \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

Merkregel: Das Vektorprodukt lässt sich formal mit Hilfe der Regel von LAPLACE für die Auswertung der Determinante einer quadratischen, dreireihigen Matrix durch Entwicklung nach der ersten Zeile berechnen.

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

1.2.5 Spatprodukt (gemischtes Produkt)

Def.: Unter dem **Spatprodukt** (gemischtes Produkt) $[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}]$ dreier Vektoren $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ versteht man den Skalar c

$$c = [\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = |\mathbf{u}| \cdot |\mathbf{v}| \cdot |\mathbf{w}| \cdot \sin \alpha \cdot \cos \beta,$$

wobei α der eingeschlossene Winkel zwischen $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ ist und

β der eingeschlossene Winkel zwischen $\mathbf{w}$ und dem Vektorprodukt $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$.

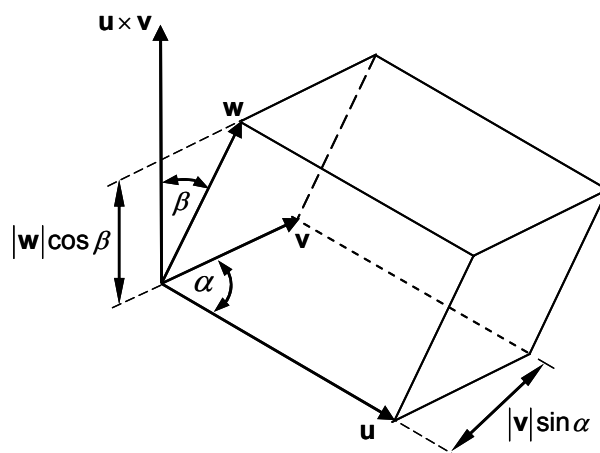


Abb. 1.2-4: Veranschaulichung des Spatprodukts

Hinweise:

- 1) Der Betrag des Spatprodukts ist gleich dem Volumen des von den drei Vektoren aufgespannten Parallelepipeds.
- 2) Das Spatprodukt ist positiv, wenn $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ ein Rechtssystem bilden.
- 3) Bei zyklischer Vertauschung der Vektoren gilt:

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{u}] = [\mathbf{w}, \mathbf{u}, \mathbf{v}]$$

$$\Leftrightarrow (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w} = (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \cdot \mathbf{u} = (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{v}$$

Die Reihenfolge der Multiplikationen ist vertauschbar

$$\mathbf{u} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) = (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{w}$$

- 4) Bei antizyklischer Vertauschung wechselt das Vorzeichen

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = -[\mathbf{u}, \mathbf{w}, \mathbf{v}]$$

- 5) Sind die Vektoren $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ und $\mathbf{w}$ in einem orthonormalen Basensystem dargestellt, dann lässt sich das Spatprodukt aus der Rechenvorschrift

$$[\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}] = \det \begin{vmatrix} u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \\ w_x & w_y & w_z \end{vmatrix}$$

mit Hilfe der Berechnung einer Determinanten ermitteln.

Beispiel: Flächeninhalt A des von den beiden Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ und } \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{aufgespannten Parallelogramms}$$

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \\ -1 \cdot 3 + 2 \cdot 2 \\ 1 \cdot 0 - 2(-5) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15 \\ +1 \\ +10 \end{pmatrix}$$

$$A = |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = \sqrt{(-15)^2 + 1^2 + 10^2} = \sqrt{326} = 18,1$$

2 Kräfte und Momente

2.1 Der Begriff der Kraft und des Moments

2.1.1 Einführung der Kraft

Alle materiellen Körper besitzen Masse mit den Eigenschaften

- der **Schwere** (Anziehung, Gravitation, Gewicht)
- der **Trägheit** (Widerstand gegen Änderung des Bewegungszustands)

Materielle Körper treten mit der äußeren Welt in eine Wechselwirkung, die durch die **Kraft** dargestellt und gemessen wird.

Die Kraft ist eine physikalische Größe und durch

Betrag (Größe, Intensität) Richtung Orientierung und Angriffspunkt	}	Kraftvektor
---	---	-------------

gekennzeichnet.

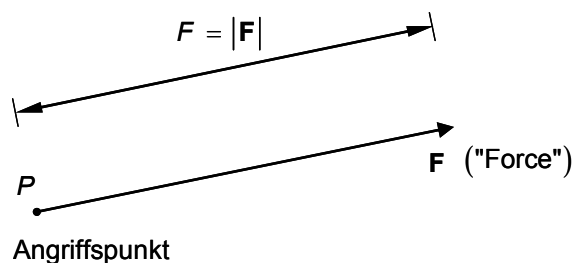


Abb. 2.1-1: Darstellung der Kraft

Hinweis: Vektoren werden in dieser TM-Vorlesung in Fettschrift geschrieben anstelle der Kennzeichnung durch einen Pfeil über dem Symbol des Kraftvektors $\mathbf{F}$, wie in der Mathematik üblich.

Die **Einheit** der Kraft ist das Newton: $1 \text{ N} = \frac{1}{9,80665} \text{ kp} = 1 \frac{\text{kg m}}{\text{sec}^2}$

Ein Newton (1 N) verleiht einem Kilogramm (1 kg) Masse die Beschleunigung von $1 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$.

Wirkungslinie: Die Gerade, auf der sich der Kraftvektor befindet.

Die Kraft ist ein **gebundener** Vektor, da sie nicht parallel zur Wirkungslinie verschoben werden darf.

Einteilung der Kräfte

Die Kräfte können nach verschiedenen Kriterien unterschieden werden:

- nach der **Verteilung**:

Volumenkräfte:	Gewichtskraft Elektrische Kraft Magnetische Kraft
Flächenkräfte:	Flüssigkeitsdruck Kontaktkräfte, Dichtungsflächenpressung
Linienkräfte:	Schneidenlast
Punktkräfte: (Einzelkraft):	Idealisierung z.B. der Kraft des Stuhlbeins auf dem Fußboden
- nach der **Ursache**:

Eingeprägte Kräfte:	Gewicht, Anziehungskraft
Reaktionskräfte:	Kräfte der Auflager nach dem Lösen der Bindungen
- nach dem **Ort ihres Wirkens**:

Äußere Kräfte:	Lasten: eingeprägte Kräfte
Innere Kräfte:	Schnittgrößen im Innern des Körpers

2.1.2 Kräftepaar und dessen Wirkung - Vorbemerkungen zum Moment

Greifen zwei zueinander parallele, entgegengesetzte Kräfte an einem Körper an, so versuchen diese, ihn um einen Punkt zu verdrehen. Sie werden als **Kräftepaar** bezeichnet. Die resultierende Kraft des Kräftepaars

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = \mathbf{0}$$

verschwindet.

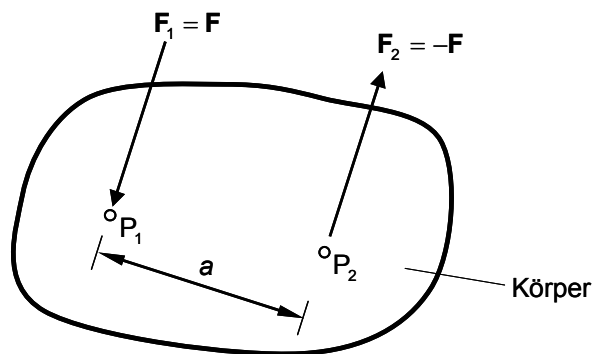


Abb. 2.1-2: Körper mit Kräftepaar

Die mechanische Wirkung des Kräftepaars wird durch sein Moment $\mathbf{M}$ bestimmt, dessen Betrag M ist gegeben durch:

$$M = |\mathbf{M}| = a \cdot |\mathbf{F}| \quad [\text{in Newton-Meter Nm}],$$

wobei a der sogenannte "Hebelarm", d.h. der Abstand der Wirkungslinien ist.

Wie die Kraft, so ist auch das Moment eine vektorielle Größe, deren Orientierung den Drehsinn (+ oder -) angibt ("rechte Handregel"). Der Momentenvektor steht senkrecht auf der durch das Kräftepaar gebildeten Wirkungsebene.

Das Moment ist ein freier Vektor.

2.1.3 Zur Bedeutung eines freien Vektors

Das Moment wird bestimmt durch

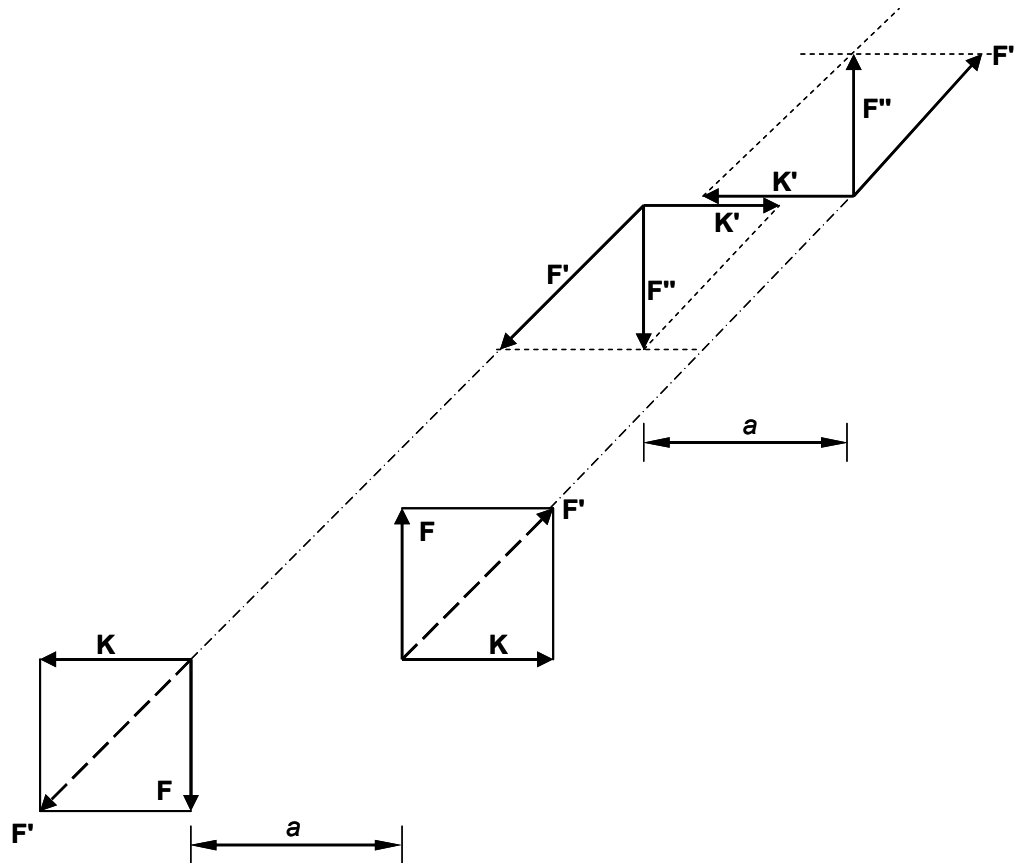
- (1) Größe der Kraft $\mathbf{F}$
- (2) Länge des Hebelarms a
- (3) Drehsinn + oder -

Das Moment ist ein **freier** Vektor, da es parallel verschoben werden darf, ohne dass sich die Wirkung des Moments auf den Körper verändert.

Satz: Ein Kräftepaar darf in seiner Wirkungsebene beliebig verschoben werden.

Beweis: Geg.: Kräftepaar $\mathbf{F}$ mit Abstand a der Wirkungslinien

Ges.: Verschobenes Kräftepaar $\mathbf{F}'$

Abb. 2.1-3: Beweis zur freien Verschiebbarkeit des Kräftepaars F

Vorgehensweise:

- Es wird eine Gleichgewichtsgruppe K eingeführt und die Resultierenden F' gebildet.
- Die Resultierenden F' werden entlang ihrer Wirkungslinien verschoben (Axiom von der Linienflüchtigkeit der Kraft).
- Danach neue Kräftegruppe K' ansetzen und neue Resultierende F'' bilden.

Schlussfolgerungen:

- Das Kräftepaar ist im Gegensatz zur Kraft **nicht** an eine Wirkungslinie gebunden.
- Das Kräftepaar ist durch sein Moment eindeutig beschrieben.
- Das Moment ist ein **freier** Vektor.

2.2 Moment (Drehmoment)

2.2.1 Definition des Moments

Die Wirkung einer Kraft auf den Bewegungszustand eines Körpers hängt nicht nur vom Kraftvektor $\mathbf{F}$ selbst ab, sondern auch von dessen Angriffspunkt P , der durch den Ortsvektor $\mathbf{r}$ beschrieben wird.

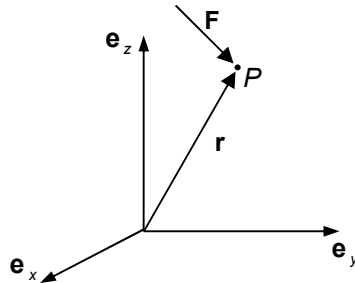


Abb. 2.2-1: Kraft $\mathbf{F}$ und Kraftangriffspunkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ im räumlichen Koordinatensystem

Def.: Endlich viele Kräfte $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n$ mit Kraftangriffspunkten $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ bilden eine **Kräftegruppe** oder ein **Kraftsystem**.

$$(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$$

Def.: Es sei $(\mathbf{F}, \mathbf{r})$ eine Einzelkraft am Punkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r}$.

Der Vektor

$$\mathbf{M}_c := (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}$$

heißt **Moment (Drehmoment)** der Kraft $\mathbf{F}$ bezüglich des Punkts C mit Ortsvektor $\mathbf{c}$.

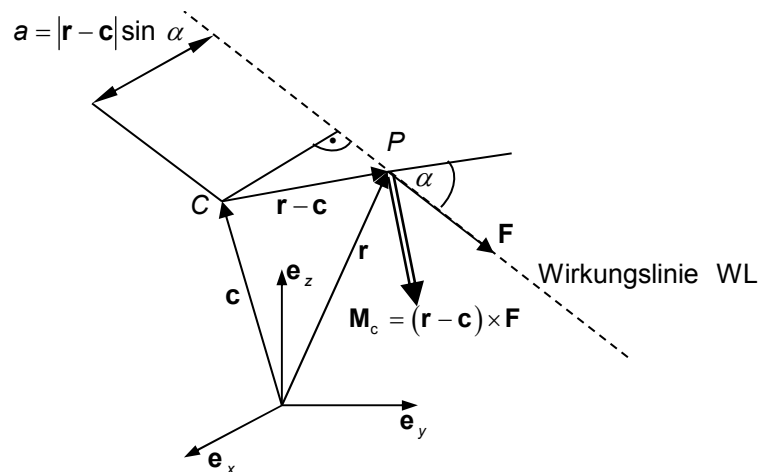


Abb. 2.2-2: Moment $\mathbf{M}_c$ einer Kraft $\mathbf{F}$

Hinweis: Momentenvektor $\mathbf{M}_c$ steht senkrecht auf den Vektoren $(\mathbf{r} - \mathbf{c})$ und $\mathbf{F}$.

Aus der Definition des Vektorprodukts folgt der Betrag des Momentenvektors:

$$|\mathbf{M}_c| = \underbrace{(|\mathbf{r} - \mathbf{c}| \cdot \sin \alpha)}_{=: a} \cdot |\mathbf{F}|$$

(a = Abstand des Momentenbezugspunkts C
von der Wirkungslinie der Kraft $\mathbf{F}$)

Schlussfolgerung: Das Moment einer Kraft ändert sich nicht, wenn der Kraftangriffspunkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ längs der Wirkungslinie verschoben wird; denn die Fläche des aufgespannten Parallelogramms durch die Vektoren $(\mathbf{r} - \mathbf{c})$ und $\mathbf{F}$ ist ebenso unverändert wie auch die Richtung und Orientierung des Vektors $\mathbf{M}_c$ durch die Verschiebung der Kraft.

2.2.2 Berechnung des Moments aus den Komponenten des Orts- und Kraftvektors

Beispiel: $\mathbf{c} = \mathbf{0}$; Orts- und Kraftvektor in der $x - y$ - Ebene

$$\mathbf{r} = r_x \mathbf{e}_x + r_y \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y = \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ r_x & r_y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (r_x \cdot F_y - r_y \cdot F_x) \mathbf{e}_z = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ r_x F_y - r_y F_x \end{bmatrix}$$

Der Momentenvektor $\mathbf{M}_0$ steht senkrecht auf der $x - y$ - Ebene.

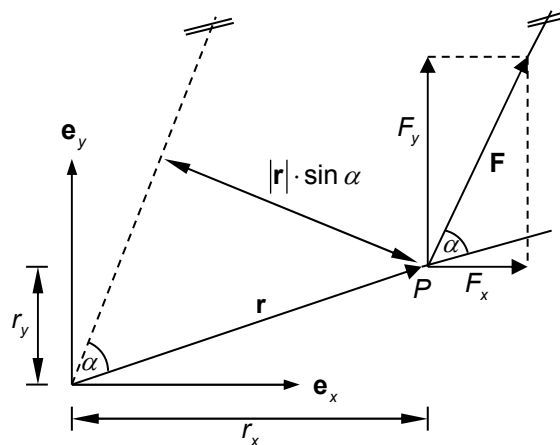


Abb. 2.2-3: Kraft $\mathbf{F}$ und Kraftangriffspunkt P mit Ortsvektor $\mathbf{r}$ in der $x - y$ - Ebene

Für den Betrag des Moments gilt mit Hilfe des eingeschlossenen Winkels α :

$$|\mathbf{M}_0| = |\mathbf{r}| \cdot \sin \alpha \cdot |\mathbf{F}|$$

$$= \underbrace{\sqrt{r_x^2 + r_y^2}}_{\text{Hebelarm } a} \cdot \sin \alpha \cdot \underbrace{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}_{\text{Kraftkomponente senkrecht zum Hebelarm } a}$$

Übungsaufgabe 1: Berechnung des Moments einer Kraft

In einem Koordinatensystem ist die Kraft $\mathbf{F}$ mit ihrem Kraftangriffspunkt P gegeben, dessen Ortsvektor $\mathbf{x}_p$ ist. Die Lage eines beliebigen Punkts C ist durch dessen Ortsvektor $\mathbf{x}_c$ bestimmt.

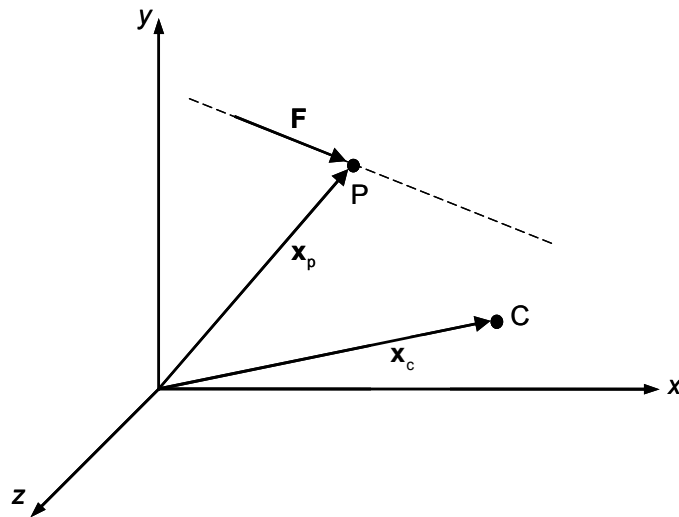


Abb. 2.2-4: Kraft, Kraftangriffspunkt und Momentenbezugspunkt

Gegeben:

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{e}_x + F_y \mathbf{e}_y + F_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{x}_p = x_p \mathbf{e}_x + y_p \mathbf{e}_y + z_p \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{x}_c = x_c \mathbf{e}_x + y_c \mathbf{e}_y + z_c \mathbf{e}_z$$

Sonderfall: Ebene Statik

$$F_x = 3 \text{ kN}; \quad F_y = 1 \text{ kN}; \quad F_z = 0$$

$$x_p = 3 \text{ m}; \quad y_p = 3 \text{ m}; \quad z_p = 0$$

$$x_c = 5 \text{ m}; \quad y_c = 1 \text{ m}; \quad z_c = 0$$

- a) Zeichnen Sie die Kraft $\mathbf{F}$ mit ihrer Wirkungsline und dem Kraftangriffspunkt P mit Ortsvektor $\mathbf{x}_p$ in ein $x - y$ -Koordinatensystem ein.

- b) Ermitteln Sie graphisch den Hebelarm der Kraft $\mathbf{F}$ bezüglich des Punktes C mit Ortsvektor $\mathbf{x}_c$.
- c) Berechnen Sie die Länge des Hebelarms h der Kraft $\mathbf{F}$ bezüglich des Momentenbezugpunktes C mit Ortsvektor $\mathbf{x}_c$.
- d) Berechnen Sie das Moment der Kraft $\mathbf{F}$ bezüglich des Punktes C aus dem Betrag des Kraftvektors $|\mathbf{F}|$ und dem Hebelarm h . Geben Sie das richtige Vorzeichen des Moments an, wenn dieses im Gegenuhrzeigersinn positiv sein soll. Geben Sie den Momentenvektor $\mathbf{M}_c$ an. Zeichnen Sie den Momentenvektor in das Koordinatensystem ein.
- e) Zerlegen Sie die Kraft $\mathbf{F}$ in ihre x - und y -Komponente und berechnen Sie mit Hilfe des Kreuzprodukts den Momentenvektor $\mathbf{M}_c$ der Kraft $\mathbf{F}$ bezüglich des Punktes C mit dem Ortsvektor $\mathbf{x}_c = x_c \mathbf{e}_x + y_c \mathbf{e}_y + z_c \mathbf{e}_z$.
- f) Diskutieren Sie Stärken und Schwächen der beiden Vorgehensweisen zur Berechnung des Momentenvektors.

Übungsaufgabe 2: Räumliche Statik – Berechnung des Moments $\mathbf{M}_c$ der Kraft $\mathbf{F}$ mit Angriffspunkt P .

Bearbeiten wie vorherige Aufgabe

Gegeben: $F_x = 3 \text{ kN}; \quad F_y = 1 \text{ kN}; \quad F_z = -4 \text{ kN}$
 $x_p = 3 \text{ m}; \quad y_p = 3 \text{ m}; \quad z_p = -3 \text{ m}$
 $x_c = 5 \text{ m}; \quad y_c = 1 \text{ m}; \quad z_c = -1 \text{ m}$

2.3 Äquivalente Kraftsysteme

Def.: Für das Kraftsystem $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$ heißen die Vektoren

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$$

und

$$\mathbf{M}_{RC} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}_k$$

resultierende Kraft und **resultierendes Moment** bezüglich des Punktes C mit Ortsvektor $\mathbf{c}$.

Die Ermittlung der Resultierenden $\mathbf{R}$ und $\mathbf{M}_{RC}$ heißt **Reduktion**.

Def.: Zwei Kraftsysteme $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$

und $(\mathbf{F}_1^*, \mathbf{F}_2^*, \dots, \mathbf{F}_n^*; \mathbf{r}_1^*, \mathbf{r}_2^*, \dots, \mathbf{r}_n^*)$

heißen **äquivalent (gleichwertig)**, wenn gilt:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}^*$$

$$\mathbf{M}_{RC} = \mathbf{M}_{RC}^*$$

Hinweise:

- Die Wahl des Momentenbezugspunkts C spielt für die Äquivalenzaussage keine Rolle, jedoch muss er für beide Systeme derselbe sein.
- Hingegen hängt das resultierende Moment $\mathbf{M}_{RC}$ sehr wohl vom Momentenbezugspunkt C ab. Für die beiden Momentenbezugspunkte gilt:

$$\mathbf{M}_{RC1} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{c}_1) \times \mathbf{F}_k$$

$$\mathbf{M}_{RC2} = \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{c}_2) \times \mathbf{F}_k$$

$$= \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{c}_1 + \mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) \times \mathbf{F}_k$$

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{c}_1) \times \mathbf{F}_k}_{\mathbf{M}_{RC1}} + \sum_{k=1}^n (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) \times \mathbf{F}_k$$

$$= \mathbf{M}_{RC1} + (\mathbf{c}_1 - \mathbf{c}_2) \times \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$$

Ist die resultierende Kraft $\sum \mathbf{F}_k = 0$, so ist $\mathbf{M}_{RC2} = \mathbf{M}_{RC1}$, und es handelt sich um ein Kräftepaar, dessen resultierendes Moment unabhängig vom Bezugspunkt C ist.

Def.: Eine Gruppe von Kräften mit gemeinsamem Angriffspunkt $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n; \mathbf{r}, \mathbf{r}, \dots, \mathbf{r})$ heißt **zentrales Kraftsystem**. Es gilt:

$$\mathbf{R} = \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k$$

und

$$\mathbf{M}_{RC} = (\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{R}$$

2.4 Gleichgewichtsbedingungen

Satz: Ein Körper behält seinen Bewegungszustand bei (im Sonderfall bleibt er in Ruhe), falls die Resultierenden

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \sum_{k=1}^n \mathbf{F}_k = \mathbf{0} \\ \mathbf{M}_{RC} &= \sum_{k=1}^n (\mathbf{r}_k - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}_k = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (2.4.1 \text{ a, b})$$

verschwinden. Diese Gleichungen heißen **Gleichgewichtsbedingungen**. Ein Kraftsystem mit verschwindenden Kraft- und Momentenresultierenden nennt man **Gleichgewichtssystem** oder **Gleichgewichtsgruppe**.

Die Gleichgewichtsbeziehungen sind notwendige und hinreichende Bedingungen für das Gleichgewicht des Körpers. In Komponentenschreibweise:

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0$$

$$R_z = \sum_{k=1}^n F_{kz} = 0$$

und

$$\begin{bmatrix} M_{RCx} \\ M_{RCy} \\ M_{RCz} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ r_{ix} - c_x & r_{iy} - c_y & r_{iz} - c_z \\ F_{ix} & F_{iy} & F_{iz} \end{vmatrix}$$

$$M_{RCx} = \sum_{i=1}^n [(r_{iy} - c_y) F_{iz} - (r_{iz} - c_z) F_{iy}] = 0$$

$$M_{RCy} = \sum_{i=1}^n [-(r_{ix} - c_x) F_{iz} + (r_{iz} - c_z) F_{ix}] = 0$$

$$M_{RCz} = \sum_{i=1}^n [(r_{ix} - c_x) F_{iy} - (r_{iy} - c_y) F_{ix}] = 0$$

Moment bezüglich $\mathbf{0}$:

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

Ebener Fall:

$$\mathbf{M}_0 = \begin{bmatrix} r_x \\ r_y \\ 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} F_x \\ F_y \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ r_x F_y - r_y F_x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{0x} \\ M_{0y} \\ M_{0z} \end{bmatrix}$$

Der Momentenvektor $\mathbf{M}_0$ hat nur eine von 0 verschiedene Komponente im Fall der ebenen Belastung, nämlich $M_{0z} = r_x F_y - r_y F_x$.

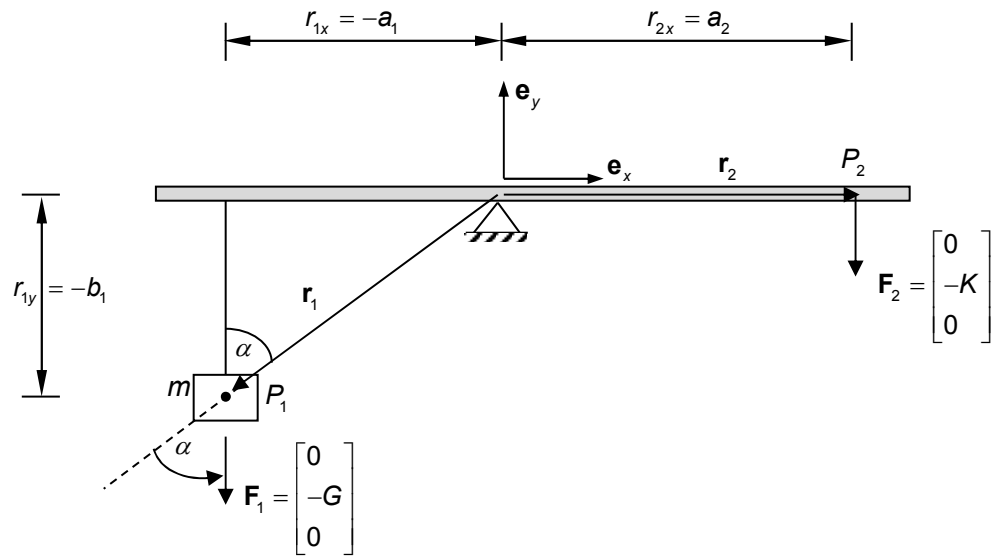
Beispiel: Balkenwaage

Abb. 2.4-1: Balkenwaage mit Last- und Kraftarm

$$\mathbf{r}_1 = \begin{bmatrix} r_{1x} \\ r_{1y} \\ r_{1z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -b_1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{r}_2 = \begin{bmatrix} r_{2x} \\ r_{2y} \\ r_{2z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{01z} = r_{1x} F_{1y} - r_{1y} F_{1x}$$

$$M_{02z} = r_{2x} F_{2y} - r_{2y} F_{2x}$$

$$= (-a_1)(-G) - (-b_1)0$$

$$= a_2(-K) - 0 \cdot 0$$

$$= a_1 G$$

$$= -a_2 K$$

Gleichgewicht:

$$M_{0z} = \sum_{i=1}^2 M_{0iz} = 0$$

$$= M_{01z} + M_{02z} = 0$$

$$= a_1 G + (-a_2 K) = 0$$

 $\Leftrightarrow$

$$a_1 G = a_2 K$$

$$K = \frac{a_1}{a_2} G$$

2.5 Ebene Statik

In der Praxis können Ingenieuraufgaben häufig als ebene Probleme behandelt werden, wenn alle Kräfte $\mathbf{F}_k$ und deren Angriffspunkte mit Ortsvektor $\mathbf{r}_k$ in einer Ebene liegen (ebene Kräftegruppe). In der $x - y$ -Ebene gilt:

$$\mathbf{F}_k = F_{kx} \mathbf{e}_x + F_{ky} \mathbf{e}_y \quad (2.4.1)$$

$$\mathbf{r}_k = r_{kx} \mathbf{e}_x + r_{ky} \mathbf{e}_y \quad (2.4.2)$$

$$\mathbf{c} = c_x \mathbf{e}_x + c_y \mathbf{e}_y \quad (2.4.3)$$

Die Gleichgewichtsbedingungen reduzieren sich im ebenen Fall auf die folgenden drei Gleichungen (zwei Kräftebedingungen und eine Momentenbedingung):

$$R_x = \sum_{k=1}^n F_{kx} = 0 \quad (2.4.4)$$

$$R_y = \sum_{k=1}^n F_{ky} = 0 \quad (2.4.5)$$

$$M_{Rcz} = \sum_{k=1}^n [(r_{kx} - c_x) F_{ky} - (r_{ky} - c_y) \cdot F_{kx}] = 0 \quad (2.4.6)$$

In der ebenen Statik sind alle Momentenvektoren ($\mathbf{M} = M_z \mathbf{e}_z$) senkrecht zur Ebene, in der die ebene Kräftegruppe wirkt, und es muss nur noch die Komponente $\mathbf{M}_z$ in z -Richtung (also Betrag und Vorzeichen) ermittelt werden. Dieser Vorteil vereinfacht die ebene Statik sehr stark im Vergleich zur räumlichen Statik.

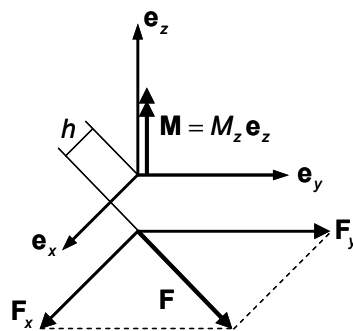


Abb. 2.5-1: Kraft und Moment in der ebenen Statik

Neben der Rechnung sind für die Lösung von Aufgaben der ebenen Statik auch zeichnerische Verfahren, wie z.B.

- die Methode der Zwischenresultierenden (CULMANN'Sches Verfahren)
- die Seileckmethode

entwickelt worden, die jedoch nicht Stoff der Vorlesung sind.

Alle Aufgabenstellungen der Statik lassen sich auf drei Grundtypen (Grundaufgaben) reduzieren, und zwar auf

- die Reduktion (Resultierende bilden) eines Kraftsystems,
- die Zerlegung einer Kraft,
- die Gleichgewichtsbildung (s. Kapitel 4).

2.6 Grundaufgaben der ebenen Statik

Zur Lösung statischer Aufgaben sind drei Grundtypen wichtig.

2.6.1 Erste Grundaufgabe: Reduktion

i) Zentrales Kraftsystem:

Geg.: n Einzelkräfte $\mathbf{F}_k$ mit gemeinsamem Angriffspunkt $\mathbf{r}$

Ges.: Resultierende Kraft $\mathbf{R}$ (bezogen auf Kraftangriffspunkt $\mathbf{r} = \mathbf{c}$ ist das Moment $\mathbf{M}_c = 0$)

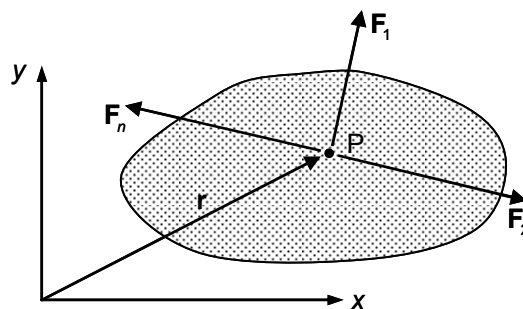


Abb. 2.6-1: Zentrales Kraftsystem

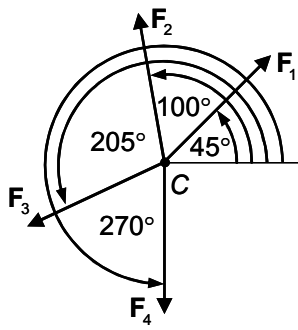
Beispiel: 4 Kräfte: $\mathbf{F}_1 = 12\text{kN}$ mit Richtungswinkel $\alpha_1 = 45^\circ$ gegen die Horizontale

$\mathbf{F}_2 = 8\text{ kN}$ $\alpha_2 = 100^\circ$

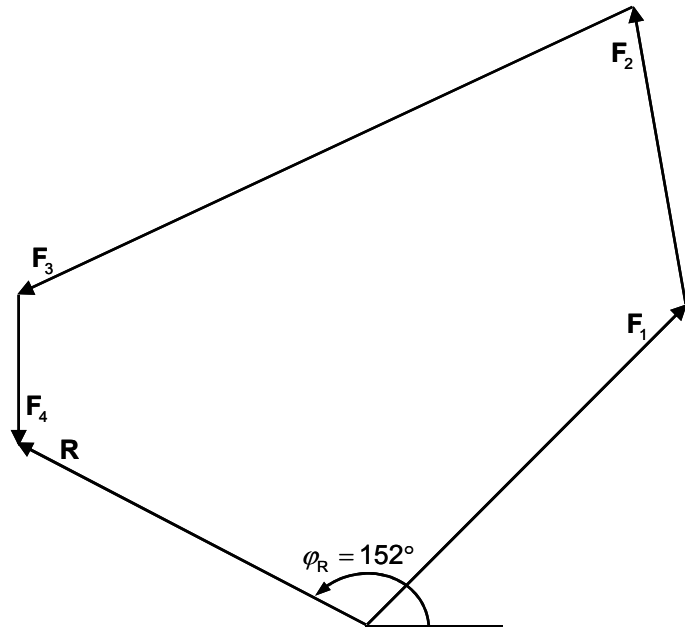
$\mathbf{F}_3 = 18\text{ kN}$ $\alpha_3 = 205^\circ$

$\mathbf{F}_4 = 4\text{ kN}$ $\alpha_4 = 270^\circ$

schneiden sich in einem Punkt C.

Graphische Lösung:

Lageplan



Kräfteplan

Kräftemaßstab: $m_k = \frac{2\text{kN}}{1\text{cm}}$

Abb. 2.6-2: Lage- und Kraftplan zur Kräfteaddition

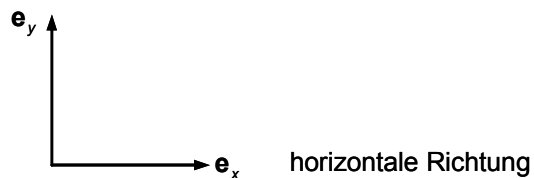
Ergebnis: Durch Abmessen erhält man: $R = |\mathbf{R}| = 5,2 \text{ cm} \cdot \frac{2\text{kN}}{\text{cm}} = 10,4 \text{ kN}$ (Betrag)

$\varphi_R = 152^\circ$ (Richtungswinkel)

Der Kraftangriffspunkt von $\mathbf{R}$ ist der Punkt C.

Rechnerische Lösung:

Koordinatensystem festlegen



Kräftesumme: $\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_n = \sum_{i=1}^n \mathbf{F}_i$

In Komponenten: $R_x = \sum_i F_{ix}$ wobei $F_{ix} = F_i \cos \alpha$

$R_y = \sum_{i=1}^n F_{iy}$ $F_{iy} = F_i \sin \alpha$

Addition aller horizontalen und vertikalen Kraftkomponenten:

$$F_{1x} = 12 \cdot \cos 45^\circ = 8,49 \text{ kN}$$

$$F_{1y} = 12 \cdot \sin 45^\circ = 8,49 \text{ kN}$$

$$F_{2x} = 8 \cdot \cos 100^\circ = -1,39 \text{ kN}$$

$$F_{2y} = 8 \cdot \sin 100^\circ = 7,88 \text{ kN}$$

$$F_{3x} = 18 \cdot \cos 205^\circ = -16,31 \text{ kN}$$

$$F_{3y} = 18 \cdot \sin 205^\circ = -7,61 \text{ kN}$$

$$F_{4x} = 4 \cdot \cos 270^\circ = 0$$

$$F_{4y} = 4 \cdot \sin 270^\circ = -4,00 \text{ kN}$$

$$R_x = \sum_{i=1}^4 F_{ix} = -9,21 \text{ kN}$$

$$R_y = \sum_{i=1}^4 F_{iy} = 4,76 \text{ kN}$$

Vektor der Resultierenden: $\mathbf{R} = \begin{bmatrix} -9,21 \text{ kN} \\ 4,76 \text{ kN} \end{bmatrix}$

Betrag der Kraft: $R = |\mathbf{R}| = \sqrt{R_x^2 + R_y^2} = \sqrt{(-9,21)^2 + (4,76)^2} = 10,4 \text{ kN}$

Richtungswinkel: $\cos \varphi_R = \frac{R_x}{R} = \frac{-9,21}{10,4} = -0,886 \Rightarrow \varphi_R = 152^\circ$

ii) Allgemeines Kraftsystem

Geg.: Kraftsystem $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots, \mathbf{F}_n; \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n)$

Ges.: Resultierende $\mathbf{R}$ mit Kraftangriffspunkt $\mathbf{r}_R$, so dass das reduzierte System äquivalent zum gegebenen Kraftsystem ist.

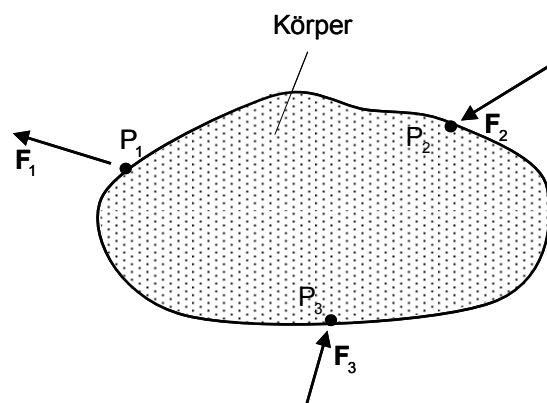


Abb. 2.6-3: Allgemeines Kraftsystem

Die graphischen Lösungsverfahren sollen hier nicht behandelt werden.

Rechnerische Lösung:

- 1) Die Resultierende **R** ergibt sich aus:

$$\mathbf{R} = \sum_i \mathbf{F}_i \quad (2.5.1)$$

- 2) Die Lage der Resultierenden **R** ergibt sich aus der Gleichheit der resultierenden Momente beider Kraftsysteme.

$$\mathbf{r}_R \times \mathbf{R} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i \quad (2.5.2)$$

$$(r_{Rx} R_y - r_{Ry} R_x) \mathbf{e}_z = \sum_i (r_{ix} F_{iy} - r_{iy} F_{ix}) \mathbf{e}_z \quad (2.5.3)$$

Wegen $R_x = R \cos \alpha = |\mathbf{R}| \cos \alpha$

und $R_y = R \sin \alpha = |\mathbf{R}| \sin \alpha$

folgt aus Gl. (2.5.3): $(r_{Rx} R \sin \alpha - r_{Ry} R \cos \alpha) = \sum_i (r_{ix} F_{iy} - r_{iy} F_{ix})$ (2.5.4)

Die Lage a der Resultierenden **R** ergibt sich aus Gl. (2.5.4) zu:

$$a := r_{Rx} \sin \alpha - r_{Ry} \cos \alpha = \frac{1}{|\mathbf{R}|} \sum_i (r_{ix} F_{iy} - r_{iy} F_{ix}) = \frac{M_{Gz}}{R} \quad (2.5.5)$$

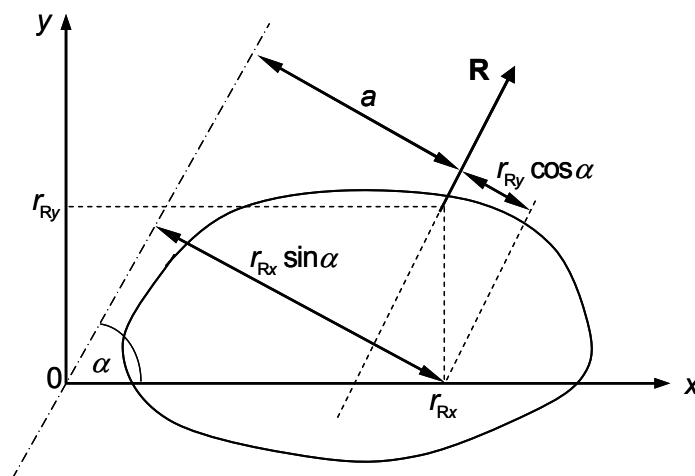


Abb. 2.6-4: Lage der Resultierenden des allgemeinen Kraftsystems

a ist der Abstand der Resultierenden $\mathbf{R}$ von einer Parallelen durch den Ursprung $\mathbf{0}$ des Koordinatensystems.

Beispiel: Reduktion von Kräften im allgemeinen Kraftsystem

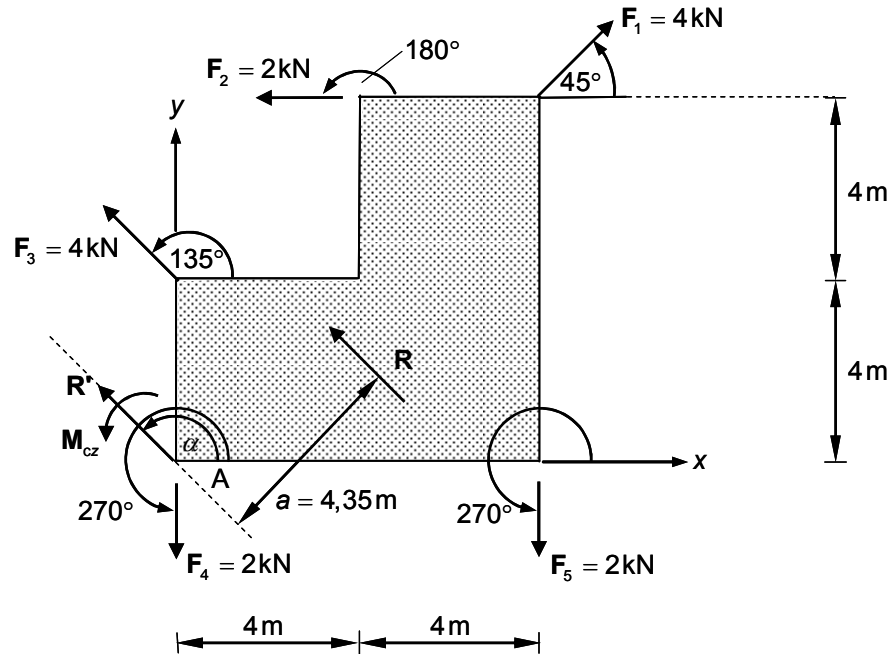


Abb. 2.6-5: Lageplan des allgemeinen Kraftsystems

Kräfte: $R_x = \sum_{i=1}^n F_i \cos \alpha_i = 4 \text{ kN} \cdot \cos 45^\circ - 2 \text{ kN} + 4 \text{ kN} \cdot \cos 135^\circ = -2,00 \text{ kN}$

$$R_y = \sum_{i=1}^n F_i \sin \alpha_i = 4 \text{ kN} \cdot \sin 45^\circ + 4 \text{ kN} \cdot \sin 135^\circ - 2 \text{ kN} - 2 \text{ kN} = 1,66 \text{ kN}$$

$$R = |\mathbf{R}| = \sqrt{(-2,00)^2 + (1,66)^2} \text{ kN} = 2,60 \text{ kN}$$

$$\frac{R_x}{R} = \cos \alpha = \frac{-2,00 \text{ kN}}{2,60 \text{ kN}} = -0,770 \rightarrow \alpha = 140^\circ$$

Moment: $M_{cz} = 0 \cdot F_1 + 8 \text{ m} \cdot 2 \text{ kN} - 4 \text{ kN} \cdot 4 \text{ m} \cdot \cos 135^\circ + 0 \cdot F_4 - 8 \cdot 2 = 11,3 \text{ kNm}$

Aus Gl. (2.5.5): $a = \frac{11,3 \text{ kNm}}{2,60 \text{ kN}} = 4,35 \text{ m}$

2.6.2 Zweite Grundaufgabe: Zerlegung einer Kraft

i) Zentrales Kraftsystem

Geg.: Kraftsystem $(\mathbf{F}, \mathbf{r})$

und zwei Wirkungslinien WL 1 und WL 2 der Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ eines zweiten zentralen Kraftsystems.

Ges.: Äquivalentes Kraftsystem $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2; \mathbf{r}, \mathbf{r})$ mit Kräften $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$.

Graphische Lösung

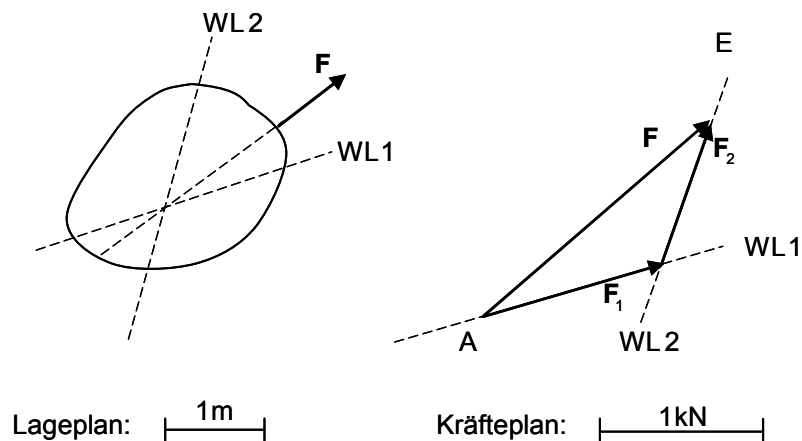


Abb. 2.6-6: Lage- und Kräfteplan

Vorgehensweise:

Schritt 1: Lageplan mit Kraft $\mathbf{F}$ und vorgegebenen Wirkungslinien WL 1 und WL 2 zeichnen

Schritt 2: Im Kräfteplan die Kraft $\mathbf{F}$ mit gewähltem Kräftemaßstab zeichnen.

- Durch Anfangs- und Endpunkt je eine Wirkungslinie zeichnen und diese zum Schnitt bringen.
- Kräfte $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ von A bzw. E bis zum Schnittpunkt der beiden Wirkungslinien WL 1 und WL 2 abtragen.

Ergebnis: Die Zerlegung einer Kraft (Vektor) in zwei nicht parallele Kräfte (Vektoren) in der Ebene ist eindeutig möglich.

Die Zerlegung einer Kraft in mehr als zwei Richtungen ist möglich, aber nicht eindeutig, denn es existieren unendlich viele Lösungen.

Rechnerische Lösung der zweiten Grundaufgabe: Mittels kartesischer Koordinaten

Geg.: Kraftsystem $(\mathbf{F}, \mathbf{r})$ und Wirkungslinien WL 1 und WL 2 eines zweiten Kraftsystems $(\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{r}, \mathbf{r})$
 $(\mathbf{F}, \alpha, \alpha_1, \alpha_2, \text{wobei } \alpha_1 \neq \alpha_2)$

Ges.: $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$

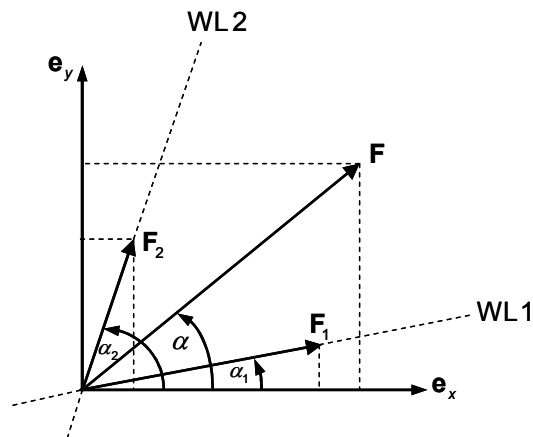


Abb. 2.6-7: Lageplan

Anschreiben der Kräftegleichungen in Komponenten für x- und y-Richtung:

$$\text{y-Richtung:} \quad F \sin \alpha = F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 \quad (2.5.6)$$

$$\text{x-Richtung:} \quad F \cos \alpha = F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 \quad (2.5.7)$$

2 Gleichungen mit 2 Unbekannten $\mathbf{F}_1$ und $\mathbf{F}_2$ sind eindeutig lösbar für $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Mit Hilfe der Additionstheoreme der Sinusfunktion

$$\text{ergibt sich dann:} \quad F_1 = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} F \quad (2.5.8)$$

$$F_2 = \frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)} F \quad (2.5.9)$$

Zu diesem Ergebnis gelangt man schneller, wenn man mittels des Sinussatzes der Trigonometrie die graphische Lösung der Zerlegungsaufgabe auswertet.

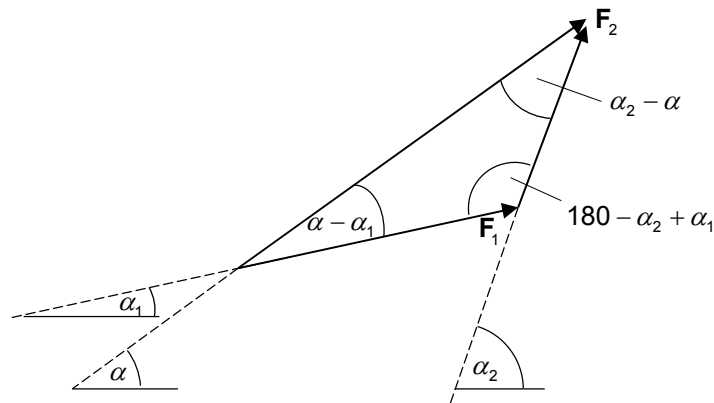


Abb. 2.6-8: Kraftplan

(Sinussatz: Das Verhältnis der Seitenlänge zum Sinus des gegenüberliegenden Winkels im allgemeinen Dreieck ist konstant.)

$$\frac{F}{\sin(180 - \alpha_2 + \alpha_1)} = \frac{F_1}{\sin(\alpha_2 - \alpha)} = \frac{F_2}{\sin(\alpha - \alpha_1)} \quad (2.5.10)$$

$$F_1 = \frac{\sin(\alpha_2 - \alpha)}{\sin(180 - \alpha_2 + \alpha_1)} F \quad (2.5.11)$$

$$F_2 = \frac{\sin(\alpha - \alpha_1)}{\sin(180 - \alpha_2 + \alpha_1)} F \quad (2.5.12)$$

ii) Allgemeines Kraftsystem

Eine Kraft $\mathbf{F}$ soll nach drei in der Ebene liegenden Kräfte zerlegt werden, deren Wirkungslinien sich nicht in einem Punkt schneiden und die auch nicht alle parallel sind.

Geg.: Kraftsystem $(\mathbf{F}, \mathbf{r})$

und drei Wirkungslinien WL 1, WL 2 und WL 3 der Kräfte $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ und $\mathbf{F}_3$ eines zweiten nichtzentralen Kraftsystems.

Ges.: Kräfte $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ und $\mathbf{F}_3$

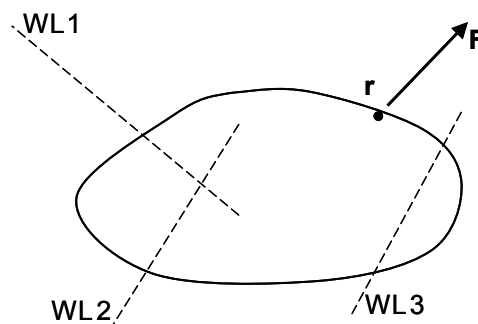


Abb. 2.6-9: Lage der Kraft und der Wirkungslinien

Graphische Lösung: z.B. mittels Seileckverfahren (wird in der Vorlesung nicht behandelt)

Rechnerische Lösung:

Kräfte in x- und y-Richtung zusammenfassen:

$$\mathbf{F} = \sum_i \mathbf{F}_i$$

Momentensumme um einen beliebigen Bezugspunkt C

mit Ortsvektor $\mathbf{c}$ bilden:

$$\mathbf{M}_c(\mathbf{F}) = \sum_i \mathbf{M}_c(\mathbf{F}_i)$$

$$(\mathbf{r} - \mathbf{c}) \times \mathbf{F} = \sum_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{c}) \times \mathbf{F}_i$$

Lage der Kraftangriffspunkte $\mathbf{r}_1$, $\mathbf{r}_2$ und $\mathbf{r}_3$ auf den Wirkungslinien wählen.

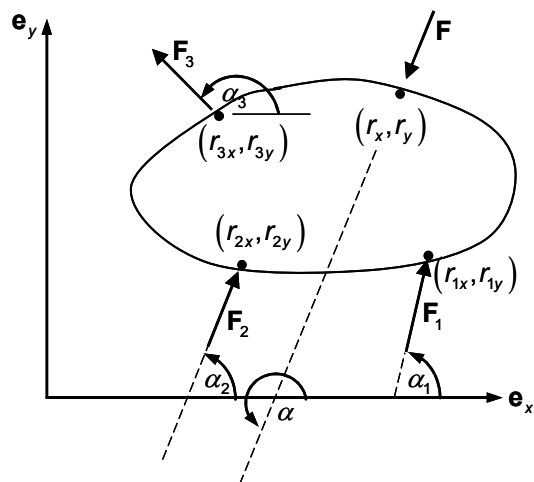


Abb. 2.6-10: Lageplan

$$\text{x-Richtung: } F_1 \cos \alpha_1 + F_2 \cos \alpha_2 + F_3 \cos \alpha_3 = F \cos \alpha \quad (2.5.13)$$

$$\text{y-Richtung: } F_1 \sin \alpha_1 + F_2 \sin \alpha_2 + F_3 \sin \alpha_3 = F \sin \alpha \quad (2.5.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Momente um } \mathbf{0}: & (r_{1x} \sin \alpha_1 - r_{1y} \cos \alpha_1) F_1 + (r_{2x} \sin \alpha_2 - r_{2y} \cos \alpha_2) F_2 + \\ & + (r_{3x} \sin \alpha_3 - r_{3y} \cos \alpha_3) F_3 = (r_x \sin \alpha - r_y \cos \alpha) \cdot F \end{aligned} \quad (2.5.15)$$

Das gekoppelte System von 3 Gleichungen für die drei Unbekannten F_1 , F_2 und F_3 kann z.B. nach der CRAMERSchen Regel gelöst werden.

- Hinweise:
- Anstelle der Gleichungen für die Kräftesummen in x- oder y-Richtung können eine oder zwei Momentengleichungen angeschrieben werden.
 - Wählt man als Bezugspunkt für die Momentengleichung den Schnittpunkt zweier Wirkungslinien, so erhält man eine Gleichung mit einer Unbekannten.

Beispiel: Zerlegung einer Kraft im allgemeinen Kraftsystem

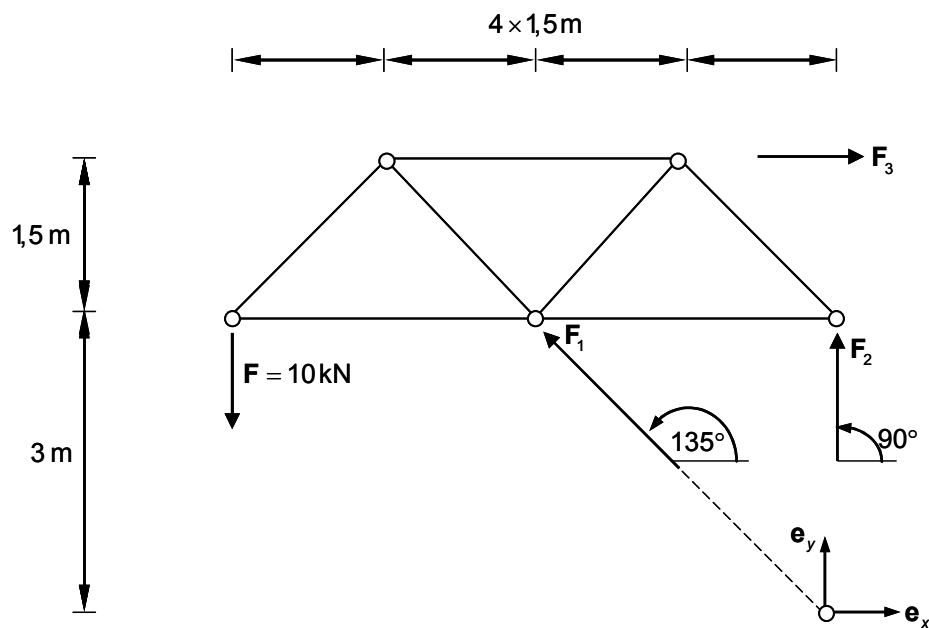


Abb. 2.6-11: Lageplan der Kräfte

Ges.: Zerlegung von $\mathbf{F}$ in die drei Kräfte $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2$ und $\mathbf{F}_3$ mit gegebenen Wirkungslinien, die nicht parallel sind.

Hinweis: Momentenbezugspunkt wird in den Schnittpunkt zweier Wirkungslinien gelegt, damit eine Gleichung mit einer Unbekannten entsteht; s. Gl. (2.5.18).

$$\text{Kräfte in x-Richtung:} \quad \begin{array}{c} + \\ \rightarrow \end{array} \quad -F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_3 = 0 \quad (2.5.16)$$

$$\text{Kräfte in y-Richtung:} \quad \begin{array}{c} \uparrow + \end{array} \quad F_1 \frac{\sqrt{2}}{2} + F_2 = -10 \text{ kN} \quad (2.5.17)$$

$$\text{Momente um } \mathbf{0}: \quad \begin{array}{c} \curvearrowleft + \end{array} \quad -4,5 \text{ m} \cdot F_3 = 6 \text{ m} \cdot 10 \text{ kN} \quad (2.5.18)$$

$$\text{Aus Gl. (2.5.18):} \quad F_3 \cong -13,3 \text{ kN}$$

$$F_3 \text{ in Gl. (2.5.16):} \quad F_1 \cong \frac{2}{\sqrt{2} \text{ kN}} (-13,3 \text{ kN}) = -18,9 \text{ kN}$$

$$F_1 \text{ in Gl. (2.5.17):} \quad F_2 \cong -10 \text{ kN} + 18,9 \frac{\sqrt{2} \text{ kN}}{2} = 3,3 \text{ kN}$$

3 Kräftemittelpunkt, Schwerpunkt und Massenmittelpunkt

Zwei materielle Körper üben aufeinander eine Anziehungskraft (Gravitationskraft) aus.

NEWTONSches Gravitationsgesetz:

$$F = |\mathbf{F}| = \Gamma \frac{m_1 m_2}{r^2},$$

wobei $\mathbf{F}$ die Gravitationskraft, r der Abstand der Körperschwerpunkte und Γ die universelle Gravitationskonstante mit

$$\Gamma = 6,670 \cdot 10^{-11} \frac{\text{m}^3}{\text{kg sec}^2}$$

ist.

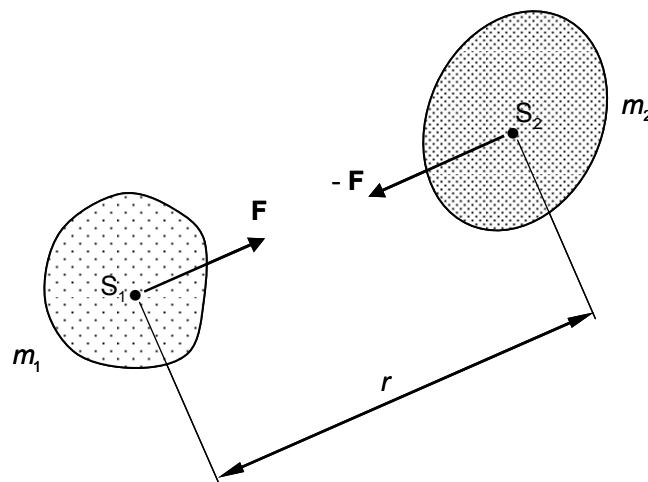


Abb. 3.0-1: Darstellung der Massenanziehung zweier Körper mit Schwerpunkten S_1 und S_2

Die Gravitationskräfte $\mathbf{F}$ sind entgegengesetzt gleich groß und liegen auf der Verbindungsgeraden der Massenmittelpunkte.

Beispiel: Erdkugel: Masse der Erde
Erdradius

$$M_e = m_1$$

$$R_e = r \quad = \text{Abstand von der Erdoberfläche zum Massenmittelpunkt der Erde}$$

Gewicht der Masse m_2 :

$$G = |\mathbf{F}| = \Gamma \underbrace{\frac{M_e}{R_e^2}}_g m_2 = g \cdot m_2,$$

mit Erdbeschleunigung

$$g = \Gamma \frac{M_e}{R_e^2} = 9,81 \frac{\text{m}}{\text{sec}^2}$$

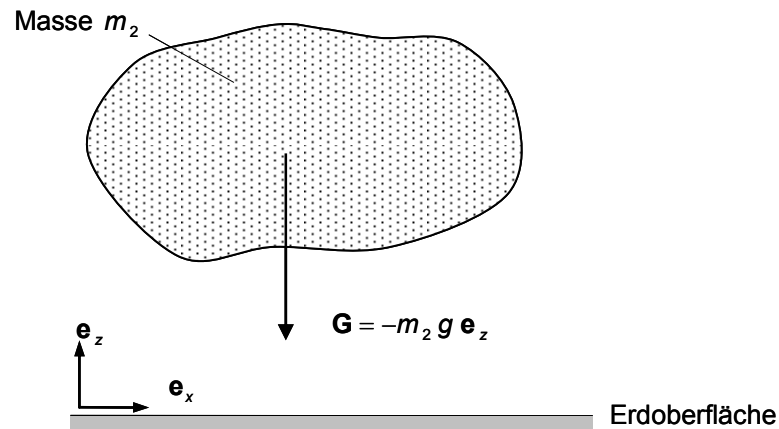
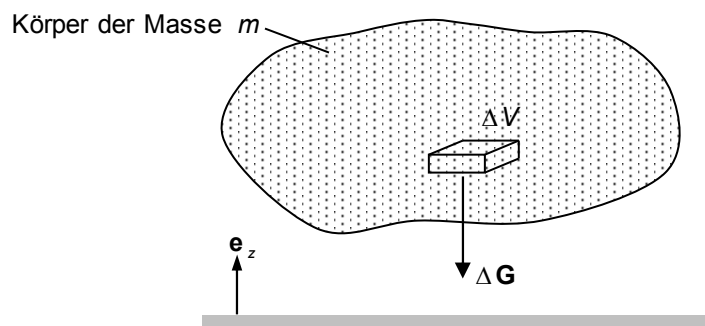


Abb. 3.0-2: Definition des Koordinatensystems auf der Erde; Körper und Gewichtskraft

Vereinbarung: z – Achse ist senkrecht zur Erdoberfläche

Die Gewichtskraft $\mathbf{G}$ ist die Resultierende der volumenverteilten Kraft γ .

Massenelement Δm mit Volumen ΔV und Teilgewichtskraft $\Delta \mathbf{G}$

Abb. 3.0-3: Volumenelement ΔV eines Körpers

$$\Delta \mathbf{G} = - \overbrace{\gamma \Delta V}^{\Delta \mathbf{G}} \mathbf{e}_z = - \Delta m g \mathbf{e}_z = - \underbrace{\rho}_{\text{Massendichte (spezifische Masse)}} g \Delta V \mathbf{e}_z$$

|
|

 spezifisches Gewicht Massendichte (spezifische Masse)

$$\gamma = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta G}{\Delta V} \qquad \rho = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\Delta m}{\Delta V}$$

Es ergibt sich dann die Beziehung:

$$\gamma = \rho g$$

Der Betrag G der Resultierenden $\mathbf{G}$ der Teilgewichtskräfte $\Delta \mathbf{G}$ ist:

$$G = \sum_{i=1}^n \gamma_i \Delta V_i = \int_{(V)} \gamma(\mathbf{r}) dV \qquad \text{mit Ortsvektor } \mathbf{r} \text{ des Volumenelements}$$

Die Gesamtmasse m ergibt sich zu:

$$m = \int_{(V)} \rho(\mathbf{r}) dV$$

Anmerkung: Im Schrifttum wird häufig auch folgende Notation verwendet: $\iiint_{(V)} () dV$ für $\int_{(V)} () dV$

3.1 Schwerpunkt einer Gruppe von Einzelmassen

Gesucht ist die Lage $\mathbf{r}_s$ der resultierenden Gewichtskraft $\mathbf{G}$ einer Gruppe von Einzelkräften $\mathbf{G}_i$ der Massen m_i . Die Gewichtskräfte $\mathbf{G}_i$ greifen in den Punkten $\mathbf{r}_i$ an.

Beispiel mit 4 Einzelmassen:

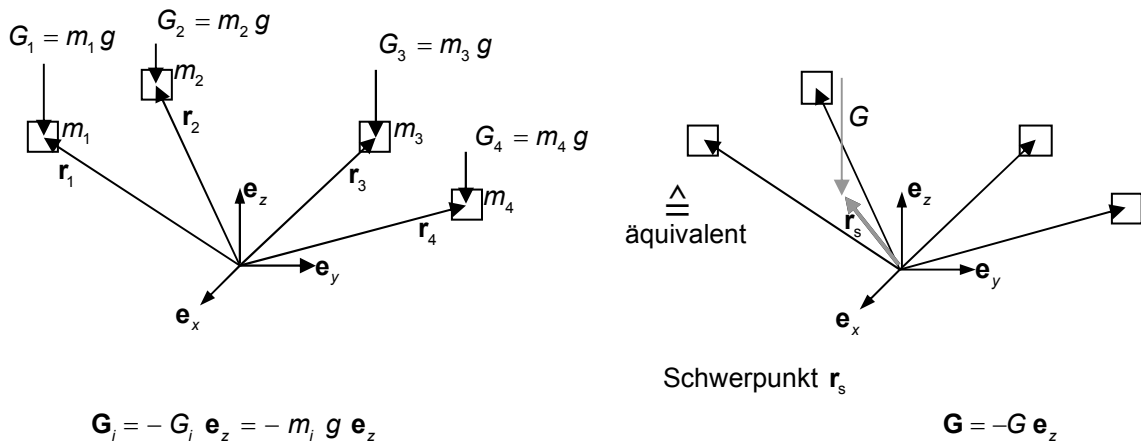


Abb. 3.1-1: Massenpunkte, Kraftsysteme

Betrachtet werden zwei äquivalente Kraftsysteme $(\mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \dots, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots)$ und $(\mathbf{G}, \mathbf{r}_s)$.

Gesamtmasse: $m = \sum_i m_i$

Die resultierende Gewichtskraft $\mathbf{G}$ und deren Kraftangriffspunkt $\mathbf{r}_s$ ergeben sich aus den beiden Bedingungen für die Äquivalenz der Kraftsysteme:

Resultierende Gewichtskraft $\mathbf{G} = \sum_i \mathbf{G}_i = -\left(\sum_i m_i\right) g \mathbf{e}_z = -m g \mathbf{e}_z$ (3.1.1)

Resultierendes Moment
bezüglich des Ursprungs $\mathbf{0}$: $\mathbf{r}_s \times \mathbf{G} = \sum_i \mathbf{r}_i \times \mathbf{G}_i$ (3.1.2)

Resultierende Gewichtskräfte

Einsetzen von (3.1.1) in (3.1.2): $\mathbf{r}_s \times (-m g \mathbf{e}_z) = \sum_i \mathbf{r}_i \times (-m_i g \mathbf{e}_z)$

$$\left(\mathbf{r}_s - \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i\right) \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad (3.1.3)$$

Definition des Massenmittelpunkts:

$$\mathbf{r}_m = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \mathbf{r}_i \quad (3.1.4)$$

Summe von Vektoren

Da das Kreuzprodukt in Gl. (3.1.3) den Nullvektor ergibt, folgt

$$\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_m = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \text{also} \quad \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_m$$

oder $\mathbf{e}_z = \mathbf{0}$ (Widerspruch, da $\mathbf{e}_z$ ein Basisvektor ist)

oder $\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_m$ und $\mathbf{e}_z$ sind parallel. Deshalb folgt aus $(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_m) \parallel \mathbf{e}_z$:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_m + \lambda \mathbf{e}_z \quad (-\infty < \lambda < \infty),$$

d.h. der Schwerpunkt $\mathbf{r}_s$ liegt auf einer Geraden, die durch $\mathbf{r}_m$ geht und parallel zu $\mathbf{e}_z$ ist.

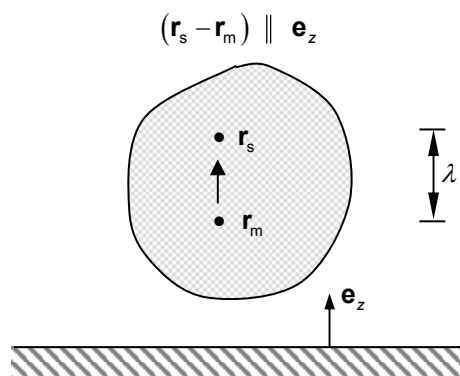


Abb. 3.1-2: Gerade durch Schwerpunkt und Massenmittelpunkt

Schlussfolgerungen:

- Setzt man die Schwerkraft in einer beliebigen Richtung $\mathbf{e}$ an, so liegt der Schwerpunkt $\mathbf{r}_s$ auf der Geraden mit der Gleichung:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_m + \lambda \mathbf{e}$$

Der Vektor $(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_m)$ ist demzufolge parallel zum Vektor $\mathbf{e}$.

- Obige Gleichung repräsentiert für jeden beliebigen Vektor $\mathbf{e}$ in Richtung der Schwerkraft eine Gerade durch den Massenmittelpunkt mit Ortsvektor $\mathbf{r}_m$.
- Alle Geraden in Richtung eines beliebigen Vektors $\mathbf{e}$ schneiden sich im Massenmittelpunkt $\mathbf{r}_m$.

- Der Massenmittelpunkt $\mathbf{r}_m$ fällt mit dem Schwerpunkt $\mathbf{r}_s$ bei konstantem (homogenem) Schwerefeld, d.h. $g(\mathbf{r}) = \text{konstant}$ zusammen.

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_m = \frac{1}{m} \sum_i m_i \mathbf{r}_i$$

In Komponenten:

$$x_s = \frac{1}{m} \sum_i m_i x_i \quad y_s = \frac{1}{m} \sum_i m_i y_i \quad z_s = \frac{1}{m} \sum_i m_i z_i$$

3.2 Schwerpunkt eines Körpers

Ein Körper mit spezifischer Massendichte ρ , Volumen V und Gesamtmasse m wird in differentiell kleine

Volumina dV mit dem Ortsvektor $\mathbf{r}$,

der Masse $dm = \rho dV$ und

dem Gewicht $dG = (dm) g = \rho g (dV)$

in einem Schwerefeld mit der Richtung $\mathbf{e}_z$ gedanklich zerlegt.

Die Gewichtskraft des Volumens dV ist dann

$$d\mathbf{G} = g (dm) \mathbf{e}_z = dG \mathbf{e}_z \quad (3.2.1)$$

Das Gesamtmoment $\mathbf{M}_0$ der differentiellen Gewichtskräfte $d\mathbf{G}$ bezüglich des Koordinatenursprungs soll äquivalent dem Moment der resultierenden Gewichtskraft $\mathbf{G} = mg \mathbf{e}_z$ mit Kraftangriffspunkt $\mathbf{r}_s$ sein.

$$\mathbf{r}_s \times \mathbf{G} = \int_{(V)} \mathbf{r} \times d\mathbf{G} \quad (3.2.2)$$

$$\left(\mathbf{r}_s - \frac{1}{G} \int_{(V)} \mathbf{r} dG \right) \times \mathbf{e}_z = \mathbf{0} \quad (3.2.3)$$

Definition:

$$\mathbf{r}_g := \frac{1}{G} \int_{(V)} \mathbf{r} dG \quad (3.2.4)$$

Entsprechend zur Schlussfolgerung im Kapitel 3.1 ergibt sich aus Gl. (3.2.3) und (3.2.4):

$$(\mathbf{r}_s - \mathbf{r}_g) \text{ ist parallel zu } \mathbf{e}_z.$$

Für ein beliebig gedrehtes Koordinatensystem im Schwerfeld mit dem Vektor $\mathbf{e}_g$ in Richtung der Schwerkraft liegt der Schwerpunkt $\mathbf{r}_s$ auf der Geraden mit der Gleichung:

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_g + \lambda \mathbf{e}_g$$

Alle Geraden mit Richtungsvektor $\mathbf{e}_g$ schneiden sich im Schwerpunkt S mit Ortsvektor

$$\mathbf{r}_s = \mathbf{r}_g = \frac{1}{G} \int_{(v)} \mathbf{r} g(\mathbf{r}) dm$$

Für ein konstantes Schwerfeld – d.h. $g(\mathbf{r}) = \text{konstant}$ – fällt der Schwerpunkt mit dem Massenmittelpunkt $\mathbf{r}_m$ zusammen.

$$\mathbf{r}_m = \mathbf{r}_s = \frac{1}{m} \int_{(v)} \mathbf{r} dm, \quad (3.2.5)$$

wobei die Beziehung $G = g \int_{(v)} \rho(r) dV = g m$ benutzt worden ist.

Besitzt der Körper eine homogene Dichteverteilung – d.h. $\rho(\mathbf{r}) = \text{konstant}$, so geht mit Hilfe von $dm = \rho dV$ und $m = \int_{(v)} \rho dV = \rho V$ der Massenmittelpunkt in den Volumenschwerpunkt $\mathbf{r}_v$ über.

$$\boxed{\mathbf{r}_v = \mathbf{r}_m = \frac{1}{V} \int_{(v)} \mathbf{r} dV} \quad (3.2.6)$$

In Komponenten lautet die Vorschrift zur Berechnung des Volumenschwerpunkts:

$$x_v = \frac{1}{V} \int_{(v)} x dV; \quad y_v = \frac{1}{V} \int_{(v)} y dV; \quad z_v = \frac{1}{V} \int_{(v)} z dV.$$

Beispiel: Volumenschwerpunkt einer Halbkugel

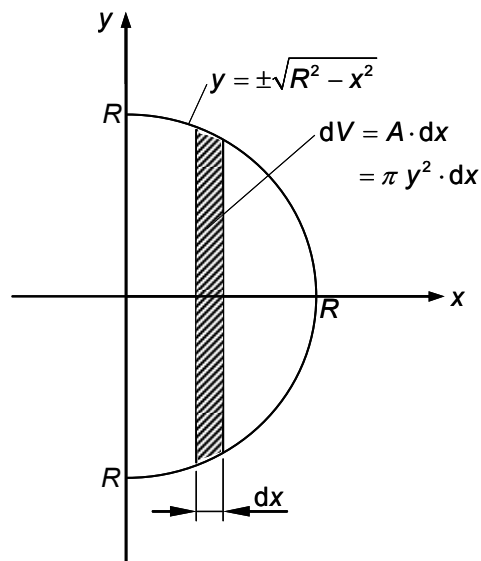


Abb. 3.2-1: Ermittlung des Volumenschwerpunkts einer Halbkugel

$$y_v = z_v = 0$$

$$x_v = x_s = \frac{1}{V} \int_{(V)} x \, dV$$

Volumen einer Kugel: $V = \frac{4}{3} \pi R^3$

$$x_v = x_s = \frac{1}{\frac{4}{3} \pi R^3} \int_0^R x \left[\pi \left(\sqrt{R^2 - x^2} \right)^2 \right] dx$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{R^3} \int_0^R (R^2 x - x^3) dx$$

$$= \frac{3}{2} \frac{1}{R^3} \left[R^2 \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4} \right]_0^R$$

$$x_v = x_s = \frac{3}{8} R$$

Volumenschwerpunkt $S(x_v, y_v, z_v) = S\left(\frac{3}{8} R, 0, 0\right)$

- Anmerkungen:
- Setzt sich das betrachtete Volumen V aus Teilvolumina V_i mit bekannter Schwerpunktslage $\mathbf{r}_{vi}$ zusammen, so gilt:

$$V = \sum_i V_i$$

$$\begin{aligned} \int_{(V)} \mathbf{r} dV &= \int_{(V_1)} \mathbf{r} dV + \int_{(V_2)} \mathbf{r} dV + \dots = \sum_i \int_{(V_i)} \mathbf{r} dV \\ &= \mathbf{r}_{v_1} V_1 + \mathbf{r}_{v_2} V_2 + \dots = \sum_i \mathbf{r}_{vi} V_i \end{aligned}$$

Der Volumenschwerpunkt - ausgedrückt durch seinen Ortsvektor $\mathbf{r}_v$ - ergibt sich dann zu:

$$\mathbf{r}_v = \frac{\sum_i \mathbf{r}_{vi} V_i}{\sum_i V_i}$$

bzw. in Komponenten:

$$x_v = \frac{\sum_i x_{vi} V_i}{\sum_i V_i}, \quad y_v = \frac{\sum_i y_{vi} V_i}{\sum_i V_i}, \quad z_v = \frac{\sum_i z_{vi} V_i}{\sum_i V_i}$$

- Hat der Körper eine Symmetrieachse, dann liegt der Schwerpunkt auf dieser Achse.

3.3 Flächenschwerpunkt

Bei flächenhaften Körpern mit konstanter Dicke (z.B. Scheiben, Platten) liegt der Schwerpunkt im Abstand $z_s = \frac{h}{2}$ oberhalb der Grundfläche A . Das Volumenelement dV ergibt sich zu

$$dV = h \cdot dA; \quad dA = \text{Flächenelement}$$

und das Volumen zu: $V = h \cdot A$

Für die Schwerpunktkoordinaten (x_A, y_A) der Fläche $A = \int_{(A)} dA$ folgt:

$$\begin{aligned} x_A = x_s &= \frac{1}{A} \int_{(A)} x dA \\ y_A = y_s &= \frac{1}{A} \int_{(A)} y dA \end{aligned}$$

wobei x bzw. y die Koordinaten des Flächenelements dA sind.

Anmerkungen:

- Statische Momente:

$$S_x := \int_{(A)} y dA$$

Flächenmomente erster Ordnung

$$S_y := \int_{(A)} x dA$$

- Für Teilflächen A_i mit bekannter Lage des Schwerpunkts S_i mit Ortsvektoren $\mathbf{r}_{Ai} = (x_{Ai}, y_{Ai})$ der Teilfläche A_i gilt für die Lage des Schwerpunkts S der zusammengesetzten Fläche:

$$x_A = \frac{\sum_i x_{Ai} A_i}{\sum_i A_i}; \quad y_A = \frac{\sum_i y_{Ai} A_i}{\sum_i A_i}$$

- Die Achsen durch den Schwerpunkt heißen **Schwerachsen**.
Die statischen Momente S_x und S_y bezüglich der Schwerachsen sind Null.
- Das statische Moment bezüglich einer Symmetrieachse verschwindet. Deshalb gilt:

Symmetrieachsen sind Schwerachsen

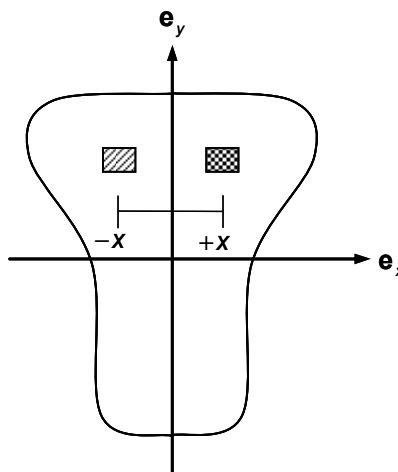


Abb. 3.3-1: Fläche mit Symmetrieachse

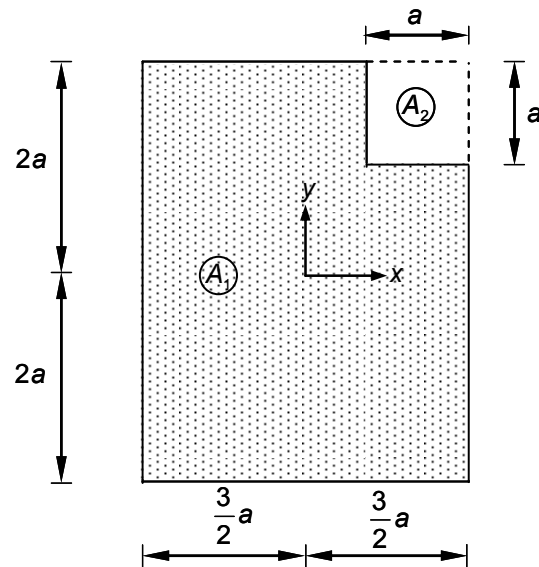
Beispiel 1: Rechteckfläche mit Aussparung

Abb. 3.3-2: Ausgespartes Rechteck

Schwerpunkte der Teilflächen:

Rechteck ohne Aussparung:

$$A_1 = 3a \cdot 4a = 12a^2 \text{ mit Flächenschwerpunkt: } \mathbf{r}_{A_1} = (x_{A_1}, y_{A_1}) = (0, 0) = \mathbf{r}_{A_1}$$

Aussparung:

$$A_2 = a \cdot a = a^2 \text{ mit Schwerpunkt: } \mathbf{r}_{A_2} = (x_{A_2}, y_{A_2}) = \left(a, \frac{3}{2}a\right) = \mathbf{r}_{A_2}$$

Gesamtfläche: $A = A_1 - A_2$

Flächenschwerpunkt $S(x_A, y_A)$ des Rechtecks mit Aussparung:

$$x_A = \frac{x_{A_1} \cdot A_1 - x_{A_2} \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{0 \cdot 12a^2 - a \cdot a^2}{12a^2 - a^2} = -\frac{1}{11}a$$

$$y_A = \frac{y_{A_1} \cdot A_1 - y_{A_2} \cdot A_2}{A_1 - A_2} = \frac{0 \cdot 12a^2 - \frac{3}{2}a \cdot a^2}{12a^2 - a^2} = -\frac{3}{22}a$$

Beispiel 2:

Ermittlung des Flächenschwerpunkts eines Dreiecks

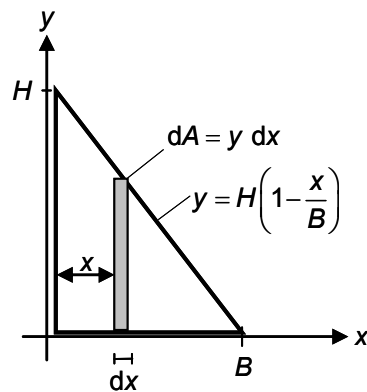


Abb. 3.3-3: Flächenschwerpunkt eines Dreiecks

$$A = \int_{(A)} dA = \int_0^B y \, dx = \int_0^B H \left(1 - \frac{x}{B}\right) dx = H \left[x - \frac{x^2}{2B} \right]_0^B = H \left[B - \frac{B^2}{2B} \right] = \frac{1}{2} BH$$

$$x_A = \frac{1}{A} \int_{(A)} x \, dA = \frac{1}{A} \int_0^B x y \, dx$$

Hinweis: Zur Berechnung von x_A den Streifen dA so legen, dass jeder Teil des Streifens denselben Abstand x von der y -Achse hat.

$$x_A = \frac{1}{\frac{1}{2} BH} \int_0^B x H \left(1 - \frac{x}{B}\right) dx = \frac{H}{\frac{1}{2} BH} \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3B} \right]_0^B = \frac{1}{3} B$$

Hinweis zur Berechnung der Koordinaten y_A :

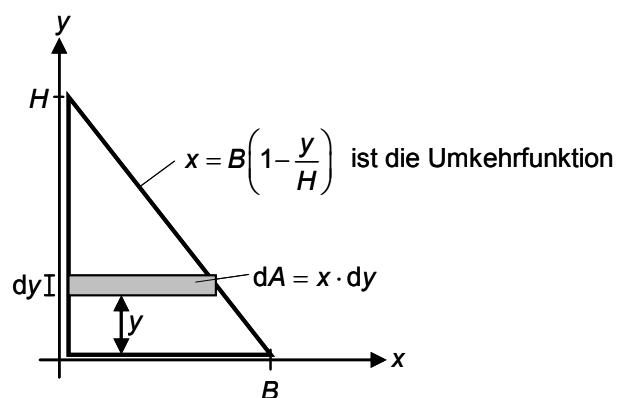


Abb. 3.3-4: Dreieck mit Flächenelement

$$y_A = \frac{\int_{(A)} y \, dA}{A} = \frac{\int_{(A)} y x \, dy}{A} = \frac{\int_0^H y B \left(1 - \frac{y}{H}\right) dy}{\frac{1}{2} BH} = \dots = \frac{1}{3} H$$

3.4 Schwerpunkt einer Linie

Linienartige Körper zeichnen sich dadurch aus, dass zwei Abmessungen des Körpers sehr viel kleiner als die dritte sind, also kleine Abmessungen des Querschnitts A gegenüber der Länge S haben.

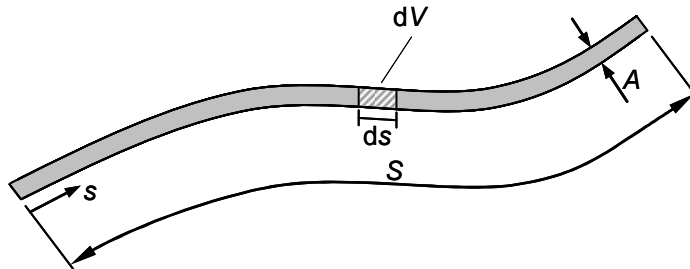


Abb. 3.4-1: Linienartiger Körper mit Volumenelement

$$dV = A \cdot ds$$

$$V = A \cdot S$$

Linien-schwerpunkt: $\mathbf{r}_s = \frac{1}{AS} \int \mathbf{r} (A ds)$ aus Gl. (3.2.6) für Volumenschwerpunkt $\mathbf{r}_v$

$$\mathbf{r}_s = \frac{1}{S} \int_{(s)} \mathbf{r} ds$$

in Komponenten:

$$x_s = \frac{1}{S} \int_{(s)} x ds$$

$$y_s = \frac{1}{S} \int_{(s)} y ds$$

Beispiel: Halbkreisförmig gebogener Draht – Berechnung des Linienschwerpunkts

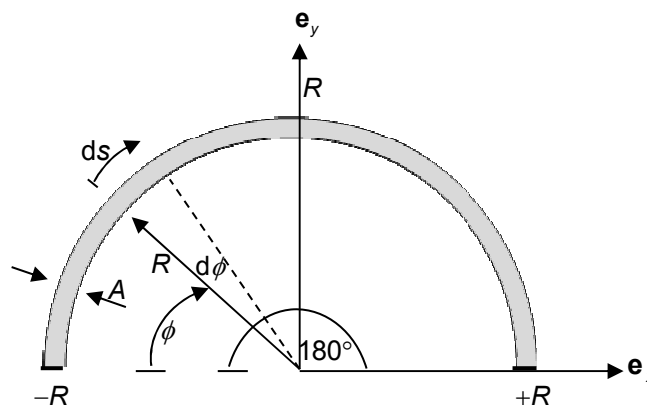


Abb. 3.4-2: Linienartiger Körper mit Radius R und Querschnittsfläche A

Es gelten die folgenden Beziehungen für Polarkoordinaten:

$$\begin{aligned} ds &= R d\phi \\ x &= R \cos \phi \\ y &= R \sin \phi \end{aligned}$$

Länge des Halbkreises $S = \pi R$

Schwerpunkt: $x_s = 0$ (liegt auf der Symmetrieachse)

$$y_s = \frac{1}{S} \int_{(s)} y ds = \frac{1}{\pi R} \int_0^\pi \underbrace{(R \sin \phi)}_{=y} \underbrace{(R d\phi)}_{=ds} = \frac{R}{\pi} [-\cos \phi]_0^\pi = \frac{2}{\pi} R$$

3.5 Schwerpunkt einer Linienlast

Eine Linienlast $q(x)$ soll durch ein statisch äquivalentes Kraftsystem mit Resultierender R und Kraftangriffspunkt x_s ersetzt werden. Analog zur Schwerpunktbestimmung einer Gruppe von Einzelkräften $\mathbf{G}$ kann der Schwerpunkt einer kontinuierlich verteilten Linienlast $q(x)$ bestimmt werden.

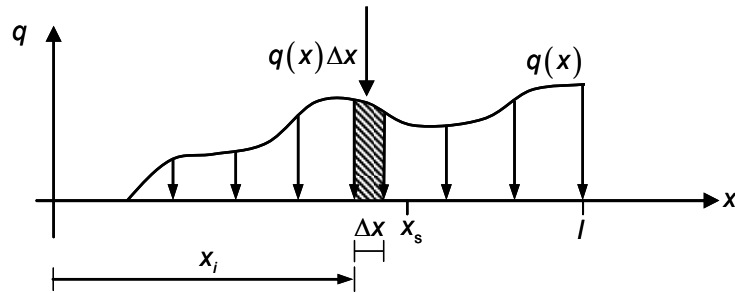


Abb. 3.5-1: Streckenlast $q(x)$

Die Linienlast über der differentiellen Länge Δx wird als Einzellast $q(x) \Delta x$ aufgefasst.

Resultierende Last:
$$R \approx \sum_i q(x_i) \Delta x \quad (3.5.1)$$

Resultierendes Moment:
$$M_0 \approx \sum_i x_i (q(x_i) \Delta x) = R x_s \quad (3.5.2)$$

Im Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ gehen die Summen in Integrale über, und nach Einsetzen von Gl. (3.5.1) in Gl. (3.5.2) folgt für die Lage x_s der Wirkungslinie der resultierenden Kraft R :

$$x_s = \frac{\int_{(l)} x q(x) dx}{\int_{(l)} q(x) dx}$$

Beispiel: Balken mit dreieckförmiger Last $q(x) = q_0 \frac{x}{L}$

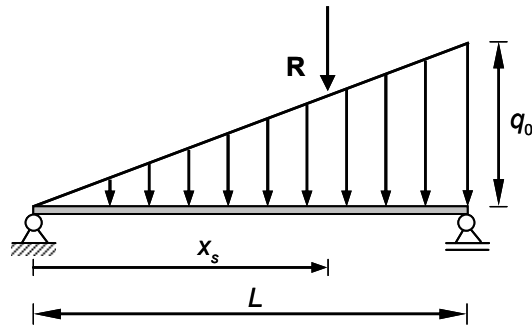


Abb. 3.5-2: Dreieckförmige Linienlast auf einfachem Balken

Gesucht: Größe R und Lage x_s der Resultierenden $\mathbf{R}$.

$$R = \int_{(l)} q(x) dx = \int_0^L q_0 \frac{x}{L} dx = \frac{q_0}{L} \left[\frac{x^2}{2} \right]_0^L = \frac{1}{2} q_0 L$$

$$x_s = \frac{\int_0^L x q_0 \frac{x}{L} dx}{\int_0^L q_0 \frac{x}{L} dx} = \frac{\frac{q_0}{L} \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^L}{R} = \frac{\frac{1}{3} q_0 L^3}{\frac{1}{2} q_0 L^2} = \frac{2}{3} L$$

4 Statik der Systeme starrer Körper

4.1 Auflagerarten

Ein starrer Körper ist an bestimmten Punkten (= Auflager) gegen eine feste Unterlage gestützt und wird durch Kräfte belastet.

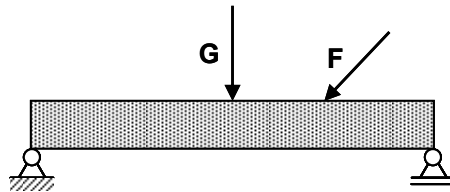


Abb. 4.1-1: Systemskizze eines Körpers mit Lasten und Auflagern

Auflagerreaktionen: Die vom Auflager auf den belasteten Körper ausgeübten Kräfte und Momente

Ziel: Gleichgewicht zwischen den Auflagerkräften und den Lasten herstellen.

Schnittprinzip: Der zu untersuchende Körper wird gedanklich von den Lagern gelöst. Auf den befreiten Körper werden die Auflagerreaktionen anstelle der Lager eingezeichnet (Befreiungsprinzip von LAGRANGE).

Freikörperbild:

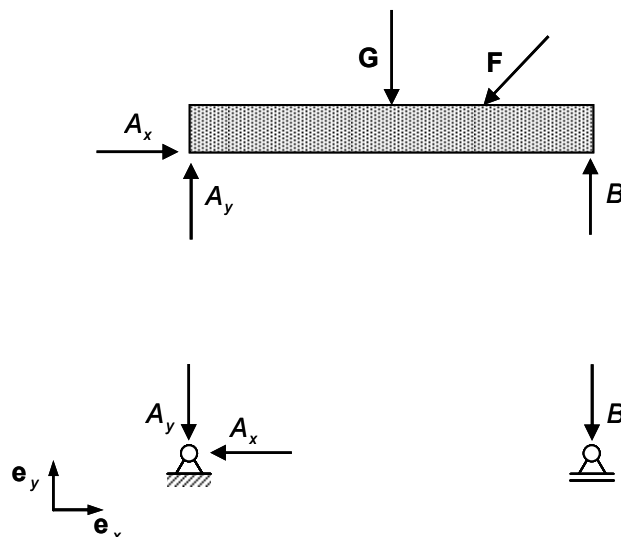


Abb. 4.1-2: Freikörperbild mit Lasten und Reaktionskräften

Die Auflagerreaktionen stellen sich so ein, dass sich der Körper im Gleichgewicht befindet und damit in Ruhe ist.

4.2 Statische Bestimmtheit

Ein **starrer Körper**, der keinen Auflagerbindungen unterworfen ist, hat

- 6 unabhängige Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade) im Raum, nämlich 3 Translationen und 3 Rotationen,
- 3 unabhängige Bewegungsmöglichkeiten (Freiheitsgrade) in der Ebene, nämlich 2 Translationen und 1 Drehung.

Ein **Punkt**, der keinen Auflagerbindungen unterworfen ist, hat

- 3 unabhängige Verschiebungen im Raum
- 2 unabhängige Verschiebungen in der Ebene

Jede Lagerreaktion unterdrückt eine Bewegungsmöglichkeit.

Räumliche Lagerungs- und Verbindungselemente

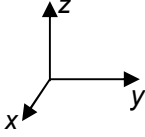
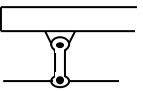
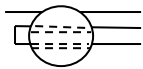
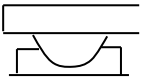
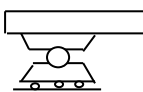
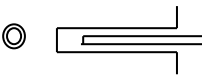
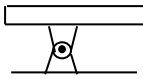
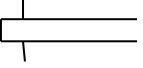
Symbol	Bezeichnung	Übertragbare Kräfte und Momente	
	Punktlager	A_z	
	Räumliche Pendelstütze	A_z	
	Kugelgleitgelenk	A_x, A_z	
	Kugelgelenk	A_x, A_y, A_z	
	Spitzenlager	A_x, A_y, A_z	
	Bewegliches Kippgelenk	A_x, A_z M_y, M_z	
	Längsverschiebliches Achslager	A_x, A_z M_x, M_z	
	Festes Achslager	A_x, A_y, A_z M_y, M_z	
	Längsverschiebliches Lager	A_x, A_z M_x, M_y, M_z	
	Einspannung	A_x, A_y, A_z M_x, M_y, M_z	

Abb. 4.2-1: Auflagerarten und übertragbare Reaktionsgrößen

Ebene Lagerungs- und Verbindungselemente

Erklärung der Lagersymbole (Auflagerbindungen):

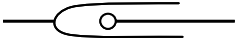
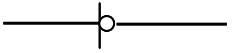
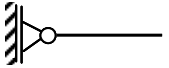
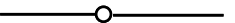
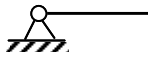
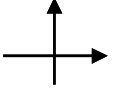
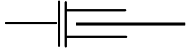
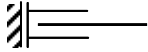
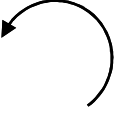
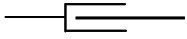
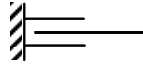
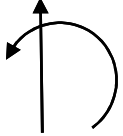
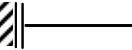
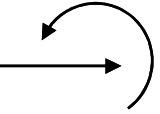
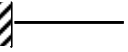
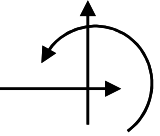
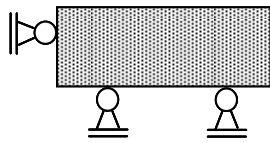
Symbole		Bezeichnung	Übertragbare Kräfte und Momente
Übergang	Rand		
		Horizontales Schiebestück	 A_y
		Vertikales Schiebestück	 A_x
		Gelenk	 A_x, A_y
		Doppel-Schiebestück	 M_z
		Horizontales Schiebestück	 A_y, M_z
		Vertikales Schiebestück	 A_x, M_z
		Einspannung	 A_x, A_y, M_z

Abb. 4.2-2: Auflagersymbole und Lagergrößen

Def.: Ein Körper ist **statisch bestimmt** gelagert, wenn der Körper unverschieblich gelagert ist und alle Lagerreaktionen sich aus den Gleichgewichtsbedingungen ermitteln lassen. Treten weniger Lagerreaktionen als Gleichgewichtsbedingungen auf, so ist der Körper verschieblich (kinematisch gelagert).

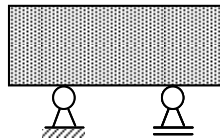
Möglichkeiten der statisch bestimmten Lagerung eines Körpers in der Ebene

1.



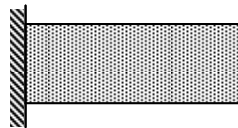
drei 1-wertige Lager
(Wirkungslinie nicht durch einen Punkt)

2.



ein 2-wertiges und ein 1-wertiges Lager

3.

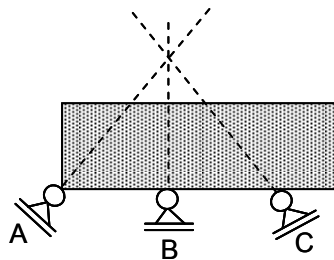


ein 3-wertiges Lager

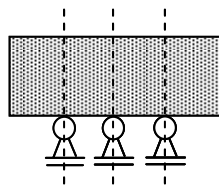
Abb. 4.2-3: Lagerungsmöglichkeiten eines Körpers

Beispiele für verschiebbliche Lagerungen

1. Alle Wirkungslinien schneiden sich in einem Punkt. Die Kräfte A, B und C bilden ein zentrales Kraftsystem, das mit einer beliebigen äußeren Last nicht ins Gleichgewicht gebracht werden kann.



2. Alle Wirkungslinien sind parallel; d.h. der Körper ist in horizontaler Richtung verschieblich.



3. Der Körper ist in vertikaler Richtung verschieblich.

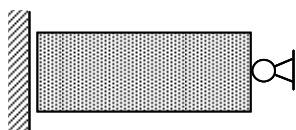


Abb. 4.2-4: Drei Beispiele für verschiebbliche Lagerung

4.3 Bestimmung der Auflagerreaktionen

Die Auflagerkräfte eines Körpers unter äußeren Lasten stellen sich so ein, dass der Körper im Gleichgewicht ist. Das auf den frei geschnittenen Körper wirkende Kraftsystem muss ein Gleichgewichtssystem sein, also

$$\mathbf{R} = \mathbf{0} \quad (4.2.1a)$$

$$\text{und} \quad \mathbf{M}_{\text{Rc}} = \mathbf{0} \quad (4.2.1b)$$

i) Gleichgewicht am zentralen Kraftsystem (dritte Grundaufgabe)

Sollen die unbekannten Auflagerreaktionen nach Größe und Richtung für eine Gleichgewichtsaufgabe in der Ebene (Raum) bestimmt werden, so lassen sich am zentralen Kraftsystem in der Ebene (Raum) höchstens zwei (drei) **unbekannte Kräfte** mit Hilfe der beiden (drei) Kräftegleichgewichtsbedingungen $R_x = 0$ und $R_y = 0$ sowie ($R_z = 0$ im räumlichen Fall) berechnen.

Beispiel: Zwei gelenkig miteinander verbundene Lagerstäbe 1 und 2 sind im Knoten C momentenfrei verbunden und in den Punkten A und B an einer Wand befestigt. Der Knoten C wird durch das Gewicht in Form der Einzelkraft $G = 2 \text{ kN}$ belastet. Wie groß sind die Reaktionskräfte in den Lagerstäben 1 und 2?

Systemskizze

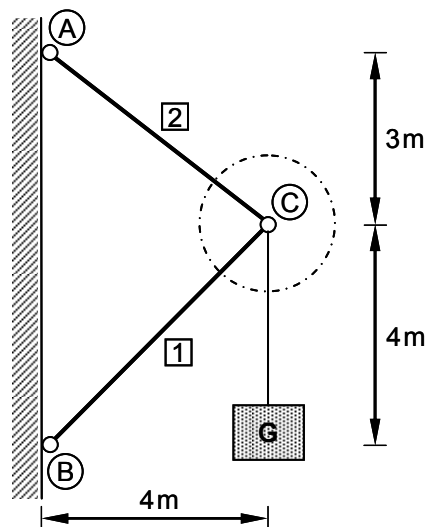


Abb. 4.3-1: Einfaches Stabsystem

Die Stabachsen legen die Wirkungslinien WL 1 und WL 2 für die Reaktionskräfte $\mathbf{S}_1$ und $\mathbf{S}_2$ in den Lagerstäben 1 und 2 fest.

Graphische Lösung:

Betrachte Knoten ③:

1. Knoten ③ freischneiden.
2. Wirkungslinien WL 1 und WL 2 der unbekannten Stabkräfte S_1 und S_2 einzeichnen
3. Gleichgewicht herstellen: Dazu die Gewichtskraft G mit den beiden unbekannten Stabkräften S_1 und S_2 ins Gleichgewicht bringen, in dem G in Komponenten F_1 und F_2 mit den vorgegebenen Wirkungslinien WL1 und WL2 zerlegt wird (zweite Grundaufgabe).
4. Krafteck schließen und Gleichgewicht herstellen.
5. Stabkräfte S_1 und S_2 durch Abmessen und Umrechnen mit Kräftemaßstab bestimmen.

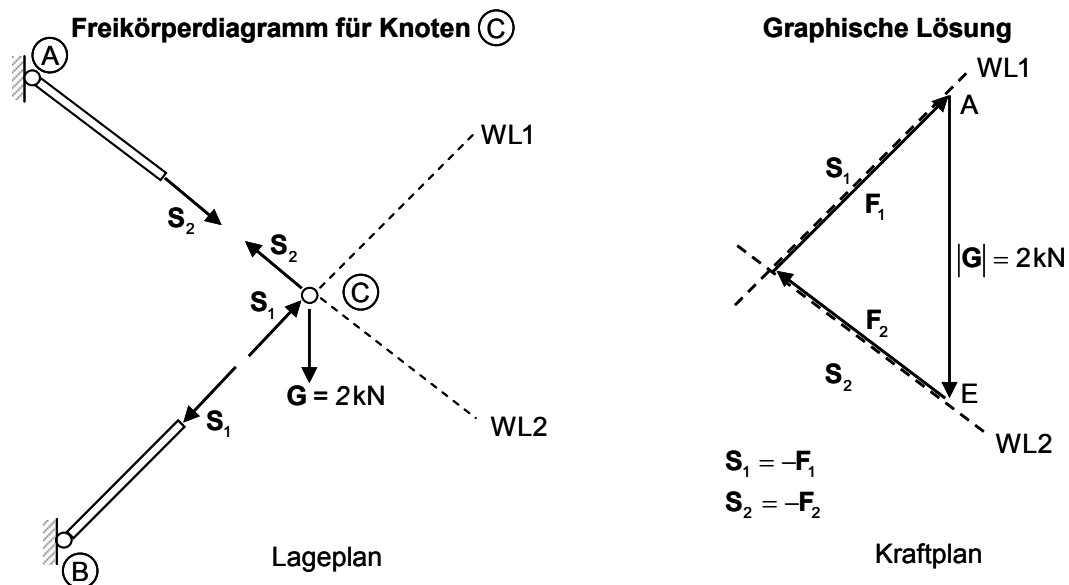


Abb. 4.3-2: Lage- und Kraftplan für das Stabsystem

Kraftplan: Kräftemaßstab: $m_k = \frac{0,5 \text{ kN}}{1 \text{ cm}}$

$$S_1 = 3,3 \text{ cm} \cdot \frac{0,5 \text{ kN}}{1 \text{ cm}} = 1,65 \text{ kN}$$

$$S_2 = 2,8 \text{ cm} \cdot \frac{0,5 \text{ kN}}{1 \text{ cm}} = 1,40 \text{ kN}$$

Rechnerische Lösung:

1. Schritt: Freikörperbild: Knoten von den Auflagern freischneiden
2. Schritt: Lagerreaktionen einzeichnen: Dazu Stabkräfte so antragen, dass sie vom Knoten © wegzeigen (positive Richtung).

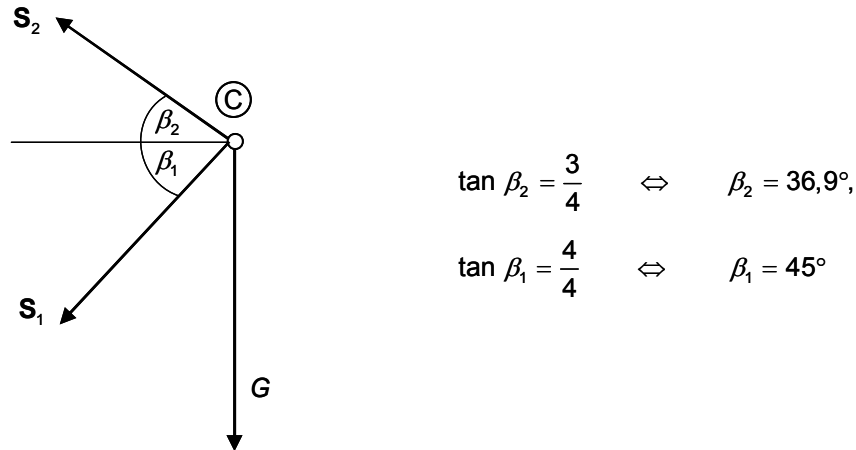


Abb. 4.3-3: Lageplan der Kräfte am Knoten ©

- Einführung eines geschickt gewählten Koordinatensystems (zweckmäßig: x = horizontal, y = vertikal)
- Richtungswinkel α_i von der x-Achse aus im Gegenuhrzeigersinn antragen.

$$\alpha_2 = 180^\circ - 36,9^\circ \approx 143^\circ$$

$$\alpha_1 = 180^\circ + 45^\circ = 225^\circ$$

$$\alpha = 270^\circ$$

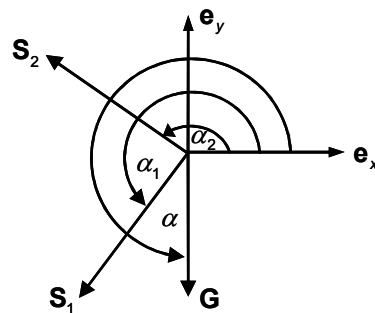


Abb. 4.3-4: Kraftvektoren mit Richtungswinkel

3. Schritt: Gleichgewichtsbedingungen anschreiben: Dazu Stabkräfte S_1 und S_2 sowie ggf. Lasten in Komponenten zerlegen.
- Hinweis: Gleichgewicht in positiven Koordinatenrichtungen formulieren, damit der Impulssatz später keine unnötigen Probleme bereitet.

GGW:

$$\begin{aligned}
 \text{x-Richtung } \rightarrow : R_x = \sum_i F_{ix} = S_{1x} + S_{2x} + G_x &= 0 \\
 &= S_1 \cos 225^\circ + S_2 \cos 143^\circ + 0 = 0 \\
 \Leftrightarrow -0,707 S_1 - 0,800 S_2 &= 0 \quad (4.2.2)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{y-Richtung } \uparrow : R_y = \sum_i F_{iy} = S_{1y} + S_{2y} + G_y &= 0 \\
 &= S_1 \sin 225^\circ + S_2 \sin 143,1^\circ + (-2) = 0 \\
 \Leftrightarrow -0,707 S_1 + 0,600 S_2 &= 2 \quad (4.2.3)
 \end{aligned}$$

4. Schritt: Lösbarkeit untersuchen (hier: 2 Unbekannte und 2 unabhängige Gleichungen)

5. Schritt: Unbekannte berechnen

$$\text{Aus Gl. (4.2.2): } S_2 = -\frac{0,707}{0,8} S_1 = -0,884 S_1 \quad (4.2.4)$$

$$\text{Gl. (4.2.4) in Gl. (4.2.3): } -0,707 S_1 + 0,600 (-0,884 S_1) = 2$$

$$-1,24 S_1 = 2$$

$$S_1 = -1,62 \text{ kN}$$

$$\text{Aus Gl. (4.2.4) und Gl. (4.2.3): } S_2 = -0,884 (-1,62) = 1,43 \text{ kN}$$

ii) Gleichgewicht am allgemeinen Kraftsystem (dritte Grundaufgabe)

In der Ebene (Raum) können mit Hilfe der GGW-Bedingungen drei (sechs) Kräfte mit vorgegebenen Wirkungslinien und Momenten am allgemeinen Kraftsystem bestimmt werden.

Lösungsweg: Körper freischneiden und unbekannte Lagerkräfte und -momente antragen.

Graphische Lösung mittels Seileckverfahrens oder CULMANN'schem Verfahren der Zwischenresultierenden (wird nicht behandelt).

Analytische Lösung mittels der drei Gleichgewichtsbedingungen der Statik:

$$\text{Summe aller horizontalen Kräfte} = 0 : \quad R_x = \sum_i F_{ix} = 0$$

$$\text{Summe aller vertikalen Kräfte} = 0 : \quad R_y = \sum_i F_{iy} = 0$$

$$\text{Summe aller Momente} = 0 : \quad M_{cz} = \sum_i M_{icz} = 0$$

$$\text{Die Kräfte-GGW-Bedingungen} \quad R_x = 0, \quad R_y = 0, \quad M_{cz} = 0$$

sind den gemischten Kräfte- und

Momentenbedingungen: $R_x = 0, \quad M_{Pz} = 0, \quad M_{Oz} = 0$ (Gerade OP darf nicht $\perp$ zur x-Achse sein)

oder $R_y = 0, \quad M_{Pz} = 0, \quad M_{Oz} = 0$ (Gerade OP darf nicht $\perp$ zur y-Achse sein)

oder $M_{Oz} = 0, \quad M_{Pz} = 0, \quad M_{Qz} = 0$ (Punkte O, P, Q dürfen nicht auf einer Geraden liegen)

äquivalent!

Hinweis: Um aufwendige Komponentenzerlegungen vieler Kräfte zu vermeiden, ist es in der Praxis oft günstiger, eine oder beide Kräfte-GGW-Bedingungen durch Momentengleichgewichtsbedingungen zu ersetzen.

Beispiel: Rechnerische Lösung zur Bestimmung der Auflagerreaktion

Ein Balken der Länge l ist an beiden Enden gelagert und durch sein Eigengewicht G sowie durch eine zusätzliche Kraft F belastet (s. Skizze). Wie groß sind die Auflagerkräfte?

Systemskizze:

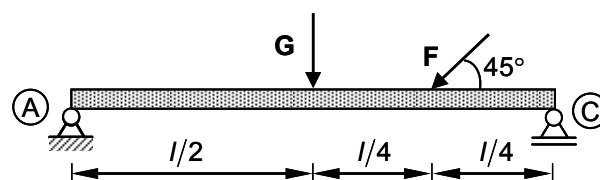
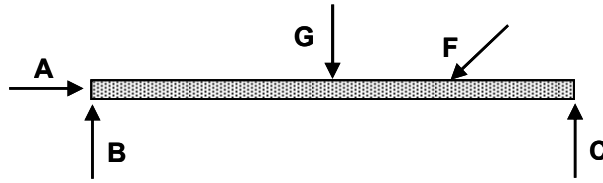


Abb. 4.3-5: System und Belastung

1. Freikörperbild zeichnen:

Starren Körper mit äußeren Lasten von den Auflagern freischneiden.

Abb.4.3-6: Freigeschnittener Balken mit Lasten **G** und **F** sowie Reaktionskräften **A**, **B** und **C**

2. Auflagerreaktionen **A, B, C** am frei geschnittenen Körper antragen.

3. Gleichgewichtsbedingungen formulieren.

Die Summe der Kräfte und die Summe aller Momente um einen beliebigen Bezugspunkt muss jeweils Null ergeben. In diesem Fall wurde das linke Auflager (A) als Momentenbezugspunkt gewählt.

$$\overset{+}{\rightarrow} \sum_i F_{ix} = 0 = A - F \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad \Leftrightarrow \quad A = \frac{\sqrt{2}}{2} F \quad (4.2.5)$$

$$\overset{+}{\uparrow} \sum_i F_{iy} = 0 = B + C - G - F \frac{1}{2} \sqrt{2} \quad (4.2.6)$$

$$\overset{+}{\curvearrowright} \sum_i M_{iA} = 0 = Cl - G \frac{l}{2} - F \frac{1}{2} \sqrt{2} \frac{3}{4} l \quad \Leftrightarrow \quad C = \frac{G}{2} + \frac{3\sqrt{2}}{8} F \quad (4.2.7)$$

4. Lösbarkeit des Gleichungssystems untersuchen (Determinante der Koeffizientenmatrix muss ungleich null sein – siehe lineare Algebra).

5. Unbekannte berechnen.

$$\text{Gl. (4.2.7) in Gl. (4.2.6):} \quad B = \frac{G}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} F \quad (4.2.8)$$

6. Kontrollrechnung

$$\overset{+}{\curvearrowright} \sum_i M_{iC} = 0 = -Bl + G \frac{l}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} F \frac{l}{4} \quad \Leftrightarrow \quad B = \frac{G}{2} + \frac{\sqrt{2}}{8} F$$

4.4 Reaktionskräfte in Systemen starrer Körper

Mehrere starre Körper, die miteinander über Verbindungselemente zusammenhängen, bilden ein Starrkörpersystem.

Beispiel:

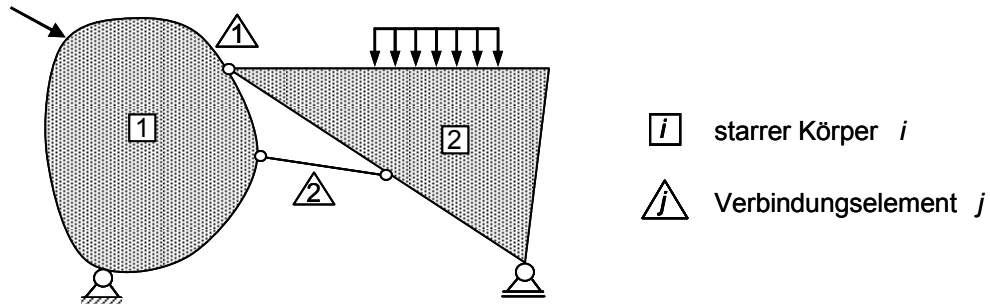


Abb. 4.4-1: System starrer Körper

Zur Ermittlung der Auflagerreaktion und der Kräfte und Momente in den Verbindungselementen werden die einzelnen Körper an den Verbindungsstellen und Auflagern frei geschnitten (LAGRANGESches Befreiungsprinzip).

Anstelle der Auflager und Verbindungselemente werden auf die frei geschnittenen Körper die vom Auflager bzw. Verbindungselement übertragbaren Reaktionskräfte angetragen.

Verbindungselemente für Scheiben

Verbindungselemente in der Ebene

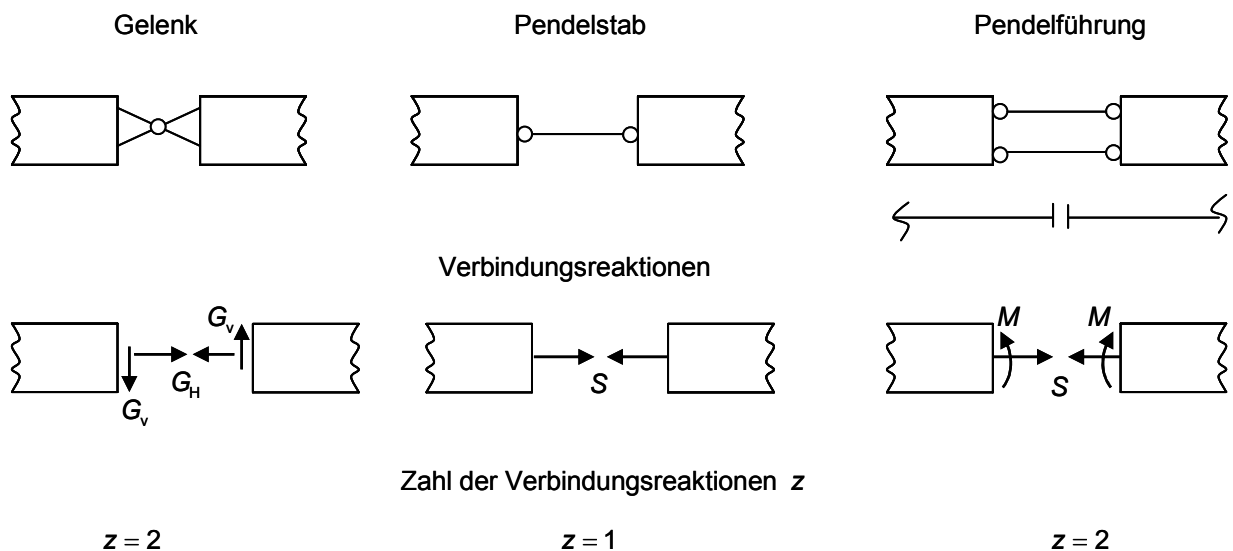


Abb. 4.4-2: Verbindungselemente

Beispiel: Freikörperdiagramm für Körper 1 und 2

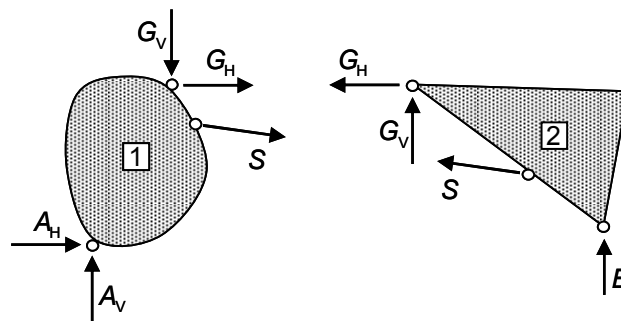


Abb. 4.4-3: Freikörperdiagramm

Ziel ist es, alle unbekannten Reaktionskräfte an den Auflagern und Verbindungsknoten aus den zur Verfügung stehenden Gleichgewichtsbedingungen an den Einzelkörpern zu ermitteln.

i) Statische Bestimmtheit

An jedem Teilkörper müssen in der Ebene (Raum) **drei** (sechs) Gleichgewichtsbedingungen erfüllt sein.

Die Zahl der Auflagerreaktionen sei a

Die Zahl der Verbindungsreaktionen sei z

Def.: Ein System von starren Körpern heißt **statisch bestimmt**, wenn alle Auflager- und Verbindungsreaktionen ($a + z$) aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden können und das System oder Teile davon unbeweglich sind.

Notwendige, aber **nicht** (!) hinreichende Bedingung für die statische Bestimmtheit eines Systems aus n Körpern :

In der Ebene:
$$a + z = 3n \quad (4.4.1)$$

Im Raum:
$$a + z = 6n \quad (4.4.2)$$

Beispiel:

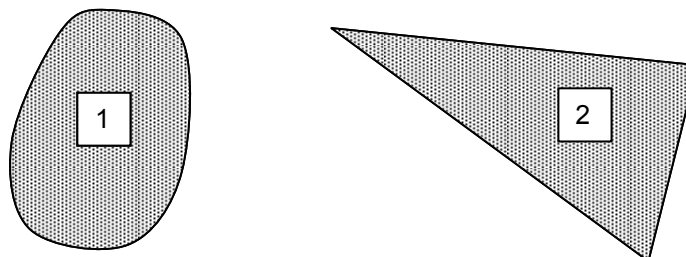


Abb. 4.4-4: Einzelne Körper (Scheiben)

Auflagerreaktionen: $\left. \begin{matrix} A_V \\ A_H \\ B \end{matrix} \right\} a=3$

Verbindungsreaktionen: $\left. \begin{matrix} G_V \\ G_H \\ S \end{matrix} \right\} z=3$

Anzahl der starren Körper: $n = 2$

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & z & = & 3 & n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 3 & + & 3 & = & 3 \cdot 2 \end{array}$$

⇒ Das System ist statisch bestimmt.

⇒ Alle Auflager- und Verbindungsreaktionen können aus den Gleichgewichtsbedingungen berechnet werden.

Def.: Ein System von n starren Körpern heißt **m -fach statisch unbestimmt**, wenn die Zahl der unbekannten Reaktionskräfte (Auflager- und Verbindungsreaktionen) $(a + z)$ die Anzahl der Gleichgewichtsbedingungen um die Zahl m übersteigt.

in der Ebene $\boxed{m = a + z - 3n}$ (4.4.3)

im Raum: $m = a + z - 6n$ (4.4.4)

Beispiel 1:

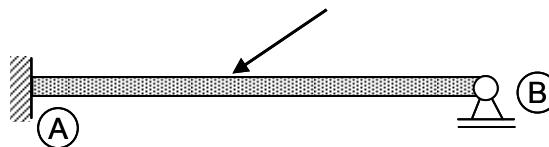


Abb. 4.4-5: Systemskizze

Auflager- und Zwischenreaktionen:

$$a_A = 3 \qquad a_B = 1 \qquad a + z = a_A + a_B = 3 + 1 = 4$$

Anzahl der Teilkörper: $n = 1$

Grad der statischen Unbestimmtheit: $m = 1 \Rightarrow 1\text{-fach statisch unbestimmt}$

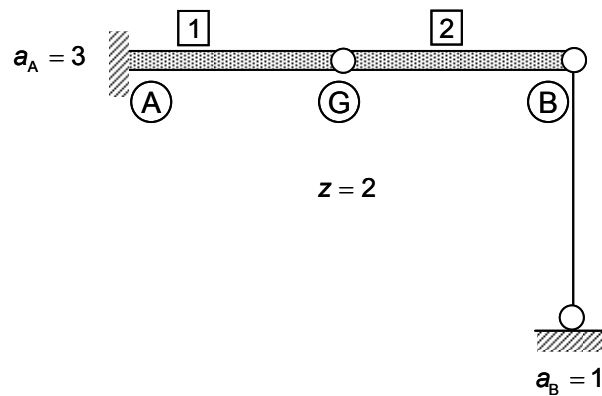
Beispiel 2:

Abb. 4.4-6: Systemskizze

Anzahl der Teilkörper:

$$n = 2$$

Auflager- und Zwischenreaktionen:

$$\begin{aligned} a + z &= a_A + a_B + z = 3 + 1 + 2 = 6 \\ &= 3n = 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

Grad der statischen Unbestimmtheit:

$$m = 0 \quad \Rightarrow \quad \text{statisch bestimmt}$$

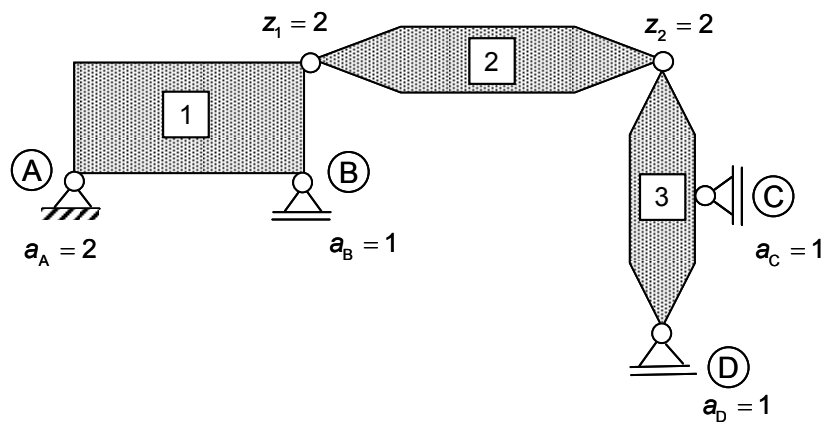
Beispiel 3:

Abb. 4.4-7: Systemskizze

Anzahl der Teilkörper:

$$n = 3$$

Anzahl der Auflager- und Zwischenreaktionen:

$$\begin{aligned} a + z &= a_A + a_B + a_C + a_D + z_1 + z_2 \\ &= 2 + 1 + 1 + 1 + 2 + 2 \\ &= 9 \\ &= 3n = 3 \cdot 3 \end{aligned}$$

Grad der statischen Unbestimmtheit:

$$m = 0, \quad \Rightarrow \quad \text{statisch bestimmt}$$

ii) Bestimmung der Auflager- und Verbindungsreaktionen

Das System wird von den Auflagern gelöst und an den Verbindungen der Teilscheiben durchgeschnitten (Freikörperbild). Anstelle der Auflager- und Verbindungselemente werden die Auflager- und die Verbindungsreaktionen ("Gelenkkräfte") angetragen.

Zur systematischen Ermittlung der Reaktionsgrößen an den Auflager- und Verbindungsknoten werden für jede starre Scheibe das Freikörperbild gezeichnet und die Gleichgewichtsbedingungen formuliert.

Beispiel 1: System aus zwei Starrkörpern

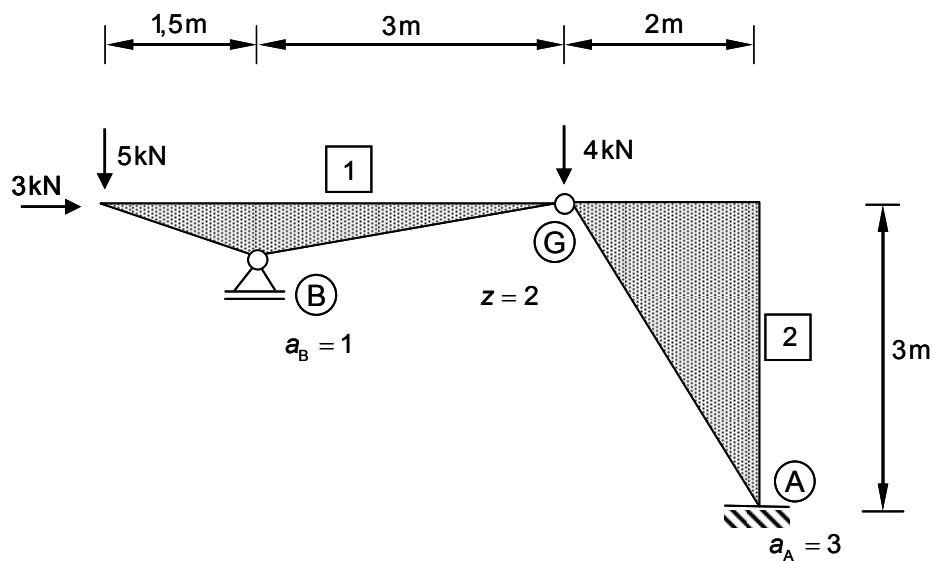


Abb. 4.4-8: Systemskizze

Ges.: Auflagerreaktionen

Verbindungsreaktionen (Gelenkkräfte)

1. Statische Bestimmtheit:

Grad der statischen Unbestimmtheit (Zahl der Freiheitsgrade):

$$m = (1 + 3 + 2) - 3 \cdot 2 = 0 \quad \Leftrightarrow \text{statisch bestimmt}$$

2. Freischneiden und Antragen der unbekannten Auflager- und Verbindungsreaktionen, wobei die Schnitte durch die Gelenke gelegt werden.

4 unbekannte Lagergrößen und 2 unbekannte Verbindungsreaktionen

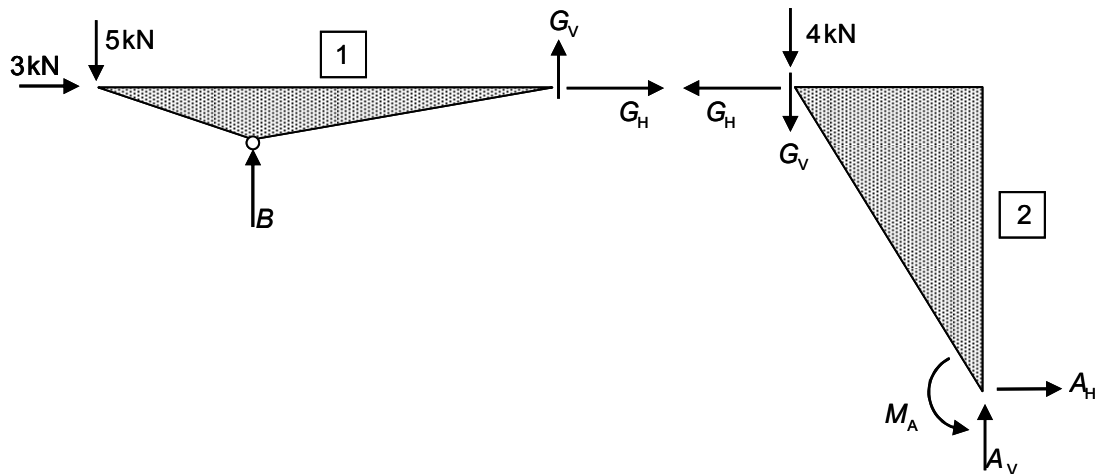


Abb. 4.4-9: Freikörperdiagramme

3. Je drei Gleichgewichtsbedingungen pro Scheibe formulieren.

GGW an Scheibe 1:

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow: \quad G_H + 3 \text{ kN} &= 0 & \Leftrightarrow \quad G_H &= -3 \text{ kN} \\
 \curvearrowleft B: \quad 5 \text{ kN} \cdot 1,5 \text{ m} + G_V \cdot 3 \text{ m} &= 0 & \Leftrightarrow \quad G_V &= -2,5 \text{ kN} \\
 + \uparrow: \quad -5 \text{ kN} + B + G_V &= 0 \quad \text{mit (4.4.5)} & \Leftrightarrow \quad B &= +7,5 \text{ kN}
 \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

Kontrolle:

Summe aller Momente um den Punkt G:

$$\begin{aligned}
 + 5 \cdot 4,5 - B \cdot 3 &= 0 \\
 \Leftrightarrow 22,5 - 7,5 \cdot 3 &= 0 \quad \text{erfüllt.}
 \end{aligned}$$

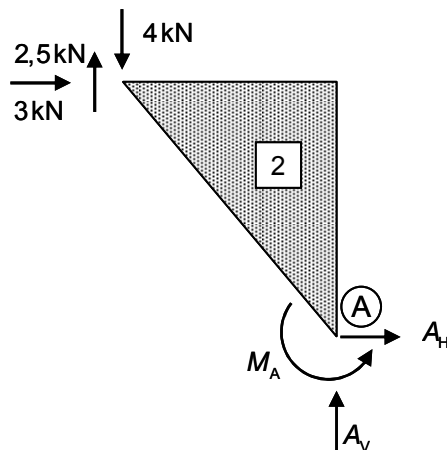


Abb. 4.4-10: Freikörperdiagramm für Scheibe 2

GGW an Scheibe 2:

$$\begin{aligned}
 + \rightarrow: \quad A_H + 3 \text{ kN} &= 0 & \Leftrightarrow \quad A_H &= -3 \text{ kN} \\
 + \uparrow: \quad A_V + 2,5 \text{ kN} - 4 \text{ kN} &= 0 & \Leftrightarrow \quad A_V &= +1,5 \text{ kN}
 \end{aligned}$$

$$\overset{\curvearrowleft}{A}: M_A - 2,5 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} - 3 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + 4 \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} = 0 \Leftrightarrow M_A = 6 \text{ kNm}$$

$$\text{Kontrolle: Summe aller Momente um den Punkt } \overset{\curvearrowleft}{G}: 6 \text{ kNm} + (+1,5) \text{ kN} \cdot 2 \text{ m} + (-3) \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} = 0$$

$$\begin{array}{ccc} \parallel & \parallel & \parallel \\ M_A & A_V & A_H \end{array}$$

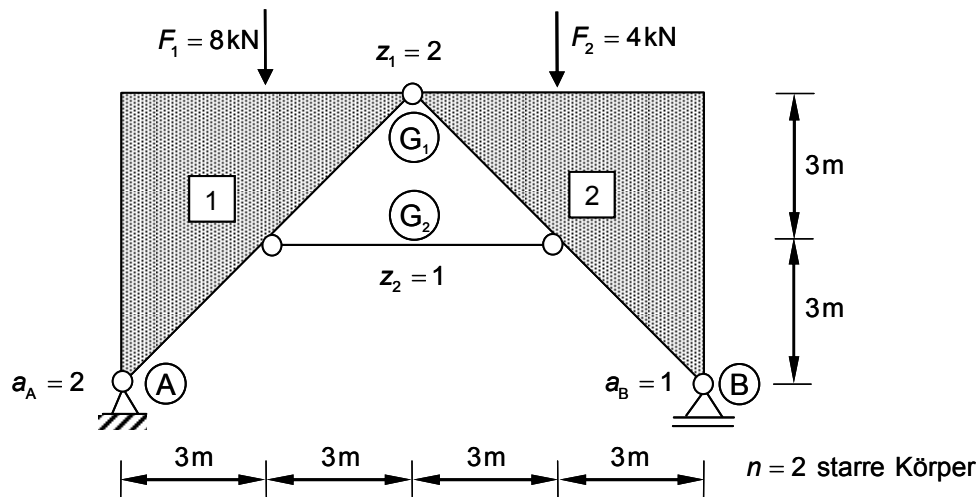
Beispiel 2: Starrkörpersystem

Abb. 4.4-11: Systemskizze

Verbindungsreaktionen:

$$z = z_1 + z_2 = 2 + 1 = 3$$

Auflagerreaktionen:

$$a = a_A + a_B = 2 + 1 = 3$$

1. Statische Bestimmtheit:

$$m = (a + z) - 3n = (3 + 3) - 3 \cdot 2 = 0$$

Zahl der statisch überzähligen Reaktionskräfte

2. Auflagerreaktionen am "frei geschnittenen" Gesamtsystem

Da nur 3 unbekannte Lagergrößen vorliegen, können diese am untenstehenden Freikörperbild für das Gesamtsystem berechnet werden, ohne dass Schnitte durch die Verbindungselemente gelegt werden müssen. Das Gesamtsystem wird als ein einziger Starrkörper behandelt.

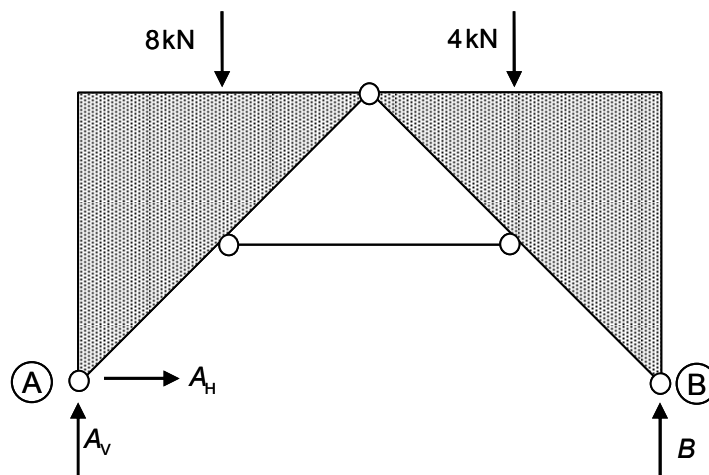


Abb. 4.4-12: Freikörperdiagramm

3. Gleichgewicht am Gesamtsystem

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow: \end{array} \sum_i F_{ix} = 0: \quad A_H = 0$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ A: \end{array} \sum_i M_{iA} = 0: \quad B \cdot 12 - 8 \cdot 3 - 4 \cdot 9 = 0 \quad \Leftrightarrow B = 5 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} + \uparrow: \end{array} \sum_i F_{iy} = 0: \quad A_V - 8 - 4 + B = 0 \quad \Leftrightarrow A_V = 12 - 5 = 7 \text{ kN}$$

Probe: $\begin{array}{l} \curvearrowright \\ B: \end{array} \sum_i M_{iB} = 0 = -7 \cdot 12 + 8 \cdot 9 + 4 \cdot 3 \quad \text{erfüllt}$

$$-84 + 72 + 12 = 0$$

4. Verbindungsreaktionen am "frei geschnittenen" Teilkörper:

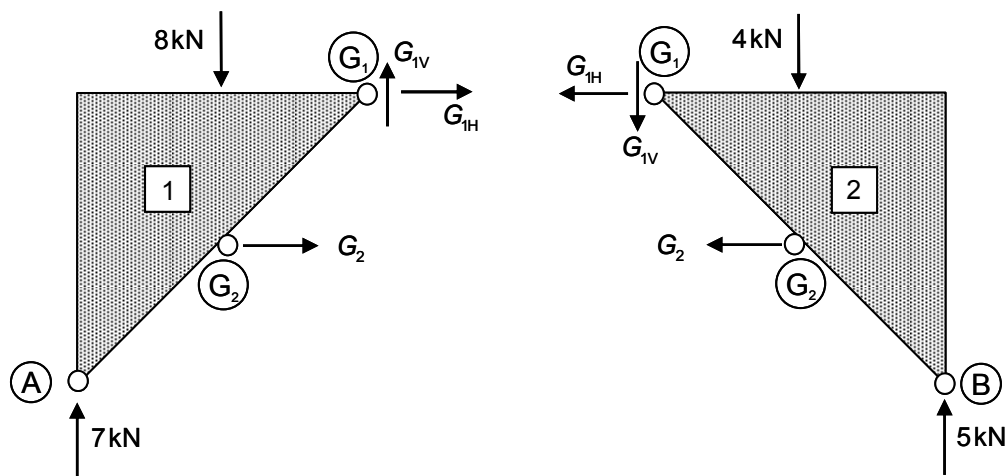


Abb. 4.4-13: Freikörperdiagramme mit unbekannten Gelenkkräften

5. Gleichgewicht an Scheibe 1:

$$\begin{array}{l} + \uparrow: \end{array} \sum_i F_{iy} = 0 = G_{1V} - 8 \text{ kN} + 7 \text{ kN} \quad \Leftrightarrow G_{1V} = 1 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ G: \end{array} \sum_i M_{iG} = 0 = -7 \text{ kN} \cdot 6 \text{ m} + 8 \text{ kN} \cdot 3 \text{ m} + G_2 \cdot 3 \text{ m} \quad \Leftrightarrow G_2 = 6 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow: \end{array} \sum_i F_{ix} = 0 = G_{1H} + G_2 \quad \Leftrightarrow G_{1H} = -6 \text{ kN}$$

Gleichgewicht an Scheibe 2 zur Kontrolle:

$$\begin{array}{l} + \uparrow: \end{array} \sum_i F_{iy} = 0 = -G_{1V} - 4 + 5 \quad \Leftrightarrow G_{1V} = 1 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} \curvearrowright \\ G: \end{array} \sum_i M_{iG} = 0 = -G_2 \cdot 3 + 5 \cdot 6 - 4 \cdot 3 \quad \Leftrightarrow G_2 = 6 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow: \end{array} \sum_i F_{ix} = 0 = -G_{1H} - G_2 \quad \Leftrightarrow G_{1H} = -6 \text{ kN}$$

iii) Dreigelenksystem (Dreigelenkbogen)

Ein aus zwei Scheiben bestehendes System mit jeweils zweiwertiger Lagerung der Einzelscheiben und zweiwertiger Verbindung nennt man einen **Dreigelenkbogen** oder Dreigelenksystem. Der Dreigelenkbogen ist statisch bestimmt gelagert und brauchbar, sofern die drei Gelenke nicht auf einer Geraden liegen.

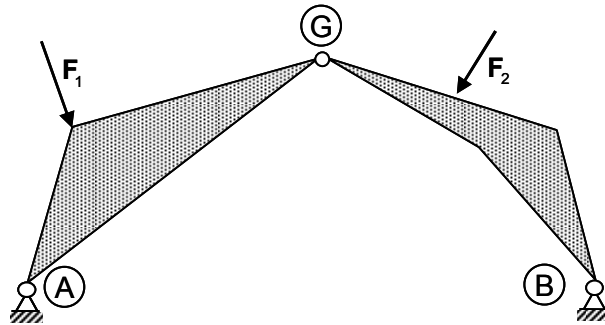


Abb. 4.4-14: Beispiel für Dreigelenksystem

Beispiele für Dreigelenksysteme:

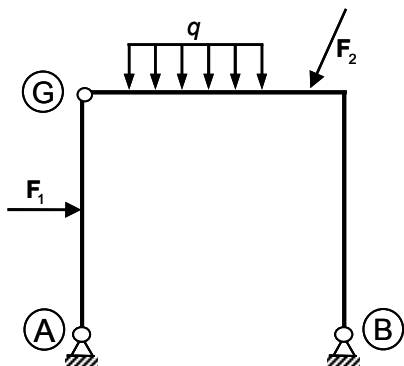


Abb. 4.4-15: Dreigelenksystem bestehend aus Balken (Rahmen)

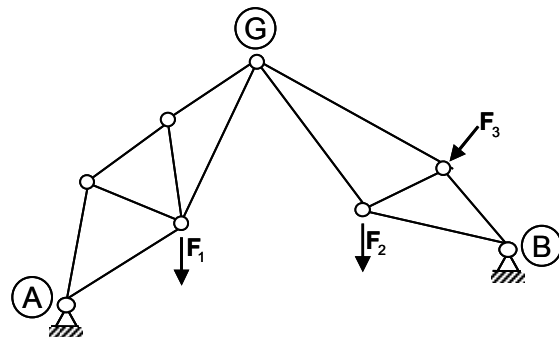


Abb. 4.4-16: Dreigelenksystem bestehend aus Fachwerkscheiben

Rechnerische Ermittlung der Auflagerreaktionen und Gelenkkräfte

1. Freischneiden der Scheiben mit Schnitten durch das mittlere Gelenk und die Lager.
2. Antragen der insgesamt 6 unbekannten Reaktionskräfte (jeweils zwei Lagerreaktionen und zwei Verbindungsreaktionen)

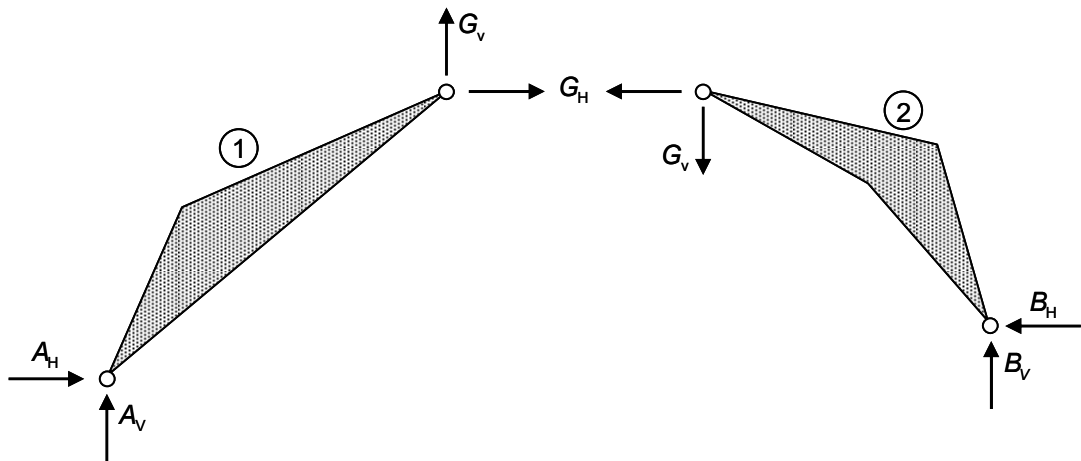


Abb. 4.4-17: Freikörperdiagramme für Dreigelenksystem

3. An jeder Scheibe stehen 3 Gleichgewichtsbedingungen zur Berechnung der Lagerkräfte zur Verfügung. Daraus ergeben sich 6 Gleichungen für 6 Unbekannte.

Beispiel 1: Dreigelenkbogen mit Außengelenken auf gleicher Höhe

Eine symmetrische Gelenkbrücke (s. Skizze) wird durch das Gewicht ihrer Teilkörper $G = 3\text{ kN}$ und eine Einzelkraft $K = 4\text{ kN}$ an der Stelle $x = 1,5\text{ m}$ belastet. Der Schwerpunkt der Teilkörper liegt im Drittelpunkt. Ermitteln Sie die Auflagerreaktionen in den Punkten (A) und (B) sowie die Gelenkkräfte im Punkt (G).

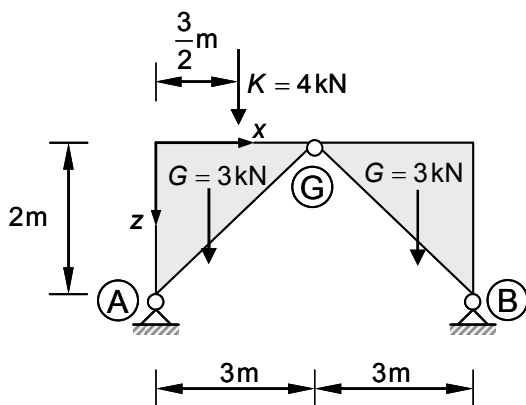


Abb. 4.4-18: System mit Belastung

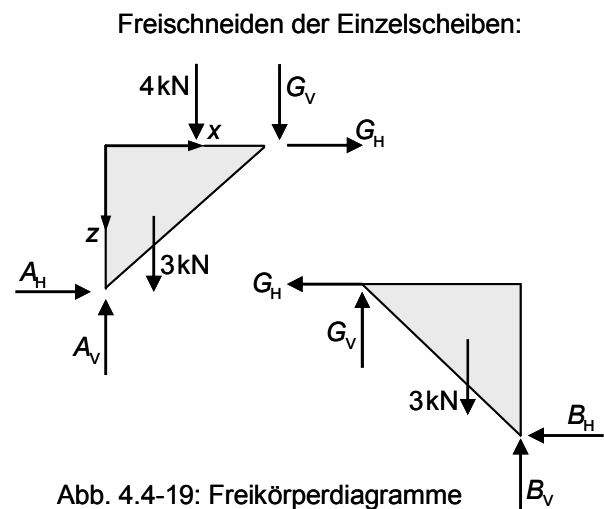


Abb. 4.4-19: Freikörperdiagramme

Notwendige Bedingung für die statische Bestimmtheit:

Auflagerreaktionen: $A_H, A_V, B_H, B_V \Rightarrow a = 4$

Verbindungsreaktionen: $G_H, G_V \Rightarrow z = 2$

Teilkörper:

$$\Rightarrow \begin{aligned} n &= 2 \\ a + z &= 3n \\ 4 + 2 &= 3 \cdot 2 \end{aligned}$$

 $m = 0 \Rightarrow$ System ist statisch bestimmt.

Die Auflager und das Gelenk können jeweils nur zwei Kraftkomponenten übertragen. Die entsprechenden Reaktionskräfte in den Punkten $\textcircled{A}$, $\textcircled{B}$ und $\textcircled{G}$ werden eingeführt. Für jeden Teilkörper können drei Gleichgewichtsbedingungen formuliert werden. Als Bezugspunkt für die Momentengleichgewichte wird das mittlere Gelenk gewählt.

Linker Teilkörper:

$$\rightarrow^+: \quad \sum_i F_{ix} = 0 = A_H + G_H \quad (4.4.6)$$

$$+\uparrow: \quad \sum_i F_{iz} = 0 = A_V - 3\text{kN} - 4\text{kN} - G_V \quad (4.4.7) \quad \text{System von}$$

$$\curvearrowleft \textcircled{G}: \quad \sum_i M_{iG} = 0 = 4\text{kN} \left(3\text{m} - \frac{3}{2}\text{m} \right) + 3\text{kN} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3\text{m} - A_V \cdot 3\text{m} + A_H \cdot 2\text{m} \quad (4.4.8) \quad 6 \text{ linearen}$$

Rechter Teilkörper:

$$\rightarrow^+: \quad \sum_i F_{ix} = 0 = -G_H - B_H \quad (4.4.9) \quad \text{Gleichungen}$$

$$+\uparrow: \quad \sum_i F_{iz} = 0 = G_V - 3\text{kN} + B_V \quad (4.4.10) \quad \text{mit 6}$$

$$\curvearrowleft \textcircled{G}: \quad \sum_i M_{iG} = 0 = -3\text{kN} \cdot \frac{2}{3} \cdot 3\text{m} + B_V \cdot 3\text{m} - B_H \cdot 2\text{m} \Rightarrow B_V - \frac{2}{3} B_H = 2\text{kN} \quad (4.4.11) \quad \text{Unbekannten}$$

Es liegen 6 lineare Gleichungen für die 6 Unbekannten $A_H, A_V, \underbrace{G_H, G_V}_{\text{Gelenkkräfte}}, B_H, B_V$ vor.

$$\begin{array}{cccccc} A_H & A_V & B_H & B_V & G_H & G_V \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} A_H \\ A_V \\ B_H \\ B_V \\ G_H \\ G_V \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 0 \\ 7 \\ -12 \\ 0 \\ 3 \\ 6 \end{bmatrix} \end{array}$$

Lösbarkeit untersuchen: Determinante der Koeffizientenmatrix $\neq 0$

GAUSSches Eliminationsverfahren liefert Lösung des linearen Gleichungssystems.

Oder: Geschicktes Einsetzen der Unbekannten in andere Gleichungen erfordert viel Erfahrung und Übersicht.

Lösung der Gleichungen:

$$(4.4.9) \quad \rightarrow \quad (4.4.6) \quad \Rightarrow \quad A_H = B_H \quad (4.4.12)$$

$$(4.4.10) \quad \rightarrow \quad (4.4.7) \quad \Rightarrow \quad A_V = 2 \cdot 3 \text{ kN} + 4 \text{ kN} - B_V \quad (4.4.13)$$

$$(4.4.12, 4.4.13) \quad \rightarrow \quad \frac{1}{3\text{m}} (4.4.8) \quad \Rightarrow \quad 2 \cdot 3 \text{ kN} - B_V - B_H \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \cdot 3 \text{ kN} - 2 \text{ kN} \quad (4.4.14)$$

$$(4.4.14) \quad + \quad (4.4.11) \quad \Rightarrow \quad B_H = \frac{1}{3} \cdot 3 \text{ kN} \cdot \frac{3}{2} + 4 \text{ kN} \frac{3}{8} = 3 \text{ kN} = A_H = -G_H \quad (4.4.15)$$

$$(4.4.14) \quad \rightarrow \quad (4.4.11) \quad \Rightarrow \quad B_V = 3 \text{ kN} + 4 \text{ kN} \frac{3}{12} = 4 \text{ kN} \quad (4.4.16)$$

$$(4.4.16) \quad \rightarrow \quad (4.4.13) \quad \Rightarrow \quad A_V = 3 \text{ kN} + 4 \text{ kN} \left(1 - \frac{3}{12}\right) = 6 \text{ kN}$$

$$(4.4.16) \quad \rightarrow \quad (4.4.10) \quad \Rightarrow \quad G_V = -4 \text{ kN} \frac{3}{12} = -1 \text{ kN}$$

Nachteil: Die 6 Gleichungen sind gekoppelt und deshalb durch elementare Zeilenumformungen im Sinne der linearen Algebra für die Handrechnung mühsam zu lösen.

Vorteilhafteres Vorgehen bei der Gleichgewichtsberechnung zur Bestimmung der Auflagergrößen des Dreigelenkbogens - siehe Hörsaalübung!

Um große gekoppelte Gleichungssysteme zu vermeiden, empfiehlt es sich, Momentengleichungen mit durchdachter Wahl des Bezugspunkts zu formulieren. Bei Dreigelenkbögen kann man durch Anschreiben der Momentengleichungen um das Außengelenk in jedem Teilkörper mit zwei gekoppelten Gleichungen auskommen.

Im nachfolgenden Beispiel wird die Lösung der Statikaufgabe durch geschickte Wahl der Momentenbezugspunkte durchgeführt, um die Berechnung von Hand möglichst übersichtlich zu gestalten.

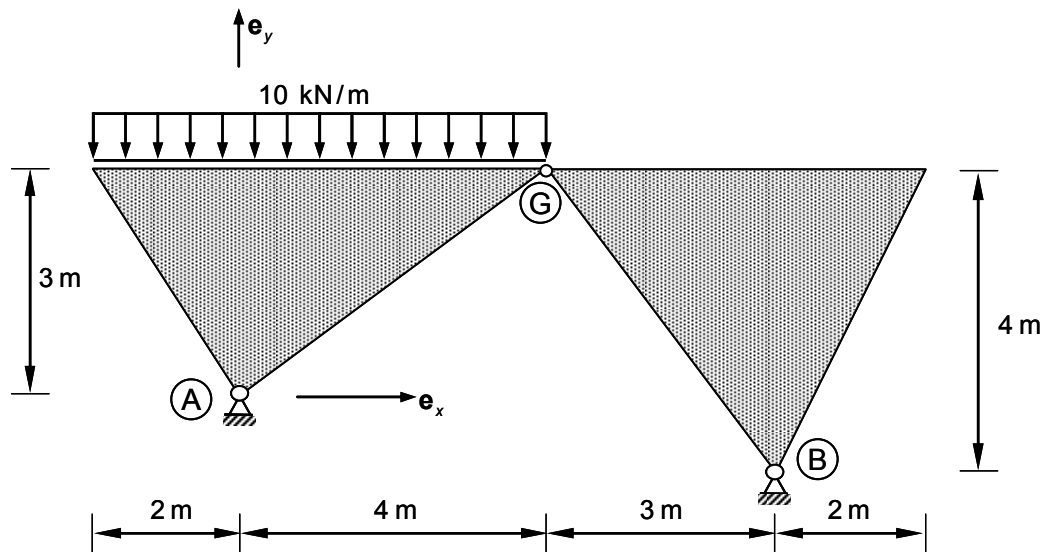
Beispiel 2: Effiziente Lösung der Statikaufgabe für einen Dreigelenkbogen

Abb. 4.4-20: Dreigelenksystem mit Außengelenken auf unterschiedlicher Höhe

Außengelenke auf unterschiedlicher Höhe → 2 gekoppelte Gleichungen mit zwei Unbekannten

Gesucht: Auflager- und Gelenkkräfte

Lösung: Freischneiden der Einzelscheiben

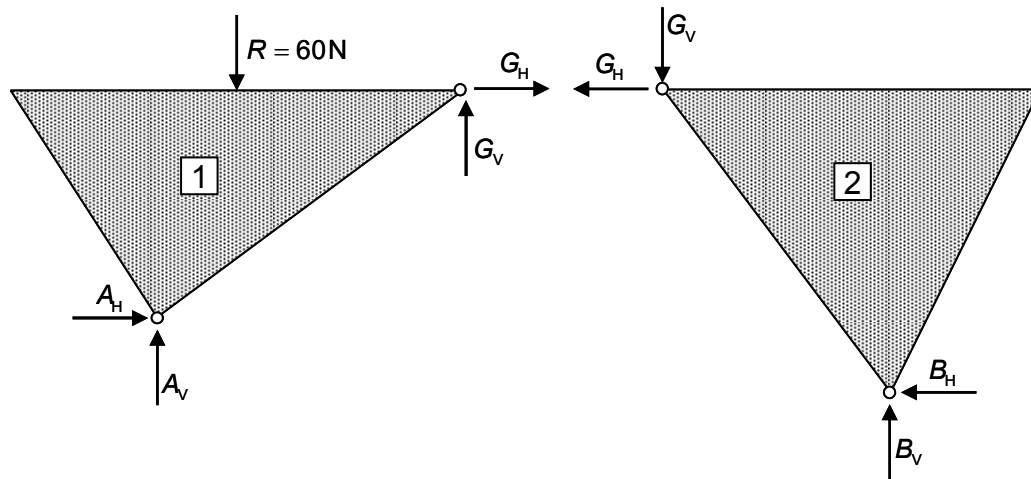


Abb. 4.4-21: Freikörperdiagramme des Dreigelenksystems

Gleichgewichtsbedingungen so formulieren, dass möglichst wenig gekoppelte Gleichungen entstehen. Deshalb eignen sich Momentengleichungen um die Außengelenke, so dass nur die beiden Gelenkkräfte als Unbekannte auftreten.

Scheibe 1: $\overset{+}{\curvearrowleft} \text{ A} : \sum_i M_{iA} = G_V \cdot 4\text{ m} - G_H \cdot 3\text{ m} - 60 \cdot 1\text{ m} = 0 \quad (4.4.17)$

Scheibe 2:  B :
$$\sum_i M_{iB} = G_V \cdot 3\text{m} + G_H \cdot 4\text{m} = 0 \quad (4.4.18)$$

Aus (4.4.18):
$$G_H = -\frac{3}{4} G_V \quad (4.4.19)$$

(4.4.19) in (4.4.17):
$$4 G_V - \left(-\frac{3}{4} G_V\right) \cdot 3 = 60$$

$$G_V = 60 \cdot \frac{4}{25} = 9,60 \text{ kN} \quad (4.4.20)$$

(4.4.20) in (4.4.19):
$$G_H = -\frac{3}{4} \cdot 9,60 = -7,20 \text{ kN}$$

Scheibe 1: $\uparrow$:
$$\sum_i F_{iy} = 0 : A_V - 60 + G_V = 0$$

$$A_V = 50,4 \text{ kN}$$

$\rightarrow$:
$$\sum_i F_{ix} = 0 : A_H + G_H = 0$$

$$A_H = 7,20 \text{ kN}$$

Scheibe 2: $\uparrow$:
$$\sum_i F_{iy} = 0 : B_V - G_V = 0$$

$$B_V = 9,60 \text{ kN}$$

$\rightarrow$:
$$\sum_i F_{ix} = 0 : -B_H - G_H = 0$$

$$B_H = +7,20 \text{ kN}$$

iv) Gelenkbalken (Gerberträger)

Bei langen Trägern müssen häufig außer den Lagern am Balkenende weitere Zwischenlager vorgesehen werden. Diese zugehörigen Auflagerreaktionen erhöhen die Zahl der statischen Unbekannten. Montagestöße werden oft nicht biegesteif ausgeführt, sodass hier Momentengelenke angenommen werden. Derartige Träger werden als Gelenkbalken oder Gerberträger bezeichnet.

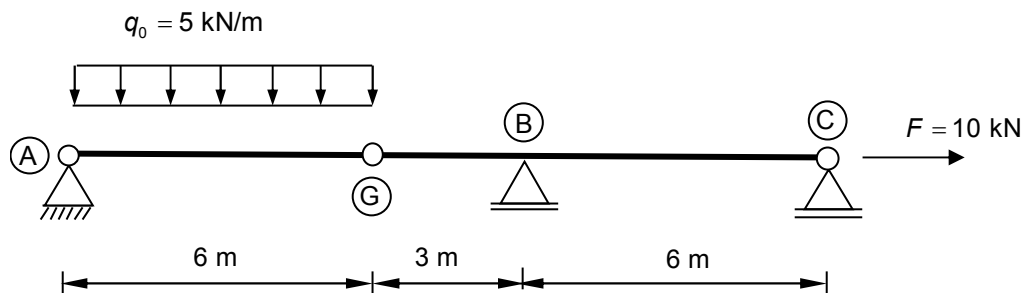
Beispiel 1: Gelenkbalken unter Quer- und Längsbelastung

Abb. 4.4-22: Gelenkbalken mit äußeren Lasten und Auflagern

Gesucht: Lager- und Gelenkkräfte

Lösung: Freischneiden der einzelnen Teilkörper (Balken, Scheiben).
Schnitte durch Auflager und Gelenke führen!

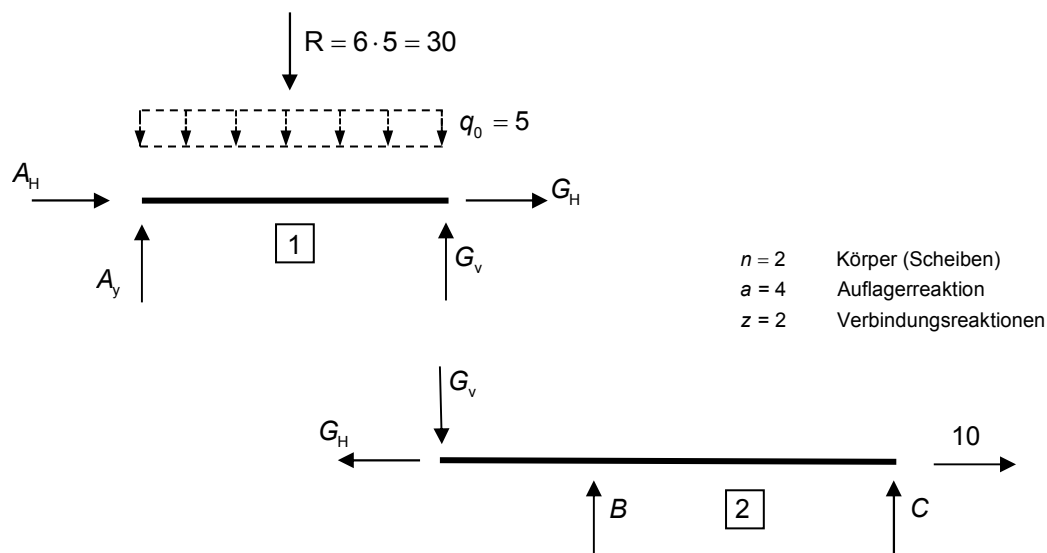


Abb. 4.4-23: Freikörperdiagramme für die einzelnen Gelenkbalken

Prüfung der statischen Bestimmtheit des Gelenkbalkens

$$m = a + z - 3n$$

$$m = (2 + 1 + 1) + (2) - 3 \cdot 2 = 0 \quad \Rightarrow \text{System ist statisch bestimmt}$$

Die Auflagerreaktionen können nacheinander bestimmt werden, wenn das Momentengleichgewicht um die Gelenke und Auflagerstellen angeschrieben wird. Man beginnt mit dem Balkenelement, an dem nur zwei unbekannte Vertikalkräfte (Gelenk- und Auflagerkräfte) angreifen.

Scheibe **1**: Gleichgewichtsbedingungen

$$\curvearrowleft (A): \quad \sum M = 0: \quad G_v \cdot 6 - 30 \cdot 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G_v = 15 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft (G): \quad \sum M = 0: \quad -A_v \cdot 6 + 30 \cdot 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad A_v = 15 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow \end{array} \quad \sum F_{ix} = 0: \quad A_H + G_H = 0$$

Scheibe **2**: Gleichgewichtsbedingungen

$$\curvearrowleft (B): \quad \sum M = 0: \quad G_v \cdot 3 + C \cdot 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad C = -7,5 \text{ kN}$$

$$\curvearrowleft (G): \quad \sum M = 0: \quad B \cdot 3 + C \cdot 9 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B = +22,5 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow \end{array} \quad \sum F_{ix} = 0: \quad -G_H + 10 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad G_H = 10 \text{ kN}$$

$$\text{Daraus folgt:} \quad \Rightarrow \quad A_H = -10 \text{ kN}$$

Kontrollen: Kräftegleichgewicht am Gesamtsystem

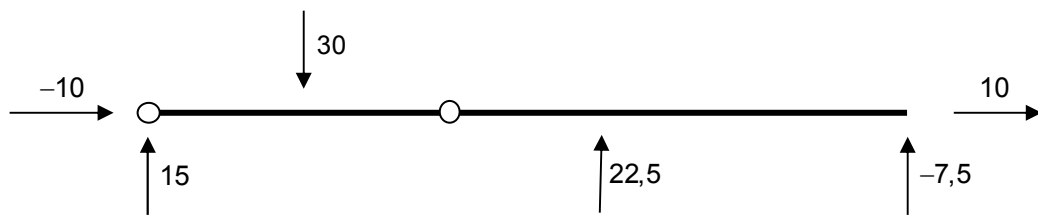


Abb. 4.4-24: Gelenkbalken mit Lasten und Auflagerreaktionen

Die äußeren Lasten und die Auflagerkräfte sind dann im Gleichgewicht, wenn die resultierende Kraft verschwindet

$$\uparrow +: \quad \sum F_{iy} = 0: \quad 15 - 30 + 22,5 + (-7,5) = 0$$

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow \end{array} \quad \sum F_{ix} = 0: \quad -10 + 10 = 0$$

5 Schnittgrößen in Stäben und Balken

5.1 Schnittgrößenvereinbarungen in Stäben, Balken und Bögen

Schlanke Körper mit kleinen Querschnittsabmessungen in der Höhe (h) und der Breite (b) im Vergleich zur Länge (l) nennt man **Stäbe**.

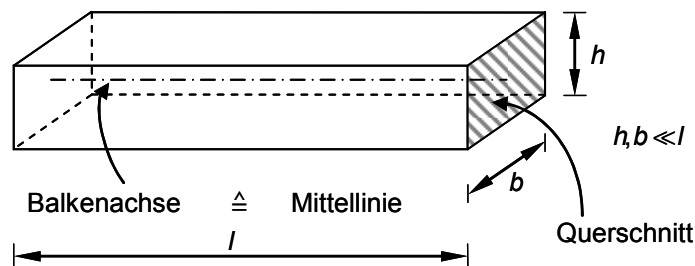


Abb. 5.1-1: Stabförmiger Körper mit Mittellinie

Stäbe mit Lasten in Richtung der Stabachse werden **Dehnstäbe** genannt.

Aus Dehnstäben zusammengesetzte Systeme heißen **Fachwerke**.

Stäbe mit Lasten quer zur Stabachse werden als **Balken** oder als **Biegestäbe** bezeichnet.

Rahmen bestehen aus zusammengesetzten Stäben und sind die Bezeichnung für ein Stabsystem aus Balken.

Bögen besitzen eine gekrümmte Stabachse.

Zur Bestimmung der Beanspruchung eines Stabs werden die inneren Kräfte (Schnittkräfte) freigelegt (Schnittprinzip), indem die Balkenachse gedanklich durchgeschnitten wird. An der Schnittfläche (Schnittufer) wirken über die Querschnittsfläche verteilte innere Flächenkräfte.

Schnittgrößen im geraden Stab mit ebener Belastung:

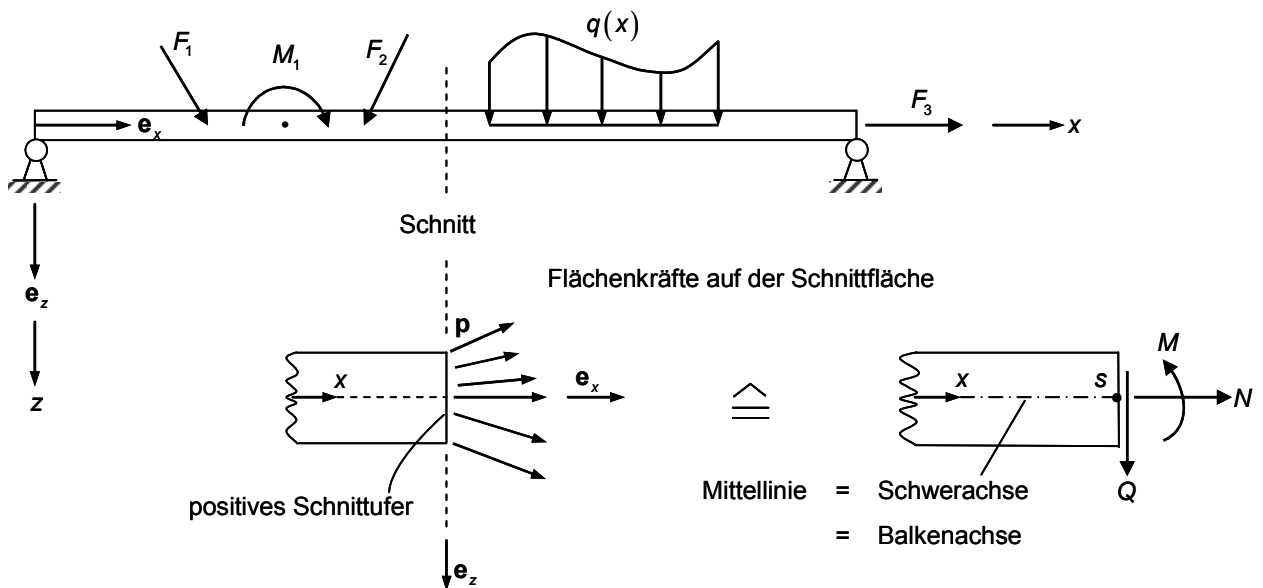


Abb. 5.1-2: Einführung der Schnittgrößen im Stab

Die Flächenkräfte $\mathbf{p}$ werden zu Schnittgrößen

N = Normal- (Längs-)kraft,

Q = Querkraft,

M = Biegemoment

zusammengefasst.

Die Schnittkräfte an den beiden Schnittufern treten entgegengesetzt gerichtet auf. Dieser Sachverhalt wird als **Reaktionsprinzip** (Gegenwirkungsprinzip) für Schnittgrößen an gegenüberliegenden Schnittufern bezeichnet.

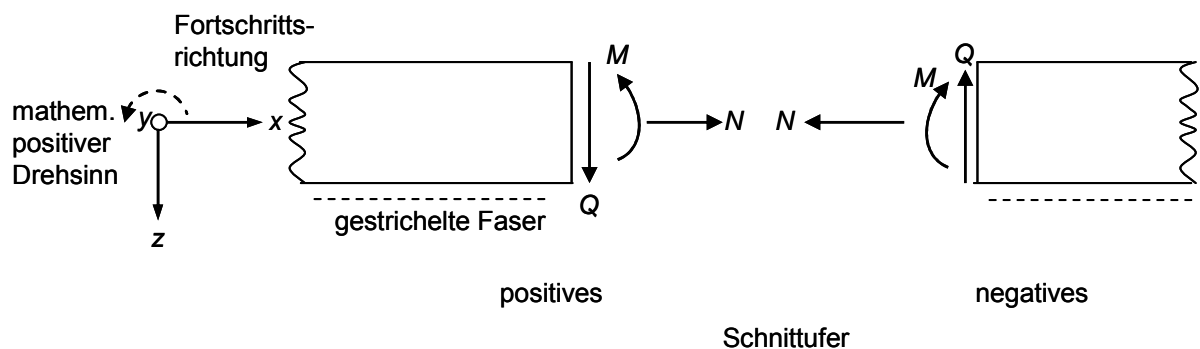


Abb. 5.1-3: Definition der Schnittgrößen des Stabs

Merke: Positive Schnittgrößen zeigen am positiven Schnittufer in positive Koordinatenrichtungen.

Schnittgrößen im räumlich gekrümmten Stab umfassen neben den Längs- und Querkräften noch zwei Biegemomente und ein Torsionsmoment.

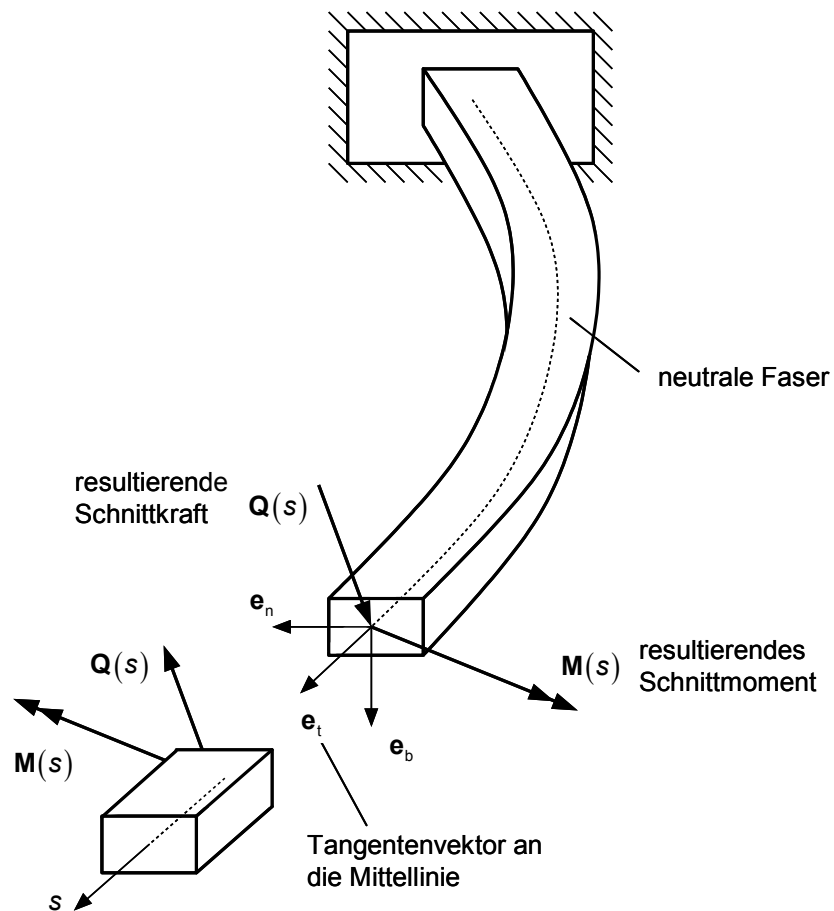


Abb. 5.1-4: Schnittgrößen des Balkens

Komponentendarstellung der Schnittkraft:

$$\mathbf{Q}(s) = N \mathbf{e}_t + Q_n \mathbf{e}_n + Q_b \mathbf{e}_b$$

| | /

Normalkraft Querkräfte

und des Schnittmoments:

$$\mathbf{M}(s) = M_t \mathbf{e}_t + M_n \mathbf{e}_n + M_b \mathbf{e}_b$$

| | /

Torsionsmoment Biegemomente

5.2 Schnittgrößenermittlung im geraden Stab unter ebener Belastung durch Gleichgewichtsbildung am Teilstab

Der Schnittgrößenverlauf wird am frei geschnittenen Teilsystem mit Hilfe der Gleichgewichtsbedingungen bereichsweise berechnet. Dazu werden zuerst die unbekannten Auflager- und Verbindungsreaktionen bestimmt. Für die Bestimmung der Schnittgrößen an irgendeiner Stelle im Stab wird der betreffende Stab an dieser Stelle durchgeschnitten und von den Auflagern gelöst. Die Schnittgrößen werden an den Schnittufern des Teilstabs angetragen so wie gegebenenfalls auch die Auflager- und Zwischenreaktionen. Anhand der Gleichgewichtsbedingungen können die Schnittgrößen aus den äußeren Lasten und den zuvor ermittelten Auflager- und Zwischenreaktionen berechnet werden.

i) Behandlung von Einzellasten

Der Stab wird in Bereiche unterteilt, wo die Schnittgrößenverläufe stetig und glatt sind. Die Bereichsgrenzen sind Lagerpunkte, Gelenkstellen und Lastenleitungspunkte von Einzelkräften.

Beispiel: Gerader Balken unter Einzellasten

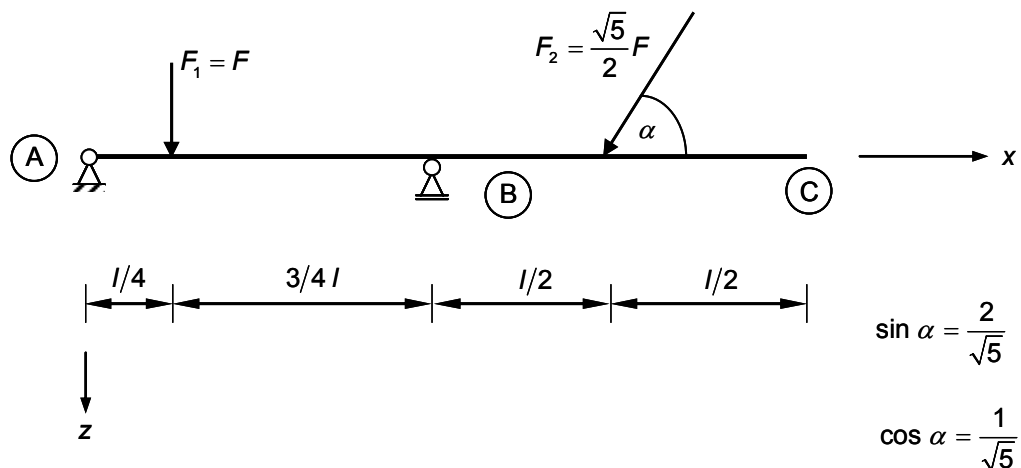


Abb. 5.2-1: Systemskizze

1. Freischneiden des Balkens von den Auflagern

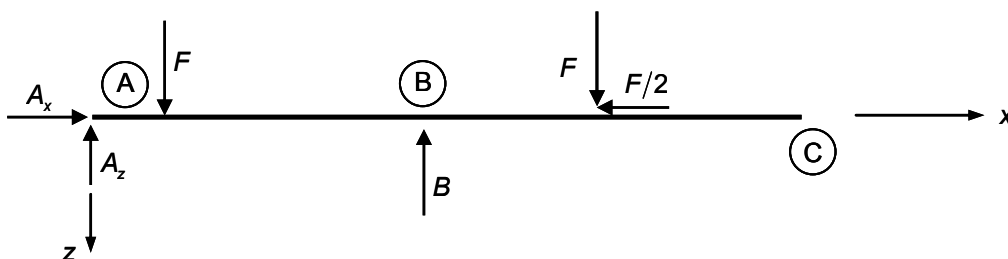


Abb. 5.2-2: Freikörperdiagramm

3 unbekannte Auflagerreaktionen (A_x , A_z und B). Daraus folgt: Das System ist statisch bestimmt gelagert.

2. Auflagerkräfte:

$$\rightarrow: \sum_i F_{ix} = 0 = A_x - \frac{F}{2} \quad \Rightarrow \quad A_x = \frac{F}{2} \quad (5.1)$$

$$+\uparrow: \sum_i F_{iz} = 0 = A_z + B - 2F \quad (5.2)$$

$$\curvearrowleft \text{A: } \sum_i M_{iA} = 0 = -F \frac{l}{4} + B l - F \frac{3}{2} l \quad \Rightarrow \quad B = \frac{7}{4} F \quad (5.3)$$

Aus Gl. (5.2) und Gl. (5.3) folgt: $A_z = \frac{1}{4} F$.

3. Bestimmung des Schnittkraftverlaufs (Unterteilung in Bereiche)

Bereich: $0 \leq x < \frac{l}{4}$

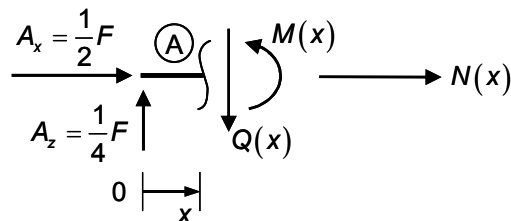


Abb. 5.2-3: Teilstab mit Lasten und Schnittgrößen

$$\rightarrow: N(x) + A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = -\frac{1}{2} F$$

$$+\uparrow: -Q(x) + A_z = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(x) = \frac{1}{4} F$$

$$\curvearrowleft \text{x: } M(x) - A_z x = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = \frac{1}{4} F x$$

Bereich: $\frac{l}{4} \leq x < l$:

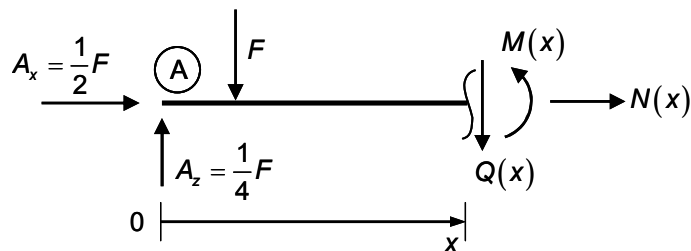


Abb. 5.2-4: Teilstab mit Lasten und Schnittgrößen

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow: \end{array} \quad N(x) + A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = -\frac{1}{2} F$$

$$\begin{array}{l} + \uparrow: \end{array} \quad -Q(x) + A_z - F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(x) = -\frac{3}{4} F$$

$$\begin{array}{l} + \\ \curvearrowright x: \end{array} \quad M(x) - x A_z + \left(x - \frac{l}{4}\right) F = 0$$

$$\Rightarrow \quad M(x) = \frac{1}{4} F x - F \left(x - \frac{l}{4}\right) = -\frac{3}{4} F x + \frac{1}{4} F l = \frac{1}{4} F (l - 3x)$$

Bereich: $l \leq x < \frac{3}{2} l$:

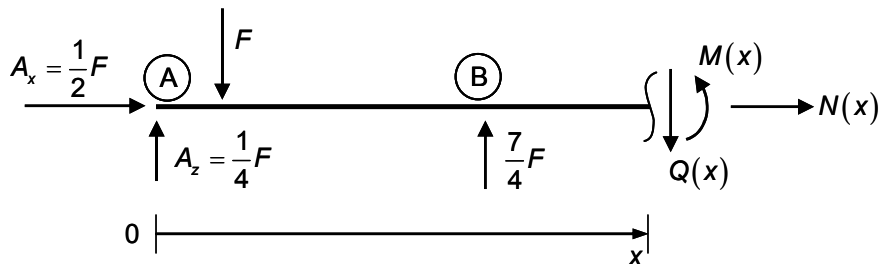


Abb. 5.2-5: Teilstab mit Lasten und Schnittgrößen

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow: \end{array} \quad N(x) + A_x = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = -\frac{1}{2} F$$

$$\begin{array}{l} + \uparrow: \end{array} \quad -Q(x) + A_z - F + \frac{7}{4} F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(x) = F$$

$$\begin{array}{l} + \\ \curvearrowright x: \end{array} \quad M(x) - x A_z + \left(x - \frac{l}{4}\right) F - (x - l) \frac{7}{4} F = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = -F \left(\frac{3}{2} l - x\right)$$

Einfacher: am rechten Teilkörper die Schnittgrößen berechnen!

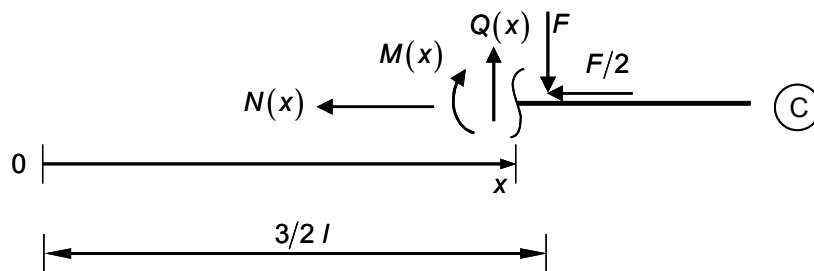


Abb. 5.2-6: Teilstab mit Lasten und Schnittgrößen

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow: \end{array} \quad -N(x) - \frac{1}{2} F = 0 \quad \Rightarrow \quad N(x) = -\frac{1}{2} F$$

$$\begin{array}{l} + \uparrow: \end{array} \quad Q(x) - F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q(x) = F$$

$$\overset{+}{x}: -M(x) - \left(\frac{3}{2}l - x\right)F = 0 \quad \Rightarrow \quad M(x) = -F\left(\frac{3}{2}l - x\right)$$

Bereich: $\frac{3}{2}l \leq x \leq 2l$:

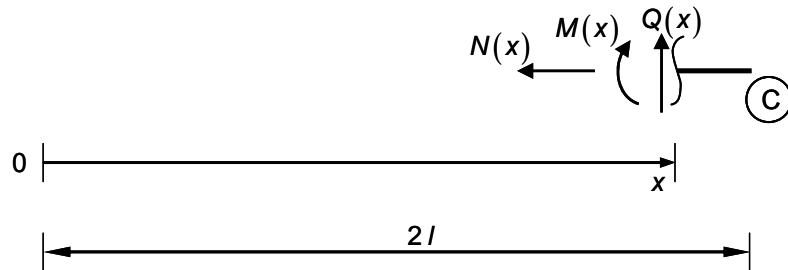


Abb. 5.2-7: Teilstab mit Lasten und Schnittgrößen

$$N(x) = 0 \quad Q(x) = 0 \quad M(x) = 0$$

Schnittgrößenverläufe:

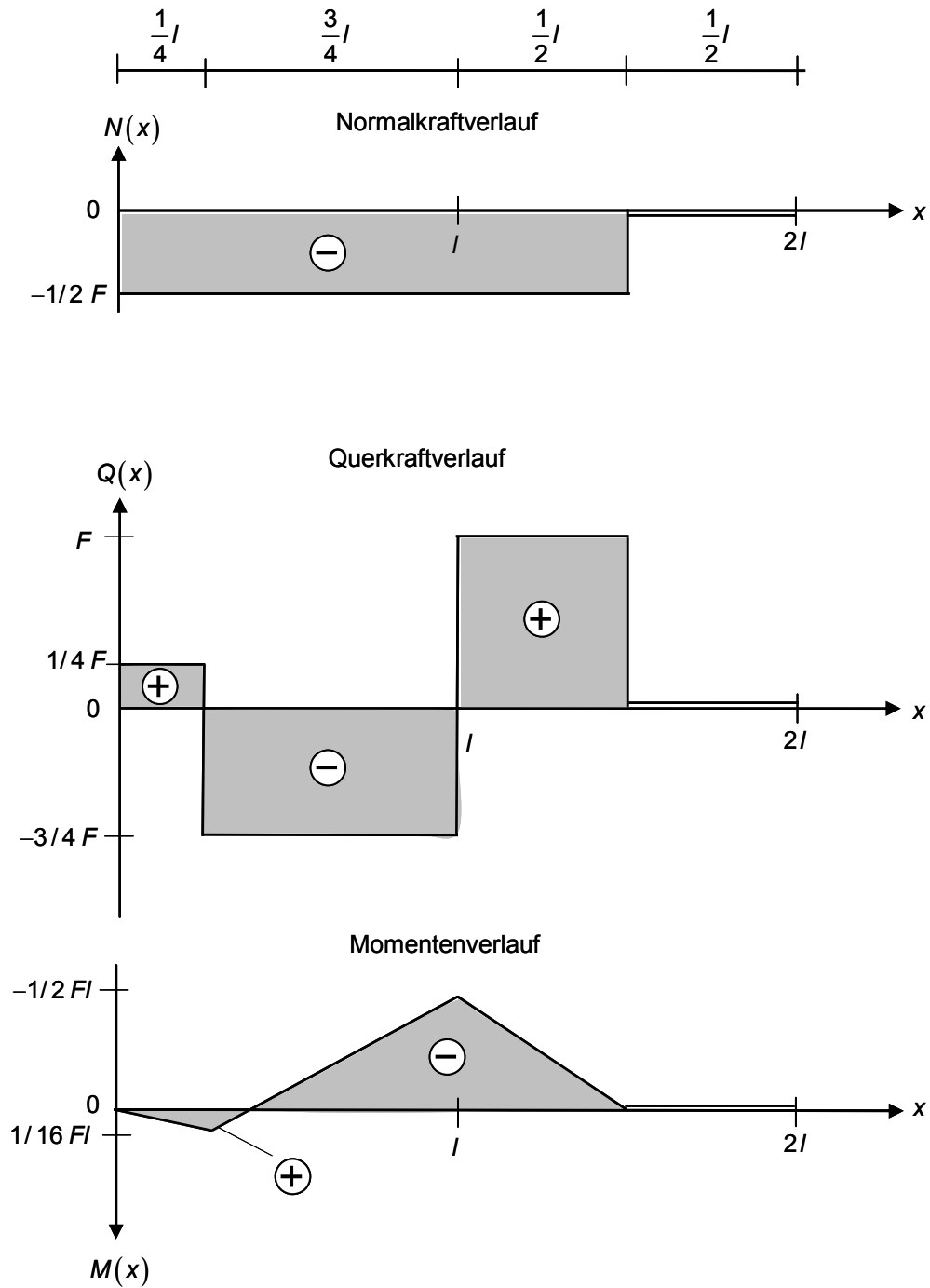


Abb. 5.2-8: Graphische Darstellung des Verlaufs der Schnittgrößen im Balken

ii) Behandlung von Streckenlasten mit Hilfe des bestimmten Integrals

Neben Einzellasten treten häufig auch Streckenlasten $\mathbf{p}(x)$ in Längs- ($n(x)$) und Querrichtung ($q(x)$) von Balken (Stäbe) auf.

$$\mathbf{p}(x) = n(x) \mathbf{e}_x + q(x) \mathbf{e}_z$$

Die Schnittgrößenermittlung durch Gleichgewichtsbildung am Teilstab kann auch für äußere Streckenlasten angewendet werden, wenn über die verteilten Lasten integriert wird.

Beispiel 1: Einfacher Balken unter dreieckförmiger Streckenlast mit der Funktionsgleichung

$$q(x) = q_1 \frac{x}{l}$$

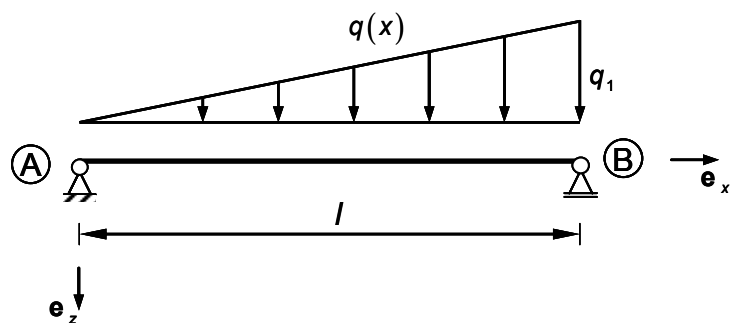


Abb. 5.2-9: Systemskizze des Balkens unter Querlast $q(x)$

1. Freischneiden des Balkens von den Lagern zur Ermittlung der Reaktionskräfte.

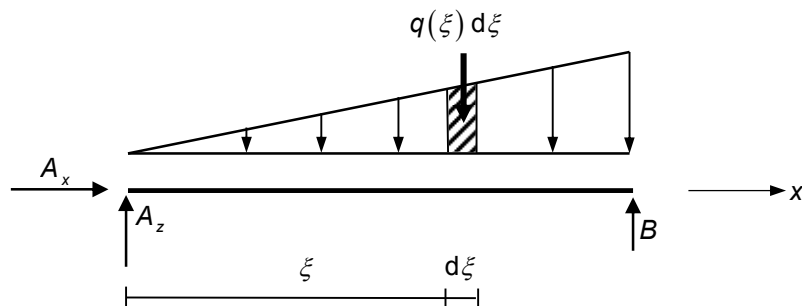


Abb. 5.2-10: Freikörperdiagramm

System ist statisch bestimmt, denn $m = 3n - (a + z) = 3 - 3 = 0$

2. Auflagerkräfte:

$$\begin{array}{l} \overset{+}{\rightarrow}: \quad \sum_i F_{ix} = 0: A_x = 0 \\ \Rightarrow \quad A_x = 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \overset{+}{\curvearrowleft} \text{ A:} \quad \sum_i M_{iA} = 0: B l - \int_0^l \xi (q(\xi) d\xi) = 0 \\ \Rightarrow \quad B = \frac{1}{l} \int_0^l \xi \left(q_1 \frac{\xi}{l} \right) d\xi = \frac{1}{l^2} q_1 \frac{\xi^3}{3} \Big|_0^l \\ B = \frac{1}{3} q_1 l \end{array}$$

$$+\uparrow: \sum_i F_{iz} = 0: A_z + B - \int_0^l (q(\xi) d\xi) = 0 \quad \Rightarrow \quad A_z = \int_0^l \left(q_1 \frac{\xi}{l} \right) d\xi - B = q_1 \frac{\xi^2}{2l} \Big|_0^l - \frac{1}{3} q_1 l$$

$$A_z = \frac{1}{6} q_1 l$$

3. Schnittgrößenverläufe

Bereich: $0 \leq \xi \leq x$:

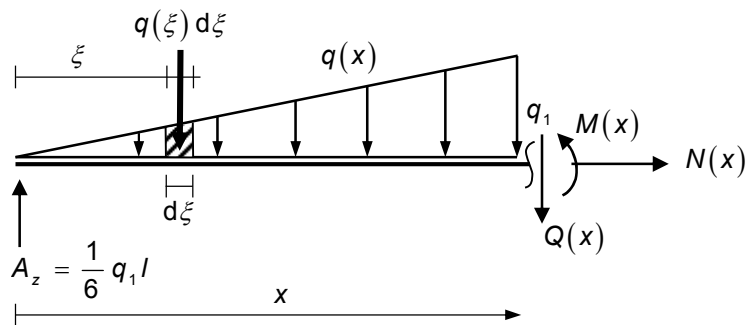


Abb. 5.2-11: Teilstab mit Lasten und Schnittgrößen

$$\rightarrow: N(x) = 0$$

$$+\uparrow: -Q(x) + A_z - \int_0^x (q(\xi) d\xi) = 0$$

$$\Leftrightarrow Q(x) = \frac{1}{6} q_1 l - \int_0^x q_1 \frac{\xi}{l} d\xi$$

$$\Rightarrow Q(x) = \frac{1}{6} q_1 l - \frac{1}{2} \frac{q_1}{l} [\xi^2]_0^x$$

$$\Leftrightarrow Q(x) = \frac{1}{2} q_1 l \left[\frac{1}{3} - \frac{x^2}{l^2} \right]$$

Moment $dM(x)$ der Flächenkräfte $q(\xi)$ auf dem Balkenelement $d\xi$:

$$dM(x) = q(\xi)(x - \xi) d\xi$$

$$\curvearrowright_x: M(x) - A_z x + \int_0^x q(\xi)(x - \xi) d\xi = 0$$

$$\Leftrightarrow M(x) = \frac{1}{6} q_1 l x - \int_0^x \left(q_1 \frac{\xi}{l} \right) (x - \xi) d\xi$$

$$\Leftrightarrow M(x) = \frac{1}{6} q_1 l x \left[1 - \frac{x^2}{l^2} \right]$$

4. Graphische Darstellung der Schnittgrößenverläufe

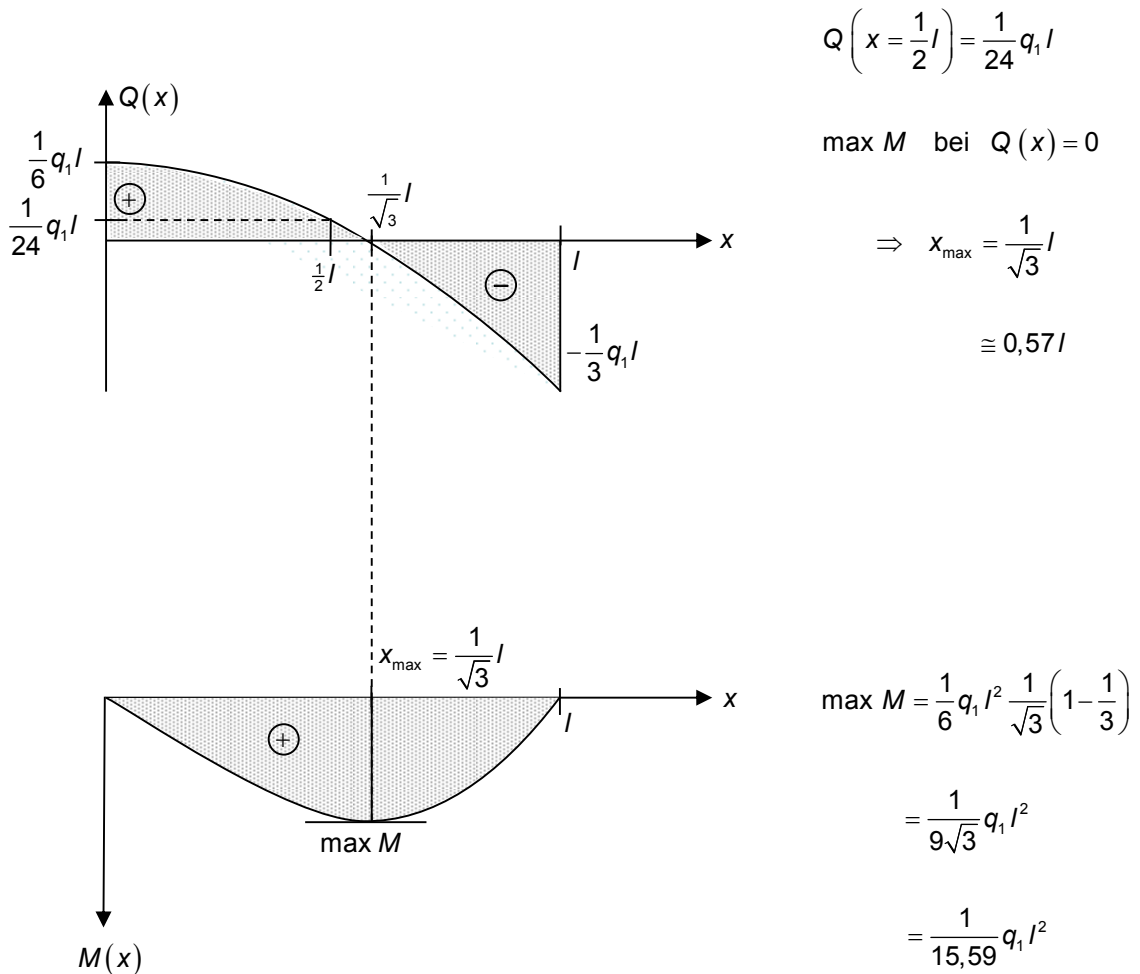


Abb. 5.2-12: Schnittgrößenverläufe

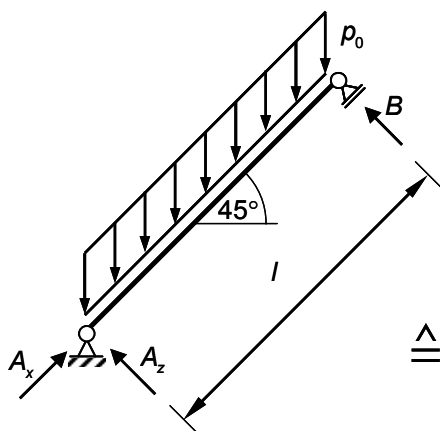
Beispiel 2: Schräger Balken unter Eigengewicht

Abb. 5.2-13: Systemskizze

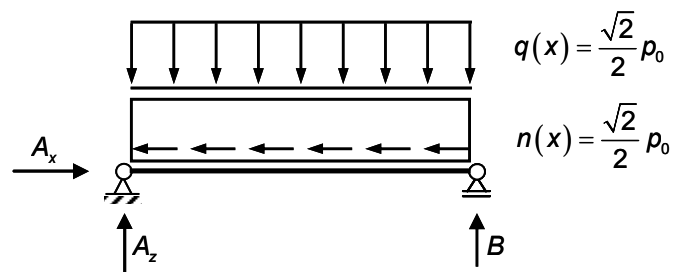


Abb. 5.2-14: Zerlegung der Belastung

1. Auflagerkräfte: $\rightarrow^+ : A_x = \int_0^l n(\xi) d\xi = \frac{\sqrt{2}}{2} p_0 l$

Symmetrie und Gleichgewicht $+\uparrow : A_z = B = \frac{1}{2} \int_0^l q(\xi) d\xi = \frac{\sqrt{2}}{4} p_0 l$

2. Schnittgrößen:

Bereich: $0 \leq \xi \leq x$:

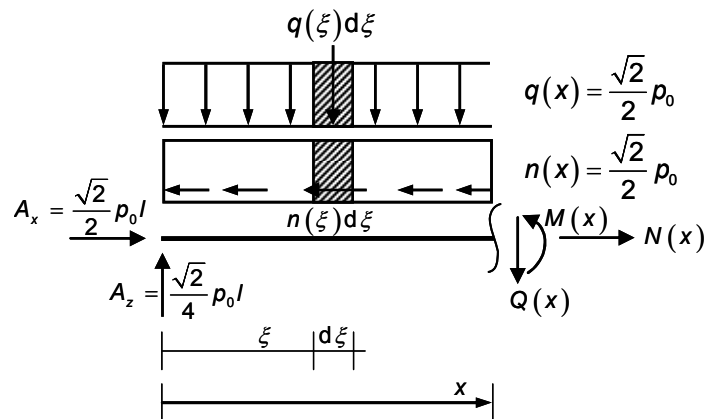


Abb. 5.2-15: Teilstab

$$\rightarrow^+ : N + A_x - \int_0^x n(\xi) d\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad N = -\frac{\sqrt{2}}{2} p_0 l + \int_0^x \frac{\sqrt{2}}{2} p_0 d\xi$$

$$N = -\frac{\sqrt{2}}{2} p_0 (l - x)$$

$$+\uparrow : -Q + A_z - \int_0^x q(\xi) d\xi = 0 \quad \Rightarrow \quad Q = \frac{\sqrt{2}}{4} p_0 l - \int_0^x \frac{\sqrt{2}}{2} p_0 d\xi$$

$$Q = \frac{\sqrt{2}}{2} p_0 \left(\frac{1}{2} l - x \right)$$

$$\begin{aligned} \curvearrowleft^+ : M - A_z x + \int_0^x (x - \xi) q(\xi) d\xi &= 0 \quad \Rightarrow \quad M = \frac{\sqrt{2}}{4} p_0 l x - \int_0^x (x - \xi) \frac{\sqrt{2}}{2} p_0 d\xi \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} p_0 \left(\frac{1}{2} l x - x \xi \Big|_0^x + \frac{\xi^2}{2} \Big|_0^x \right) \end{aligned}$$

Hinweis: Das Aufstellen der bestimmten Integrale zur Berechnung der Schnittgrößen kann vermieden werden, wenn die Streckenlast durch ihre Resultierende ersetzt wird, die im Flächenschwerpunkt anzutragen ist.

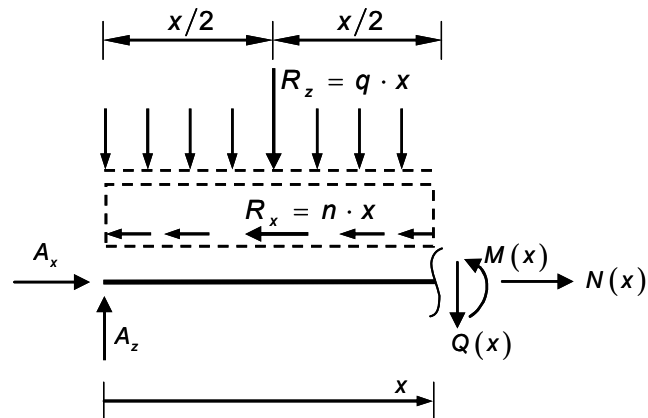


Abb. 5.2-16: Teilstab

$$\begin{array}{lcl} \overset{+}{\rightarrow}: & N + A_x - R_x = 0 & \Leftrightarrow \quad N = \underbrace{-\frac{\sqrt{2}}{2} p_0 l}_{-A_x} + \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} p_0 x}_{R_x} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} +\uparrow: & -Q + A_z - R_z = 0 & \Leftrightarrow \quad Q = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{4} p_0 l}_{A_z} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} p_0 x}_{R_z} \end{array}$$

$$\begin{array}{lcl} \overset{+}{\curvearrowright} x: & M + R_z \frac{x}{2} - A_z x = 0 & \Leftrightarrow \quad M = \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{4} p_0 l x}_{A_z} - \underbrace{\frac{\sqrt{2}}{2} p_0 x \cdot \frac{x}{2}}_{R_z} \end{array}$$

Schnittgrößenverläufe:

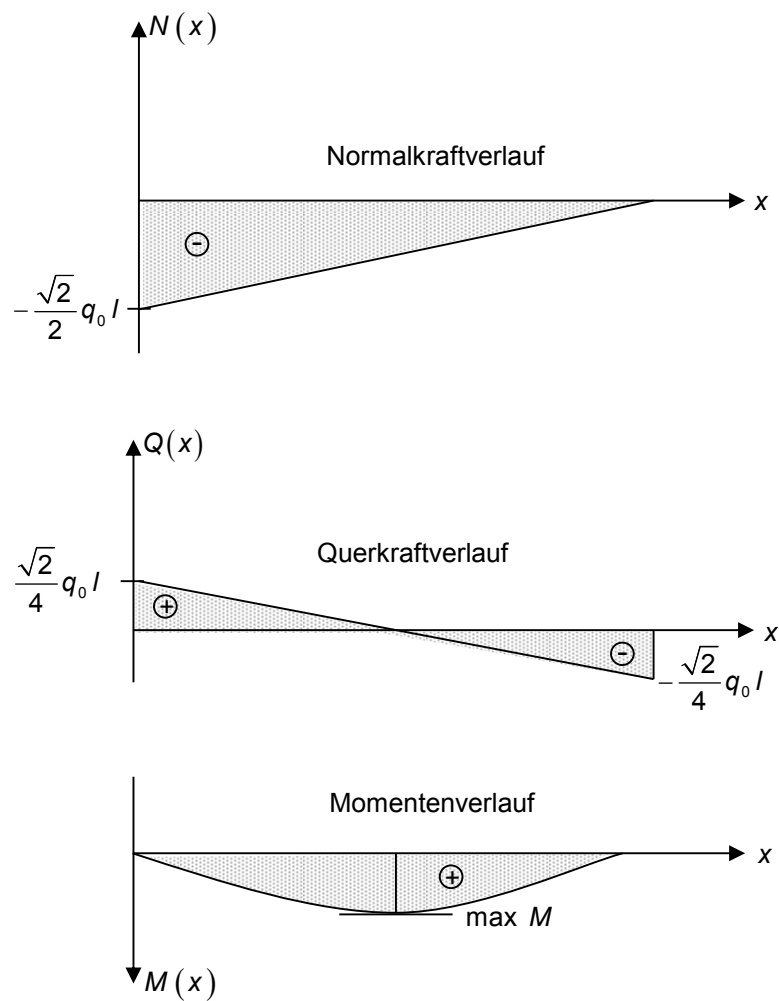


Abb. 5.2-17: Schnittgrößenverläufe

$$M\left(x = \frac{l}{2}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} q_0 \left[l \frac{l}{2} - \left(\frac{l}{2}\right)^2 \right] = \frac{\sqrt{2}}{16} q_0 l^2 = \max M,$$

da die quadratische Parabel ihr Maximum in der Mitte zwischen den Nullstellen hat.

5.3 Differentialgleichungen für das Gleichgewicht des Stabs

Ein gerader Stab wird durch die ebene Streckenlast $p(x) = n(x) \mathbf{e}_x + q(x) \mathbf{e}_z$ mit Komponenten längs ($n(x)$) und quer ($q(x)$) zur Stabachse belastet.

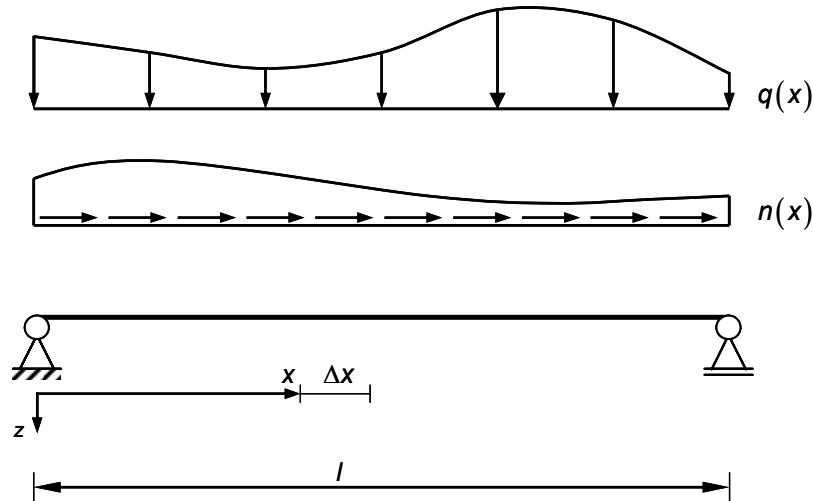


Abb. 5.3-1: Systemskizze

Freischneiden des Balkenelements der Länge Δx und Aufstellen der Gleichgewichtsbedingungen:

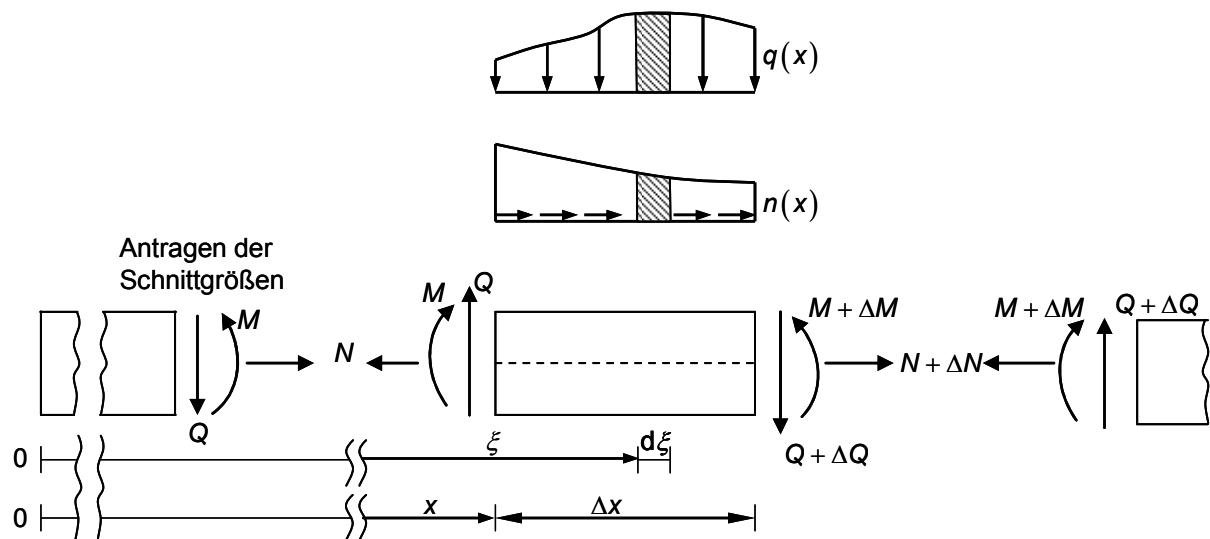


Abb. 5.3-2: Infinitesimales Balkenelement

$$\rightarrow: \quad \sum_i F_{ix} = -N + \int_x^{x+\Delta x} n(\xi) d\xi + (N + \Delta N) = 0 \quad (5.3.1)$$

$$+\uparrow: \quad \sum_i F_{iz} = Q - \int_x^{x+\Delta x} q(\xi) d\xi - (Q + \Delta Q) = 0 \quad (5.3.2)$$

$$+\curvearrowright: \quad \sum_i M_{i_{x+\Delta x}} = -Q \Delta x - M + \int_x^{x+\Delta x} q(\xi) (x+\Delta x - \xi) d\xi + (M + \Delta M) = 0 \quad (5.3.3)$$

$$\text{aus Gl. (5.3.1):} \quad \Delta N = - \int_x^{x+\Delta x} n(\xi) d\xi \quad (5.3.4)$$

$$\text{aus Gl. (5.3.2):} \quad \Delta Q = - \int_x^{x+\Delta x} q(\xi) d\xi \quad (5.3.5)$$

$$\text{aus Gl. (5.3.3):} \quad \Delta M = Q \Delta x - \int_x^{x+\Delta x} q(\xi) (x+\Delta x - \xi) d\xi \quad (5.3.6)$$

Für kleine Balkenelemente der Länge Δx können die Streckenlasten $q(x)$ und $n(x)$ innerhalb des Balkenelements als konstant angenommen werden (genauere Herleitung mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Integralrechnung). Dann folgt:

$$\Delta N = - n(x) \Delta x \quad (5.3.7)$$

$$\Delta Q = - q(x) \Delta x \quad (5.3.8)$$

$$\begin{aligned} \Delta M &= Q \Delta x - q(x) \int_x^{x+\Delta x} [(x+\Delta x) - \xi] d\xi \\ &= Q \Delta x - q(x) \left[(x+\Delta x) \xi - \frac{\xi^2}{2} \right]_x^{x+\Delta x} \\ &= Q \Delta x - q(x) \left[x \cdot \Delta x + \Delta x^2 - x \cdot \Delta x - \frac{(\Delta x)^2}{2} \right] \\ &= Q \Delta x - q(x) \frac{(\Delta x)^2}{2} \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

Division durch Δx und Grenzwertbildung $\Delta x \rightarrow 0$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta N}{\Delta x} =: \boxed{N'(x) = - n(x)} \quad (5.3.10)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{\Delta x} =: \boxed{Q'(x) = - q(x)} \quad (5.3.11)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta x} =: \boxed{M'(x) = Q(x)} \quad (5.3.12)$$

Durch die Ableitung von (5.3.12) unter Berücksichtigung von (5.3.11) folgt:

$$\boxed{M''(x) = - q(x)} \quad (5.3.13)$$

Die Gleichungen (5.3.10) bis (5.3.12) sind die lokalen **Differentialgleichungen für das Gleichgewicht des Stabs**.

5.4 Statische Randbedingungen

Für die Berechnung der Schnittgrößenverläufe des statisch bestimmten Balkens aus den Differentialgleichungen für das Gleichgewicht sind noch sogenannte statische **Randbedingungen** notwendig.

Durch Integration der Gleichgewichtsbedingungen folgt:

$$\begin{aligned} N(x) &= - \int_0^x n(\xi) d\xi + c_0 \\ &= - \int n(x) dx + c_0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x) &= - \int_0^x q(\xi) d\xi + c_1 \\ &= - \int q(x) dx + c_1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M(x) &= \int_0^x Q(\xi) d\xi + c_2 \\ &= \int Q(x) dx + c_2 \end{aligned}$$

Die Integrationskonstanten c_0 , c_1 und c_2 werden aus den statischen Randbedingungen des statisch bestimmt gelagerten Balkens berechnet. Diese Bedingungen bestimmen die Schnittgrößen von M , N und Q an den Rändern des Stabes und hängen von der Lagerung ab. Die statischen Randbedingungen werden in Tabellenform zusammengestellt.

Lagerung		Schnittgrößen an der Stelle A		
		N_A	Q_A	M_A
2-wertig	gelenkiges Lager	?	?	0
	Parallelführung	?	0	?
	Schiebehülse	0	?	?
3-wertig	Einspannung	?	?	?
	freies Ende	0	0	0
1-wertig	längsverschiebliches Lager	0	?	0
	querverschiebliches Lager	?	0	0

Abb. 5.4-1: Gegebene (= 0) und unbekannte (?) Schnittgrößen

Reaktionsgrößen an den Rändern (Stabende $\textcircled{A}$) ergeben statische Randbedingungen für Schnittgrößen

5.5 Berechnung der Schnittgrößen aus den Differentialgleichungen für das Gleichgewicht

Anstelle des bestimmten Integrals können zur Ermittlung der Schnittgrößenverläufe statisch bestimmter Balken die Differentialgleichungen für das Gleichgewicht verwendet werden. Damit erspart man sich die Berechnung der Auflagerkräfte mit Hilfe des Gleichgewichts am frei geschnittenen Körper.

Beispiel 1: Dehnstab unter konstanter Längslast $n(x) = n_0$ (z.B. Stab unter Eigengewicht)

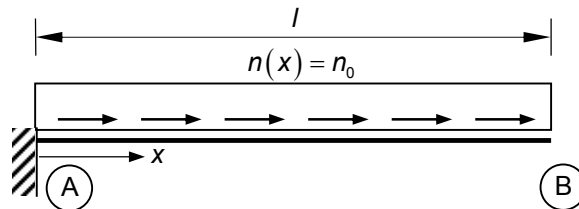


Abb. 5.5-1: Systemskizze mit Längsbelastung $n(x) = n_0$

$$\begin{aligned}\text{Gleichgewicht:} \quad N' &= -n_0 \\ N &= -\int n_0 \, dx + C \\ N(x) &= -n_0 x + C\end{aligned}$$

Bestimmung der Integrationskonstanten C aus den Randbedingungen am freien Ende B:

$$N(x=l) = 0 = -n_0 l + C \quad \Leftrightarrow \quad C = n_0 l$$

$$N(x) = n_0 l - n_0 x = n_0 (l - x)$$

Normalkraftverlauf $N(x)$

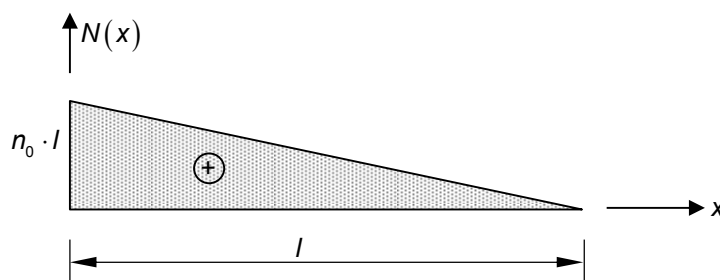
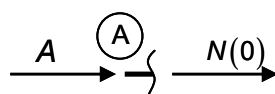


Abb. 5.5-2: Normalkraftverlauf

Hinweis: Bei konstanter Längsstreckenlast $n(x) = n_0$ ist der Normalkraftverlauf $N(x)$ linear.

Berechnung der Auflagerkraft A:

Kräftegleichgewicht am Stabende zwischen Lagerreaktion A und Normalkraft N an der Stelle $x = 0$ ($N(0)$) herstellen.



$$\rightarrow \sum_i F_{ix} = 0: \quad A = -N(0) = -n_0 l$$

Beispiel 2: Einfacher Balken unter dreieckförmiger Streckenlast $q(x) = q_1 \frac{x}{l}$

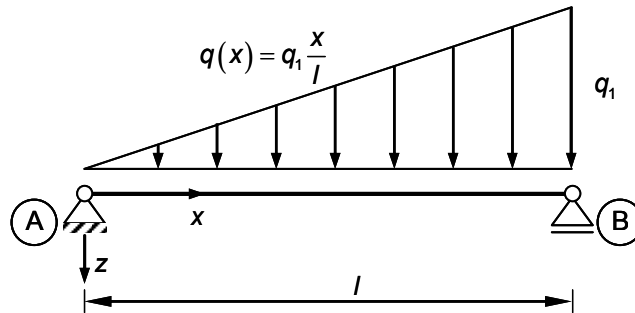


Abb. 5.5-3: Systemskizze

$$Q' = -q = -q_1 \frac{x}{l} \quad \Rightarrow \quad Q = -q_1 \frac{x^2}{2l} + c_1$$

$$M' = Q = -q_1 \frac{x^2}{2l} + c_1 \quad \Rightarrow \quad M = -q_1 \frac{x^3}{6l} + c_1 x + c_2$$

Randbedingungen: $M(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad c_2 = 0$

$$M(l) = 0 = -q_1 \frac{l^3}{6l} + c_1 l \quad \Rightarrow \quad c_1 = q_1 \frac{l}{6}$$

Lösung:
$$Q(x) = -q_1 \frac{x^2}{2l} + q_1 \frac{l}{6}$$

$$= \frac{q_1 l}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (\text{quadratisch})$$

$$M(x) = -q_1 \frac{x^3}{6l} + q_1 \frac{l}{6} x$$

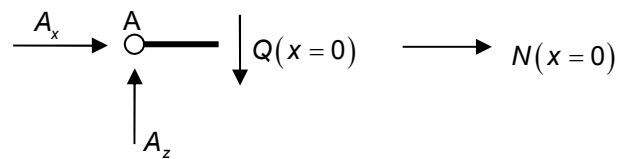
$$= \frac{q_1 l^2}{6} \frac{x}{l} \left[1 - \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad (\text{kubisch})$$

Das Moment wird dort extremal, wo $Q(x) = 0$ ist.

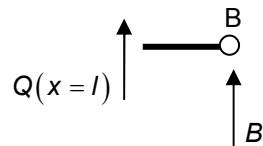
$$0 = \frac{q_1 l}{6} \left[1 - 3 \left(\frac{x}{l} \right)^2 \right] \quad \Rightarrow \quad x = \frac{l}{\sqrt{3}}$$

$$\Rightarrow \max M = M\left(x = \frac{l}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}}{27} q_1 l^2$$

Bestimmung der Auflagerkräfte A_x, A_z und B aus dem Schnittgrößenverlauf an den Stabenden (Stelle $x = 0$ und $x = l$) und dem Gleichgewicht mit den Reaktionskräften



$$+\uparrow \sum F_{iz} = 0: A_z = Q(x=0) = \frac{1}{6} q_1 l$$



$$\sum F_{iz} = 0: B = -Q(x=l) = \frac{-q_1 l}{6} \left[1 - 3 \cdot \left(\frac{l}{l} \right)^2 \right] = \frac{1}{3} q_1 l$$

Schnittgrößenverläufe: $N(x) = 0$

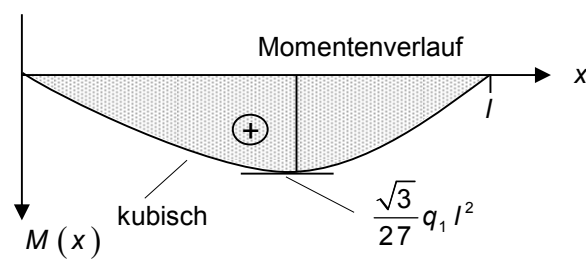
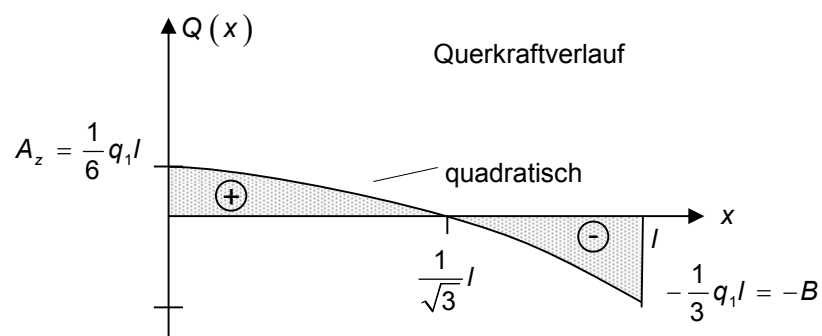
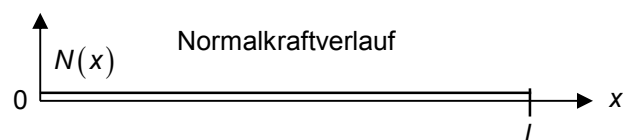


Abb. 5.5-4: Schnittgrößenverläufe

Hinweise zur Berechnung und zur Kontrolle der Schnittgrößenverläufe:

- Über die Differentialgleichungen hängt der Q – und M – Verlauf vom Verlauf der Streckenlast q ab.
z.B. $q = \text{konst.} \neq 0 \Rightarrow Q = \text{linear} \Rightarrow M = \text{quadratisch}$
- Aus Sprung in $q \Rightarrow$ Knick in Q
- Aus Sprung in $Q \Rightarrow$ Knick in M
- Aus Nulldurchgang von $q \Rightarrow$ Extremum von Q
- Aus Nullstelle von $Q \Rightarrow$ Extremum von M
- Querkraftgelenk $\Rightarrow$ Nulldurchgang von Q
- Momentengelenk $\Rightarrow$ Nulldurchgang von M
- Einzellast $\Rightarrow$ Sprung von Q bzw. N

Schnittgrößenverlauf bei Einzelkräften und –momenten

Beispiel: Querlast F_z auf einem Balkenelement der Länge Δx

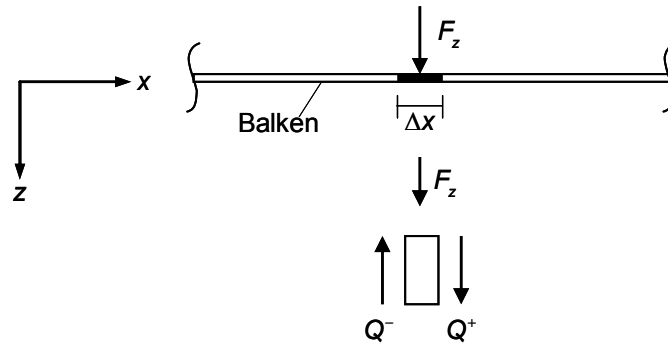


Abb. 5.5-5: Balkenelement mit Einzellast

Hinweis: Die Bezeichnungen Q^+ und Q^- bedeuten die Querkraft am positiven (+) und negativen (-) Schnitthufer des Balkenelements, an dem F_z angreift.

Gleichgewicht am Balkenelement Δx : $+ \uparrow: Q^- - F_z - Q^+ = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q^+ = Q^- - F_z$

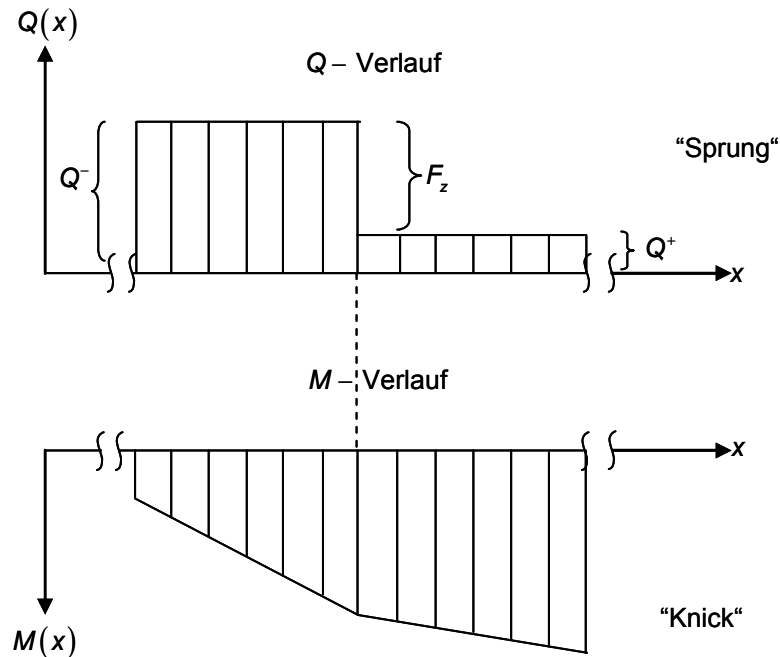


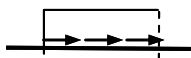
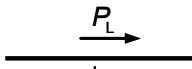
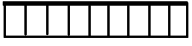
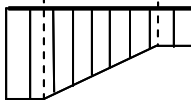
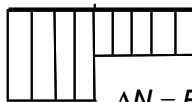
Abb. 5.5-6: Schnittgrößenverläufe im Bereich der Punktlast

Für eine Einzelkraft in Richtung der Stabachse gilt entsprechend der Kräftegleichgewichtsbedingung in x -Richtung:

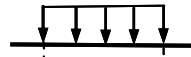
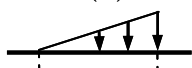
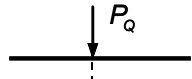
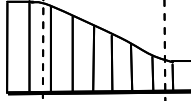
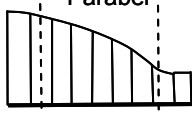
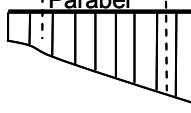
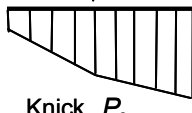
$$N^+ = N^- - F_x$$

Gemäß dem Momentengleichgewicht gilt für ein in positiver Richtung wirkendes äußeres Einzelmoment M_a :

$$M^+ = M^- - M_a$$

Belastung	keine	konst.	linear	konzentriert
längs n, P_L	$n = 0$ 	$n = \text{konst}$ 		
N-Verlauf	konst.  Sonderfall = 0	linear 		Sprung  $\Delta N = P_L$

Biegestab

quer q, P_Q	$q = 0$ 	$q = \text{konst}$ 	$q(x)$ 	
Q-Verlauf	konst.  Sonderfall = 0	linear 	quadr. Parabel  kein Knick	Sprung  $\Delta Q = P_Q$
M-Verlauf	linear  Sonderfall = konst. = 0	quadr. Parabel 	kub. Parabel  keine Knicke	Knick P_Q 

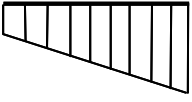
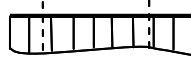
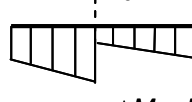
Moment m, M_e	$m = 0$ 	$m = \text{konst}$ 		
Q-Verlauf	konst.  Sonderfall = 0	konst. 		konst. 
M-Verlauf	linear  Sonderfall = konst. = 0			Sprung  $\Delta M = M_e$

Abb. 5.5-7: Belastung und Schnittgrößenverläufe

5.6 Schnittgrößen in Stabsystemen (Fachwerke und Rahmen)

Stabsysteme bestehen aus Einzelstäben, die über Gelenke (Verbindungselemente) miteinander verbunden sind.

Beispiel: Stabsystem

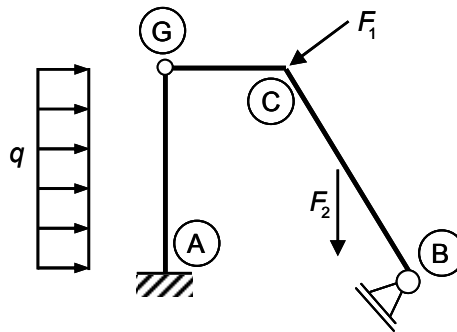


Abb. 5.6-1: Systemskizze

Als Verbindungselement mit den entsprechenden **Übergangsbedingungen** im mechanischen Modell unterscheidet man:

Bezeichnung	Symbol	Übergangsbedingung		
		M	Q	N
Momentengelenk („Gelenk“)		$= 0$	$\neq 0$	$\neq 0$
Querkraftgelenk		$\neq 0$	$= 0$	$\neq 0$
Normalkraftgelenk		$\neq 0$	$\neq 0$	$= 0$

Abb. 5.6-2: Gelenke in Stäben

Zur Berechnung der Schnittgrößen in Stabsystemen werden die einzelnen Stäbe und Knoten freigeschnitten und die Schnittkräfte aus den Gleichgewichtsbedingungen des starren Körpers am Teilsystem oder Balken errechnet.

Bemerkung zum Knotengleichgewicht:

Betrachtung eines Balkenelements der Länge Δx mit Einzelkraft F .

Am Balkenelement der Länge Δx greift die Einzelkraft F_z an, die sehr viel größer ist als die Resultierende einer eventuell vorhandenen Streckenlast $q \Delta x$. (Die Kraft wird in positiver z -Richtung gezählt.)

Beispiel: Kräftegleichgewicht am frei geschnittenen Knoten quer zur Stabachse mit Querlasten F_z und Schnittgrößen Q^+ und Q^- vor und nach dem Knoten

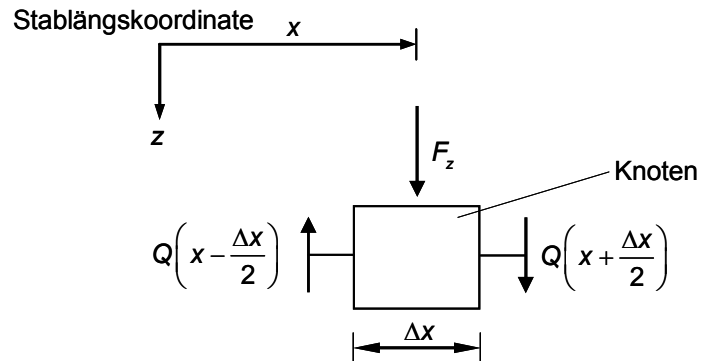


Abb. 5.6-3: Knotengleichgewicht

$$Q(x + \Delta x) = Q(x) - F_z$$

$$Q^+ := \lim_{\Delta x \rightarrow 0} Q\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} Q\left(x - \frac{\Delta x}{2}\right) - F_z = Q^- - F_z$$

- Vorgehen:**
- Auflagerreaktionen berechnen
 - Freischneiden der Einzelstäbe

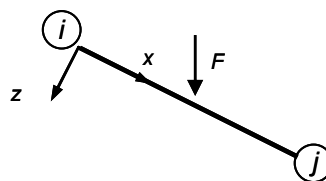


Abb. 5.6-4: Freigeschnittener Stab

- Freischneiden der Knoten

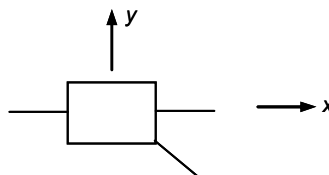


Abb. 5.6-5: Freigeschnittener Knoten mit Stabverzweigung

- Antragen der Schnittgrößen. Die Einführung einer "Faser" erweist sich als hilfreich für die Festlegung des Vorzeichens der Querkraft und des Biegemoments.
- Berechnung der unbekannten Schnittgrößen an den Knoten und Stabenden aus den GGW-Bedingungen am Körper.

Hinweis:

Das Gleichgewicht am Stab wird vorteilhafterweise in Richtung der Stabkoordinaten x und z angeschrieben.

Vorteil: Aufstellung des Impulssatzes wird erleichtert.

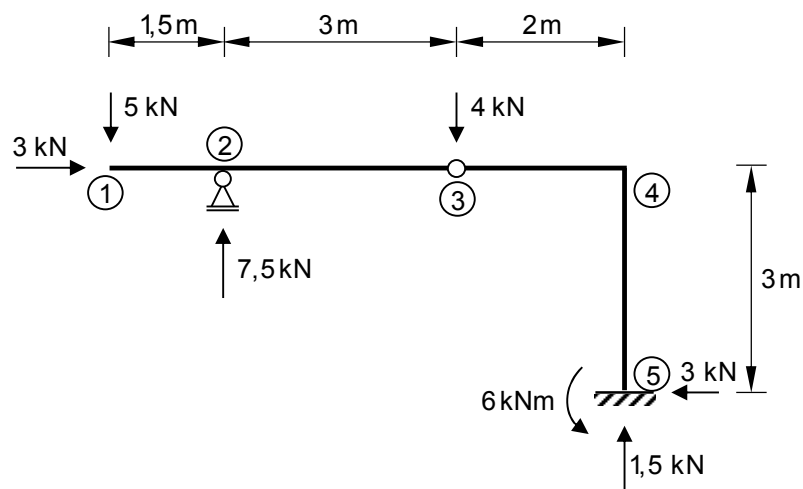
Beispiel: Schnittgrößen in Rahmen

Abb. 5.6-6: Systemskizze

Auflagerkräfte:

– s. Kap. 4.4 –

Schnittgrößen an den Knoten

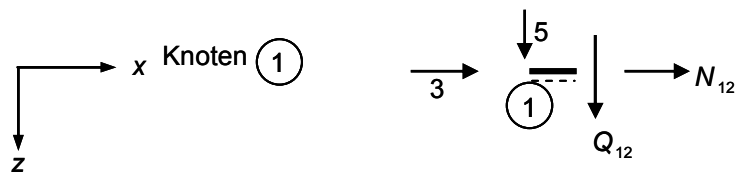


Abb. 5.6-7: Gleichgewicht am Knoten (1)

$$+\downarrow: \quad \sum F_{iz} = Q_{12} + 5 = 0 \quad \rightarrow Q_{12} = -5 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow: \quad \sum F_{ix} = N_{12} + 3 = 0 \quad \rightarrow N_{12} = -3 \text{ kN}$$

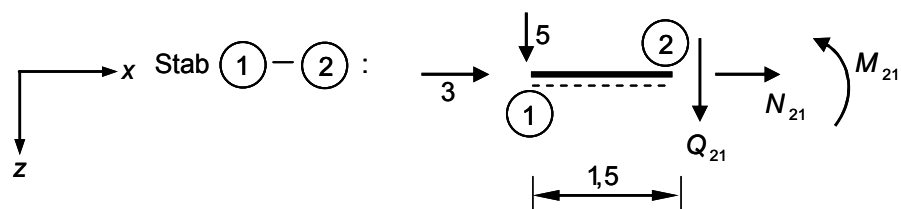


Abb. 5.6-8: Gleichgewicht am Teilstab

$$+\uparrow: \quad \sum F_{iz} = Q_{21} + 5 = 0 \quad \rightarrow Q_{21} = -5 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow : \end{array} \quad \sum F_{ix} = N_{21} + 3 = 0 \quad \rightarrow N_{21} = -3 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} + \\ 2 : \end{array} \quad M_{21} + 5 \cdot 1,5 = 0 \quad \rightarrow M_{21} = -7,5 \text{ kNm}$$

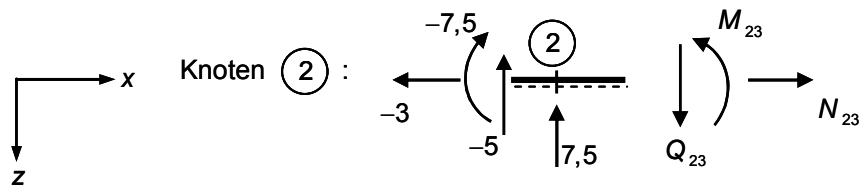


Abb. 5.6-9: Gleichgewicht am Knoten (2)

$$+ \uparrow : \quad \sum F_{iz} = -Q_{23} - 5 + 7,5 = 0 \quad \rightarrow Q_{23} = +2,5 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow : \end{array} \quad \sum F_{ix} = +N_{23} + 3 = 0 \quad \rightarrow N_{23} = -3 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} + \\ 2 \end{array} \quad M_{23} - (-7,5) = 0 \quad \rightarrow M_{23} = -7,5 \text{ kNm}$$

Stab (2)-(3) :

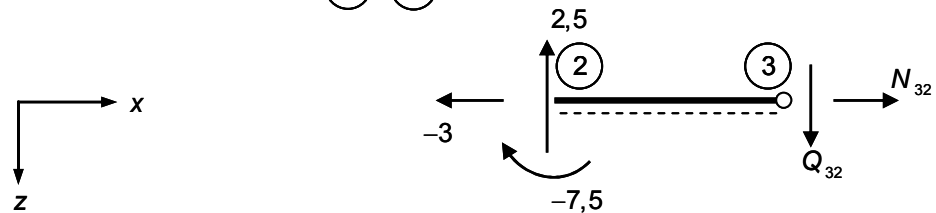


Abb. 5.6-10: Gleichgewicht am Stab (2)-(3)

$$+ \uparrow : \quad -Q_{32} + 2,5 = 0 \quad \rightarrow Q_{32} = 2,5 \text{ kN}$$

$$\begin{array}{l} + \\ \rightarrow : \end{array} \quad N_{32} = -3 \text{ kN}$$

Kontrolle des Biegemoments $M_{32} = 0$ am Gelenk im Knoten (3) :

$$\begin{array}{l} + \\ 3 : \end{array} \quad 2,5 \cdot 3 + (-7,5) = 0$$

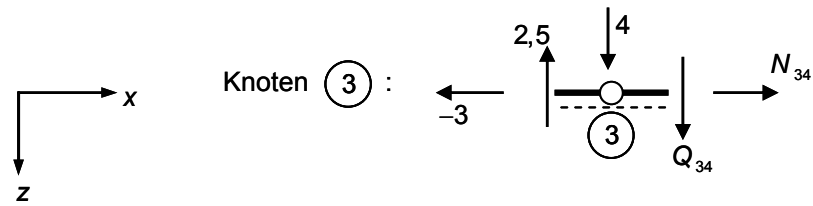


Abb. 5.6-11: Gleichgewicht am Knoten (3)

$$+\uparrow: \quad -Q_{34} + 2,5 - 4 = 0 \quad \rightarrow Q_{34} = -1,5 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow: \quad N_{34} = -3 \text{ kN}$$

Stab (3)-(4):

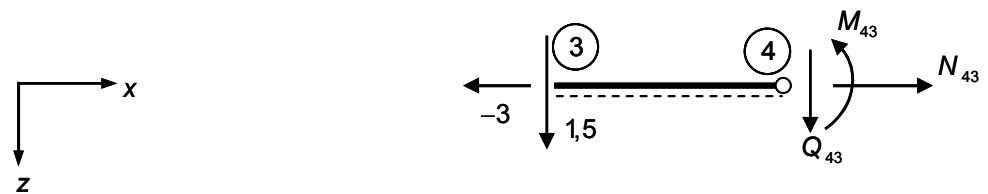


Abb. 5.6-12: Gleichgewicht am Stab (3)-(4)

$$+\uparrow: \quad -Q_{43} - 1,5 = 0 \quad \rightarrow Q_{43} = -1,5 \text{ kN}$$

$$+\rightarrow: \quad N_{43} = -3 \text{ kN}$$

$$+\curvearrowleft: \quad M_{43} + (-1,5) \cdot 2 = 0 \quad \rightarrow M_{43} = -3 \text{ kNm}$$

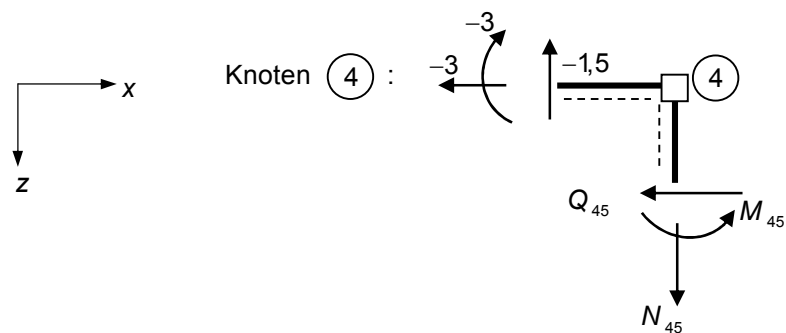


Abb. 5.6-13: Gleichgewicht am Knoten (4)

rechtwinklige Rahmenecke

Querkraft geht in Normalkraft über

$$Q \longrightarrow N$$

Normalkraft geht in Querkraft über

$$N \longrightarrow Q$$

$$+\uparrow: -N_{45} + (-1,5) = 0 \quad \rightarrow N_{45} = -1,5 \text{ kN}$$

$$\rightarrow: -Q_{45} - (-3) = 0 \quad \rightarrow Q_{45} = 3 \text{ kN}$$

$$\overset{+}{\curvearrowleft} 4: M_{45} - (-3) = 0 \quad \rightarrow M_{45} = -3 \text{ kNm}$$

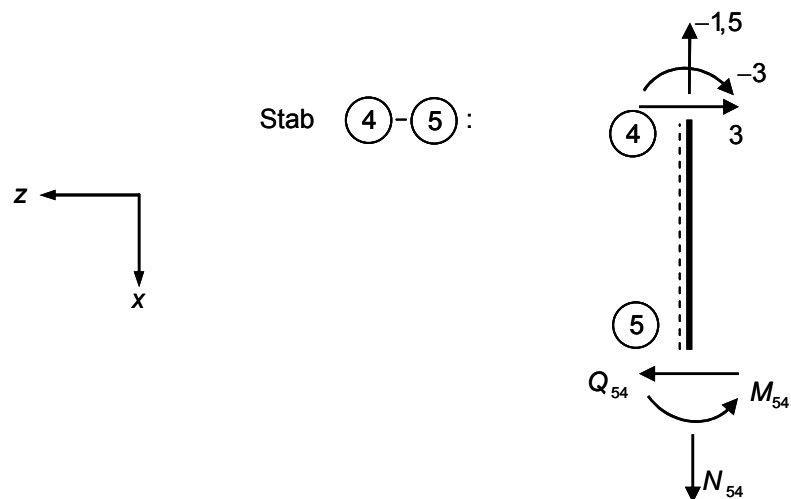


Abb. 5.6-14: Gleichgewicht am Stab (4)-(5)

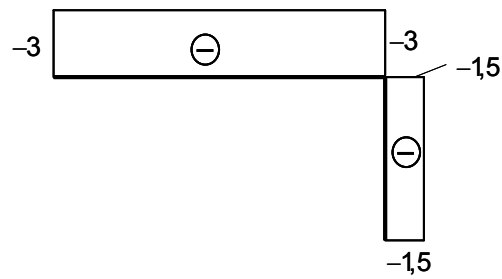
$$+\uparrow: N_{54} + (-1,5) = 0 \quad \rightarrow N_{54} = -1,5 \text{ kN}$$

$$\rightarrow: -Q_{54} + 3 = 0 \quad \rightarrow Q_{54} = 3 \text{ kN}$$

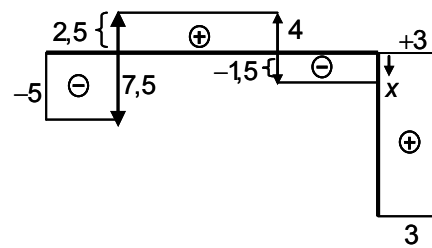
$$\overset{+}{\curvearrowleft} 5: M_{54} - (-3) - (+3) \cdot 3 = 0 \quad \rightarrow M_{54} = 6 \text{ kNm}$$

Schnittkraftverläufe:

N-Verlauf



Q-Verlauf



M-Verlauf

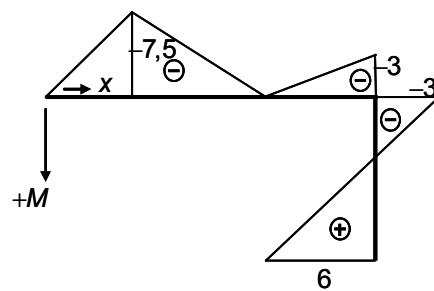


Abb. 5.6-15: Schnittgrößenverläufe

6 Reibung

In den Grenzen der bisherigen Modellbildung von Systemen aus starren Körpern sind reibungsfreie Gleitlager und Gelenke angenommen worden. Die beiden bisher eingeführten Lagertypen (Festlager und Gleitlager) sind Idealisierungen wirklicher mechanischer Systeme. Das eine überträgt beliebig große Kräfte, das andere ist reibungsfrei. Tatsächlich aber sind alle technisch realisierbaren Lager begrenzt in der Aufnahme von Kräften, und selbst in Gleitlagern tritt Reibung auf. Die beiden bisherigen Lageridealisationen werden um eine dritte Modellannahme erweitert, nämlich um die Reibung.

6.1 Haft- und Gleitreibung

In der Kontaktfläche zwischen zwei rauen Körpern - beispielsweise der Gleitfuge eines Lagers - kann aufgrund der Reibung eine Kraft tangential zur Kontaktfläche übertragen werden, wodurch die relative Bewegung zwischen den Körpern behindert wird.

Beispiel: Körper auf einer schiefen Ebene

Das Phänomen der Reibung kann besonders anschaulich an einem Körper auf einer schiefen, rauen Ebene gezeigt werden. Bei einem Neigungswinkel α , dessen Betrag unter einem bestimmten Wert $\alpha_{\max}$ liegt, der von der Beschaffenheit der Reibflächen abhängt, bleibt der Körper in Ruhe. Bei betragsmäßig größerem Neigungswinkel gleitet er ab. In der Gleitfuge, d.h. Kontaktfläche zwischen Körper und Ebene, herrscht eine komplizierte Verteilung der flächenhaften Kontaktkräfte. Zur Vereinfachung der Überlegungen wird im Weiteren nur noch die Resultierende dieser Kontaktflächenkräfte betrachtet, die eine Komponente N senkrecht (normal) zur Gleitfuge (Kontaktfläche) und eine zweite Komponente H in Richtung (tangential) der Gleitfuge hat. Diese Zusammenfassung zur Resultierenden und deren Komponentenerlegung ist an jeder Stelle möglich, an der ein Körper in Reibkontakt mit einem anderen steht. Die Symbole N und H stehen als Abkürzungen für die Begriffe **Normalkraft** und **Haftkraft**.

Systemskizze:

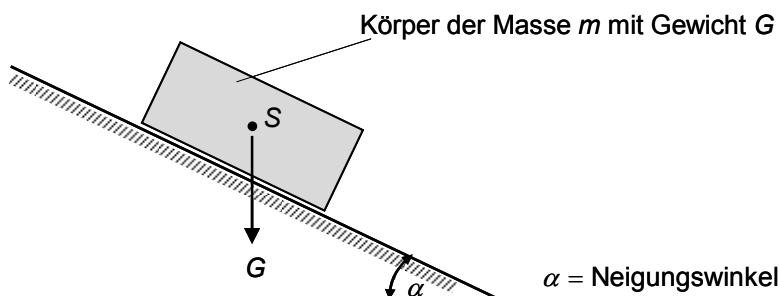
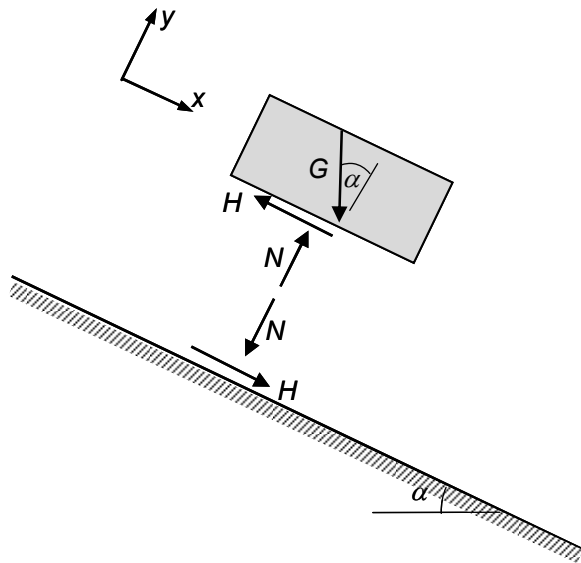


Abb. 6.1-1: Körper auf einer schiefen, rauen Ebene

Freigeschnittener Körper mit Schnittkräften und Gleitebene (Kontaktfläche):



Innere Kräfte in der Kontaktfläche:
 N = Normalkraft $\perp$ zur Kontaktfläche
 H = Haftkraft $\parallel$ zur Kontaktfläche

Abb. 6.1-2: Freigeschnittener Körper und Gleitebene mit inneren Kräften N und H

Kräftegleichgewicht am Körper:

$$\begin{array}{ll} \nearrow \sum F_{iy} = N - G \cdot \cos \alpha = 0 & \text{normal} \\ \searrow \sum F_{ix} = -H + G \cdot \sin \alpha = 0 & \text{tangential} \end{array} \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \nearrow \sum F_{iy} = N - G \cdot \cos \alpha = 0 \\ \searrow \sum F_{ix} = -H + G \cdot \sin \alpha = 0 \end{array}} \right\} \text{zur Gleitfuge}$$

Für den Betrag der maximal übertragbaren Haftkraft H gibt es eine obere Grenze H_0 , so dass gilt:

$$|H| \leq H_0 = G \sin \alpha_0, \quad (6.1.1)$$

bevor der Körper bei einem kritischen Neigungswinkel α_0 ins Gleiten kommt.

Die Erfahrung zeigt, dass der Betrag der maximal übertragbaren Haftkraft H_0 näherungsweise proportional zur Normalkraft N ist.

$$\boxed{|H| \leq H_0 = \mu_0 N} \quad \text{und} \quad N \geq 0, \quad (6.1.2)$$

Den Proportionalitätsfaktor μ_0 bezeichnet man im Zusammenhang mit dieser Reibannahme als **Haftreibungskoeffizient** und nennt die Beziehung das **COULOMBSche Reibmodell**.

Aus dem Kräftegleichgewicht nochmal zur Gleitfuge folgt:

$$N = G \cos \alpha$$

und tangential dazu:

$$H = G \sin \alpha$$

Einsetzen der beiden Gleichungen in Gl. (6.1.2) für positives $H \geq 0$ ergibt:

$$\begin{aligned} G \sin \alpha &\leq \mu_0 G \cos \alpha \\ \Leftrightarrow \quad \mu_0 &\geq \tan \alpha \end{aligned}$$

Für den Fall, dass der Haftreibungskoeffizient größer als der Tangens des Neigungswinkels ist, herrscht Haftreibung und es tritt kein Gleiten ein.

Der Haftreibungskoeffizient μ_0 kann mit dem Neigungswinkel $\alpha = \alpha_0$ dadurch bestimmt werden, dass im Grenzfall $H = H_0$ gerade noch kein Gleiten eintritt.

$$\mu_0 = \tan \alpha_0$$

Wird die maximal übertragbare Haftkraft H_0 überschritten, so tritt Gleiten ein, wobei in der Kontaktfläche die Gleitreibungskraft R der Relativbewegung zwischen Körper und Ebene entgegenwirkt. In der einfachsten Modellannahme nach COULOMB ist die Reibkraft proportional zur Normalkraft N .

$$|R| = \mu N \tag{6.1.3}$$

Darin ist μ die Gleitreibungszahl, die von der Materialpaarung und der Oberflächenbeschaffenheit abhängt.

Materialpaarung	Haftreibungskoeffizient μ_0	Gleitreibungskoeffizient μ
Stahl - Stahl	0,15 - 0,5	0,1 - 0,4
Stahl - Graugruß	0,2	0,1
Stahl - Eis	0,03	0,015
Gummi - Asphalt	0,7 - 0,9	0,5 - 0,8
Ski - Schnee	0,1 - 0,3	0,04 - 0,2

Hinweis:

- Die Haftkraft H wird wie eine Reaktionskraft beim Bearbeiten von Statikaufgaben behandelt.
- Sie muss allerdings die Haftbedingung $|H| \leq H_0 = \mu_0 N$ erfüllen, die eine Ungleichung darstellt und mathematisch durch Fallunterscheidungen gelöst wird.
- Andernfalls tritt Gleiten ein, und die Reibungskraft R ist statt dessen in der Gleitfuge formal in Richtung der relativen Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ zwischen den Körpern anzusetzen.

Für den Reibungskraftvektor $\mathbf{R}$ gilt im dreidimensionalen Fall:

$$\mathbf{R} = -\mu N \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|}$$

Freigeschnittener Starrkörper

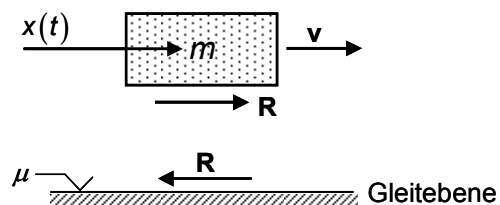


Abb. 6.1.-3: Körper mit Relativgeschwindigkeit $\mathbf{v}$ und tatsächlich wirkender Reibkraft $\mathbf{R}$

Hinweis: Die Reibungskraft $\mathbf{R}$ ist in positiver Koordinatenrichtung $x(t)$ auf den Körper anzutragen.

Im einaxialen Fall gilt für die Reibkraft

$$\boxed{R = -\mu N \operatorname{sign}(v)} \quad \text{mit} \quad \operatorname{sign}(v) = \begin{cases} 1 & \text{für } v > 0 \\ 0 & \text{für } v = 0 \\ -1 & \text{für } v < 0, \end{cases} \quad (6.1.4)$$

wobei v die Relativgeschwindigkeit zwischen Körper und Ebene ist.

Beispiel 1: Eine gewichtslose Leiter unter äußerer Last G ist an eine glatte Wand auf einem rauhen Boden mit Haftreibungskoeffizient μ_0 gelehnt.

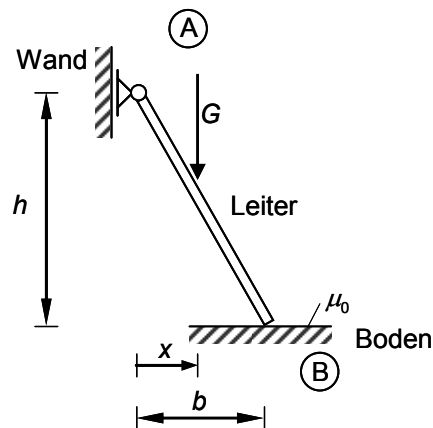


Abb. 6.1-4: Systemskizze

Für welche Entfernung x der Last G von der Wand ist die Haftbedingung verletzt?

In der Praxis bedeutet dies: Wie hoch darf eine Person auf der Leiter steigen, bevor diese verrutscht?

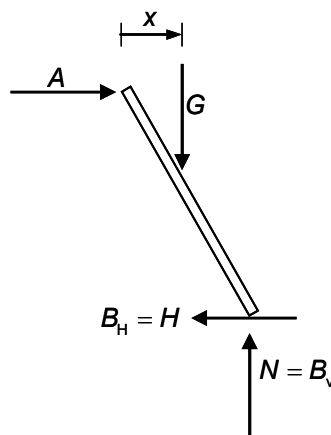


Abb. 6.1-5: Freikörperdiagramm der Leiter mit Reaktionskräften

$$\uparrow \sum F_{iv} = N - G = 0 \quad \Leftrightarrow \quad N = G \quad (6.1.5)$$

$$\curvearrowleft A: \sum M_i = -G x + N b - H h = 0 \quad (6.1.6)$$

Gl. (6.1.5) in Gl. (6.1.6) liefert: $H = G \frac{b-x}{h},$

wobei $0 < x < b$ ist.

Die Haftbedingung lautet: $|H| = \left| G \frac{b-x}{h} \right| \leq \mu_0 N \overset{\text{mit Gl. (6.1.5)}}{=} \mu_0 G$

Daraus ergibt sich für $H = G \frac{b-x}{h} \geq 0$

$$\frac{b-x}{h} \leq \mu_0 \quad \text{und} \quad G \geq 0$$

Entfernung x der Last G von der Wand:

$$x \geq b - \mu_0 h,$$

so dass die Leiter gerade noch nicht gleitet.

6.2 Seilreibung

In der Mechatronik und Antriebstechnik ist die Kenntnis der Seilreibung um eine raue, kreisförmige Scheibe notwendig, um den Riemenantrieb auszulegen (siehe Vorlesung Konstruktionstechnik).

Beispiel aus der Antriebstechnik: Antrieb der Lichtmaschine (Verbraucher) über den Keilriemen durch den Automotor und Einstellung der Vorspannkraft S_0 über die Spannrolle.

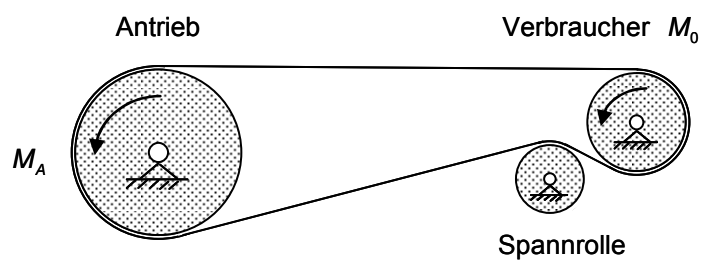


Abb. 6.2-1: Systemskizze des Riementriebs

Ein Seil wird um eine Scheibe geschlungen (Umschlingungswinkel α), auf die ein Drehmoment M_A wirkt. Das Seil sei biegeschlaff (Idealseil).

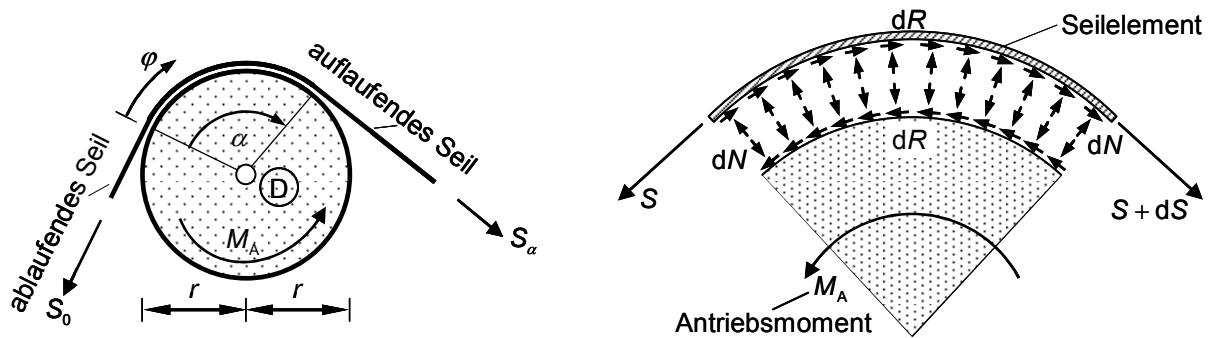


Abb. 6.2-2: Freigeschnittenes Seil mit Rolle

Es gilt $S_\alpha > S_0$, da die Reibungskräfte entlang der Kontaktfläche die Seilkraft von S_α auf S_0 „abbauen“.

Gesucht ist die maximal übertragbare Seilkraft S_α am auflaufenden Ende in Abhängigkeit der Seilkraft S_0 am ablaufenden Seil.

Gleichgewichtsbetrachtung am umlaufenden Seilelement der Länge ds mit Zentriwinkel $d\varphi$:

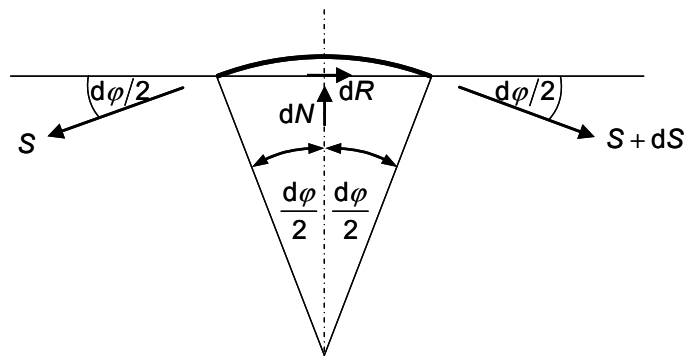


Abb. 6.2-3: Kreisausschnitt des umlaufenden Seiles um die Rolle

Das Kräftegleichgewicht zwischen den Seilkräften S und $S + dS$ sowie der Normalkraft dN und der Reibkraft dR wird aufgestellt.

Gleichgewichtsbedingungen in horizontaler und vertikaler Richtung:

$$\rightarrow^+ : (S + dS) \cos \frac{d\varphi}{2} + dR - S \cos \frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (6.2.1)$$

$$\uparrow^+ : dN - S \sin \frac{d\varphi}{2} - (S + dS) \sin \frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (6.2.2)$$

Für kleine Winkel $d\varphi$ gilt:

$$\cos \frac{d\varphi}{2} \approx 1$$

$$\sin \frac{d\varphi}{2} \approx \frac{d\varphi}{2}$$

Aus (6.2.1) und (6.2.2):

$$(S + dS) + dR - S = 0 \quad (6.2.3)$$

$$dN - S \frac{d\varphi}{2} - (S + dS) \frac{d\varphi}{2} = 0 \quad (6.2.4)$$

COULOMBSches Reibmodell:

$$dR = -\mu dN \quad (6.2.5)$$

Der Term $dS \cdot \frac{d\varphi}{2}$ ist eine infinitesimal kleine Größe zweiter Ordnung und gegenüber dem Term $S \cdot \frac{d\varphi}{2}$ vernachlässigbar.

Aus (6.2.3), (6.2.4) und (6.2.5) folgt:

$$dS = -dR = \mu dN \quad (6.2.6)$$

und

$$dN = S \cdot d\varphi \quad (6.2.7)$$

(6.2.7) in (6.2.6) liefert dann:

$$dS = \mu \cdot S d\varphi \quad (6.2.8)$$

$$\frac{dS}{S} = \mu d\varphi \quad (6.2.9)$$

Integrieren:

$$\int_{S_0}^{S_\alpha} \frac{dS}{S} = \int_{\varphi=0}^{\varphi=\alpha} \mu d\varphi \quad (6.2.10)$$

$$\ln S \Big|_{S_0}^{S_\alpha} = \mu \varphi \Big|_0^\alpha \quad (6.2.11)$$

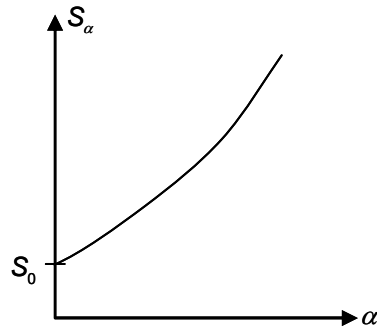


Abb. 6.2-4: Maximale übertragbare Seilkraft S_α in Abhängigkeit des Umschlingungswinkels α

$$\ln|S_\alpha| - \ln|S_0| = \mu(\alpha - 0) \quad (6.2.12)$$

$$\ln \frac{S_\alpha}{S_0} = \mu \alpha \quad (6.2.13)$$

Seilkraft am auflaufenden Ende im Fall des Gleitens:

$$S_\alpha = S_0 e^{\mu \alpha} \quad (6.2.14)$$

Hinweis: α ist im Bogenmaß einzusetzen!

Das Antriebsmoment M_A in Abhängigkeit der Seilkräfte ergibt sich aus dem Momentengleichgewicht an der Rolle um deren Drehpunkt $\textcircled{D}$ – siehe Abb. 6.2-2:

$$\overset{\curvearrowleft}{D}: \sum M_{iD} = M_A + S_0 \cdot r - S_\alpha \cdot r = 0 \quad (6.2.15)$$

Die sich tatsächlich einstellende Seilkraft $\bar{S}_\alpha$ am auflaufenden Ende infolge des Antriebsmoments M_A bei Haftreibung muss kleiner gleich der maximal übertragbaren Seilkraft S_α im Grenzfall des Gleitens am ablaufenden Ende sein:

$$\bar{S}_\alpha := \frac{M_A}{r} + S_0 \leq S_0 e^{\mu_0 \alpha} = S_\alpha \quad (6.2.16)$$

Für die Seilkraft S_α in Gl. (6.2.15) wird die rechte Seite von Gl. (6.2.14) eingesetzt:

$$\frac{M_A}{r} + S_0 - S_0 e^{\mu \alpha} = 0$$

Zur Übertragung des Antriebsmoments M_A ergibt sich daraus die erforderliche Vorspannkraft S_0^{erf} im Haftfall:

$$S_0^{\text{erf}} \geq \frac{1}{e^{\mu_0 \alpha} - 1} \frac{M_A}{r}$$